

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Abderrahmane MIRA de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire Présenté pour l'Obtention du Diplôme de Master
en Mathématiques Appliquées

Spécialité : Mathématiques financières

*Résolution d'un Problème Stochastique Fractionnaire : cas pratique bourse
d'Alger*

Présenté par :
Kamilia Felfoul
Dyhia Haddad

Sous la direction de : **Dr B. Takhedmit**
Et de : **Dr L. Abbaci**

Défendu le 29/06/2025, devant le jury composé de :

Mme S. Amroun	M.C. classe A	Présidente du jury	UAMB – Béjaïa.
Mr S. Maiou	Doctorant	Examineur	UAMB – Béjaïa.
Mme L. Djeroud	M.C. classe A	Examinatrice	UAMB – Béjaïa.
Mme. B. Barache	M.C. classe A	Examinatrice	UAMB – Béjaïa.

Année Universitaire 2024-2025

Remerciements

Nous prenons la plume pour exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à l'occasion de la finalisation de notre projet de fin d'études. En tout premier lieu, nous remercions le bon Dieu, tout-puissant, de nous avoir donné la force de surmonter les défis et l'audace de dépasser toutes les difficultés.

Ce parcours a été une aventure intellectuelle passionnante et enrichissante, et nous souhaitons exprimer notre reconnaissance envers toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation.

Nous tenons à remercier nos encadrantes, Dr. BAYA TAKHEDMIT et Dr. Liela ABACI, pour leurs conseils et leurs orientations tout au long de ce travail. Nous souhaitons également exprimer notre gratitude envers Dr. Lamia DJEROUD pour son aide précieuse.

Nous remercions tous les enseignants qui ont participé à notre formation durant notre parcours. Nous souhaitons aussi exprimer notre gratitude envers nos amis et nos familles pour leur soutien inestimable dans cette aventure académique.

Enfin, nous tenons à remercier tous les membres du jury qui ont accepté de juger notre travail et pour l'intérêt qu'ils lui ont porté.

Avec tous nos sincères remerciements.

Table des matières

Remerciments	1
Liste d'abriviations et notations	6
Introduction générale	7
1 Présentation de la Bourse d'Alger	8
Introduction	8
1.1 Terminologie financières	9
1.2 Société de Gestion de la Bourse des Valeurs (SGBV)	10
1.2.1 Les fondateurs de la SGBV	10
1.2.2 Les actionnaires de la SGBV	10
1.2.3 mission de la SGBV	11
1.2.4 Sociétés cotées de la SGBV	11
1.2.5 Conditions d'admission des titres à la Bourse d'Alger	13
1.2.6 Avantages d'introduction en bourse	14
1.2.7 Les risques liés à l'introduction en bourse	15
2 Notions fondamentales et simulation de Monte Carlo	16
Introduction	16
2.1 Préliminaires	17
2.1.1 Espace de probabilité	17
2.1.2 Variables aléatoires	17
2.1.3 Espérance mathématique	17
2.1.4 Variance	18
2.1.5 Lois de probabilité	19
2.1.6 Tests de normalité	22
2.2 Méthode de noyau	24
2.2.1 Formulation mathématique de l'estimateur de densité par noyau	24
2.2.2 Exemple de noyau	24
2.2.3 Choix de paramètre de lissage h	24
2.3 Simulation de Monte Carlo	25
3 Programmation stochastique et fractionnaire	27
Introduction	27
3.1 Programmation linéaire	28
3.1.1 Forme générale	28
3.1.2 Forme canonique	28
3.1.3 Forme standard	28
3.1.4 Hypothèses des programmes linéaires	28
3.2 Programmation stochastique linéaire	29
3.2.1 Forme générale d'un problème stochastique linéaire	29
3.3 Programmation fractionnaire linéaire	29
3.3.1 Propriétés fondamentales de la PLF	31
3.3.2 Applications de la Programmation Linéaire Fractionnaire	31
3.3.3 Quelques exemples d'applications de la programmation fractionnaire	32
3.4 Méthodes de résolution	33
3.4.1 Transformation d'un problème stochastique en un problème déterministe	33

3.4.2	Méthodes de résolution des problèmes linéaires	37
3.4.3	Méthodes de résolution des problèmes fractionnaires linéaires	40
	Conclusion	43
4	Exemple d'application	44
	Introduction	44
4.1	Logiciels utilisés	45
4.1.1	Logiciel Excel	45
4.1.2	Logiciel R	45
4.1.3	Logiciel LINGO	45
4.1.4	Logiciel Matlab	45
4.2	Problématique	46
4.3	Modélisation mathématique du problème	46
4.3.1	Calcul des paramètres du modèle	47
4.3.2	Étude statistique	49
4.4	Résolution	54
	Conclusion générale	67

Table des figures

4.1	Histogramme des rendements – Biopharm	49
4.2	Histogramme des rendements – Alliances Assurances	50
4.3	Comparaison des densités – Biopharm	51
4.4	Comparaison des densités – Alliances Assurances	51
4.5	Densité estimée par noyau – Biopharm	53
4.6	Densité estimée par noyau – Alliances Assurances	53
4.7	Solution obtenue sous LINGO – Cas moyenne arithmétique	56
4.8	Solution obtenue sous LINGO – Cas moyenne par noyau	57
4.9	Solution obtenue sous LINGO – Cas moyenne arithmétique	59
4.10	Solution obtenue sous LINGO – Cas moyenne par noyau	61
4.11	Visualisation 3D de l'espérance estimée de $F(x)$ par simulation	65
4.12	Organigramme de la simulation de Monte Carlo	72

Liste des tableaux

1.1	Valeurs cotées à la Bourse d'Alger	11
3.1	Tableau général du simplexe	39
4.1	Paramètres calculés pour Alliances Assurances (ALL)	48
4.2	Paramètres calculés pour Biopharm (BIO)	48
4.3	Résultats des tests de normalité pour les deux actifs	50
4.4	Comparaison des lois d'ajustement pour les deux titres	52
4.5	Comparaison des deux méthodes d'estimation des moyennes	55
4.6	Résultats de la résolution directe pour les deux types de moyenne	57
4.7	Résultats après transformation de Charnes-Cooper	62
4.8	Comparaison entre les méthodes de résolution	62
4.9	Comparaison des résultats obtenus par les différentes méthodes	64

Liste d'abriviations et notations

Abréviations

SGBV	Société de Gestion de la Bourse des Valeurs
PL	Programmation Linéaire
PFL	Programmation Fractionnaire Linéaire
MC	Monte Carlo
PDF	Probability Density Function (fonction de densité de probabilité)
SRB	Solution Réalisable de Base (méthode du simplexe)
KDE	Kernel Density Estimation (estimation de densité par noyau)
R	Langage de programmation statistique
LINGO	Logiciel de résolution de modèles d'optimisation
PSO	Particle Swarm Optimization (Optimisation par essaim de particules)
AG	Algorithme génétique
RS	Recuit simulé
RT	Recherche tabou

Notations mathématiques

x	Vecteur des variables de décision
x_1, x_2	Parts investies dans Biopharm et Alliances Assurances
R_1, R_2	Rendements aléatoires des deux actifs
$F(x)$	Fonction objectif fractionnaire du rendement
θ, ξ	Variables aléatoires représentant l'incertitude
$q^T x + q_0$	Dénominateur de la fonction fractionnaire
z	Inverse du dénominateur (transformation de Charnes-Cooper)
$y = zx$	Variable transformée selon Charnes-Cooper
\bar{c}	Espérance du vecteur coût $c(\xi)$
μ, σ	Moyenne et écart-type des rendements
$\sigma^2(\cdot)$	Variance
a_{ij}	Coefficient de la matrice des contraintes
A, b, c	Données du programme linéaire (matrice, second membre, objectif)
π_s	Probabilité du scénario s
$E[F(x)]$	Espérance empirique de la fonction objectif
$\max_{a \in U} a^T x$	Formulation de l'optimisation robuste
E_j	Coût réduit dans le simplexe
u^T	Vecteur des multiplicateurs duals
y_i	Variables d'écart introduites pour les égalités
N	Nombre de simulations Monte Carlo
$r1_data, r2_data$	Données historiques des rendements
f_i, ξ_i	Densité estimée et support associé (KDE)

Introduction générale

L'optimisation constitue un pilier fondamental des sciences de la décision, qu'il s'agisse de gestion de portefeuille, de logistique ou encore de planification des ressources. Dans un monde où l'incertitude est omniprésente, notamment sur les marchés financiers, les décisions doivent être prises dans des conditions incomplètes et parfois instables. La modélisation stochastique, qui consiste à intégrer explicitement des variables aléatoires dans un problème d'optimisation, s'impose alors comme une démarche incontournable pour construire des modèles plus réalistes.

Le présent mémoire s'inscrit dans ce cadre. Il traite d'un problème réel d'allocation de capital dans un environnement incertain, en formulant un modèle d'optimisation stochastique dont l'objectif est de maximiser un rendement relatif, exprimé sous forme fractionnaire. Ce type de modèle, connu sous le nom de programmation stochastique fractionnaire-linéaire, combine deux dimensions complexes : l'incertitude sur les données et la non-linéarité du critère objectif. La forme fractionnaire permet de représenter des rapports significatifs en finance, comme le rendement net, le coût par unité de bénéfice ou encore l'efficacité ajustée au risque. De nombreux travaux ont été consacrés à ces modèles, notamment Charnes et Cooper (1962) [13] pour la transformation en modèle linéaire équivalent, Helmy et al. (2015) [29] pour l'intégration de variables aléatoires, ou encore Kall et Wallace (1994) [31] pour les fondements de la programmation stochastique.

L'objectif principal de ce travail est de modéliser un problème d'investissement en présence d'incertitude sur les rendements boursiers, en proposant plusieurs approches de résolution. Nous avons appliqué notre démarche au contexte algérien, en utilisant des données issues de la Bourse d'Alger [51]. Deux actions cotées ont été sélectionnées comme actifs d'investissement, et leurs rendements ont été modélisés à partir de données historiques intégrant les dividendes. Les paramètres stochastiques du modèle ont été estimés de deux manières : d'abord par la moyenne arithmétique [48], puis par la méthode d'estimation de densité par noyau (KDE) [1, 15], une approche non paramétrique qui permet de capturer la forme réelle de la distribution sans supposer de loi particulière.

Après transformation du modèle fractionnaire en programme linéaire via la méthode de Charnes et Cooper [13, 14], nous avons résolu les versions déterministes par des méthodes exactes. En parallèle, une simulation de Monte Carlo [46] a été mise en œuvre afin d'estimer empiriquement l'espérance de la fonction objectif sur l'ensemble des couples admissibles (x_1, x_2) , ce qui permet de comparer les performances des solutions obtenues.

Ce mémoire est structuré comme suit :

- Le chapitre 1 introduit le contexte financier, les définitions fondamentales et le cadre réglementaire de la Bourse d'Alger.
- Le chapitre 2 présente les outils statistiques et numériques nécessaires à la modélisation des incertitudes, notamment les notions de variables aléatoires, la méthode KDE et la simulation de Monte Carlo.
- Le chapitre 3 est consacré aux modèles mathématiques utilisés : programmation linéaire, programmation stochastique, programmation fractionnaire-linéaire, ainsi que les techniques de transformation en modèles déterministes et les méthodes de résolution (simplexe, Charnes-Cooper, simulation).
- Le chapitre 4 propose une application concrète au cas d'un portefeuille à deux actifs, avec la modélisation complète, la résolution via plusieurs méthodes, et une analyse comparative des résultats.

À travers ce travail, nous cherchons à démontrer la pertinence des modèles d'optimisation stochastique fractionnaire dans la prise de décision financière, en intégrant à la fois la rigueur mathématique et les spécificités du marché algérien.

1

Présentation de la Bourse d'Alger

La Société de Gestion de la Bourse des Valeurs (SGBV), créée en 1997, est l'organisme public chargé d'organiser, de surveiller et d'assurer le bon fonctionnement du marché boursier en Algérie. Elle joue un rôle central dans le développement du marché financier, en facilitant la rencontre entre les entreprises à la recherche de financement et les investisseurs.

Depuis 2020, la SGBV a lancé un processus de digitalisation afin d'adapter ses services aux évolutions technologiques. Cette modernisation vise à renforcer la transparence, la sécurité des opérations et à améliorer l'accès à l'information pour tous les acteurs du marché.

Dans le contexte actuel de globalisation économique, le bon fonctionnement des marchés financiers devient un enjeu essentiel pour le développement économique d'un pays. C'est pourquoi il est important de comprendre les bases de la finance et le rôle joué par des institutions comme la SGBV.

1.1 Terminologie financières

Définition 1 (Actif Financier) [37] : Un actif est un contrat généralement négociable sur un marché financier, produisant à son propriétaire des revenus ou un gain en capital. Il existe de très nombreuses sortes d'actifs, comme les actions et les obligations.

Définition 2 (Obligation) [16] : L'obligation est un titre financier correspondant à un emprunt pendant un temps fixe dont le risque de défaut (default risk) est supposé inexistant lorsque l'obligation est émise par l'état. Celle-ci est échangée sur les marchés obligataires. Elle est vendue sur le marché primaire à un prix proche du montant nominal (la somme empruntée), puis elle est échangée sur le marché secondaire à un prix qui fluctue. Une obligation est déterminée par :

- Une durée .
- Un taux d'intérêt.

Définition 3 (Action) [16] : Une action est un titre de propriété d'une entreprise qui n'est pas remboursable.

- Le prix d'une action est défini par sa cotation en bourse. Une action peut être vendue ou achetée à n'importe quel moment (pendant les heures d'ouverture de la bourse) .
- Le détenteur d'une action devient un associé, proportionnellement au nombre de titres qu'il détient. De plus, l'actionnaire a des droits sur :
 - Le management .
 - Les bénéfices .
 - L'actif social .
- Les émetteurs des actions sont des entreprises. L'émission d'actions permet de recouvrir son investissement initial et ses bénéfices ;
- Une action est un produit très volatil, lié à la fois aux performances de l'entreprise et à la situation du marché. Sa cotation est constamment réévaluée en fonction de l'offre et de la demande sur les marchés financiers.

Définition 4 (Portefeuille Financier) [37] : Le portefeuille est une combinaison d'un ensemble de titres (actifs) financiers, détenus par un investisseur (actions, obligations, produits dérivés, matières premières...). Cette combinaison se fait en des proportions différentes afin d'avoir un portefeuille bien diversifié, permettant ainsi de réaliser un rendement espéré tout en minimisant le risque.

Mathématiquement, un portefeuille P est un vecteur de proportions x_i , représentant la proportion du capital investi dans chaque titre, avec :

$$x_i = \frac{\text{La part du capital investi en } i}{\text{capital total}}$$

Définition 5 (Risque Financier) [37] : Le risque financier est défini comme étant lié à l'incertitude et d'autre part, causé par les écarts non attendus des résultats par rapport à l'objectif attendu. Autrement dit, la notion de risque en finance est reliée à la notion d'incertitude. En effet, le risque d'un actif financier pour un investisseur, peut être défini comme l'incertitude qui existe quant à la valeur de cet actif à une date future.

Définition 6 (Coût) [37] : Le coût est la mesure de la dépense ou de l'appauvrissement d'un agent économique, associé à un événement ou une action de nature économique, et exprimé généralement sous forme d'un prix ou d'une valeur monétaire.

Définition 7 (Bénéfice) [37] : Le bénéfice ou le profit est la résultante d'une constatation monétaire pour une période donnée, soit la différence du flux de recettes et le flux de dépenses.

Définition 8 (Rentabilité) [37] : Le taux de rentabilité ou le rendement est une notion fondamentale en finance. Il apparaît dans l'expression de la plupart des modèles de gestion de portefeuille. La rentabilité mesure l'appréciation (ou dépréciation) relative de la valeur d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs entre deux instants successifs.

Définition 9 (Dividende) [17] : *Le dividende est une distribution de bénéfices qu'une entreprise verse à ses actionnaires. Il s'agit d'un paiement en argent ou en actions que les actionnaires reçoivent en fonction de leur participation dans l'entreprise. Le montant d'un dividende dépend de la politique de distribution de bénéfices de l'entreprise, de son bénéfice net, de ses flux de trésorerie disponibles et de ses besoins de financement pour soutenir sa croissance future .*

Définition 10 (Marché financier) [37] : *Les marchés financiers sont des lieux fictifs, où se rencontrent les agents économiques (personnes, sociétés privées et institutions publiques) ayant un excédent de capitaux (investisseurs) et ceux ayant besoin de financement, pour négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande .*

En Algérie, le principal marché financier est géré par la Société de Gestion de la Bourse des Valeurs (SGBV), également appelée Bourse d'Alger, sur laquelle reposent les données utilisées dans notre cas pratique dans ce que suit nous allons la présenter en s'appuyant sur les informations disponibles sur son site officiel [51] .

1.2 Société de Gestion de la Bourse des Valeurs (SGBV)

La Société de Gestion de la Bourse des Valeurs , sous la forme abrégée SGBV, sise au 27 Bd Colonel Amirouche Alger, est une société par actions au capital social de 485 200 000, 00 DA, créée par le décret législatif n°93-10 du 23 mai 1993 et constituée le 25 mai 1997 ; elle constitue un cadre organisé et réglementé au service des IOB en tant que professionnels pour leur permettre d'exercer leurs missions conformément aux lois et règlements en vigueur. Depuis sa création, elle s'est attelée à mettre en place les dispositifs opérationnels et techniques nécessaires aux transactions sur les valeurs mobilières admises en Bourse.

1.2.1 Les fondateurs de la SGBV

La Société de Gestion de la Bourse des Valeurs (SGBV) a été créée avec le soutien d'institutions financières publiques et privées. Ces fondateurs ont joué un rôle essentiel dans la mise en place d'un cadre institutionnel destiné à structurer le marché boursier en Algérie. ci-dessous les principales banques et compagnies d'assurances ayant participé à la création de la SGBV :

- Les banques nationales : BDL, BEA, BADR, CPA, BNA, CNEP.
- Les compagnies d'assurance nationales : CAAR, CCR, SAA, CAAT , CNMA.
- Une banque privée : Union Bank .

1.2.2 Les actionnaires de la SGBV

Le capital de la SGBV est aujourd'hui détenu par plusieurs institutions financières nationales et étrangères. Ces actionnaires reflètent la diversité du secteur bancaire algérien, et participent activement au fonctionnement et à l'évolution du marché boursier national

- Banque de Développement Local (BDL).
- Banque Extérieure d'Algérie (BEA).
- Banque de l'Agriculture et du Développement Rural (BADR).
- Crédit Populaire d'Algérie (CPA).
- Banque Nationale d'Algérie (BNA).
- Caisse Nationale d'Epargne et de Prévoyance (CNEP Banque).
- BNP PARISBAS El Djazair.
- Société Générale Algérie .
- Tell Markets.
- Al Baraka Banque Algérie.
- Al Salam Bank Algeria.

1.2.3 mission de la SGBV

La SGBV prend en charge les activités suivantes :

- l'organisation pratique de l'introduction en Bourse des valeurs mobilières ;
- l'organisation matérielle des séances de Bourse et la gestion du système de négociation et de cotation.
- la publication d'informations relatives aux transactions en Bourse et l'édition d'un Bulletin Officiel de la Cote (BOC).

Les missions de la société sont exercées sous le contrôle de la Commission d'Organisation et de Surveillance des Opérations de Bourse (COSOB).

1.2.4 Sociétés cotées de la SGBV

Les sociétés cotées sont des entreprises dont les actions sont échangées en bourse. Elles doivent respecter certaines règles de transparence et permettent aux investisseurs d'acheter une part de leur capital. Le tableau ci-dessous présente les principales caractéristiques des sociétés actuellement cotées à la Bourse d'Alger : leur nom, leur secteur d'activité, la valeur nominale des actions (leur prix fixé au départ) et le nombre total d'actions mises sur le marché.

Code Bourse	Libellé Valeur	Secteur/Catégorie	Valeur Nominale (DA)	Nombre d'actions
ALL	ALLIANCE ASSURANCES	ASSURANCE	380	9 287 217
AUR	EGH El Aurassi	HOTELLERIE	250	6 000 000
SAI	SAIDAL	PHARMACEUTIQUE	250	10 000 000
BIO	BIOPHARM	PHARMACEUTIQUE	200	25 521 875
CPA	CREDIT POPULAIRE D'ALGERIE	BANQUE	1000	200 000 000
BDL	BANQUE DE DEVELOPPEMENT LOCAL	Banque	1000	147 400 000

TABLE 1.1 – Valeurs cotées à la Bourse d'Alger

Biopharm

Biopharm SPA est un groupe présent dans les différents métiers de l'industrie pharmaceutique, créé en 1991, elle a réalisé en 2014, un chiffre d'affaires consolidé de 49 milliards de dinars représentant 13% du volume du marché du médicament, le groupe s'est développé de façon continue au cours des 20 dernières années, à travers l'amélioration des standards de qualité de son outil de production, de renforcement de son réseau de distribution.

Biopharm poursuit aujourd'hui son évolution en ouvrant son capital en bourse, et en offrant la possibilité à l'Epargne Nationale Algérienne de participer aux opportunités de croissance du secteur pharmaceutique Algérien, en investissant dans une entreprise qui est aujourd'hui bien positionnée pour poursuivre son développement de façon performante.

Alliance Assurances

Alliance Assurances est une Société Par Actions au capital initial de 500 millions DA créée en juillet 2005 par un groupe d'investisseurs nationaux. Le capital de la compagnie a été porté à 800 millions DA au courant de l'année 2009. L'année 2010 a vu ce même capital porté à 2,2 milliards DA pour l'activité Assurances Dommages. Cette augmentation de capital s'est faite par appel public à l'épargne et a permis à la compagnie de se mettre en conformité avec les dispositions du décret exécutif 09-375 du 16/11/2009 modifiant et complétant le décret exécutif 95-344 du 30/10/1995 relatif au capital minimum des sociétés d'assurances.

La Banque de Développement Local (BDL)

La BDL fondée par décret n°85/85 du 30 avril 1985, est une institution bancaire d'une solide réputation, bénéficiant d'une expertise reconnue dans le financement des petites et moyennes entreprises (PME). Son réseau étendu, composé de nombreuses agences à travers le territoire national, lui confère une présence notable.

Dans le cadre de sa stratégie de développement, la BDL augmente son capital social à hauteur de 30% par appel public à l'épargne via une opération d'offre publique à prix fixe de 44 200 000 actions, au prix de 1 400,00 DA par action. Cette introduction en bourse représente une étape décisive pour la BDL et s'inscrit dans la modernisation du système financier algérien, tel que décidé par les pouvoirs publics.

En mars 2025 : Réunissant les conditions d'admission prévues par le règlement général de la bourse d'Alger, le titre de capital BDL a été introduit par la procédure d'offre à prix fixe à la cote officielle le 13 mars 2025. Le cours d'introduction était de 1400 DA.

Le Crédit Populaire d'Algérie (CPA)

est une Banque universelle créée par l'Ordonnance n° 66-366 du 29 décembre 1966. Agréé en tant que Banque par la Banque d'Algérie (BA) suivant la Décision de n° 07-02 du 06 avril 1997.

Le CPA active dans le secteur bancaire, fortement réglementé, sous la supervision de la BA. Le CPA est une Institution bancaire dotée d'un capital social de 200 milliards de DA et qui dispose d'une expertise reconnue notamment dans l'accompagnement des opérateurs économiques à travers un large réseau commercial composé de 161 agences, 20 espaces digitaux et 98 guichets de finances islamiques répartis sur l'ensemble du territoire national.

Par ailleurs, la Banque dispose d'un capital humain d'une qualité appréciable dont l'encadrement de niveau universitaire représente 74% de son effectif. Depuis sa création, la Banque a cumulé un capital expérience et dispose d'une diversification sectorielle de ses activités caractérisées par un portefeuille engagements qui couvre divers secteurs d'activités (Industrie, hôtellerie et tourisme, les services, le BTPH, le commerce, la santé, etc. . .).

En mars 2024 : Réunissant les conditions d'admission prévues par le règlement général de la bourse d'Alger, le titre de capital CPA a été introduit par la procédure d'offre à prix fixe à la cote officielle le 21 mars 2024, les négociations sur les actions CPA ont débuter le mardi 26 mars 2024. Le cours d'introduction était de 2300 DA.

EGH El Aurassi

L'établissement El Aurassi classé 5 étoiles a été inauguré le 2 mai 1975, est placé sous la tutelle du ministère du tourisme et de la culture. Ce dernier assurera sa gestion à travers la Société Nationale du Tourisme et de l'Hôtellerie (SONATOUR) jusqu'en 1977, puis par la Société Algérienne du Tourisme et de l'Hôtellerie (ALTOUR) jusqu'en 1979, et enfin par l'Office national des Congrès et des conférences (ONCC) jusqu'en 1983. En cette même année, et en faveur d'une restructuration organique, l'hôtel est érigé en entreprise socialiste et l'Entreprise de Gestion Hôtelière (EGH) fut créée (Décret n° 83-226 du 2 avril 1983).

Le 12 février 1991, l'hôtel change de statut juridique et devient une Entreprise Publique Economique (EPE), Société Par Actions (SPA), au capital social de 40 millions de dinars. Sa dénomination sociale devient alors SPA EGH El Aurassi

En 1995, l'hôtel passe sous l'égide de Holding Public Service (HPS)¹, qui en vertu de l'ordonnance 95-25 relative à la gestion des capitaux marchands de l'Etat, en devient l'unique actionnaire.

Par ailleurs, et conformément aux orientations des pouvoirs publics tendant à un désengagement total de l'Etat, à travers les différents textes législatifs et réglementaires portants sur la privatisation totale ou partielle, l'entreprise El Aurassi a été retenue par décision du conseil national de participation de l'Etat en février 1998 pour son introduction en Bourse à hauteur de 20% de son capital social à diffuser dans le public.

En Juin 1999, l'EGH EL AURASSI a procédé à l'ouverture de son capital par Offre Publique de Vente. Le montant de l'OPV représentait 480 millions de DZD, soit 20

Le 14 Février 2000 : Réunissant les conditions d'admission prévues par le règlement général de la bourse, le titre de capital EGH EL AURASSI a été introduit à la cote officielle. (Le cours d'introduction était de 400 DA).

Saidal

La Pharmacie Centrale Algérienne a été créée en 1969 par une ordonnance présidentielle lui confiant la mission d'assurer le monopole de l'État sur l'importation, la fabrication et la commercialisation des Produits Pharmaceutiques à usage humain. Dans le cadre de sa mission de production, elle a créé en 1971 l'unité de production d'El Harrach et racheté en deux étapes (1971 puis 1975) les unités de BIOTIC et PHARMAL.

A la suite de la restructuration de la Pharmacie Centrale Algérienne, sa branche production fut érigée en Entreprise Nationale de Production Pharmaceutique par le décret 82/161, promulgué en avril 1982.

L'entreprise Nationale de Production Pharmaceutique avait pour mission d'assurer le monopole de la production et de la distribution des médicaments, produits assimilés et réactifs, et pour objectif d'approvisionner de manière suffisante et régulière le marché algérien.

Elle changea de dénomination en 1985 pour devenir SAIDAL. En 1989, suite à la mise en œuvre des réformes économiques, SAIDAL devint une entreprise publique économique dotée de l'autonomie de gestion et fut choisie, parmi les premières entreprises nationales, pour acquérir le statut de société par actions.

En 1993, des changements ont été apportés aux statuts de l'Entreprise lui permettant de participer à toutes les opérations industrielles ou commerciales pouvant se rattacher à l'objet social par voie de création de sociétés nouvelles ou de filiales.

En Février 1999 : GROUPE SAIDAL a procédé à l'ouverture de son capital par Offre Publique de Vente . Le montant de l'OPV portait sur 20% du capital social du groupe, soit 500 millions de DZD, répartis en 02 millions d'actions.

En Septembre 1999 : Réunissant les conditions d'admission prévues par le règlement général de la bourse, le titre de capital SAIDAL a été introduit à la cote officielle . (Le cours d'introduction était de 800 DA)

1.2.5 Conditions d'admission des titres à la Bourse d'Alger

L'admission d'une entreprise ou d'un titre financier à la Bourse d'Alger est soumise à un ensemble de critères . Ces conditions visent à garantir un minimum de transparence, de stabilité financière et de diffusion des titres auprès du public ou des investisseurs professionnels.

Compartiment principal

(titres de capital – grandes entreprises)

- La société doit être une Société par Actions (SPA).
- Capitalisation minimale : 5 milliards de dinars (DA).
- Titres diffusés au public : minimum 1 milliard DA, répartis entre au moins 150 actionnaires.
- Publication des états financiers certifiés des trois derniers exercices.
- Réalisation de bénéfices lors du dernier exercice .

Compartiment de croissance (PME)

- La société doit être une SPA.
- Pas de condition de capitalisation minimale.
- Titres diffusés : au moins 10 millions DA, auprès de 50 actionnaires ou 3 investisseurs professionnels.
- Obligation de présenter un rapport d'évaluation.
- Obligation de désigner un promoteur en bourse pour 5 ans.
- Signature d'une convention d'accompagnement d'au moins un an avec le promoteur.

Marché des titres de créances

- SPA (société par actions) obligatoire.
- Compartiment premium : émetteurs publics ou entreprises avec encours \geq 1 milliard DA.
- Compartiment émergent : entreprises avec encours $<$ 1 milliard DA.
- Promoteur en bourse obligatoire pour le compartiment émergent.
- La Commission peut exiger une garantie financière ou une notation.

Marché des OPC

(Organismes de Placement Collectif)

- Dépôt d'une demande d'admission avec prospectus d'information visé par la commission.
- Fourniture des statuts, actes constitutifs et documents réglementaires.
- Obligation de désigner un teneur de marché pour assurer la liquidité.

Marché des investisseurs professionnels

- Réservé aux investisseurs institutionnels et qualifiés.
- Aucune condition de capitalisation, d'encours ou de diffusion requise.

Marché des valeurs du Trésor

- Réservé aux obligations assimilables du Trésor.
- Négociation effectuée uniquement par des spécialistes en valeurs du Trésor.

1.2.6 Avantages d'introduction en bourse

L'introduction en bourse présente plusieurs avantages pour une entreprise :

- Lever des fonds pour grandir : La bourse permet à l'entreprise d'obtenir de l'argent pour financer ses projets (acheter une autre entreprise, produire plus, rembourser des dettes).
- Diversifier les sources de financement : Elle n'est plus obligée de dépendre uniquement des banques. La bourse offre d'autres moyens de financement, tout en gardant le contrôle de l'entreprise.
- Élargir l'actionariat : L'entreprise peut accueillir de nouveaux investisseurs, ou permettre à certains de sortir du capital sans déséquilibrer la structure.
- Améliorer la notoriété : Être cotée en bourse améliore l'image de l'entreprise et renforce sa crédibilité auprès des clients, des partenaires et des investisseurs, en Algérie et à l'international.

En plus de ces avantages directs, l'introduction en bourse apporte d'autres opportunités :

- Valoriser les ressources humaines : Les employés peuvent devenir actionnaires, ce qui les motive à s'investir davantage dans l'entreprise.
- Assurer la pérennité de l'entreprise : Surtout pour les entreprises familiales, cela évite leur disparition en cas de départ ou décès d'un actionnaire important.
- Améliorer la gouvernance : La bourse oblige à plus de transparence et de rigueur dans la gestion, ce qui améliore l'organisation interne de l'entreprise.

Pour un investisseur :

- Pas d'impôt sur les gains en bourse : Les actionnaires ne paient pas d'impôt sur les profits réalisés en Bourse, ni de frais d'inscription lors des transactions.
- Dividendes élevés : Lors de l'introduction en bourse de la Banque de Développement Local (BDL), les actionnaires ont obtenu des dividendes estimés à 13% .
- Opportunités d'investissement local : L'ouverture des sociétés publiques et privées en bourse offre aux investisseurs algériens la possibilité de bénéficier de la croissance économique nationale .
- Accès facilité par la digitalisation : La mise en place d'un portail électronique et d'un guichet unique simplifie l'accès aux informations ainsi que les opérations d'achat et de vente .

1.2.7 Les risques liés à l'introduction en bourse

Même si l'introduction en bourse offre plusieurs avantages, elle comporte aussi des risques importants que l'entreprise doit bien prendre en compte avant de se lancer :

- Perte partielle du contrôle : En ouvrant son capital au public, l'entreprise partage le pouvoir de décision avec de nouveaux actionnaires. Cela peut limiter la liberté de ses dirigeants.
- Obligations de transparence : Une entreprise cotée doit publier régulièrement ses résultats financiers et d'autres informations importantes. Cela demande du temps, des moyens, et peut révéler des données sensibles à la concurrence.
- Volatilité du marché : Le prix des actions peut fortement varier en fonction de la conjoncture économique, des rumeurs ou des événements politiques. Cela peut affecter la valeur de l'entreprise, même si ses résultats sont bons.
- Coûts élevés : L'introduction en bourse génère des frais importants (audits, conseils juridiques, publicité, etc.), ainsi que des coûts permanents liés au respect des règles du marché.
- Pression des actionnaires : Les investisseurs attendent souvent des résultats rapides et peuvent pousser l'entreprise à privilégier les bénéfices à court terme plutôt que la stratégie à long terme.

les risques pour les investisseurs :

- Liquidité très faible : avec seulement 5–6 entreprises cotées, les volumes échangés sont très faibles, ce qui rend difficile l'achat ou la vente rapide de titres .
- Volatilité et possibilité de manipulation : en raison de la faible liquidité, les prix peuvent fortement varier et des pratiques telles que des manipulations peuvent se produire .
- Transparence et gouvernance limitées : le manque de culture boursière et l'accès restreint à l'information financière créent un climat de doute chez les investisseurs .

Conclusion

La Société de Gestion de la Bourse des Valeurs (SGBV) joue un rôle très important dans le fonctionnement du marché boursier en Algérie. Elle permet aux entreprises de trouver des financements et aux investisseurs de placer leur argent dans des actions ,notamment avec la digitalisation de ses services, la SGBV cherche à rendre le marché plus moderne, plus transparent et plus facile d'accès.

Mais malgré ces avancées, la Bourse d'Alger reste encore peu développée. Le nombre d'entreprises cotées est très limité, les échanges sont faibles, et beaucoup de citoyens ne connaissent pas bien le fonctionnement de la bourse. De plus, les entreprises préfèrent souvent se financer par les banques plutôt que d'entrer en bourse, à cause de la complexité des démarches et du manque d'avantages concrets.

Pour que la SGBV joue pleinement son rôle dans le développement économique du pays, il faudrait encourager plus d'entreprises à se faire coter, améliorer l'information du public sur les placements boursiers, et assouplir certaines règles. Cela permettrait de faire de la bourse un outil plus efficace pour financer l'économie algérienne.

Dans notre étude pratique, nous avons choisi d'analyser les actions de Biopharm et Alliance Assurances, car ce sont deux sociétés cotées à la Bourse d'Alger qui présentent une certaine régularité dans le versement de dividendes, Depuis leur introduction en bourse en 2015, elles maintiennent une politique de distribution constante, ce qui témoigne de leur stabilité financière et de leur attractivité pour les investisseurs. Ce critère a été déterminant dans le choix de ces entreprises comme base de notre application.

2

Notions fondamentales et simulation de Monte Carlo

La modélisation de problèmes d'optimisation en contexte incertain, notamment dans le domaine financier, nécessite la mobilisation d'outils théoriques adaptés issus des probabilités et des statistiques. En effet, l'incertitude sur les rendements, les prix ou les évolutions du marché impose de représenter certaines données comme des variables aléatoires, et d'adopter des méthodes permettant d'en estimer les caractéristiques ou d'en simuler les effets.

Dans cette optique, nous présentons dans ce chapitre les fondements statistiques et numériques nécessaires à la suite de notre travail. Nous débutons par un rappel des notions de base en probabilités, telles que les lois de distribution, l'espérance et la variance, qui sont essentielles pour la compréhension des modèles stochastiques. Nous introduisons ensuite la méthode d'estimation de densité par noyau (KDE), une technique non paramétrique permettant de modéliser finement les lois de probabilité des rendements financiers à partir de données empiriques. Enfin, nous exposons le principe de la simulation de Monte Carlo, un outil largement utilisé pour approximer des espérances et analyser le comportement d'un système complexe face à l'incertitude.

Les méthodes présentées ici constituent les fondations méthodologiques sur lesquelles s'appuieront les chapitres suivants, dédiés à la formulation et à la résolution du modèle d'optimisation.

2.1 Préliminaires

2.1.1 Espace de probabilité

L'incertitude est représentée en termes d'expériences aléatoires avec des résultats indiqués par ω et l'ensemble de tous les résultats est représenté par Ω . Les résultats peuvent être combinés en sous-ensembles d'événements. Nous notons par Ξ un ensemble d'événements aléatoires.

Enfin, à chaque événement $A \in \Xi$, est associée une valeur $\mathbb{P}(A)$, appelée probabilité, telle que :

- (i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
- (ii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (iii) $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$ si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Le triplet $(\Omega, \Xi, \mathbb{P})$ s'appelle un espace de probabilité qui doit satisfaire un nombre de conditions[2].

2.1.2 Variables aléatoires

plusieurs paramètres d'un problème peuvent être considérés comme incertains et sont donc représentés comme des variables aléatoires. Le concept d'une variable aléatoire (v.a) formalise de grandeur variant selon le résultat d'une expérience aléatoire. Il existe deux types de v.a : les v.a discrètes et les v.a continues, dont on va définir ci-dessus[38].

Variables aléatoires discrètes

On dit que X est une v.a.r discrète qui prend des valeurs discrètes $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ où

$$\{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}.$$

Variables aléatoires continues

On dit que X est une v.a.r absolument continue, si elle admet une fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} satisfaisant les conditions suivantes :

1. $f_X(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$.

Sachant que la fonction f_X est appelée fonction de densité de X .

2.1.3 Espérance mathématique

Pour une variable discrète, on définit l'espérance $E(X)$ par la formule[48] :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

(si cette expression a un sens). $E(X)$ est la moyenne arithmétique des différentes valeurs de X pondérées par leurs probabilités. Pour une variable continue admettant une densité, $E(X)$ est la valeur, si l'intégrale converge, de

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x) dx.$$

Ces deux expressions ne sont en fait que des cas particuliers de la définition générale suivante :

Définition 1 [48] X étant une variable aléatoire réelle définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) , l'espérance mathématique de X est, si elle existe, l'intégrale de X par rapport à la mesure P :

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP$$

D'après le théorème de la mesure image, on a :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)$$

d'où, en particulier si P_X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , il existe une densité $f(x) : dP_X(x) = f(x) dx$ et alors on retrouve :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x) dx$$

Il faut prendre garde au fait que l'espérance mathématique n'existe pas toujours. Ainsi, la variable X ayant pour densité sur \mathbb{R} :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (\text{loi de Cauchy})$$

n'a pas d'espérance car l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx \text{ diverge.}$$

Propriétés élémentaires de l'espérance

Les propriétés élémentaires de l'espérance mathématique sont celles des intégrales et se déduisent de la linéarité. Si a est une constante :

$E(a)$	$= a$
$E(aX)$	$= aE(X)$
$E(X+a)$	$= E(X) + a$

La plus importante propriété est l'additivité : l'espérance d'une somme de variables aléatoires (qu'elles soient ou non indépendantes) est égale à la somme de leurs espérances :

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

2.1.4 Variance

On appelle variance de X , notée $V(X)$ ou σ^2 , la quantité définie par [48] :

$$\sigma^2 = E((X - m)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 dp_x(x)$$

où $m = E(X)$. σ s'appelle l'écart-type de X .

La variance est donc le moment centré d'ordre 2 de la distribution et est une mesure de la dispersion de X autour de m .

Propriétés de la variance

Comme $E((X - a)^2) = V(X) + (E(X) - a)^2$ (formule de König-Huyghens), on en déduit que $V(X)$ est la valeur minimale de $E((X - a)^2)$ quand a varie. On en déduit la formule classique :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Par ailleurs :

$$V(X - a) = V(X)$$

$$V(\alpha X) = \alpha^2 V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(\alpha X) = |\alpha| \sigma(X)$$

$$V(X) = 0 \iff X = a \text{ (presque sûrement)}$$

L'espérance et l'écart-type sont reliés par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Définition 11 (Fonction de répartition) [3] Soit X une variable aléatoire définie sur un ensemble fondamental S . La fonction de répartition de X est l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$F(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Définition 12 (Densité de probabilité) [3] Soit X une variable aléatoire continue de fonction de répartition F . On dit que X est absolument continue si :

- F est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ (sauf peut-être en un nombre fini de points)
- Sa dérivée $f(x)$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

La fonction f est alors appelée densité de probabilité (ou fonction de distribution) de X .

2.1.5 Lois de probabilité

Loi de Laplace-Gauss ou loi normale

Densité de probabilité de la loi normale

En théorie des probabilités et en statistique, les lois normales sont parmi les lois de probabilité les plus utilisées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Elles sont en lien avec de nombreux objets mathématiques dont le mouvement brownien, le bruit blanc gaussien ou d'autres lois de probabilité. Elles sont également appelées lois gaussiennes, lois de Gauss ou lois de Laplace-Gauss des noms de Laplace (1749-1827) et Gauss (1777-1855), deux mathématiciens, astronomes et physiciens qui l'ont étudiée.

Plus formellement, une loi normale est une loi de probabilité absolument continue qui dépend de deux paramètres : son espérance, un nombre réel noté μ , et sa variance, un nombre réel positif noté σ^2 . La densité de probabilité de la loi normale d'espérance μ , et d'écart type σ est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

Cette loi est notée, en général $N(\mu, \sigma^2)$. On dit indifféremment qu'une variable suivant une telle loi est une variable normale ou gaussienne[56].

Fonction de répartition :

$$Pr(X < a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

Cette intégrale n'ayant pas d'expression mathématique simple, des tables donnent les valeurs de la fonction de répartition. Sur la courbe représentant la densité de probabilité d'une variable gaussienne, la valeur de $F(a)$ est représentée par la partie non hachurée. Cette courbe a un axe de symétrie vertical pour $x = \mu$ et du fait de sa forme, elle est souvent appelée «courbe en cloche»[56].

Remarque 1 Espérance et variance : $E(X) = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2$. Ces résultats justifient le choix des deux paramètres figurant dans l'expression de la densité[56].

Loi normale centrée réduite

La loi normale centrée réduite est la loi de probabilité absolument continue dont la densité de probabilité est donnée par la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par[56] :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t^2}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Cette loi est dite centrée puisque son espérance vaut 0 et réduite puisque sa variance vaut 1, tout comme son écart type. Le graphe de la densité φ est appelé fonction gaussienne, courbe de Gauss ou courbe en cloche. Cette loi est notée grâce à la première lettre de « normal », une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite est notée :

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Notation alternative courante : $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$
- Fonction de répartition associée : $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(x)dx$

Loi log-normale

Une variable aléatoire X est dite suivre une loi log-normale de paramètres μ et σ^2 si la variable $Y = \ln(X)$ suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 . La loi log-normale de paramètres μ et σ admet pour densité de probabilité [56] :

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

L'espérance est :

$$\mathbf{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

et la variance est :

$$\text{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}$$

Des relations équivalentes permettent d'obtenir μ et σ étant données l'espérance et l'écart-type :

$$\begin{cases} \mu = \ln(\mathbf{E}(X)) - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \sigma = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\text{Var}(X)}{(\mathbf{E}(X))^2}\right)} \end{cases}$$

Remarque 2 Quand l'écart-type σ est petit, la loi de X est proche d'une loi normale.

Loi uniforme

Définition 13 [33] Soit X une variable aléatoire continue sur l'intervalle $[a, b]$. On dit que la variable aléatoire X est uniformément distribuée sur l'intervalle $[a, b]$ et on note $X \sim U_{[a,b]}$, si sa densité de probabilité s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

On vérifie quelle correspond à une densité de probabilité puisque $f(x) \geq 0$ et $\int_a^b f(x)dx = 1$.

À partir de $F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$ on obtient la fonction de répartition d'une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[a, b]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b; \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Loi exponentielle

On rencontre souvent la loi exponentielle lorsqu'il s'agit de représenter le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifié.

Définition 14 [33] On dit que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre α , si sa densité de probabilité s'écrit sous la forme

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \\
&= \alpha \left. \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right|_0^{+\infty} = 1
\end{aligned}$$

La fonction de répartition F d'une variable exponentielle est donnée par

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X \leq x) \\
&= \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt \\
&= \alpha \left. \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right|_0^x \\
&= 1 - e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0
\end{aligned}$$

Loi de Weibull

C'est une loi très simple représentative d'une très grande variété de phénomènes aléatoires, elle a l'avantage de s'ajuster à différents résultats expérimentaux. Elle est particulièrement utilisée dans le domaine de la fiabilité[1].

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \nu \\ \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta} & \text{si } x \geq \nu. \end{cases}$$

$\alpha > 0$ est appelé paramètre d'échelle, $\beta > 0$ le paramètre de la forme et $-\infty < \nu < \infty$ le paramètre de position.

Remarque 3 La densité f est une densité de probabilité. En effet, $f(x) \geq 0, \forall x > \nu$.

$$\int_{\nu}^{\infty} f(x) dx = \int_{\nu}^{\infty} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta} dx.$$

Posons $u = \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta \implies du = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx$. Pour $x = \nu$, $u = 0$ et pour $x = \infty$, $u = \infty$. Par conséquent,

$$\int_{\nu}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-u} \alpha du = \int_0^{\infty} e^{-u} du = -[e^{-u}]_0^{\infty} = 1.$$

Esperance

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\nu}^{\infty} x f(x) dx = \int_{\nu}^{\infty} x \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta} dx.$$

Posons $u = \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta \implies du = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx$, $\sqrt[\beta]{u} = \frac{x-\nu}{\alpha} \implies x = \alpha \sqrt[\beta]{u} + \nu$.

Pour $x = \nu$, $u = 0$ et pour $x = \infty$, $u = \infty$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^{\infty} (\alpha \sqrt[\beta]{u} + \nu) e^{-u} du = \alpha \int_0^{\infty} \sqrt[\beta]{u} e^{-u} du + \nu \int_0^{\infty} e^{-u} du \\
&= \alpha \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{\beta}} e^{-u} du + \nu [-e^{-u}]_0^{\infty} = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + \nu.
\end{aligned}$$

Variance

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\nu}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{\nu}^{\infty} x^2 \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta} dx,$$

Posons $u = \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^\beta \implies du = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx$, $\sqrt[\beta]{u} = \frac{x-\nu}{\alpha} \implies x = \alpha \sqrt[\beta]{u} + \nu$.

La moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique est donnée par [48] :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{ou} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

pour des données pondérées

Pour des données réparties en k classes la formule $\sum_{i=1}^k f_i c_i$ avec $c_i = \frac{e_{i-1} + e_i}{2}$ donne une approximation de la moyenne \bar{x} mais cette situation doit être évitée.

La moyenne arithmétique est fonction de toutes les observations mais est sensible aux valeurs extrêmes : c'est un indicateur peu « robuste » bien qu'universellement utilisé.

Erreur absolue

Définition 15 [55] On appelle erreur absolue du nombre approché x^* de x la quantité réelle positive, notée $\Delta(x)$, définie par :

$$\Delta(x) = |x - x^*|$$

Plus l'erreur absolue est petite, plus x^* est précis.

Erreur relative

Définition 16 [55] On appelle erreur relative du nombre approché x^* de x la quantité réelle positive, notée $r(x)$, définie par :

$$r(x) = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{\Delta(x)}{|x|}$$

Remarque 4 L'erreur relative est souvent exprimée en pourcentage (précision relative) par :

$$r\% = r(x) \times 100$$

2.1.6 Tests de normalité

Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov est un test libre qui permet de vérifier si un échantillon aléatoire peut provenir d'une distribution de probabilités particulière pour une variable continue (échelle métrique). Si la distribution de probabilités testée est la loi de Laplace-Gauss (distribution normale), ce test d'ajustement fournit une épreuve de normalité [19].

La fonction de répartition empirique des valeurs x_i d'un n -échantillon étant définie par [19] :

$$F_n^e(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \frac{i}{n} & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ 1 & \text{si } x_n \leq x \end{cases}$$

Le test de Kolmogorov-Smirnov est fondé sur le théorème de Glivenko-Cantelli qui affirme la convergence uniforme de la fonction de répartition empirique F_n^e presque sûrement vers la fonction de répartition théorique F .

Cette convergence peut être formulée ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^e(x) - F(x)| \right] = 0$$

La comparaison entre les deux distributions cumulées, empirique et théorique, s'effectue sur la base de la statistique de Kolmogorov-Smirnov :

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^e(x) - F(x)|$$

D'après le théorème de Kolmogorov, sous l'hypothèse nulle H_0 d'identité des deux distributions,

$$\begin{cases} H_0 : F(x) = F_n^e(x) \\ H_1 : F(x) \neq F_n^e(x) \end{cases}$$

la statistique D_n suit asymptotiquement la distribution de probabilités (distribution de Kolmogorov-Smirnov) définie par :

$$P(\sqrt{n}D_n \leq y)_{n \rightarrow \infty} = K(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 y^2)$$

La région critique W_α de risque α est déterminée par $W_\alpha = \{D_n > d_{1-\alpha}(n)\}$ où $d_{1-\alpha}(n)$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la distribution de Kolmogorov-Smirnov pour un échantillon de taille n (cf. table A1 en annexe).

Si on utilise le test de Kolmogorov-Smirnov comme épreuve de normalité, la fonction de répartition théorique est définie par la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, de moyenne μ et d'écart-type σ .

Test de Shapiro-Wilk

Le test de Shapiro-Wilk est basé sur la statistique W . En comparaison des autres tests, il est particulièrement puissant pour les petits effectifs ($n \leq 50$). La statistique du test s'écrit [44] :

$$W = \frac{\left[\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_i (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}) \right]^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

où

- $x_{(i)}$ correspond à la série des données triées ;
- $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est la partie entière du rapport $\frac{n}{2}$;
- a_i sont des constantes générées à partir de la moyenne et de la matrice de variance-covariance des quantiles d'un échantillon de taille n suivant la loi normale. Ces constantes sont fournies dans des tables spécifiques¹.

La statistique W peut donc être interprétée comme le coefficient de détermination (le carré du coefficient de corrélation) entre la série des quantiles générées à partir de la loi normale et les quantiles empiriques obtenues à partir des données. Plus W est élevé, plus la compatibilité avec la loi normale est crédible. La région critique, rejet de la normalité, s'écrit :

$$R.C. : W < W_{\text{crit}}$$

Les valeurs seuils W_{crit} pour différents risques α et effectifs n sont lues dans la table de Shapiro-W.

Test d'Anderson-Darling

Le test d'Anderson-Darling est une autre variante du test de Kolmogorov-Smirnov, à la différence qu'il donne plus d'importance aux queues de distribution.

Autre particularité, ses valeurs critiques sont tabulées différemment selon la loi théorique de référence, un coefficient multiplicatif correctif dépendant de la taille d'échantillon n peut être aussi introduit[44].

Concernant l'adéquation à la loi normale, la statistique du test s'écrit [44] :

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\ln(F_i) + \ln(1 - F_{n-i+1})]$$

où F_i est la fréquence théorique de la loi de répartition normale centrée réduite associée à la valeur standardisée $z_{(i)} = \frac{x_{(i)} - \bar{x}}{s}$.

Une correction est recommandée pour les petits effectifs, cette statistique corrigée est également utilisée pour calculer la p -value :

$$A^{*2} = A^2 \left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2} \right)$$

1. 2

- Pour $n \geq 5$, on utilise généralement la statistique corrigée
- Le rejet de l'hypothèse nulle (normalité) se fait lorsque $A^{*2} >$ valeur critique
- Les valeurs critiques dépendent du niveau de signification choisi

2.2 Méthode de noyau

L'estimation de densité par noyau (KDE)(Kernel Density Estimation (KDE)), également connue sous le nom de fenêtre de Parzen (Parzen, 1962), est l'une des méthodes les plus connues pour estimer la fonction de densité de probabilité sous-jacente à un ensemble de données.

La KDE est un estimateur de densité non paramétrique, ce qui signifie qu'elle ne nécessite aucune hypothèse sur la forme paramétrique de la densité sous-jacente.

Elle apprend automatiquement la forme de la densité à partir des données. Cette flexibilité, due à son caractère non paramétrique, rend la KDE très populaire pour modéliser des données provenant de distributions complexes[15].

2.2.1 Formulation mathématique de l'estimateur de densité par noyau

Définition 17 [1] *Un estimateur non-paramétrique de la densité f est une fonction \hat{f}_n définie par :*

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

où :

- K est une densité de probabilité appelée noyau.
- $h_n > 0$ est un réel positif appelé paramètre de lissage ou largeur de la fenêtre, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- $\{X_i\}_{i=1}^n$ est l'échantillon observé

2.2.2 Exemple de noyau

Les noyaux les plus communs sont [1] :

- le noyau rectangulaire : $K(u) = \frac{1}{2}I_{[-1,+1]}(u)$. C'est celui qui donne l'estimateur de type histogramme.
- le noyau triangulaire : $K(u) = (1 - |u|)I_{[-1,+1]}(u)$.
- le noyau d'Epanechnikov : $K(u) = \frac{3}{4\sqrt{5}}(1 - \frac{u^2}{5})I_{[-\sqrt{5},+\sqrt{5}]}(u)$.
- le noyau gaussien : $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$.

2.2.3 Choix de paramètre de lissage h

Parmi les méthodes de sélection du paramètre de lissage on trouve [21] :

- Choix subjectif : Cette approche consiste à représenter sur un graphe plusieurs estimateurs correspondant à différents paramètres de lissage et à choisir celui dont l'estimateur est graphiquement le plus proche de la fonction de densité.
- Forme de la fenêtre pour la loi normale : Lorsque les données suivent une loi normale de variance σ^2 , la fenêtre optimale est de la forme :

$$\hat{h} \approx 1.06\sigma n^{-\frac{1}{5}}.$$

Il suffit d'estimer σ pour obtenir une forme utilisable en pratique.

- Méthode du graphe test : Cette méthode repose sur le comportement de l'estimateur de la dérivée seconde par rapport à la vraie dérivée seconde. Le résultat est présenté sous les hypothèses suivantes :

- Le noyau K est symétrique et deux fois différentiable
- $\int z^2 K(z) dz \neq 0$

- La densité f est de dérivée seconde bornée et uniformément continue.
- $\hat{h} = \hat{h}(n)$ est choisie de façon à minimiser l'erreur maximale dans l'estimation de la densité, ce qui se traduit, pour $n \rightarrow \infty$, par

$$\frac{\sup |f''_{n,h} - \mathbb{E}f''_{n,h}|}{|\mathbb{E}f''_{n,h}|} \rightarrow k,$$

où k est donné par

$$k = \frac{1}{2} \left\{ \int |z^2 K(z)| dz \right\} \left\{ \frac{\int (K'(z))^2 dz}{\int K(z)^2 dz} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

La méthode proposée par Silverman est de représenter graphiquement u_h pour différentes valeurs de h . Le meilleur "graphe test" doit avoir de rapides fluctuations sans pour autant dissimuler les variations systématiques.

2.3 Simulation de Monte Carlo

Dans le contexte des problèmes d'optimisation sous incertitude, notamment lorsque les lois de probabilité des variables aléatoires sont complexes, continues, ou que les dimensions du problème sont élevées, les méthodes analytiques ou de quadrature numérique peuvent devenir impraticables. La simulation de Monte Carlo offre alors une approche puissante pour estimer des quantités d'intérêt, telles que des espérances, des intégrales ou des probabilités, en utilisant un échantillonnage aléatoire.

La méthode de Monte Carlo repose sur la loi des grands nombres. Pour estimer une quantité inconnue (par exemple, $E[X]$ ou $\int f(x) dx$), on génère un grand nombre d'échantillons aléatoires indépendants de la variable ou de la distribution concernée. La moyenne des valeurs obtenues à partir de ces échantillons converge alors vers la valeur réelle de la quantité à mesure que le nombre d'échantillons augmente.

En programmation stochastique, la simulation de Monte Carlo est couramment utilisée pour approximer la fonction objective, qui implique souvent une espérance sur des variables aléatoires, ou pour évaluer la satisfaction de contraintes probabilistes. Plutôt que de calculer une intégrale complexe, on simule des scénarios pour les variables aléatoires incertaines et on évalue la fonction objectif ou les contraintes pour chaque scénario. L'espérance est ensuite estimée par la moyenne arithmétique des valeurs obtenues sur ces scénarios[46].

Étapes Générales de la Simulation de Monte Carlo pour l'Estimation d'une Espérance $E[f(X)]$ [46] :

1. Génération d'échantillons aléatoires : Générer N échantillons indépendants et identiquement distribués de la variable aléatoire X , notés X_1, X_2, \dots, X_N , selon sa distribution de probabilité.
2. Évaluation de la fonction : Pour chaque échantillon X_i , calculer la valeur de la fonction $f(X_i)$.
3. Estimation de l'espérance : Estimer l'espérance $E[f(X)]$ par la moyenne empirique des valeurs calculées :

$$E[f(X)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i).$$

4. Utilisation dans le Problème Déterministe : Cette estimation approximative remplace alors l'espérance dans le modèle déterministe équivalent, qui peut ensuite être résolu par des méthodes d'optimisation standards.

L'algorithme suivant, basé sur les principes de la simulation de Monte Carlo, décrit les étapes pour estimer l'espérance d'une fonction $f(X)$ d'une variable aléatoire X [46].

Algorithme 1 : Algorithme Monte Carlo pour l'estimation de l'espérance

```

Entrée :  $N$  : nombre d'échantillons à générer
            $f$  : fonction à évaluer ( $f(X)$ )
            $X$  : variable aléatoire selon sa distribution de probabilité
Sortie : Estimation de l'espérance  $\hat{E}[f(X)]$ 

// Initialisation
1  $S \leftarrow 0$ ; // Somme des valeurs de  $f(X_i)$ 

// Boucle de Simulation
2 pour  $i \leftarrow 1$  à  $N$  faire
3    $X_i \leftarrow$  Générer un échantillon aléatoire de  $X$ ; // Selon la distribution de  $X$ 
4    $Y_i \leftarrow f(X_i)$ 
5    $S \leftarrow S + Y_i$ ; // Accumuler la somme
6 fin

// Calcul de l'Estimation
7  $\hat{E}[f(X)] \leftarrow \frac{S}{N}$ ; // Moyenne empirique

// Utilisation dans le Problème Déterministe
8 retourner  $\hat{E}[f(X)]$ ; // Remplacer l'espérance originale dans le problème
   d'optimisation

```

Conclusion

La modélisation des phénomènes incertains repose sur une compréhension rigoureuse des outils probabilistes et statistiques. Ce chapitre a permis de consolider ces bases en rappelant les principales notions de probabilité et les lois les plus couramment utilisées dans l'analyse des rendements financiers. Nous avons mis en lumière l'importance de l'estimation non paramétrique par noyau pour construire des lois empiriques adaptées aux données disponibles, sans se limiter à des hypothèses de normalité parfois trop restrictives.

Par ailleurs, la méthode de simulation de Monte Carlo a été introduite comme un outil essentiel pour l'évaluation de quantités attendues dans des contextes où les expressions analytiques sont inaccessibles. Ces méthodes jouent un rôle fondamental dans la formulation et la résolution des modèles d'optimisation présentés dans les chapitres suivants, où l'incertitude des rendements sera intégrée de manière explicite dans la structure mathématique du problème.

3

Programmation stochastique et fractionnaire

L'optimisation mathématique occupe une place centrale dans la modélisation et la résolution de problèmes décisionnels, qu'il s'agisse d'allocation de ressources, de gestion de portefeuilles ou de planification économique. Elle vise à déterminer, parmi un ensemble de solutions possibles, celle qui maximise ou minimise une fonction objectif, tout en respectant un certain nombre de contraintes.

Dans de nombreux contextes réels, notamment en finance, les paramètres du problème ne sont pas parfaitement connus à l'avance, mais sont soumis à de l'incertitude. C'est dans ce cadre qu'intervient la programmation stochastique, qui permet d'intégrer des variables aléatoires dans les modèles d'optimisation afin de prendre des décisions robustes face aux aléas.

Par ailleurs, certains problèmes d'optimisation impliquent une fonction objectif sous forme de rapport, comme le cas du rendement moyen par coût ou par risque. Ces situations relèvent de la programmation linéaire fractionnaire, qui constitue une généralisation de la programmation linéaire classique.

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux modèles mathématiques d'optimisation utilisés dans ce mémoire, ainsi que les méthodes permettant de les résoudre. Nous commençons par rappeler les fondements de la programmation linéaire, avant de traiter la programmation stochastique linéaire et ses différentes méthodes de transformation vers un modèle déterministe équivalent. Nous présentons ensuite la programmation linéaire fractionnaire et sa transformation en programme linéaire classique. Enfin, nous exposons les méthodes de résolution mobilisées, telles que la méthode du simplexe, la transformation de Charnes et Cooper, ainsi que les approches numériques utilisées dans la suite de ce travail.

3.1 Programmation linéaire

La programmation linéaire est une technique qui permet de résoudre un grand nombre de problèmes de la gestion, de l'économie, de la finance et de la statistique. Cette technique consiste à modéliser le problème posé sous forme d'une fonction objectif linéaire à n inconnus soumise à des contraintes aussi linéaires formulées comme des égalités ou des inégalités non strictes ou les deux en même temps qu'on cherche à optimiser (minimiser ou maximiser).

Définition 18 [8] *Un programme linéaire est tout problème d'optimisation dans lequel :*

- Le domaine S des solutions réalisables est défini par un ensemble des égalités ou des inégalités linéaires ou les deux à la fois appelées « contraintes ». Notons que les inéquations linéaires strictes sont interdites car elles sont dépourvues de signification physique ;
- La fonction Z , dite « fonction objectif ou économique » est linéaire ;
- Toutes les variables de décisions sont astreintes à être non négatives.

3.1.1 Forme générale

Tout programme linéaire s'écrit sous la forme générale suivante [47, 8] :

$$(P) \begin{cases} \text{maximiser (minimiser)} Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \text{ou} = \text{ou} \geq b_i, & \forall i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, & \forall j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

- x_1, x_2, \dots, x_n : variables de décision
- c_1, c_2, \dots, c_n : coefficients des variables dans la fonction objectif
- a_{ij} : coefficients technologiques (valeurs données dans le problème)
- b_i : second membre des contraintes
- Z : fonction objectif à optimiser

3.1.2 Forme canonique

Un problème de maximisation (resp. minimisation) doit être écrit sous la forme canonique comme suit [8] :

$$(PC) \begin{cases} \max & Z = C^T x \\ \text{s.c} & \\ Ax & \leq b \\ x & \geq 0 \end{cases} \quad (PC) \begin{cases} \min & Z = C^T x \\ \text{s.c} & \\ Ax & \geq b \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

3.1.3 Forme standard

On dit qu'un programme linéaire est écrit sous forme standard si toutes ses contraintes (sauf les contraintes de non-négativité) sont des égalités d'où le PL devient [8] :

$$\langle PS \rangle \begin{cases} \max \text{ (resp. min)} & Z = C^T x \\ \text{s.c.} & \\ Ax & = b \\ x & \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

3.1.4 Hypothèses des programmes linéaires

Les programmes linéaires reposent sur les hypothèses implicites suivantes [55] :

- 1. Proportionnalité** : avec les programmes linéaires, nous supposons que la contribution des variables individuelles dans la fonction objectif et les contraintes est proportionnelle à leur valeur. Autrement dit, si nous doublons la valeur d'une variable, nous doublons la contribution de cette variable à la fonction objectif et à chaque contrainte dans laquelle la variable apparaît. La contribution par unité de la variable est constante.

Exemple 1 supposons que la variable x_j soit le nombre d'unités du produit j fabriquées et que c_j soit le coût unitaire de production du produit j . Si l'on double la quantité du produit j fabriquée alors on doublera son coût, le coût unitaire est constant et l'hypothèse de proportionnalité est satisfaite.

- 2. Additivité** : l'additivité signifie que la valeur totale de la fonction objectif et de chaque fonction de contrainte est obtenue en additionnant les contributions individuelles de chaque variable.
- 3. Divisibilité** : les variables de décision peuvent prendre n'importe quelle valeur numérique réelle dans une plage spécifiée par les contraintes. En d'autres termes, les variables ne sont pas limitées à des valeurs entières.

Remarque 5 lorsque les valeurs fractionnaires ne constituent pas une solution sensée, comme le nombre de vols qu'une compagnie aérienne doit effectuer chaque jour entre deux villes, le problème doit être formulé et résolu comme un programme linéaire entier.

- 4. Certitude** : nous supposons que les valeurs des paramètres du modèle sont connues avec certitude ou sont au moins traitées comme telles. La solution optimale obtenue est optimale pour le problème spécifique formulé. si les valeurs des paramètres sont erronées, la solution obtenue n'a que peu de valeur.

3.2 Programmation stochastique linéaire

Lorsque l'on parle de la programmation stochastique, on entend la programmation mathématique sous incertitude. La programmation stochastique n'est pas une famille de problèmes, de modèles et d'outils différents des autres domaines d'optimisation (programmation linéaire, non-linéaire, dynamique); au contraire, elle constitue un complément de ces familles lorsque la notion d'incertitude intervient. On se permet donc de parler de programmation stochastique linéaire, non-linéaire ou bien de programmation stochastique dynamique[35].

3.2.1 Forme générale d'un problème stochastique linéaire

Un problème stochastique linéaire s'écrit sous la forme [53] :

$$\begin{cases} \min_x & Z(\omega) = c'(\omega)x \\ A(\omega)x & \leq b(\omega) \\ x \in T_1 & (P_{S_1}) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où (A, c, b) - de dimensions respectives $(m \times n)$, $(n \times 1)$ et $(m \times 1)$ - sont des vecteurs aléatoires sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , et T_1 est un polyèdre convexe déterministe, par exemple :

$$T_1 = \{x \mid x \geq 0, A_i x \leq b\} \quad (3.2.2)$$

3.3 Programmation fractionnaire linéaire

La programmation fractionnaire concerne la maximisation ou la minimisation d'une relation entre deux fonctions. Par exemple, En finance, on peut comparer divers rapports, tels que le coût efficace par rapport au coût standard, les dettes par rapport aux capitaux propres, l'inventaire par rapport aux ventes, le risque des investissements par rapport au capital engagé[5].

Définition 2 [5, 42] Soient f, h , et g_i (pour $i = 1, \dots, m$) des fonctions réelles définies sur \mathbb{R}^n , avec h ne s'annulant pas sur un sous-ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Le problème de programmation fractionnaire consiste à déterminer $x^* \in X$ optimisant $\frac{f(x)}{h(x)}$ sous les contraintes $g_i(x) \leq 0$. Il s'écrit :

$$(P) \begin{cases} \text{maximiser} & \frac{f(x)}{h(x)} \\ \text{sous les contraintes} & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ & x \in X \end{cases} \quad (3.3.1)$$

avec les hypothèses :

- $F(P) = \{x \in X \mid g_i(x) \leq 0\} \neq \emptyset$,
- f, h , et g_i sont continues sur \mathbb{R}^n ,
- $\forall x \in X : h(x) > 0$,
- $\exists x \in F(P) : f(x) > 0$.

Cas particuliers :

- Si f est concave et h, g_i sont convexes, (P) est dit **concave-convexe**.
- Si f, h , et g_i sont affines/linéaires, (P) est un **programme hyperbolique** :

$$(P_{hyp}) \begin{cases} \max & \frac{c_0 + c^T x}{d_0 + d^T x} \\ \text{s.c.} & Ax \leq b, \\ & x \in X \end{cases} \quad (3.3.2)$$

où :

$c_0, d_0 \in \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, et $b \in \mathbb{R}^m$.

Définition 3 [5] Un problème de programmation linéaire fractionnaire (PLF) est un cas particulier de la programmation fractionnaire dans lequel la fonction objective est un rapport de deux fonctions affines, et les contraintes sont linéaires.

Définition 4 [5] Un problème de programmation linéaire fractionnaire (PLF) consiste à maximiser (ou minimiser) une fonction objectif de la forme :

$$Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)}$$

où $P(x)$ et $D(x)$ sont des fonctions affines de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$P(x) = c^T x + \alpha, \quad D(x) = d^T x + \beta,$$

sous un système de contraintes linéaires de type :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, & i = 1, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i, & i = m_1 + 1, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, & i = m_2 + 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, & j = 1, \dots, n_1. \end{aligned}$$

On suppose que la fonction $D(x)$ ne s'annule pas sur l'ensemble des solutions réalisables S , c'est-à-dire :

$$D(x) > 0, \quad \forall x \in S,$$

et que les contraintes sont linéairement indépendantes, ce qui implique que la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est de rang m [5].

3.3.1 Propriétés fondamentales de la PLF

Toutes ces propriétés sont tirées de [5]

1. Un problème de programmation linéaire fractionnaire (PLF) s'écrit généralement sous la forme :

$$\max_{x \in X} \frac{c^T x + c_0}{d^T x + d_0}$$

sous les contraintes linéaires :

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

où X est un polyèdre convexe défini par les contraintes linéaires.

2. Le dénominateur $d^T x + d_0$ doit être strictement positif (ou négatif) sur l'ensemble admissible X pour garantir que la fonction objectif est bien définie et continue sur X .
3.
 - La fonction objectif fractionnaire linéaire est quasi-convexe (ou quasi-concave) sur un domaine convexe où le dénominateur ne s'annule pas.
 - Cela signifie que tout sous-niveau (ou sur-niveau) de la fonction objectif est un ensemble convexe.
4.
 - La PLF généralise la programmation linéaire (PL) : si le dénominateur est constant, la PLF devient une PL classique.
 - Tout problème de PLF peut être transformé en une suite de problèmes de PL équivalents grâce à des méthodes comme la transformation de Charnes-Cooper ou l'algorithme de Dinkelbach.
5. Si l'ensemble admissible X est non vide, borné et que le dénominateur ne s'annule pas, alors la PLF admet toujours une solution optimale atteinte en un sommet de X (comme en PL).
6. Les méthodes classiques sont la transformation de Charnes-Cooper (qui ramène la PLF à une PL), l'algorithme de Dinkelbach (méthode itérative basée sur la paramétrisation), et la résolution directe par recherche sur les sommets.
7. Il existe une théorie de la dualité pour la PLF, analogue à celle de la PL, avec des relations entre le problème primal et son dual, ainsi que des interprétations économiques des variables duales.
8. La solution optimale de la PLF est sensible aux variations des coefficients du numérateur, du dénominateur, des contraintes, et du second membre, et il existe des méthodes analytiques pour étudier cette sensibilité.
9. La PLF admet des variantes : variables entières (PLF discrète), cas multi-objectifs, cas particuliers comme le problème du transport ou de l'affectation.

3.3.2 Applications de la Programmation Linéaire Fractionnaire

La Programmation Linéaire Fractionnaire (PLF) trouve des applications dans divers domaines où l'objectif est d'optimiser un ratio de deux fonctions linéaires. Voici quelques exemples concrets [5] :

- **Maximisation du profit par unité de coût**
Un fabricant souhaite utiliser ses ressources disponibles pour produire différents produits. Connaissant le profit et le coût associés à chaque unité produite, l'objectif est de déterminer la combinaison de produits qui maximise le profit par unité de coût.
- **Minimisation du coût par unité de produit**
Une entreprise possédant plusieurs mines avec des qualités de minerai variables doit satisfaire une commande spécifique. L'objectif est de déterminer comment satisfaire cette commande de manière à minimiser le coût par unité de minerai extraite.
- **Problèmes de transport**
Une entreprise de transport souhaite acheminer des marchandises depuis des entrepôts vers des magasins. L'objectif est de trouver le moyen le moins coûteux (soit en coût total, soit en coût par unité transportée) d'effectuer ce transport.

3.3.3 Quelques exemples d'applications de la programmation fractionnaire

Minimisation (coût/temps)

Dantzig, Blattner et Reo [18], proposent un PLF pour un problème de routage (choisir la voie que doit prendre un navire ou un avion), afin de déterminer un cycle dans le réseau qui minimise le rapport du coût sur le temps, le modèle s'écrivant comme suit :

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \\ x \in S, \end{cases}$$

où la fonction P représente le coût et Q représente le temps. L'ensemble S est défini comme suit :

$$S = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\},$$

où X est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n sur lequel la fonction Q ne s'annule pas. Les fonctions g_i représentent des contraintes de coût et de temps.

Maximisation (rendement/risque)

Faaland et Jacobs [22] ont utilisé un programme linéaire fractionnaire pour maximiser le rapport du rendement attendu sur le risque, afin de quantifier la relation entre l'étendue de la diversification et la valeur du portefeuille. Le modèle s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \max F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \\ x \in S, \end{cases}$$

où la fonction P représente la fonction de rendement attendu et Q représente la fonction de risque. L'ensemble S est défini comme suit :

$$S = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}\},$$

où X est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n sur lequel la fonction Q ne s'annule pas. Les fonctions g_i représentent les contraintes de rendement et de risque.

Maximisation de la productivité

Gilmore et Gomory [26], dans le cadre d'un problème de gestion de stocks dans l'industrie du papier, ont montré qu'il est plus approprié de minimiser le rapport de la quantité de matière première gaspillée sur la quantité de matière première utilisée que de minimiser simplement la quantité de matière utilisée, ce qui donne le problème de programmation linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} \min F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \\ x \in S, \end{cases}$$

où la fonction P la représente la quantité de matière première gaspillée et la fonction Q représente la quantité de matière première utilisée.

L'ensemble S est défini comme suit :

$$S = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}\},$$

où X est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n sur lequel la fonction Q ne s'annule pas. Les fonctions g_i représentent les contraintes relatives à la quantité de matière première gaspillée et utilisée.

Maximisation (profit / temps)

Dans un problème de chargement de marchandise, propose de maximiser le profit par unité de temps. Dans ce problème, le coût et le temps de chargement dépendent de la marchandise choisie. Si la fonction de revenu ainsi que la fonction du coût de temps sont linéaires, on aura le PLF suivant [36] :

$$\begin{cases} \max F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \\ x \in S, \end{cases}$$

où la fonction P représente la fonction de profit et Q représente la fonction du coût de temps. Soit l'ensemble S défini par :

$$S = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}\},$$

3.4 Méthodes de résolution

Les problèmes d'optimisation stochastique, par nature, intègrent des incertitudes modélisées par des variables aléatoires. La résolution directe de tels problèmes est souvent complexe, voire impossible avec les techniques d'optimisation standards. Pour cette raison, une étape préliminaire fréquente consiste à transformer le problème stochastique en un problème déterministe équivalent. Cette transformation permet de reformuler le problème initial en une forme où tous les paramètres sont certains, facilitant ainsi l'application de méthodes de résolution établies en programmation linéaire ou non linéaire. L'objectif est de capturer l'essence de l'incertitude tout en rendant le problème traitable mathématiquement.

3.4.1 Transformation d'un problème stochastique en un problème déterministe

Plusieurs approches existent pour réaliser cette conversion, chacune adaptée à différents types d'incertitude et d'objectifs de décision.

Transformations basées sur les moments (espérance et variance)

Cette méthode est l'une des approches les plus simples et les plus répandues pour traiter l'incertitude dans les modèles d'optimisation. Elle consiste à remplacer les paramètres aléatoires par leur espérance mathématique, ce qui permet d'optimiser la valeur moyenne de la fonction objectif. Lorsqu'une mesure de risque est également prise en compte, comme la variance, on parle alors de transformation basée sur les moments d'ordre 1 et 2.

Considérons un problème d'optimisation où la fonction objectif est une espérance, par exemple dans le cas d'une fonction de coût linéaire avec des coefficients aléatoires [10] :

$$\min_{x \in X} \mathbb{E}_\xi [c(\xi)^T x] \quad (3.4.1)$$

où x est le vecteur des variables de décision, et ξ un vecteur de variables aléatoires influençant les coefficients $c(\xi)$.

Transformation en modèle déterministe

En vertu de la linéarité de l'opérateur espérance, si $c(\xi) = c_0 + c_1\xi_1 + \dots + c_k\xi_k$, alors [31] :

$$\mathbb{E}[c(\xi)^T x] = \mathbb{E}[c(\xi)]^T x \quad (3.4.2)$$

En posant $\bar{c} = \mathbb{E}[c(\xi)]$, le problème déterministe équivalent devient :

$$\min_{x \in X} \bar{c}^T x \quad (3.4.3)$$

Cette transformation revient à remplacer chaque paramètre aléatoire par sa valeur moyenne attendue. Elle suppose que le décideur est neutre au risque, c'est-à-dire qu'il ne cherche ni à minimiser ni à maîtriser la variabilité des résultats.

Dans certains cas, notamment pour les modèles à fonction objectif fractionnaire, une extension de cette méthode consiste à intégrer à la fois l'espérance et la variance (ou l'écart-type) des variables aléatoires. Par exemple, pour une fonction objectif fractionnaire de la forme [29] :

$$F(x, \theta) = \frac{d^T x + \beta \theta^T x + \alpha}{x_r} \quad (3.4.4)$$

où θ est un vecteur de paramètres aléatoires, la transformation peut inclure les moments d'ordre 1 et 2, conduisant à une expression déterministe telle que :

$$S(x) = \frac{d_r}{x_r} + \beta_r \sum_{j=1}^n c_{rj} x_j + k_{1r} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\theta_{jr}) x_j + k_{2r} \sum_{j=1}^n \text{Var}(\theta_{jr}) x_j^2 + \alpha_r \quad (3.4.5)$$

Alors :

- Le terme $\mathbb{E}(\theta_{jr})$ représente l'espérance du paramètre aléatoire θ_{jr} .
- Le terme $\text{Var}(\theta_{jr})$ correspond à sa variance.
- Les coefficients k_{1r} et k_{2r} permettent de pondérer l'effet de l'espérance et de la volatilité dans la fonction objectif finale.

Modèle en deux étapes (avec recours)

Les problèmes de programmation stochastique à deux étapes modélisent des situations où une décision initiale est prise avant la réalisation de l'incertitude (dite de première étape), suivie d'une décision corrective (ou de recours) après que l'incertitude se soit manifestée.

Modèle stochastique (forme canonique)

Un problème de programmation linéaire stochastique à deux étapes avec recours peut être formulé comme suit [10] :

$$\begin{cases} \min_{x \geq 0} & c^T x + \mathbb{E}_\xi [Q(x, \xi)] \\ \text{s.c.} & Ax = b \end{cases} \quad (3.4.6)$$

où $Q(x, \xi)$ est le problème de deuxième étape dépendant de x et du scénario aléatoire ξ :

$$Q(x, \xi) = \min_{y \geq 0} \{q(\xi)^T y \mid T(\xi)x + W(\xi)y = h(\xi)\} \quad (3.4.7)$$

- x est la décision prise "ici et maintenant", avant de connaître la réalisation de l'incertitude ξ .
- y est la décision de "recours", prise après la réalisation de ξ , pour s'adapter aux conditions observées.

Transformation en modèle déterministe (forme extensive)

Si ξ est une variable aléatoire à support discret fini, c'est-à-dire qu'elle peut prendre S scénarios ξ_1, \dots, ξ_S avec probabilités associées π_1, \dots, π_S (telles que $\sum_{s=1}^S \pi_s = 1$), alors le problème peut être transformé en un modèle déterministe équivalent, dit *forme extensive* [31] :

$$\begin{cases} \min_{\substack{x \geq 0 \\ y_1, \dots, y_S \geq 0}} & c^T x + \sum_{s=1}^S \pi_s q(\xi_s)^T y_s \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & T(\xi_s)x + W(\xi_s)y_s = h(\xi_s), \quad \forall s = 1, \dots, S \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Ce modèle rassemble en un seul grand problème déterministe :

- La décision unique de première étape x ,
- Un vecteur de recours y_s pour chaque scénario ξ_s ,
- Des contraintes spécifiques à chaque scénario.

La fonction objectif combine le coût initial et la somme pondérée (espérance) des coûts de recours.

Méthode des scénarios

La méthode des scénarios est une approche flexible qui représente l'incertitude à l'aide d'un ensemble discret de réalisations possibles. Elle est particulièrement utile lorsque les lois de probabilité sont complexes, empiriques, ou partiellement connues, ou encore lorsque le problème présente une structure non linéaire.

Modèle stochastique

Le problème stochastique général peut être formulé comme l'optimisation de la fonction objectif suivante [31] :

$$\begin{cases} \min_{x \in X} & \mathbb{E}[f(x, \xi)] \\ \text{s.c.} & g(x, \xi) \leq 0 \end{cases} \quad (3.4.9)$$

où les contraintes peuvent être interprétées :

- soit comme devant être satisfaites pour tout scénario de ξ ,
- soit avec une probabilité donnée (cf. contraintes de chance).

Transformation en modèle déterministe (forme discrétisée)

On approxime la distribution continue de ξ par un ensemble fini de S scénarios [31] :

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_S\}, \quad \text{avec probabilités } \pi_s, \text{ telles que } \sum_{s=1}^S \pi_s = 1 \quad (3.4.10)$$

Le modèle déterministe équivalent devient alors :

$$\begin{cases} \min_{x \in X} & \sum_{s=1}^S \pi_s f(x, \xi_s) \\ \text{s.c.} & g(x, \xi_s) \leq 0, \quad \forall s = 1, \dots, S \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Cette méthode remplace l'intégration dans l'espérance par une sommation discrète sur des scénarios représentatifs. Elle est intuitive, et permet l'utilisation de solveurs classiques, mais peut générer des problèmes de grande taille (beaucoup de contraintes, une copie du problème par scénario). La qualité de l'approximation dépend directement de la représentativité des scénarios choisis.

Contraintes de chance (Chance Constraints)

Les contraintes de chance constituent une approche permettant d'assouplir l'exigence de satisfaction stricte d'une contrainte. Au lieu d'imposer qu'une contrainte soit toujours respectée, on exige qu'elle le soit avec une probabilité minimale donnée. Cette méthode est particulièrement pertinente dans les situations où de rares violations sont tolérées, comme dans les domaines de la finance, de la production ou de l'énergie.

Modèle stochastique (forme probabiliste)

Considérons une contrainte linéaire stochastique du type [31] :

$$A(\xi)x \leq b(\xi) \quad (3.4.12)$$

où $A(\xi)$ et $b(\xi)$ sont des matrices ou vecteurs dont les éléments sont aléatoires en fonction d'un vecteur ξ de variables aléatoires.

Transformation en contrainte de chance

Cette contrainte est transformée en une contrainte probabiliste de la forme [31] :

$$\mathbb{P}(A(\xi)x \leq b(\xi)) \geq 1 - \alpha \quad (3.4.13)$$

où :

- $\mathbb{P}(\cdot)$ est l'opérateur de probabilité,
- $\alpha \in (0, 1)$ est un paramètre fixé par le décideur,
- $1 - \alpha$ représente le niveau de confiance, ou la probabilité minimale exigée que la contrainte soit respectée.

Cette formulation permet de modéliser l'incertitude en intégrant une marge de sécurité probabiliste. Elle est particulièrement utile quand les données sont fluctuantes, mais qu'on souhaite maîtriser le risque de violation.

Cas particulier (loi normale) [31] : Si la contrainte aléatoire est de la forme :

$$a^T x \leq \xi, \quad \text{où } \xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (3.4.14)$$

alors la contrainte de chance :

$$\mathbb{P}(a^T x \leq \xi) \geq 1 - \alpha \quad (3.4.15)$$

peut être convertie en une contrainte déterministe équivalente grâce à la table de la loi normale [31] :

$$a^T x \leq \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma \quad (3.4.16)$$

où $\Phi^{-1}(\alpha)$ est le quantile de niveau α de la loi normale standard.

Remarque 6 Lorsque les distributions sont non normales ou inconnues, cette transformation n'est plus analytique et nécessite des approximations numériques ou des méthodes par scénarios.

Optimisation Robuste

Contrairement aux approches probabilistes, l'optimisation robuste ne nécessite pas la connaissance des distributions de probabilité des incertitudes. Elle vise à trouver une solution qui est valide et performante pour toutes les réalisations des paramètres incertains au sein d'un ensemble d'incertitude défini, garantissant une protection contre le "pire des cas". [10]

Modèle Stochastique (ou sous Incertitude)

Les paramètres incertains appartiennent à un ensemble d'incertitude U , sans distribution de probabilité spécifiée. Par exemple, une contrainte linéaire avec des coefficients incertains [10] :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall i \quad (3.4.17)$$

où a_{ij} sont incertains et appartiennent à un ensemble U_{ij} .

Transformation en Modèle Déterministe

Le problème est reformulé de manière à ce que les contraintes soient satisfaites pour toutes les réalisations possibles des paramètres incertains dans U . Pour une contrainte où $a \in U$, elle devient [10] :

$$\max_{a \in U} \{a^T x\} \leq b \quad (3.4.18)$$

Cette transformation garantit que la contrainte est respectée même dans la combinaison la plus défavorable des paramètres incertains au sein de l'ensemble U . Les ensembles U sont souvent des intervalles, des ellipsoïdes ou des polyèdres, permettant de reformuler le problème robuste en un problème déterministe de type linéaire ou quadratique standard.

Approximation de Lois Continues

Lorsque les variables aléatoires suivent des lois continues complexes, l'intégration de leur espérance peut être difficile. Des méthodes d'approximation sont alors utilisées pour transformer ces problèmes en des formes traitables numériquement.

Modèle Stochastique

Considérons une fonction objective de la forme [31] :

$$\min_x E_{\xi}[f(x, \xi)] \quad (3.4.19)$$

où ξ est une variable aléatoire continue.

Transformation en Modèle Déterministe

Méthodes par points de quadrature [31] : Pour des variables aléatoires continues, l'intégrale définissant l'espérance peut être approximée par une somme pondérée sur un nombre fini de points de quadrature. Cette méthode est efficace pour un petit nombre de variables aléatoires, mais devient prohibitive avec l'augmentation de la dimension (malédiction de la dimensionnalité).

$$E[f(x, \xi)] \approx \sum_{k=1}^K w_k f(x, \xi_k) \quad (3.4.20)$$

où ξ_k sont les points de quadrature et w_k leurs poids associés. Le problème est alors transformé en :

$$\min_x \sum_{k=1}^K w_k f(x, \xi_k) \quad (3.4.21)$$

Méthodes de Monte Carlo (ou échantillonnage) [31] : Lorsque les dimensions sont élevées, l'intégration est souvent approchée par simulation de Monte Carlo. Un grand nombre d'échantillons ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$) sont générés indépendamment selon la distribution de ξ . L'espérance est alors estimée par la moyenne empirique :

$$E[f(x, \xi)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x, \xi_i) \quad (3.4.22)$$

Le problème stochastique est ainsi transformé en un problème déterministe avec une fonction objective approximée :

$$\min_x \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x, \xi_i) \quad (3.4.23)$$

Ces méthodes convertissent l'intégration sur une loi continue en une somme finie. Le choix des points de quadrature ou le nombre d'échantillons affecte la précision de l'approximation. La méthode de Monte Carlo, bien que plus lente à converger, est plus robuste face à la malédiction de la dimensionnalité et aux fonctions complexes.

3.4.2 Méthodes de résolution des problèmes linéaires

Une fois qu'un problème d'optimisation stochastique a été transformé en un équivalent déterministe, il se présente souvent sous la forme d'un programme linéaire (PL), potentiellement de grande taille. Ce paragraphe présente les principales approches pour résoudre de tels problèmes, en distinguant les méthodes directes exactes et les méthodes métaheuristiques.

Méthodes Directes (Exactes)

Les méthodes directes visent à trouver la solution optimale globale d'un problème linéaire en un nombre fini d'étapes.

Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est la méthode classique la plus courante de résolution des problèmes de programmation linéaire. Elle a été mise au point en 1947 par le mathématicien américain J. Dantzig. Par la suite, plusieurs autres méthodes ont vu le jour, notamment la méthode de Diken (1967), la méthode des ellipses de Khachiyan (1979) et la méthode projective de Karmarkar (1984). Ces dernières sont appelées méthodes des points intérieurs et elles sont connues pour leurs complexité polynomiale.

Elle permet de trouver une solution optimale en explorant les sommets du polyèdre des solutions admissibles[9].

Considérons un problème de programmation linéaire sous forme standard [9] :

$$\begin{cases} \max_{x \in \mathbb{R}^n} & Z(x) = c^T x \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.4.24)$$

où :

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice de contraintes de rang plein,
- $b \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur second membre,
- $c \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des coefficients de la fonction objectif.
- $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables de décision.

Le simplexe fonctionne en explorant successivement des *solutions réalisables de base* (SRB), c'est-à-dire des sommets du polyèdre défini par les contraintes. À chaque itération, il vérifie si l'on peut améliorer la solution actuelle en introduisant une variable non basique dans la base.

Une solution basique est optimale si tous les coûts réduits E_j des variables hors base sont positifs :

$$E_j = u^T a_j - c_j \geq 0, \quad \forall j \in J_N \quad (3.6)$$

où :

- $u^T = c_B^T A_B^{-1}$ est le vecteur des multiplicateurs (ou potentiels),
- a_j est la colonne j de la matrice A ,
- c_B est le vecteur des coefficients de la base.

L'algorithme du simplexe

1. Calculer les coûts réduits E_j .
2. Si tous les $E_j \geq 0$, alors la solution est optimale.
3. Sinon, choisir une variable entrante x_{j_0} telle que $E_{j_0} < 0$.
4. Calculer la direction d'amélioration $l = A_B^{-1} a_{j_0}$.
5. Déterminer le pas maximal admissible :

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{x_i}{l_i} \mid l_i > 0 \right\}$$

6. Mettre à jour la base : la variable correspondante sort, la variable entrante remplace.
7. Répéter jusqu'à optimalité.

Cas particuliers

- Si aucun pas admissible θ n'existe, le problème est non borné.
- En cas de dégénérescence, des cycles peuvent survenir. Des règles comme la règle de Bland permettent d'assurer la terminaison.

Pour la résolution à la main du problème (3.4.24) il est préférable de dresser les tableaux simplexes qui présentent la forme générale suivante :

c_B	Base	b	a_1	\dots	a_m	a_{m+1}	\dots	a_n	θ
c_1	a_1	b_1	1	\dots	0	$x_{1,m+1}$	\dots	x_{1n}	θ_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
c_m	a_m	b_m	0	\dots	1	$x_{m,m+1}$	\dots	x_{mn}	θ_m
		$Z = c_B^T b$	0	\dots	0	E_{m+1}	\dots	E_n	

TABLE 3.1 – Tableau général du simplexe

Méthodes de Points Intérieurs

Les méthodes de points intérieurs, telles que l'algorithme de Karmarkar, résolvent les problèmes linéaires en parcourant l'intérieur de la région réalisable, contrairement au Simplexe qui parcourt ses bords.

Ces méthodes génèrent une séquence de points situés strictement à l'intérieur de l'ensemble des contraintes. À chaque itération, un pas est effectué dans une direction qui améliore la fonction objective tout en restant à l'intérieur, s'approchant de l'optimum le long d'une trajectoire centrale. Elles sont souvent plus efficaces pour les problèmes de très grande taille que le Simplexe[10].

Méthodes de Décomposition (Dantzig-Wolfe et Benders)

Ces méthodes sont conçues pour exploiter la structure particulière des problèmes linéaires de très grande taille, souvent issus des transformations de problèmes stochastiques. Elles décomposent le problème original en plusieurs sous-problèmes plus petits[31].

- Dantzig et Wolfe, 1960 : Elle est appliquée aux problèmes linéaires avec une structure "bloc-angulaire". Le problème est reformulé en un "problème maître" qui coordonne plusieurs "sous-problèmes". Le maître génère de nouvelles colonnes (solutions extrêmes des sous-problèmes) que les sous-problèmes calculent en fonction des prix duaux fournis par le maître.
- Benders, 1962 : Utilisée pour des problèmes avec une structure particulière où une partie des variables (décisions de première étape en stochastique) détermine un ensemble de contraintes pour les autres variables (décisions de deuxième étape ou recours). Le problème est divisé en un problème maître (pour les variables de première étape) et un ou plusieurs sous-problèmes (pour les variables de deuxième étape). Les sous-problèmes génèrent des "coupes d'optimalité" ou de "faisabilité" qui sont ajoutées itérativement au problème maître.

Méthodes Métaheuristiques

Les métaheuristiques sont des approches de recherche approximatives qui ne garantissent pas l'optimalité globale mais sont capables de trouver de très bonnes solutions pour des problèmes complexes et de grande taille en un temps raisonnable, surtout lorsque les méthodes exactes sont inapplicables ou trop lentes. Elles opèrent généralement sur une population de solutions ou une seule solution qu'elles améliorent itérativement. Elles combinent des mécanismes d'intensification (recherche locale autour de bonnes solutions) et de diversification (exploration de nouvelles régions de l'espace de recherche pour éviter les optima locaux)[11].

Exemples de métaheuristiques courantes :

- **Algorithmes Génétiques (AG)** : Inspirés de l'évolution biologique, ils opèrent sur une population de solutions candidates (chromosomes) qui évoluent à travers des opérations de sélection, croisement et mutation. Ils sont largement utilisés pour l'optimisation et la recherche[30].
- **Recuit Simulé (RS)** : Basé sur le processus de recuit en métallurgie, il explore l'espace de recherche en permettant des mouvements vers des solutions moins bonnes avec une certaine probabilité (qui diminue au fil du temps), aidant à échapper aux optima locaux. Cette probabilité est liée à une température qui décroît progressivement[34].

- **Recherche Tabou (RT)** : Maintient une liste (tabou) des mouvements récemment effectués ou des caractéristiques de solutions visitées pour éviter de revenir en arrière dans l'espace de recherche (intensification) et encourager l'exploration de nouvelles régions (diversification). Elle repose sur une mémoire à court terme et à long terme[27].
- **Optimisation par Essaim de Particules (PSO)** : Inspirée du comportement collectif des oiseaux ou des poissons, une population de particules se déplace dans l'espace de recherche, chaque particule ajustant sa trajectoire en fonction de sa propre meilleure position et de la meilleure position trouvée par l'essaim entier. C'est une métaheuristique basée sur la population[32].

3.4.3 Méthodes de résolution des problèmes fractionnaires linéaires

Les problèmes de programmation fractionnaire linéaire (PFL) sont une classe de problèmes d'optimisation où la fonction objective est un ratio de deux fonctions affines (linéaires), et les contraintes sont linéaires.

Un problème de programmation fractionnaire linéaire général peut être formulé comme suit [5] :

$$\begin{cases} \min & Z(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.4.25)$$

où $c, d \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, et $b \in \mathbb{R}^m$. On suppose généralement que le dénominateur $d^T x + \beta$ est strictement positif sur la région réalisable, afin d'éviter les singularités et de garantir que la fonction est quasi-convexe (ou quasi-concave), ce qui permet l'utilisation de méthodes d'optimisation basées sur les sommets.

Plusieurs méthodes ont été développées pour la résolution des problèmes fractionnaires linéaires, qui sont généralement classées en trois types principaux :

1. **La résolution d'un programme équivalent** : Cette catégorie de méthodes consiste à transformer le programme fractionnaire en un programme équivalent à objectif non fractionnaire (généralement linéaire), obtenu par un changement de variables. Ce processus induit souvent l'ajout d'une contrainte et d'une variable. L'exemple le plus notable de cette approche est la méthode de Charnes et Cooper [13].
2. **La résolution directe** : Ces méthodes traitent le problème sous sa forme originale, c'est-à-dire sans modifier ni la fonction objective ni l'ensemble des contraintes. Elles étendent souvent les principes des algorithmes existants pour l'optimisation linéaire. Parmi les méthodes directes, on peut citer celles proposées par Bela Martos et par Gilmore et Gomory [25].
3. **La résolution par paramétrisation** : Il s'agit de transformer le problème fractionnaire en une série de problèmes linéaires (ou non-linéaires) paramétrés. Cette approche combine linéairement le numérateur et le dénominateur de la fonction objective à l'aide d'un paramètre. La méthode de Dinkelbach est un exemple classique de cette catégorie [20].

Dans cette sections , nous détaillerons la méthode de Charnes-Cooper.

Méthode de Charnes et Cooper

Nous décrivons maintenant la méthode de Charnes et Cooper (1962) pour transformer le problème de programmation linéaire fractionnaire. Considérons le problème suivant [13] :

$$(PLF) \begin{cases} \max & F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p^T x + p_0}{q^T x + q_0}, \\ \text{s.c.} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{cases} \quad (3.4.26)$$

où A est une matrice d'ordre $(m \times n)$ et b est un vecteur de \mathbb{R}^m ; p_0, q_0 sont des réels, p et q sont des vecteurs de \mathbb{R}^n .

Soit l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ supposé non vide.

On suppose que $Q(x) > 0$ sur l'ensemble S .

Le changement de variables de Charnes et Cooper est le suivant :

$$z = \frac{1}{q^T x + q_0}, \quad y = \frac{1}{q^T x + q_0} x, \quad x = \frac{y}{z}.$$

On remplace l'expression de x dans les contraintes du problème (3.4.26), on obtient :

$$\begin{cases} A \left(\frac{y}{z} \right) = b, \\ \frac{y}{z} \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ay - bz = 0, \\ y \geq 0, z > 0. \end{cases} \quad (3.4.27)$$

On remplace l'expression de x par $\left(\frac{y}{z}\right)$ et celle de $\left(\frac{1}{q^T x + q_0}\right)$ par z dans la fonction objectif du problème (3.4.26), on obtient :

$$F\left(\frac{y}{z}\right) = p^T y + p_0 z.$$

D'où

$$(PL) \begin{cases} \max & F(y, z) = p^T y + p_0 z, \\ \text{s.c.} & Ay - bz = 0, \\ & y \geq 0, z > 0. \end{cases} \quad (3.4.28)$$

On a : $(z = \frac{1}{q^T x + q_0})$, alors $z(q^T x + q_0) = 1 \iff q^T y + q_0 z = 1$.
On ajoute cette contrainte au problème (3.4.28), on obtient le problème suivant :

$$(PLE) \begin{cases} \max & F(y, z) = p^T y + p_0 z, \\ \text{s.c.} & Ay - bz = 0, \\ & q^T y + q_0 z = 1, \\ & y \geq 0, z > 0. \end{cases} \quad (3.4.29)$$

Proposition 1 [40] Si (y, z) est une solution réalisable du problème (3.4.29), alors $z > 0$.

Nous démontrons maintenant que si (\bar{y}, \bar{z}) est une solution optimale du programme linéaire (3.4.29), alors $\bar{x} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}}$ est une solution optimale du problème (3.4.26). Supposons que (\bar{y}, \bar{z}) , avec $\bar{z} = \frac{1}{q^T \bar{x} + q_0}$ et $\bar{y} = \bar{z} \bar{x}$, est une solution du problème (3.4.29).

Pour montrer l'optimalité de \bar{x} , soit x une solution réalisable quelconque du problème (3.4.26), i.e

$$Ax = b, \quad x \geq 0.$$

On suppose que $q^T x + q_0 > 0$ et (y, z) est une solution réalisable du problème (3.4.29), avec $z = \frac{1}{q^T x + q_0}$ et $y = zx$.

Comme (\bar{y}, \bar{z}) est une solution optimale du problème (3.4.29), alors $p^T \bar{y} + p_0 \bar{z} \geq p^T y + p_0 z$.
En remplaçant y par zx et \bar{y} par $\bar{z} \bar{x}$, l'inégalité précédente devient

$$\bar{z}(p^T \bar{x} + p_0) \geq z(p^T x + p_0) \iff \frac{p^T \bar{x} + p_0}{q^T \bar{x} + q_0} \geq \frac{p^T x + p_0}{q^T x + q_0}.$$

D'où l'optimalité de \bar{x} pour le problème (3.4.26).

Dans le cas où $q^T x + q_0 < 0$ pour tout point $x \in S$, alors on pose $z = \frac{-1}{q^T x + q_0}$ et $y = zx$. Ceci nous donne le programme linéaire suivant :

$$(PLE) = \begin{cases} \max & F(y, z) = -p^T y - p_0 z, \\ \text{s.c.} & Ay - bz = 0, \\ & -q^T y - q_0 z = 1, \\ & y \geq 0, z > 0. \end{cases} \quad (3.4.30)$$

D'une manière similaire, si (\bar{y}, \bar{z}) est une solution optimale du problème (3.4.29), alors $\bar{x} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}}$ est une solution optimale du problème (3.4.26).

Exemple 2 Cet exemple est inspiré du modèle présenté dans [5, 37].

Supposons qu'un conseiller financier des fonds de dotation d'une université peut investir jusqu'à 100000 DA dans deux types de titres : l'obligation 7Start avec un dividende de 7%, et l'action MaxMay avec un dividende de 9%. Le conseiller a été informé qu'il ne doit pas investir plus de 30000 DA dans l'action MaxMay, tandis que le montant à investir en obligation 7Stars doit être au moins deux fois le montant à investir en actions MaxMay. Indépendamment du montant à investir dans les deux titres, la société de courtage qui informe le conseiller coûte 100 DA (société qui donne des informations sur des investissements préalables).

Objectif

On cherche à trouver la somme que doit investir le conseiller financier pour chaque titre afin de maximiser l'efficacité de son investissement.

Modélisation du problème

Soit x_1 et x_2 les deux variables de décision qui représentent les montants à investir en obligation 7Start et en action MaxMay, respectivement. Nous avons alors :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100000, \\ x_1 \geq 2x_2, \\ x_2 \leq 30000. \end{cases} \quad (3.4.31)$$

Bien sûr, nous avons aussi $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

Le bénéfice de l'université est donné par :

$$P(x) = 0.07x_1 + 0.09x_2.$$

Tandis que le montant total de l'investissement est :

$$Q(x) = x_1 + x_2 + 100.$$

L'objectif de ce problème est de maximiser le rapport bénéfice sur le coût total de l'investissement, donné par :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0.07x_1 + 0.09x_2}{x_1 + x_2 + 100}.$$

Ainsi, le modèle mathématique de ce problème est :

$$\max F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0.07x_1 + 0.09x_2}{x_1 + x_2 + 100}, \quad (3.4.32)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100000, \\ x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_2 \leq 30000, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (3.4.33)$$

La transformation de Charnes et Cooper

Pour rendre le problème (3.4.32) - (3.4.33) sous forme standard, on ajoute des variables d'écart x_3, x_4 et x_5 aux contraintes principales du problème et on aura :

$$\max F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0.07x_1 + 0.09x_2}{x_1 + x_2 + 100}. \quad (3.4.34)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 100000, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_5 = 30000, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 5. \end{cases} \quad (3.4.35)$$

En utilisant le changement de variable de Charnes et Cooper pour le PLF (3.4.34) - (3.4.35) :

$$z = \frac{1}{x_1 + x_2 + 100}, \quad y = \frac{1}{x_1 + x_2 + 100}x, \quad x = \frac{y}{z},$$

on aura le problème équivalent suivant :

$$\max F(y, z) = 0.07y_1 + 0.09y_2 \quad (3.4.36)$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 - 100000z = 0, \\ y_1 - 2y_2 - y_4 = 0, \\ y_2 + y_5 - 30000z = 0, \\ y_1 + y_2 + 100z = 1, \\ y_i \geq 0, \quad i = 1, 5, \quad z > 0. \end{cases} \quad (3.4.37)$$

Conclusion

L'optimisation, en tant qu'outil mathématique, permet de structurer les décisions dans des contextes complexes où interviennent des objectifs à maximiser ou à minimiser, souvent sous contraintes multiples. Lorsqu'elle est confrontée à l'incertitude, comme c'est le cas pour les rendements financiers, elle se développe sous des formes plus sophistiquées, telles que la programmation stochastique ou la programmation fractionnaire.

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue les principales structures mathématiques mobilisées pour modéliser ces problèmes, en commençant par la programmation linéaire classique, puis en intégrant l'incertitude à travers les modèles stochastiques. Nous avons présenté différentes approches de transformation permettant d'obtenir un modèle déterministe équivalent, préalable indispensable à toute résolution numérique. La programmation linéaire fractionnaire, plus adaptée aux ratios comme le rendement net, a également été étudiée avec ses méthodes spécifiques de linéarisation.

Enfin, nous avons introduit plusieurs méthodes de résolution, allant des approches exactes comme le simplexe, aux techniques adaptées aux modèles fractionnaires, telles que la transformation de Charnes-Cooper. Ces outils seront mis en œuvre dans le chapitre suivant, à travers un cas pratique d'allocation optimale de capital sur le marché boursier algérien.

4

Exemple d'application

Plusieurs problématiques réelles peuvent être formulées sous forme d'un modèle d'optimisation stochastique fractionnaire-linéaire. Dans ce chapitre, nous présentons un exemple d'application basé sur le marché financier algérien, plus précisément sur les actions cotées à la Bourse d'Alger. Nous considérons un problème d'allocation optimale d'un budget d'investissement entre deux titres financiers, en tenant compte de l'incertitude sur les rendements.

Nous commençons par définir le modèle mathématique du problème, en intégrant les contraintes financières et réglementaires spécifiques au contexte algérien. Ensuite, nous transformons le problème stochastique en un modèle déterministe équivalent à l'aide de deux approches : l'utilisation de la moyenne arithmétique des rendements, puis l'estimation de leur densité par la méthode du noyau. Les deux formulations obtenues sont ensuite résolues à l'aide de la méthode de Charnes et Cooper. Enfin, nous utilisons une simulation de Monte Carlo pour estimer empiriquement l'espérance de la fonction objectif sur l'espace admissible, afin de comparer les résultats avec les solutions déterministes précédentes.

4.1 Logiciels utilisés

4.1.1 Logiciel Excel

Généralités sur Excel :

Microsoft Excel est un tableur largement utilisé pour la gestion, l'analyse et la visualisation de données numériques. Il permet d'effectuer des calculs automatiques, de construire des tableaux, de représenter graphiquement des données et d'appliquer des fonctions statistiques de base.

Utilisation dans notre étude :

Dans le cadre de notre travail, Excel a été utilisé pour le traitement initial des données issues de la Bourse d'Alger, notamment le calcul des rendements mensuels des actions étudiées.

4.1.2 Logiciel R

Généralités sur R :

R est un langage et un environnement libre dédié à l'analyse statistique et à la visualisation des données. Il est particulièrement adapté aux traitements statistiques avancés, à l'estimation de modèles, et à la production de graphiques de haute qualité.

Utilisation dans notre étude :

R a été utilisé pour l'étude statistique des rendements, notamment pour tester l'hypothèse de normalité et pour estimer la densité des rendements à l'aide de la méthode du noyau.

4.1.3 Logiciel LINGO

Généralités sur LINGO :

LINGO est un logiciel d'optimisation mathématique conçu pour résoudre des programmes linéaires, non linéaires, entiers et stochastiques. Il dispose d'une interface intuitive et d'un langage de modélisation compact facilitant la formulation de problèmes complexes.

Utilisation dans notre étude :

LINGO a été utilisé pour la résolution numérique des programmes linéaires et fractionnaires obtenus après transformation du modèle initial. Il nous a permis d'obtenir des solutions optimales.

4.1.4 Logiciel Matlab

Généralités sur Matlab :

Matlab est un logiciel spécialisé dans le calcul scientifique, le traitement du signal et l'analyse numérique. Il est particulièrement performant pour le calcul matriciel et la visualisation graphique.

Utilisation dans notre étude :

Matlab a été utilisé pour résoudre notre modèle par simulation, dans le cadre de l'approche stochastique. Sa flexibilité, sa capacité à gérer des volumes importants de données, et ses bibliothèques statistiques en font un outil adéquat pour cette partie de notre travail.

4.2 Problématique

Dans un contexte économique en constante évolution, la question de l'investissement occupe une place centrale dans les décisions financières, tant pour les particuliers que pour les institutions. Investir consiste à placer un capital dans un ou plusieurs actifs dans le but d'en tirer un rendement futur. Cependant, cette démarche comporte des incertitudes liées aux fluctuations des marchés, aux contraintes budgétaires, ainsi qu'aux objectifs propres à chaque investisseur.

Dans le contexte algérien, bien que la Bourse d'Alger soit encore modeste en taille et en volume, elle propose certains titres d'entreprises solides, susceptibles d'attirer les investisseurs locaux. C'est dans cette optique qu'un investisseur algérien envisage de placer un capital d'un montant initial de 1 200 000 DA sur le marché boursier national.

Il s'intéresse plus particulièrement à deux titres cotés à la Bourse d'Alger :

- Biopharm, acteur majeur du secteur pharmaceutique.
- Alliances Assurances, société spécialisée dans les services d'assurance.

Toutefois, plusieurs éléments viennent complexifier sa prise de décision. D'une part, le capital réellement mobilisable peut varier selon les circonstances, oscillant entre 800 000 DA dans un scénario pessimiste et 1 200 000 DA dans un scénario favorable. D'autre part, des frais de transaction sont systématiquement prélevés lors de chaque opération d'achat, réduisant le montant effectivement investi. À cela s'ajoutent des exigences de diversification (par exemple, ne pas investir plus de 50% sur un seul actif) et l'incertitude inhérente aux rendements futurs, influencés par des facteurs économiques, réglementaires et sectoriels propres au marché algérien.

Dans ce contexte, une question fondamentale se pose :

Comment un investisseur algérien peut-il répartir de manière optimale un capital compris entre 800 000 et 1 200 000 DA entre deux actions cotées, tout en tenant compte des frais de transaction, des contraintes de diversification et de l'incertitude sur les rendements futurs ?

4.3 Modélisation mathématique du problème

L'objectif est de formaliser mathématiquement le problème d'allocation de capital entre deux actifs financiers cotés à la Bourse d'Alger.

Soit :

- x_1 : montant investi dans l'action Biopharm (en DA),
- x_2 : montant investi dans l'action Alliances Assurances (en DA),
- R_1 : rendement unitaire de l'action Biopharm,
- R_2 : rendement unitaire de l'action Alliances Assurances,
- B : budget total disponible pour l'investissement,
- f : taux des frais de transaction.

Le gain total espéré issu de l'investissement est donné par la fonction :

$$P(x_1, x_2) = R_1 x_1 + R_2 x_2$$

Le coût global engagé, incluant les frais de transaction proportionnels, est exprimé par :

$$Q(x_1, x_2) = (1 + f)(x_1 + x_2)$$

Dans ce contexte, le critère d'évaluation de la stratégie d'allocation n'est pas simplement le profit absolu, mais le rendement effectif par unité de coût engagé. Il s'agit d'une approche particulièrement pertinente lorsqu'on cherche à tenir compte de la rentabilité relative de l'investissement en présence de frais fixes ou proportionnels.

Ce raisonnement conduit naturellement à l'adoption d'un modèle fractionnaire-linéaire, dans lequel la fonction objectif prend la forme suivante :

$$F(x_1, x_2) = \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{(1 + f)(x_1 + x_2)}$$

où R_1 et R_2 désignent les rendements des actifs 1 et 2, et f représente les frais de transaction proportionnels.

Ce type de fonction objective s'apparente au concept économique bien connu de ratio avantages-coûts (ou **BCR** pour Benefit-Cost Ratio), un indicateur financier clé utilisé pour évaluer la rentabilité et l'efficacité d'un projet ou d'un investissement. Le BCR compare la valeur actualisée des bénéfices (ou avantages) à la valeur actualisée des coûts totaux sur la durée de vie du projet.

Contraintes du modèle

Le problème est soumis aux conditions suivantes :

1. Contraintes budgétaires : le montant total investi ne peut pas dépasser le budget disponible :

$$x_1 + x_2 \leq B$$

2. Diversification du portefeuille : l'investisseur souhaite répartir son budget de manière équilibrée, en limitant l'allocation à un actif à 50% du total investi :

$$x_1 \leq 0,5B, \quad x_2 \leq 0,5B$$

3. Non-négativité des variables :

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Modèle mathématique

Le problème d'optimisation se résume alors au programme suivant :

$$\max F(x_1, x_2) = \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{(1 + f)(x_1 + x_2)} \quad (4.3.1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq B \\ x_1 \leq 0,5B \\ x_2 \leq 0,5B \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

4.3.1 Calcul des paramètres du modèle

Paramètre de la fonction objectif

Les rendements utilisés dans notre étude ont été calculés à partir de données réelles, disponibles sur le site officiel de la Société de Gestion de la Bourse des Valeurs (sgbv.dz). Ils tiennent compte :

- des dates effectives de versement de dividendes ;
- des cours de clôture journaliers disponibles entre chaque couple de versements.

Les rendements ont été calculés selon la formule [50] :

$$\text{Rendement du dividende} = (\text{dividendes annuels par action} / \text{prix actuel de l'action}) \times 100$$

Dans le cadre de notre étude, cette formule a été adaptée comme suit :

$$R_i = \frac{D_i}{\bar{P}_i} \times 100 \quad (4.3.3)$$

où :

- D_i est le dividende versé à la fin de la période i ,
- \bar{P}_i est le prix moyen de l'action entre le jour suivant le versement précédent et la veille du versement actuel.

Les données utilisées dans cette étude proviennent du site officiel de la Bourse d'Alger www.sgbv.dz. Deux types d'informations ont été extraits :

- Les cours de clôture journaliers et les dates de versement des dividendes, directement disponibles sur le site officiel de la Bourse (données observées);
- Les prix moyens \bar{P}_i et les rendements R_i , calculés à partir des données extraites selon la formule 4.3.3.

Les tableaux suivants récapitulent l'ensemble des données utilisées pour le calcul des rendements :

TABLE 4.1 – Paramètres calculés pour Alliances Assurances (ALL)

Période	Dividende D_i (DA)	Prix moyen \bar{P}_i (DA)	Rendement R_i (%)
05/06/2015–16/06/2016	35	553,7037	6,32
17/06/2016–18/06/2017	45	461,7327	9,75
19/06/2017–26/07/2018	45	419,6983	10,72
27/07/2018–30/07/2019	45	427,6897	10,52
31/07/2019–27/07/2020	50	413,7460	12,08
28/07/2020–27/07/2021	32	301,8105	10,60
28/07/2021–27/07/2022	35	307,7273	11,37
28/07/2022–31/08/2023	35	411,4471	8,51
01/09/2023–12/09/2024	30	428,9623	6,99

TABLE 4.2 – Paramètres calculés pour Biopharm (BIO)

Période	Dividende D_i (DA)	Prix moyen \bar{P}_i (DA)	Rendement R_i (%)
16/08/2016–31/07/2017	66	1210,051	5,45
01/08/2017–31/07/2018	100	1059,087	9,44
01/08/2018–01/09/2019	115	1200,442	9,58
02/09/2019–31/08/2020	115	1209,219	9,51
01/09/2020–01/08/2021	115	1216,440	9,45
02/08/2021–31/08/2022	175	1386,437	12,62
01/09/2022–31/08/2023	134	2279,090	5,88
01/09/2023–02/09/2024	180	2345,805	7,67

Par ailleurs, conformément au règlement n°09-03, article 2, relatif aux conditions de fonctionnement de la Bourse d'Alger, les frais de transaction applicables aux opérations d'achat ou de vente sont définis comme suit :

- Pour les **titres de capital** (actions) : une commission de **0,15 % du montant de la transaction**, perçue par la Société de Gestion de la Bourse des Valeurs (SGBV);
- Pour les **titres de créance** (obligations) : une commission de **0,10 % du montant de la transaction**.

Cette commission est à la charge de l'acheteur et du vendeur. Elle est perçue par l'intermédiaire agréé (IOB) lors de chaque opération. Toutefois, le montant total de cette commission est encadré par les seuils suivants :

$$\text{Montant minimum} = 10 \text{ DA}, \quad \text{Montant maximum} = 100\,000 \text{ DA}.$$

Dans notre cas d'étude, puisque les deux actifs considérés sont des titres de capital, une commission de **0,15 %** s'applique sur chaque transaction d'achat. Cela justifie la prise en compte d'un taux fixe $f = 0,0015$ dans le modèle de coût global de l'investissement.

Paramètres des contraintes

Les paramètres associés aux contraintes sont définis comme suit :

1. Intervalle budgétaire : Le capital total disponible pour l'investissement n'est pas parfaitement connu, mais appartient à un intervalle d'incertitude, en raison de facteurs comme des imprévus ou des disponibilités bancaires fluctuantes. Ainsi, le budget total appartient à l'intervalle :

$$B \in [800\,000, 1\,200\,000] \text{ DA}$$

2. Contrainte de diversification : Pour éviter une concentration excessive sur un seul actif et favoriser une gestion équilibrée, on impose qu'aucun actif ne représente plus de 50 % du capital investi. Cette contrainte s'écrit, pour les variables de décision x_1 et x_2 représentant les montants investis dans Alliances Assurances (ALL) et Biopharm (BIO) :

$$x_1 \leq 0,5B \quad \text{et} \quad x_2 \leq 0,5B$$

Modèle mathématique

Le problème d'optimisation peut être formulé comme suit :

$$\max_{x_1, x_2} F(x_1, x_2) = \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{(1.0015)(x_1 + x_2)} \quad (4.3.4)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 800\,000 \leq x_1 + x_2 \leq 1\,200\,000 \\ 400\,000 \leq x_1 \leq 600\,000 \\ 400\,000 \leq x_2 \leq 600\,000 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Remarque 7 Ce modèle repose sur des paramètres incertains. En effet, les rendements R_1 et R_2 ainsi que le budget B ne sont pas fixés de manière déterministe, mais peuvent varier selon les conditions du marché. Il s'agit donc d'un modèle à caractère stochastique.

4.3.2 Étude statistique

Dans cette section, nous analysons les rendements calculés pour les deux actions étudiées (Biopharm et Alliances Assurances) afin de déterminer la loi de probabilité la plus appropriée. Cette analyse a été réalisée à l'aide du logiciel R, en mobilisant plusieurs outils statistiques :

- la visualisation graphique par histogrammes empiriques ;
- les tests de normalité classiques : Shapiro–Wilk, Kolmogorov–Smirnov, Anderson–Darling ;
- une comparaison d'ajustement aux lois usuelles : normale, uniforme, exponentielle, lognormale.

Les deux figures suivantes illustrent la répartition empirique des rendements, à travers des histogrammes :

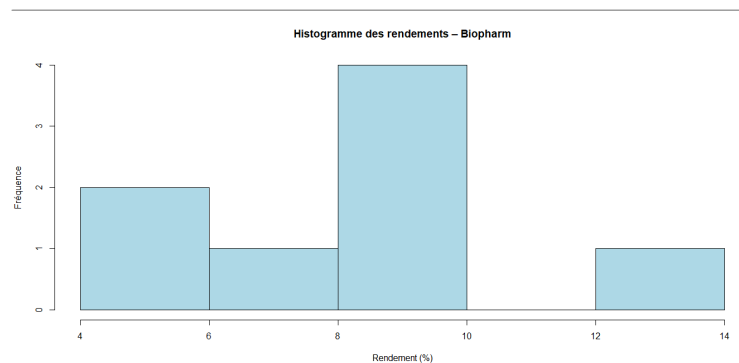


FIGURE 4.1 – Histogramme des rendements – Biopharm

L'histogramme des rendements de Biopharm montre une répartition relativement concentrée entre 8 % et 10 %, qui constitue la classe la plus fréquente. La distribution semble modérément asymétrique, avec un léger étalement vers les rendements les plus élevés (jusqu'à 14 %).

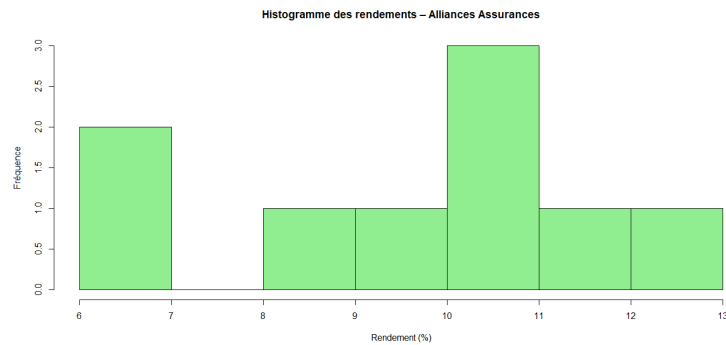


FIGURE 4.2 – Histogramme des rendements – Alliances Assurances

L'histogramme des rendements d'Alliances Assurances révèle une concentration des observations autour de la classe [10 %; 11 %], qui représente la fréquence la plus élevée. La distribution présente une certaine dispersion, avec des rendements allant de 6 % à 13 %, mais sans extrême marquant ni pic isolé.

Les résultats numériques des tests de normalité appliqués aux deux séries de rendements sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

TABLE 4.3 – Résultats des tests de normalité pour les deux actifs

Test	Actif	p-value	Seuil $\alpha = 0,05$	Décision
Shapiro–Wilk	Biopharm	0,3349	$> 0,05$	H_0 non rejetée
Shapiro–Wilk	Alliances	0,3316	$> 0,05$	H_0 non rejetée
Kolmogorov–Smirnov	Biopharm	0,6113	$> 0,05$	H_0 non rejetée
Kolmogorov–Smirnov	Alliances	0,6697	$> 0,05$	H_0 non rejetée
Anderson–Darling	Biopharm	0,1902	$> 0,05$	H_0 non rejetée
Anderson–Darling	Alliances	0,2781	$> 0,05$	H_0 non rejetée

Les résultats obtenus montrent que, pour les deux actions, toutes les p-values issues des tests de normalité sont supérieures au seuil de signification $\alpha = 0,05$. Cela signifie que l'hypothèse nulle de normalité H_0 ne peut être rejetée, suggérant une compatibilité statistique des rendements avec une loi normale.

Cependant, malgré cette acceptation formelle, une observation plus fine des histogrammes révèle que la structure empirique des données ne correspond pas parfaitement à une courbe normale théorique. Ainsi, la normalité statistique apparente ne garantit pas une modélisation adéquate des rendements par une loi normale.

Alors, une étude comparative globale des distributions a été menée. Celle-ci consiste à confronter la densité empirique des rendements, estimée par la méthode du noyau, à plusieurs lois théoriques classiques, dans le but d'identifier celle qui pourrait le mieux représenter les données observées.

Cette approche graphique présente un double intérêt :

- elle permet de visualiser la forme réelle de la distribution des rendements sans imposer de structure paramétrique a priori ;
- elle facilite une évaluation intuitive de la pertinence des ajustements proposés par les lois usuelles, telles que la loi normale, la loi uniforme, la loi lognormale ou la loi exponentielle.

Les figures ci-dessous illustrent ces comparaisons pour chacun des deux titres étudiés :

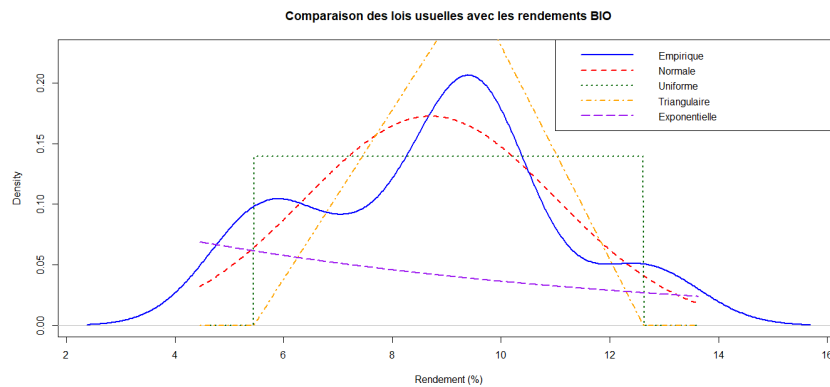


FIGURE 4.3 – Comparaison des densités – Biopharm

Pour Biopharm, la densité empirique présente une forme légèrement asymétrique avec un pic principal entre 8 % et 10 %. Aucune des lois théoriques testées ne parvient à reproduire précisément cette forme. La loi normale propose un ajustement modéré, tandis que la lognormale et l'exponentielle semblent inadaptées, en particulier dans les extrémités de la distribution.

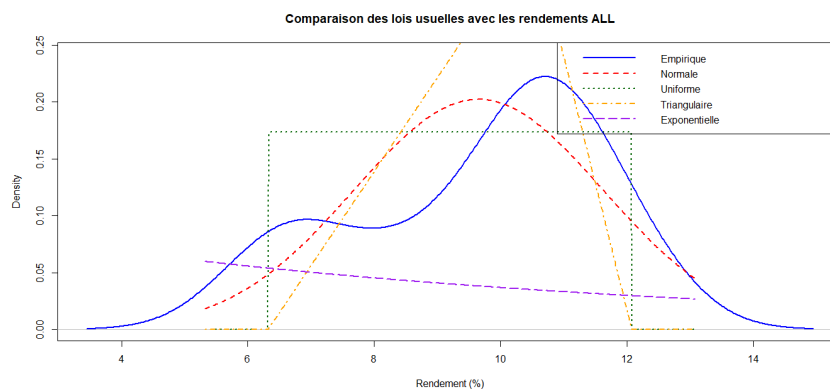


FIGURE 4.4 – Comparaison des densités – Alliances Assurances

Concernant Alliances Assurances, la densité empirique présente un sommet clair autour de 10 %, mais également une certaine dispersion sur l'intervalle [6 % ; 13 %]. Là encore, les lois testées ne parviennent pas à capturer avec précision la forme observée. La loi normale fournit un ajustement acceptable au centre, mais échoue à représenter les queues de distribution. La loi exponentielle, quant à elle, est nettement inadéquate.

Les mesures numériques associées à cette comparaison sont résumées dans le tableau suivant, à l'aide de trois critères :

- **AIC** (Akaike Information Criterion), où une valeur plus faible indique un meilleur ajustement ;
- **KS** (Kolmogorov–Smirnov) ;
- **AD** (Anderson–Darling), où une plus faible statistique traduit également un meilleur ajustement.

TABLE 4.4 – Comparaison des lois d’ajustement pour les deux titres

Titre	Loi	AIC	KS	AD
Biopharm	Normale	39.06	0.259	0.493
	Uniforme	35.52	0.299	∞
	Lognormale	39.35	0.294	0.562
	Exponentielle	52.61	0.466	2.173
Alliances	Normale	40.71	0.235	0.445
	Uniforme	35.52	0.285	∞
	Lognormale	41.95	0.250	0.575
	Exponentielle	60.81	0.480	2.729

D’après ce tableau, on remarque que la loi uniforme affiche un AIC plus faible pour les deux titres, mais elle est disqualifiée par l’indication d’un ajustement très médiocre selon le test d’Anderson–Darling (valeur infinie). La loi normale obtient des résultats globalement meilleurs que les autres lois testées, mais sans offrir un ajustement entièrement satisfaisant. Enfin, les lois exponentielle et lognormale produisent des écarts notables entre la densité empirique et la densité théorique.

Ni la loi normale, ni aucune des lois usuelles testées ne permet une modélisation pleinement satisfaisante des rendements étudiés. Cela justifie le recours à une estimation non paramétrique de la densité, mieux adaptée pour capturer la forme réelle de la distribution.

Méthode du noyau

Plutôt que d’imposer une forme paramétrique à la distribution des rendements, nous avons opté pour une approche non paramétrique, à savoir l’estimation de la densité de probabilité par la méthode du noyau. Cette méthode permet d’obtenir une estimation lisse de la distribution, fondée directement sur les données observées, sans hypothèse préalable sur la loi suivie.

L’expression générale de la densité estimée est donnée par la formule suivante :

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

où :

- x_i représentent les rendements observés ;
- $K(\cdot)$ est la fonction noyau utilisée ;
- h désigne la bande passante (paramètre de lissage) ;
- n est le nombre total d’observations.

Dans notre étude, nous avons utilisé le noyau gaussien, car il présente plusieurs avantages :

- il produit une densité continue et sans discontinuités ;
- il est symétrique et d’usage courant dans les études empiriques ;
- son support infini permet une bonne approximation même pour des petits échantillons.

Remarque 8 La bande passante h a été automatiquement estimée par le logiciel **R** à l’aide de la règle de Silverman.

Densité de probabilité des rendements – Biopharm (méthode du noyau)

$$\hat{f}_{\text{BIO}}(x) = \frac{1}{8 \cdot h_{\text{BIO}} \sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^8 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_i}{h_{\text{BIO}}}\right)^2\right)$$

où $h_{\text{BIO}} = 1.021388$, et $x_i \in \{5.45, 9.44, 9.58, 9.51, 9.45, 12.62, 5.88, 7.67\}$.

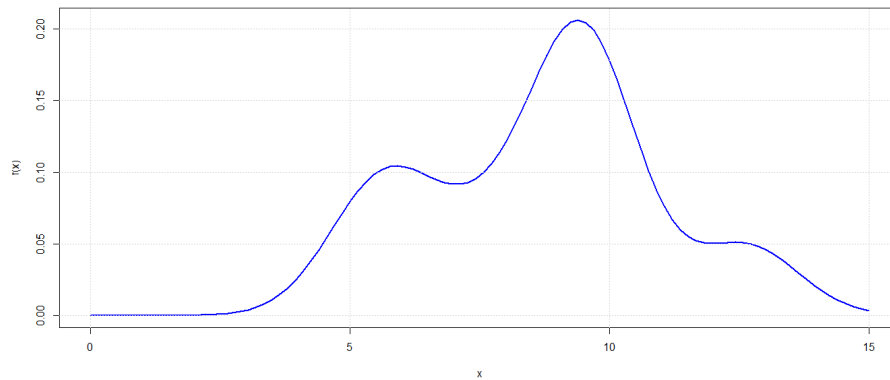


FIGURE 4.5 – Densité estimée par noyau – Biopharm

La densité estimée présente une structure clairement asymétrique avec deux modes distincts : l'un situé autour de 6 %, et l'autre plus marqué près de 10 %. Cette forme suggère l'existence de deux sous-périodes dans les rendements. La queue droite plus étendue indique aussi la présence de rendements relativement élevés dans certaines périodes.

Densité de probabilité des rendements – Alliances Assurances (méthode du noyau)

$$\hat{f}_{ALL}(x) = \frac{1}{9 \cdot h_{ALL} \sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^9 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_i}{h_{ALL}}\right)^2\right)$$

où $h_{ALL} = 0.9564923$, et $x_i \in \{6.32, 9.75, 10.72, 10.52, 12.08, 10.60, 11.37, 8.51, 6.99\}$.

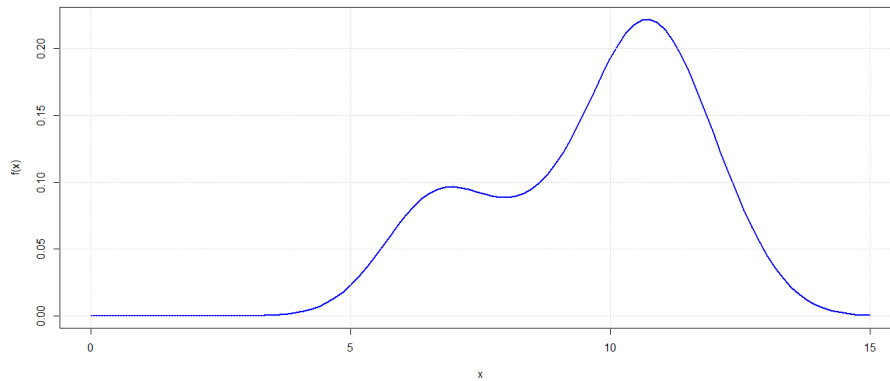


FIGURE 4.6 – Densité estimée par noyau – Alliances Assurances

La densité estimée pour Alliances Assurances présente une structure clairement asymétrique avec deux modes distincts : l'un situé autour de 7 %, et l'autre plus marqué près de 10,5 %. Cette forme suggère l'existence de deux sous-périodes dans les rendements. La queue gauche plus étendue indique aussi la présence de rendements relativement faibles dans certaines années.

Ainsi, le modèle mathématique (4.3.4) - (4.3.5) devient :

$$\max_{x_1, x_2} F(x_1, x_2) = \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{(1.0015)(x_1 + x_2)} \quad (4.3.6)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq B \\ x_1 \leq 0,5B \\ x_2 \leq 0,5B \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Où :

- $R_1 \sim \tilde{f}_{\text{BIO}}$: variable aléatoire représentant le rendement annuel de l'action Biopharm, suivant la densité de probabilité estimée par la méthode du noyau ;
- $R_2 \sim \tilde{f}_{\text{ALL}}$: variable aléatoire représentant le rendement annuel de l'action Alliances Assurances, suivant la densité de probabilité estimée par la méthode du noyau ;
- $B \in [800\,000, 1\,200\,000]$: budget total disponible à l'investissement ;

4.4 Résolution

Partie I : Résolution du problème équivalent

Transformation du problème stochastique en un problème déterministe

Le modèle initial formulé (4.3.6) - (4.3.7) est un programme fractionnaire-linéaire stochastique, où les rendements R_1 (Biopharm) et R_2 (Alliances Assurances) sont des variables aléatoires. Pour pouvoir résoudre ce problème de manière déterministe, nous devons d'abord considérer l'espérance mathématique de la fonction objectif aléatoire.

Soit la fonction objectif :

$$f(x) = \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{1,0015(x_1 + x_2)}$$

Nous notons $\tilde{f}(x)$ son espérance :

$$\tilde{f}(x) = \mathbb{E}[f(x)] = \mathbb{E}\left[\frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{1,0015(x_1 + x_2)}\right] \quad (4.4.1)$$

$$= \frac{1}{1,0015(x_1 + x_2)} \cdot \mathbb{E}[R_1 x_1 + R_2 x_2] \quad (4.4.2)$$

$$= \frac{1}{1,0015(x_1 + x_2)} \cdot (x_1 \cdot \mathbb{E}[R_1] + x_2 \cdot \mathbb{E}[R_2]) \quad (4.4.3)$$

Ainsi, le passage d'un modèle stochastique à un modèle déterministe revient à remplacer les rendements aléatoires R_1 et R_2 par leurs espérances mathématiques respectives $\mathbb{E}[R_1]$ et $\mathbb{E}[R_2]$.

Pour estimer ces espérances, deux approches ont été retenues :

- **La moyenne arithmétique classique**, calculée à partir des rendements historiques :

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$$

- **La moyenne estimée à partir de la densité de probabilité par noyau**, fournie par la fonction density() sous R. Cette moyenne est définie par :

$$\mu_{\text{noyau}} = \int x \cdot \hat{f}_h(x) dx$$

où $\hat{f}_h(x)$ est la densité estimée à l'aide d'un noyau de lissage de largeur h .

Remarque 9 Il est important de noter que ces deux moyennes ne coïncident pas nécessairement. La moyenne arithmétique ne tient pas compte de la forme de la distribution, tandis que la moyenne estimée par noyau est influencée par le lissage et la bande passante choisie.

Les résultats numériques obtenus pour les deux types de moyennes sont présentés dans le tableau suivant :

TABLE 4.5 – Comparaison des deux méthodes d'estimation des moyennes

Titre	\bar{R} (arithmétique)	μ_{noyau} (noyau)	Erreur absolue	Erreur relative (%)
Biopharm	8,70	9,035	0,335	3,85%
Alliances Assurances	9,65	9,20	0,45	4,66%

Les écarts entre les deux méthodes d'estimation sont modérés. On observe un effet de lissage introduit par la méthode du noyau, qui tend à réduire les extrêmes de la distribution. La différence relative ne dépasse pas 5%, ce qui suggère une stabilité raisonnable du rendement moyen malgré la méthode choisie.

Afin d'évaluer l'impact de la méthode d'estimation des rendements sur la solution optimale, nous allons résoudre le modèle d'optimisation deux fois :

- une première fois en utilisant les moyennes arithmétiques,
- une seconde fois en utilisant les moyennes estimées par la méthode du noyau.

A. Résolution directe

Dans cette section, nous résolvons directement le programme de type fractionnaire-linéaire, en remplaçant les variables aléatoires par les valeurs estimées. Le logiciel LINGO a été utilisé pour obtenir les solutions numériques.

i) Résolution avec la moyenne arithmétique

Nous remplaçons les variables aléatoires par leurs moyennes arithmétiques :

$$R_1 = 8,70, \quad R_2 = 9,65$$

Le problème devient :

$$\max \tilde{f}(x) = \frac{8,70x_1 + 9,65x_2}{1,0015 \cdot (x_1 + x_2)} \quad (4.4.4)$$

Sous contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 800\,000 \\ x_1 + x_2 \leq 1\,200\,000 \\ x_1 \geq 400\,000 \\ x_1 \leq 600\,000 \\ x_2 \geq 400\,000 \\ x_2 \leq 600\,000 \end{cases} \quad (4.4.5)$$

On utilise LINGO pour résoudre le programme fractionnaire (4.4.4)–(4.4.5) (voir figure 4.7)

```

Licensee info: Eval Use Only
License expires: 9 DEC 2025

Local optimal solution found.
Objective value:                9.256116
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:         5
Best multistart solution found at step: 1
Total solver iterations:       20
Elapsed runtime seconds:       0.59

Model Class:                    NLP

Total variables:                2
Nonlinear variables:           2
Integer variables:              0

Total constraints:              9
Nonlinear constraints:         1

Total nonzeros:                12
Nonlinear nonzeros:            2

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	400000.0	0.000000
X2	600000.0	-0.3794309E-06

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9.256116	1.000000
2	200000.0	0.000000
3	200000.0	0.000000
4	0.000000	-0.5691463E-06
5	200000.0	0.000000
6	200000.0	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	400000.0	0.000000
9	600000.0	0.000000

FIGURE 4.7 – Solution obtenue sous LINGO – Cas moyenne arithmétique

La solution obtenue est :

$$x = (x_1 = 400\,000, x_2 = 600\,000) \quad \text{avec valeur de la fonction objectif } \tilde{f}(x) = 9,256116$$

ii) Résolution avec la moyenne estimée par la densité par noyau

Nous remplaçons les variables aléatoires par les moyennes estimées à partir de l'estimation de densité par noyau :

$$\mathbb{R}_1 = 9,035, \quad \mathbb{R}_2 = 9,200$$

Le problème devient :

$$\max \tilde{f}(x) = \frac{9,035x_1 + 9,200x_2}{1,0015 \cdot (x_1 + x_2)} \quad (4.4.6)$$

Sous contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 800\,000 \\ x_1 + x_2 \leq 1\,200\,000 \\ x_1 \geq 400\,000 \\ x_1 \leq 600\,000 \\ x_2 \geq 400\,000 \\ x_2 \leq 600\,000 \end{cases} \quad (4.4.7)$$

On utilise LINGO pour résoudre le programme fractionnaire (4.4.6)–(4.4.7) (voir figure 4.8)

```

Licensee info: Eval Use Only
License expires: 9 DEC 2025

Local optimal solution found.
Objective value:                9.120320
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:         5
Best multistart solution found at step: 1
Total solver iterations:       20
Elapsed runtime seconds:       0.32

Model Class:                    NLP

Total variables:                2
Nonlinear variables:           2
Integer variables:              0

Total constraints:              9
Nonlinear constraints:         1

Total nonzeros:                12
Nonlinear nonzeros:            2

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	400000.0	0.000000
X2	600000.0	-0.6590115E-07

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9.120320	1.000000
2	200000.0	0.000000
3	200000.0	0.000000
4	0.000000	-0.9885172E-07
5	200000.0	0.000000
6	200000.0	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	400000.0	0.000000
9	600000.0	0.000000

FIGURE 4.8 – Solution obtenue sous LINGO – Cas moyenne par noyau

La solution obtenue est :

$$x = (x_1 = 400\,000, x_2 = 600\,000) \quad \text{avec valeur de la fonction objectif } \tilde{f}(x) = 9,120320$$

Comparaison après résolution directe du modèle fractionnaire

TABLE 4.6 – Résultats de la résolution directe pour les deux types de moyenne

Type de moyenne	$\mathbb{E}[R_1]$	$\mathbb{E}[R_2]$	$\tilde{f}(x)$
Moyenne arithmétique	8,70	9,65	9,256116
Moyenne par noyau	9,035	9,200	9,120320
Erreur absolue	–		0,135796
Erreur relative (%)	–		1,47 %

La différence entre les deux valeurs optimales obtenues selon le type de moyenne utilisé est relativement faible, avec une erreur absolue de 0,135796 et une erreur relative de seulement 1,47%. Cela montre que, bien que les moyennes issues de la méthode du noyau soient légèrement supérieures à celles calculées de façon arithmétique, leur impact sur la solution optimale reste modéré.

B. Résolution avec la transformation de Charnes et Cooper

Dans cette section, nous appliquons la transformation de Charnes et Cooper afin de convertir le programme fractionnaire-linéaire en un programme linéaire classique.

Le programme initial est défini par la fonction objectif fractionnaire :

$$F(x) = \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{1,0015(x_1 + x_2)} \quad \text{à maximiser}$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 800\,000 \\ x_1 + x_2 \leq 1\,200\,000 \\ x_1 \geq 400\,000 \\ x_1 \leq 600\,000 \\ x_2 \geq 400\,000 \\ x_2 \leq 600\,000 \end{cases} \quad (4.4.8)$$

Pour rendre le problème sous forme standard, on ajoute des variables d'écart x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 et x_8 aux contraintes principales du problème. On obtient :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 800\,000 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1\,200\,000 \\ x_1 - x_5 = 400\,000 \\ x_1 + x_6 = 600\,000 \\ x_2 - x_7 = 400\,000 \\ x_2 + x_8 = 600\,000 \\ x_i \geq 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 8 \end{cases} \quad (4.4.9)$$

Soit :

$$z = \frac{1}{q^T x + q_0} = \frac{1}{1,0015(x_1 + x_2)}, \quad y = zx = \frac{x}{q^T x + q_0}$$

On remplace alors $x = \frac{y}{z}$ dans la fonction objectif, ce qui donne le problème linéaire suivant :

$$\tilde{f}(y, z) = R_1 y_1 + R_2 y_2 \quad \text{à maximiser}$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 - 800\,000 z = 0 \\ y_1 + y_2 + y_4 - 1\,200\,000 z = 0 \\ y_1 - y_5 - 400\,000 z = 0 \\ y_1 + y_6 - 600\,000 z = 0 \\ y_2 - y_7 - 400\,000 z = 0 \\ y_2 + y_8 - 600\,000 z = 0 \\ 1,0015 y_1 + 1,0015 y_2 = 1 \\ y_i \geq 0, \quad z > 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 8 \end{cases} \quad (4.4.10)$$

i) Résolution avec la moyenne arithmétique

Nous remplaçons les variables aléatoires par les moyennes arithmétiques suivantes :

$$\mathbb{E}[R_1] = 8,70, \quad \mathbb{E}[R_2] = 9,65$$

Le problème devient alors :

$$\max \tilde{f}(y, z) = 8,70 y_1 + 9,65 y_2 \quad (4.4.11)$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 - 800\,000 z = 0 \\ y_1 + y_2 + y_4 - 1\,200\,000 z = 0 \\ y_1 - y_5 - 400\,000 z = 0 \\ y_1 + y_6 - 600\,000 z = 0 \\ y_2 - y_7 - 400\,000 z = 0 \\ y_2 + y_8 - 600\,000 z = 0 \\ 1,0015 y_1 + 1,0015 y_2 = 1 \\ y_i \geq 0, \quad z > 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 8 \end{cases} \quad (4.4.12)$$

On utilise LINGO, la solution pour résoudre le problème (4.4.11) - (4.4.12) (voir figure 4.9)

```

Licensee info: Eval Use Only
License expires: 9 DEC 2025

Global optimal solution found.
Objective value:                9.256116
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        1
Elapsed runtime seconds:        0.11

Model Class:                    LP

Total variables:                9
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              0

Total constraints:              17
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                33
Nonlinear nonzeros:            0

```

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	0.3994009	0.000000
Y2	0.5991013	0.000000
Y3	0.1997004	0.000000
Z	0.9985022E-06	0.000000
Y4	0.1997004	0.000000
Y5	0.000000	0.5700000
Y6	0.1997004	0.000000
Y7	0.1997004	0.000000
Y8	0.000000	0.3800000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9.256116	1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	-0.5700000

FIGURE 4.9 – Solution obtenue sous LINGO – Cas moyenne arithmétique

La solution obtenue est :

$$y^* = \begin{pmatrix} 0,3994009 \\ 0,5991013 \\ 0,1997004 \\ 0,1997004 \\ 0 \\ 0,1997004 \\ 0,1997004 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z^* = 0,9985022 \times 10^{-6}$$

Par conséquent, la solution optimale pour le programme fractionnaire (4.4.4) - (4.4.5) est :

$$x^* = \left(\frac{y_1}{z}, \frac{y_2}{z} \right) = (400\,000, 600\,000), \quad \tilde{f}(x^*) = 9,256116$$

ii) Résolution avec la moyenne estimée par la densité par noyau

Nous remplaçons les variables aléatoires par les moyennes estimées via la méthode du noyau :

$$\mathbb{E}[R_1] = 9,035, \quad \mathbb{E}[R_2] = 9,200$$

Le problème devient :

$$\max \tilde{f}(y, z) = 9,035 y_1 + 9,200 y_2 \quad (4.4.13)$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 - 800\,000 z = 0 \\ y_1 + y_2 + y_4 - 1\,200\,000 z = 0 \\ y_1 - y_5 - 400\,000 z = 0 \\ y_1 + y_6 - 600\,000 z = 0 \\ y_2 - y_7 - 400\,000 z = 0 \\ y_2 + y_8 - 600\,000 z = 0 \\ 1,0015 y_1 + 1,0015 y_2 = 1 \\ y_i \geq 0, \quad z > 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 8 \end{cases} \quad (4.4.14)$$

On utilise LINGO pour résoudre le problème (4.4.13)–(4.4.14) (voir figure 4.10)

```

Licensee info: Eval Use Only
License expires:  9 DEC 2025

Global optimal solution found.
Objective value:                9.120320
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        1
Elapsed runtime seconds:        0.11

Model Class:                    LP

Total variables:                9
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              0

Total constraints:              17
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                33
Nonlinear nonzeros:            0

```

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	0.3994009	0.000000
Y2	0.5991013	0.000000
Y3	0.1997004	0.000000
Z	0.9985022E-06	0.000000
Y4	0.1997004	0.000000
Y5	0.000000	0.9900000E-01
Y6	0.1997004	0.000000
Y7	0.1997004	0.000000
Y8	0.000000	0.6600000E-01

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9.120320	1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	-0.9900000E-01

FIGURE 4.10 – Solution obtenue sous LINGO – Cas moyenne par noyau

La solution obtenue est :

$$y^* = \begin{pmatrix} 0,3994009 \\ 0,5991013 \\ 0,1997004 \\ 0,1997004 \\ 0 \\ 0,1997004 \\ 0,1997004 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z^* = 0,9985022 \times 10^{-6}$$

Par conséquent, la solution optimale pour le programme fractionnaire (4.4.6) - (4.4.7) est :

$$x^* = \left(\frac{y_1}{z}, \frac{y_2}{z} \right) = (400\,000, 600\,000), \quad \tilde{f}(x^*) = 9,120320$$

Comparaison après transformation de Charnes et Cooper

TABLE 4.7 – Résultats après transformation de Charnes-Cooper

Type de moyenne	$\mathbb{E}[R_1]$	$\mathbb{E}[R_2]$	$\tilde{f}(x)$	Erreur relative (%)
Moyenne arithmétique	8,70	9,65	9,256116	–
Moyenne par noyau	9,035	9,200	9,120320	1,47 %
Erreur absolue	–			0,135796

La différence entre les deux valeurs optimales reste faible, avec une erreur relative de 1,47%. L'utilisation de la densité par noyau modifie légèrement la moyenne mais n'a qu'un impact modéré sur l'optimum.

Comparaison globale des deux approches (Directe vs Charnes-Cooper)

TABLE 4.8 – Comparaison entre les méthodes de résolution

Type de moyenne	Directe	Charnes-Cooper	Erreur absolue	Erreur relative (%)
Moyenne arithmétique	9,256116	9,256116	0,000000	0,00 %
Moyenne par noyau	9,120320	9,120320	0,000000	0,00 %

Les deux approches mènent rigoureusement aux mêmes résultats numériques pour les deux types de moyenne.

Partie II : Résolution du modèle stochastique par simulation de Monte Carlo

La fonction objectif s'écrit comme suit :

$$F(x) = \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2}{1,0015(x_1 + x_2)} \quad (4.4.15)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1\,200\,000 \\ x_1 + x_2 \geq 800\,000 \\ x_1 \geq 400\,000 \\ x_2 \geq 400\,000 \end{cases} \quad (4.4.16)$$

où $R_1 \sim \hat{f}_{\text{BIO}}$ et $R_2 \sim \hat{f}_{\text{ALL}}$ sont deux variables aléatoires suivant les densités estimées par la méthode du noyau à partir des rendements historiques.

Méthodologie de simulation

Nous avons procédé comme suit :

- Estimation des densités de probabilité : les rendements historiques de Biopharm (R_1) et Alliances Assurances (R_2) ont été utilisés pour estimer leurs densités à l'aide de la fonction `ksdensity()` de MATLAB. Il s'agit d'une estimation non paramétrique par noyau, qui permet d'obtenir une approximation lisse de la distribution des rendements sans supposer de loi particulière.
- Génération d'échantillons simulés : sur la base des densités estimées, nous avons généré $N = 10\,000$ valeurs aléatoires pour chaque rendement R_1 et R_2 , par rééchantillonnage pondéré (bootstrap avec les probabilités fournies par les densités). Cette méthode permet de capturer la variabilité empirique des rendements tout en respectant leur distribution observée.
- Définition d'une grille de décisions admissibles : nous avons considéré un ensemble discret de couples (x_1, x_2) dans l'intervalle $[400\,000, 600\,000]$, en pas de 10 000 DA. Seuls les couples respectant les contraintes du problème (budget total compris entre 800 000 DA et 1 200 000 DA) ont été conservés.
- Évaluation de l'espérance empirique : pour chaque couple admissible (x_1, x_2) , nous avons calculé la valeur de $F(x)$ sur les 10 000 simulations de R_1 et R_2 , puis évalué la moyenne $E[F(x)]$. Le couple qui maximise cette espérance est alors considéré comme la solution optimale selon la simulation.

Algorithme de simulation

Dans la simulation Monte Carlo classique, l'objectif est généralement d'estimer l'espérance d'une fonction aléatoire $F(x)$ pour une stratégie fixée à l'avance, c'est-à-dire pour une valeur donnée des variables de décision x . Toutefois, cette approche ne permet pas de tenir compte des contraintes d'un problème réel d'allocation de capital, ni d'optimiser la stratégie elle-même.

Dans notre cas, nous cherchons non seulement à estimer l'espérance de la fonction de rendement $F(x)$, mais surtout à **trouver la stratégie optimale d'investissement** (x_1^*, x_2^*) qui maximise cette espérance, tout en respectant un ensemble de contraintes linéaires sur les montants investis. Ces contraintes forment un espace réalisable défini par :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \in [800\,000, 1\,200\,000] \\ x_1 \in [400\,000, 600\,000] \\ x_2 \in [400\,000, 600\,000] \end{cases}$$

Afin d'intégrer à la fois l'incertitude sur les rendements et les contraintes du problème, nous avons adapté l'algorithme de simulation. Nous avons remplacé la simulation unique pour une stratégie fixée par une exploration systématique de l'espace réalisable, en testant tous les couples (x_1, x_2) admissibles sur une grille discrète. Pour chaque couple, une série de simulations de R_1 et R_2 , selon leur densité estimée, permet d'estimer empiriquement l'espérance de $F(x)$.

La solution optimale est alors déterminée comme celle qui maximise cette espérance simulée :

$$(x_1^*, x_2^*) = \arg \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{R_1^{(k)} x_1 + R_2^{(k)} x_2}{1.0015(x_1 + x_2)} \right\}$$

L'algorithme suivant a été utilisé pour réaliser la simulation de Monte Carlo :

Algorithme 2 : Optimisation du rendement simulé par Monte Carlo

```

/* Déclarations et initialisations */
1 r1_data ← [5.45, 9.44, 9.58, 9.51, 9.45, 12.62, 5.88, 7.67]
2 r2_data ← [6.32, 9.75, 10.72, 10.52, 12.08, 10.60, 11.37, 8.51, 6.99]
3 (f1, xi1) ← EstimerDensite(r1_data)
4 (f2, xi2) ← EstimerDensite(r2_data)
5 N ← 10000
6 r1_sim ← SimulerValeurs(xi1, f1, N)
7 r2_sim ← SimulerValeurs(xi2, f2, N)
8 x1_vals ← TableauDeValeurs(400000, 600000, 10000)
9 x2_vals ← TableauDeValeurs(400000, 600000, 10000)
10 best_x1 ← 0
11 best_x2 ← 0
12 max_EF ← -∞
/* Boucle d'optimisation */
13 pour chaque x1 ∈ x1_vals faire
14   pour chaque x2 ∈ x2_vals faire
15     si 800000 ≤ x1 + x2 ≤ 1200000 alors
16       F ←  $\frac{r1\_sim \cdot x1 + r2\_sim \cdot x2}{1.0015 \cdot (x1 + x2)}$ 
17       EF ← Moyenne(F)
18       si EF > max_EF alors
19         max_EF ← EF
20         best_x1 ← x1
21         best_x2 ← x2
22     fin
23   fin
24 fin
25 fin
/* Afficher les résultats */
26 Afficher "Solution optimale : x1 = ", best_x1, " DA, x2 = ", best_x2, " DA"
27 Afficher "Espérance estimée de F(x) : ", max_EF

```

Résultat obtenu

La solution optimale obtenue par la simulation est la suivante :

$$x_1 = 400\,000 \text{ DA}, \quad x_2 = 600\,000 \text{ DA}, \quad \mathbb{E}[F(x)] \approx 9,158833$$

Comparaison des résultats

Méthode	x_1	x_2	$F(x)$
Moyenne arithmétique	400 000 DA	600 000 DA	9,256
Moyenne par noyau (directe)	400 000 DA	600 000 DA	9,120
Simulation Monte Carlo	400 000 DA	600 000 DA	9,159

TABLE 4.9 – Comparaison des résultats obtenus par les différentes méthodes

Le tableau montre que les trois méthodes mènent à la même répartition optimale entre les deux titres étudiés. La variation de la valeur de la fonction objectif reste inférieure à 1,5%, ce qui indique une stabilité forte de la solution par rapport à la méthode d'évaluation des rendements.

Visualisation des résultats

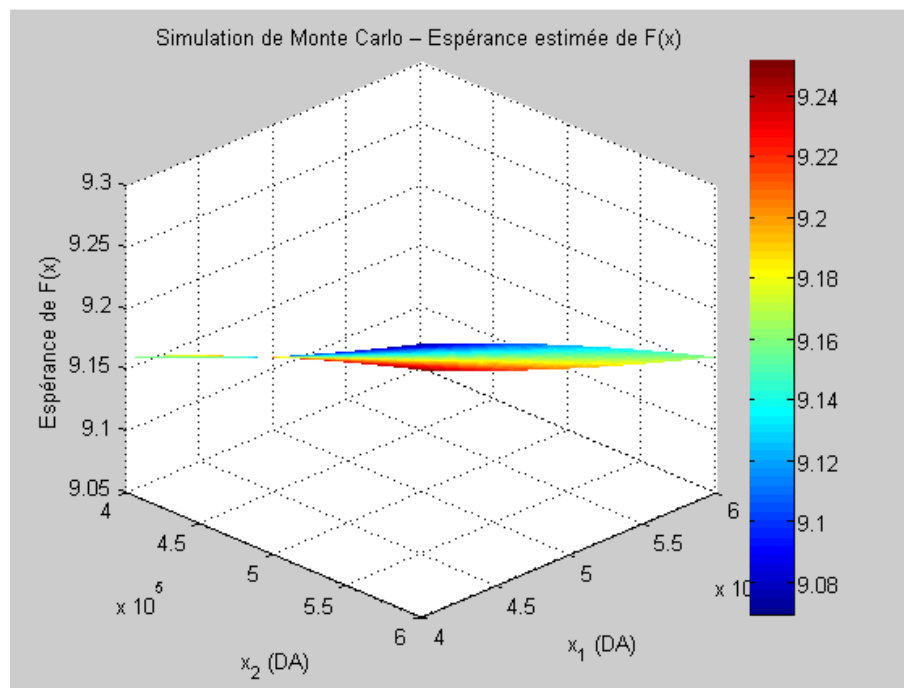


FIGURE 4.11 – Visualisation 3D de l'espérance estimée de $F(x)$ par simulation

Cette visualisation montre la surface des espérances simulées de $F(x)$ en fonction de x_1 et x_2 . Le sommet de la surface, correspondant à la valeur maximale de $F(x)$, est atteint pour $x_1 = 400\,000$ DA et $x_2 = 600\,000$ DA. Cela confirme les résultats précédents et indique que cette combinaison assure une performance optimale sous incertitude.

Interprétation des résultats

Ce travail a permis d'identifier la meilleure combinaison d'investissement entre deux actions cotées à la Bourse d'Alger. Pour cela, nous avons testé plusieurs approches : déterministe, transformation de Charnes–Cooper, et simulation.

Deux méthodes d'estimation des rendements ont été utilisées :

- la moyenne arithmétique des rendements historiques ;
- l'estimation par noyau des densités empiriques.

Dans tous les cas, la combinaison optimale reste la même : allouer 400 000 DA à Biopharm et 600 000 DA à Alliances Assurances. La faible variation des résultats selon la méthode confirme la robustesse de la stratégie d'investissement. Le cadre réglementaire local, ainsi que les contraintes de transaction, ont été intégrés dans la modélisation, ce qui rend les conclusions applicables dans un contexte réaliste.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu un problème financier à fonction objectif fractionnaire sous incertitude. Trois méthodes ont été mobilisées :

- Une approche déterministe classique ;
- La transformation de Charnes–Cooper permettant une résolution linéaire ;
- Une simulation de Monte Carlo basée sur des lois de rendements estimées empiriquement.

Les trois approches convergent vers la même décision optimale, avec des écarts de résultats très faibles. Cela démontre que notre modèle est robuste et que l'allocation optimale des capitaux entre les deux actifs considérés permet de maximiser efficacement le rendement net attendu, tout en respectant les contraintes du marché algérien.

Conclusion générale

La prise de décision en environnement incertain, notamment dans le domaine financier, nécessite des outils mathématiques adaptés à la variabilité des données et à la complexité des objectifs. Ce travail a exploré un problème d'optimisation où les rendements financiers sont aléatoires, et où l'objectif à maximiser est de nature fractionnaire, reflétant ainsi les enjeux de rendement net et de performance relative en finance.

En modélisant un portefeuille composé de deux actions cotées à la Bourse d'Alger, nous avons développé un modèle d'optimisation stochastique fractionnaire-linéaire. Deux approches de transformation ont été mises en œuvre pour obtenir une version déterministe du problème : l'une utilisant la moyenne arithmétique des rendements, l'autre s'appuyant sur une densité estimée par la méthode du noyau. Chaque modèle a été linéarisé à l'aide de la transformation de Charnes et Cooper, puis résolu numériquement. Une simulation de Monte Carlo a été réalisée pour estimer empiriquement l'espérance de la fonction objectif sur l'espace admissible, validant ainsi la cohérence des solutions obtenues.

Les résultats ont révélé une forte concordance entre les méthodes déterministes et la simulation, illustrant la robustesse des outils utilisés et soulignant l'importance de prendre en compte l'incertitude des paramètres d'entrée.

À l'issue de ce travail, plusieurs perspectives se dessinent. Il serait judicieux d'étendre le modèle à un plus grand nombre d'actifs financiers, d'introduire des contraintes dynamiques ou temporelles, ou encore d'explorer des approches d'optimisation multi-objectifs. Enfin, la combinaison de méthodes classiques avec des algorithmes avancés pourrait permettre de traiter des problèmes encore plus complexes dans un cadre applicatif élargi.

Bibliographie

- [1] ADJABI, S. *Statistique mathématique*. Éditions universitaires européennes, 2011.
- [2] AMROUCHE, S. *Optimisation stochastique multi-objectifs*. PhD thesis, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, Alger, Algérie, 2023. Thèse de doctorat en Mathématiques, spécialité Recherche Opérationnelle.
- [3] AMZALLAG, , AND PICCIOLI, N. *Introduction à la statistique*. Éditeur, Ville, 20XX.
- [4] BAILLARGEON, G. *Programmation Linéaire appliquée*. Les éditions SMG, Québec, 1996.
- [5] BAJALINOV, E. B. *Linear-Fractional Programming : Theory, Methods, Applications and Software*, vol. 84 of *Applied Optimization*. Springer US, Boston, MA, 2003.
- [6] BELKADI, M., AND KOULOGLI, A. Résolution d'un problème multi-objectif linéaire et fractionnaire en nombres entiers. Master's thesis, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, Tizi Ouzou, Algérie, 2014.
- [7] BELLEBIA, M., AND LOUDAHI, L. Programmation mathématique stochastique et application. Master's thesis, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, 2018.
- [8] BEZOU, M. Programmation linéaire, cours 2ème année. Université Mohamed Bougara Boumerdes (UMBB), 2014.
- [9] BIBI MOHAND OUAMER, P. *Techniques Numériques d'Optimisation : Support de Cours*, 2020.
- [10] BIRGE, J. R., AND LOUVEAUX, F. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Series in Operations Research. Springer, 1997.
- [11] BLUM, C., AND ROLI, A. Metaheuristics in combinatorial optimization : Overview and conceptual comparison. *ACM Computing Surveys* 35, 3 (2003), 268–308.
- [12] CHARNES, A., AND COOPER, W. W. Chance-constrained programming. *Management Science* 6, 1 (1959).
- [13] CHARNES, A., AND COOPER, W. W. Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly* 9, 3–4 (1962).
- [14] CHARNES, A., COOPER, W. W., AND SYMONDS, G. H. Cost horizons and certainty equivalents : An approach to stochastic programming of heating oil. *Management Science* 4 (1958), 183–195.
- [15] CHEN, Y.-C. A tutorial on kernel density estimation and recent advances. *University of Washington, Department of Statistics* (2017).
- [16] CHEURFA, F. *Analyse de sensibilité et quantification de l'incertitude épistémique dans les modèles financiers*. PhD thesis, Université A. Mira-Bejaia, Bejaia, Algérie, June 2021. Thèse de Doctorat en Sciences, Département de Recherche Opérationnelle.
- [17] DAF-MAG.FR. Dividende – définition du glossaire, 2025. Consulté le 15 avril 2025.
- [18] DANTZIG, G. B., BLATTNER, W. O., AND RAO, M. R. Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with applications to a ship routing problem. In *Theory of Graphs, Intern. Symp* (1966), Dunod, Paris and Gordon and Breach, New York, pp. 77–83.
- [19] DESBOIS, D. Introduction au test non paramétrique d'ajustement de kolmogorov-smirnov avec spss pour windows. *Cahier des Techniques de l'INRA* 51 (2004), 41–62.
- [20] DINKELBACH, W. On nonlinear fractional programming. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 42, Sonderheft (1962), T27–T29.
- [21] EL HEDA, K. *Choix optimal du paramètre de lissage dans l'estimation non paramétrique de la fonction de densité*. PhD thesis, Université du Littoral Côte d'Opale, France, 2018.
- [22] FAALAND, B. H., AND JACOBS, N. L. The linear fractional portfolio selection problem. *Management Science* 27 (1981), 1383–1389.

- [23] FARID, A. *Programmation linéaire multi-objectif et stochastique*. PhD thesis, Université Paris-Dauphine, 2023.
- [24] FERHAT, L. Estimation d'une fonction de densité par la méthode des noyaux et application à la var. Master's thesis, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Tizi-Ouzou, Algérie, 2012.
- [25] GILMORE, P. C., AND GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research* 9, 6 (1961), 849–859.
- [26] GILMORE, P. C., AND GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem. part 2. *Operations Research* 11, 6 (1963), 863–888.
- [27] GLOVER, F., AND LAGUNA, M. *Tabu Search*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [28] HANNAH, L. A. Stochastic optimization. <https://www.cs.brown.edu/~lauren/stochopt.pdf>, 2014. Consulté le 22 avril 2025.
- [29] HELMY, Y. M., EMAM, O. E., AND ABDELWAHAB, A. M. On stochastic multi-level multi-objective fractional programming problems. *Journal of Statistics Applications & Probability* 4, 1 (2015).
- [30] HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.
- [31] KALL, P., AND WALLACE, S. W. *Stochastic Programming*. John Wiley & Sons, 1994.
- [32] KENNEDY, J., AND EBERHART, R. Particle swarm optimization. *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks* 4 (1995), 1942–1948.
- [33] KHIMOU, N. Notions fondamentales en probabilités et statistique. 2008.
- [34] KIRKPATRICK, S., GELATT, C. D. J., AND VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. *Science* 220, 4598 (1983), 671–680.
- [35] KOLOMIVOS, G. *Résolution de grands problèmes stochastiques multi-étapes : Application à un problème de dimensionnement de capacités et de gestion de flux et de stocks*. PhD thesis, École Centrale Paris, France, 2007. Thèse de doctorat, Laboratoire LGI, soutenue le 19 janvier 2007.
- [36] KYDLAND, F. E. Simulation of linear operators. Tech. rep., Institute of Shipping Research, Norwegian School of Economics and Business Administration, Bergen, Norway, 1969.
- [37] LAZARI, L., AND BIBI, S. Optimisation fractionnaire linéaire avec données sous forme d'intervalles : Application à des problèmes financiers et agricoles. Master's thesis, Université A. Mira de Béjaïa, Béjaïa, Algérie, June 2021. Mémoire de Master en Mathématiques Appliquées, option Recherche Opérationnelle.
- [38] LIPSCHUTZ, S. *Probabilités – Cours et Problèmes*. Série Schaum. McGraw-Hill, Paris, 1973.
- [39] MARTOS, B. Hyperbolic programming. *Naval Research Logistics Quarterly* 11, 2-3 (1964), 135–153.
- [40] MINOUX, M. *Programmation mathématique : Théorie et algorithmes*. Éditions Lavoisier, Paris, 2007.
- [41] OBERKAMPF, W. L., HELTON, J. C., AND SENTZ, K. Mathematical representation of uncertainty. In *Non-deterministic Approaches Forum, AIAA* (2001). AIAA Paper.
- [42] PIRLOT, M., AND PIRLOT, M. Méthodes de points intérieurs en optimisation fractionnaire-linéaire. *RAIRO - Operations Research* 33, 4 (1999), 383–409.
- [43] PRAMANIK, S., BANERJEE, D., AND GIRI, B. Chance constrained linear plus linear fractional bi-level programming problem. *International Journal of Computer Applications* 56, 1 (2012).
- [44] RAKOTOMALALA, R. *Tests de normalité - Techniques empiriques et tests statistiques*, 2011.
- [45] RAO, S. S. *Engineering Optimization : Theory and Practice*, 4 ed. John Wiley & Sons, 2009.
- [46] RUBINSTEIN, R. Y., AND KROESE, D. P. *Simulation and the Monte Carlo Method*, 2 ed. Wiley-Interscience, 2007.
- [47] RUPPLI, R. *Programmation linéaire : idées et méthodes*. Éditeur, Lieu de publication, Année de publication.
- [48] SAPORTA, G. *Probabilités, Analyse des Données et Statistique*, 2 ed. Éditions Technip, Paris, 2006.
- [49] SAPORTA, G. *Probabilités, Analyse des Données et Statistique*, 3e édition ed. Éditions Technip, Paris, 2011.
- [50] SAXO BANK. How to calculate dividends effortlessly : A detailed guide, 2024.
- [51] SOCIÉTÉ DE GESTION DE LA BOURSE DES VALEURS. Site officiel de la bourse d'alger, 2025.
- [52] SUNDARAM, R. K. *A First Course in Optimization Theory*. Cambridge University Press, 1996.

-
- [53] TEGHEM, J. *Programmation linéaire*. Éditions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles, Belgique, 1996.
- [54] UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA. *Programmation mathématique et optimisation*, 2022.
- [55] UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET. *Support de cours d'analyse numérique 1*, 2022.
- [56] YOUNSI-ABBACI, L. *Optimisation sur l'ensemble efficient d'un problème multi-objectifs stochastique discret*. PhD thesis, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, Alger, Algérie, 2021.
- [57] YOUNSI-ABBACI, L., AND MOULAI, M. Optimizing a linear fractional function with interval coefficients over an integer efficient set under chance constraints. *ICT Journal* 28, 2 (2023), 007.
- [58] ÉMILE AMZALLAG, PICCIOLI, N., AND BRY, F. *Introduction à la statistique : Exercices corrigés avec rappels de cours*. Hermann, Paris, 1978.

Annexes

Annexes 1

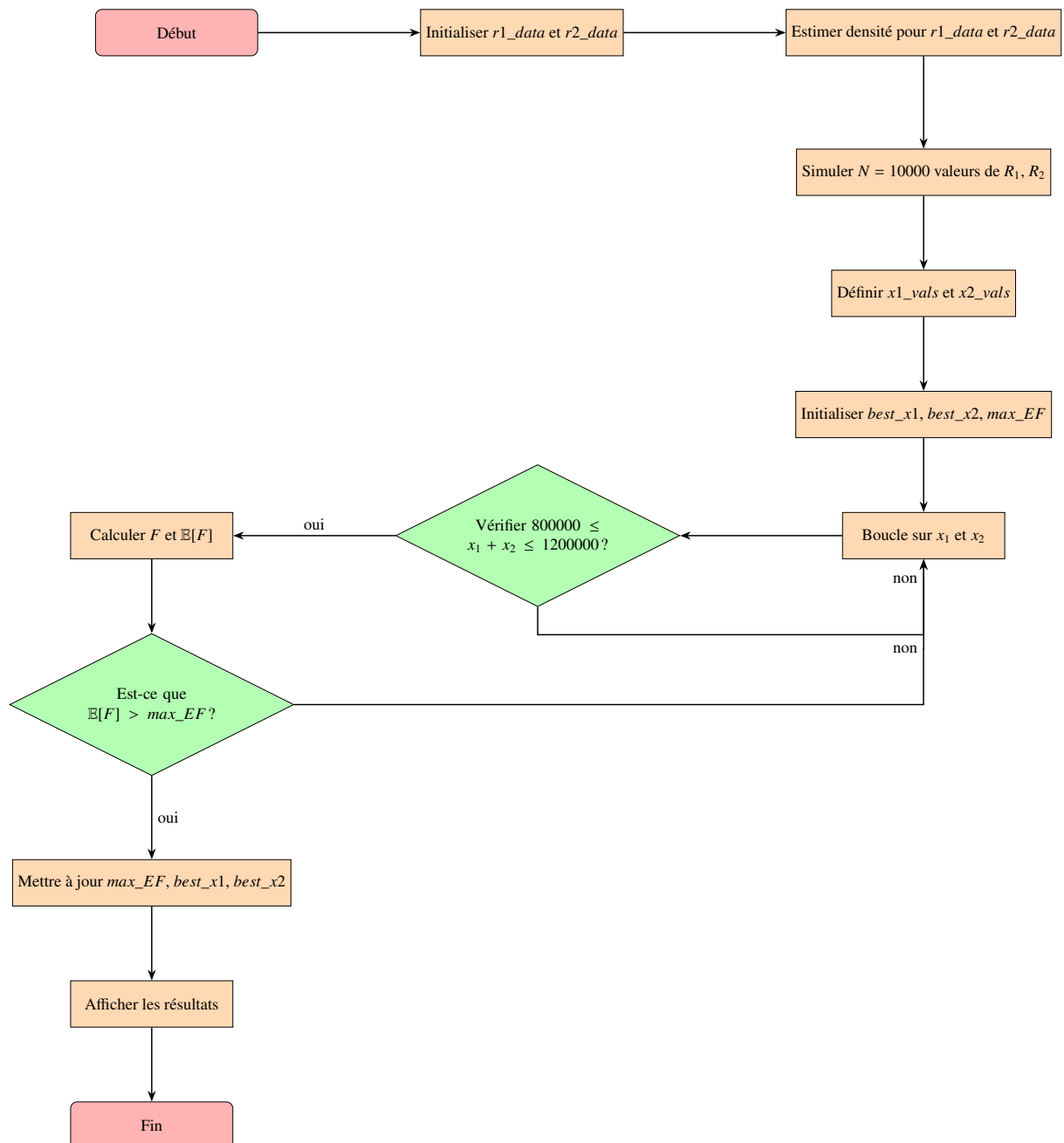


FIGURE 4.12 – Organigramme de la simulation de Monte Carlo

Résumé

Ce mémoire traite de l'optimisation financière dans un contexte d'incertitude à travers un problème d'allocation de capital entre deux actions cotées à la Bourse d'Alger : Biopharm et Alliances Assurances. Pour modéliser le rendement aléatoire de ces titres, nous avons appliqué la programmation linéaire fractionnaire stochastique. Le modèle est étudié sous trois approches complémentaires : déterministe classique (en utilisant la moyenne arithmétique et l'estimation par noyau), transformation de Charnes-Cooper, et simulation de Monte Carlo. À partir des données historiques, nous avons estimé les densités des rendements par la méthode du noyau. Plusieurs méthodes numériques ont été mobilisées pour résoudre le modèle. Les résultats obtenus sont comparés afin d'évaluer la pertinence de chaque méthode de résolution dans un contexte réel. Ce travail met en évidence l'apport des techniques d'optimisation stochastique en finance appliquée.

Abstract

This thesis addresses financial optimization under uncertainty through a capital allocation problem involving two stocks listed on the Algiers Stock Exchange : Biopharm and Alliances Assurances. To model the random return of these assets, we applied stochastic linear fractional programming. The model is studied using three complementary approaches : classical deterministic (with arithmetic and kernel-based mean), Charnes-Cooper transformation, and Monte Carlo simulation. Historical data were used to estimate return densities via kernel methods. Several numerical methods were employed to solve the model. The obtained results are compared to assess the effectiveness of each resolution method in a real-world context. This work highlights the relevance of stochastic optimization techniques in applied finance.