

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abderrahmane Mira Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques  
Option : Mathématiques de l'intelligence artificielle

## Thème

**Introduction aux quaternions et applications**

Réalisé par :

M<sup>lle</sup> LARBI Thiziri

Soutenu le 29/06/2025 devant le jury composé de :

Président	M <sup>r</sup> . MOUZAIA Mohamed	Maître assistant	U. A/Mira Béjaia.
Examineur	M <sup>r</sup> . AISSAOUI Said	Maître de conf. A	U. A/Mira Béjaia.
Promoteur	M <sup>r</sup> . KHELOUFI Arezki	Professeur	U. A/Mira Béjaia.

Année Universitaire : 2024/2025

---

# Remerciements

*Je remercie Dieu, le Tout-Puissant, le Miséricordieux, Celui par qui tout commence et tout s'accomplit. C'est par Sa volonté que j'ai pu franchir les épreuves, garder espoir dans les moments de doute et avancer avec foi et persévérance. Je Lui rends grâce pour la force, la patience et la lumière qu'Il a placées sur mon chemin tout au long de ce parcours.*

*Je témoigne toute ma gratitude à tous ceux qui ont contribué à ma formation et je tiens à remercier tous mes enseignants durant toute ma vie scolaire.*

*Mes vifs remerciements vont à :*

*M<sup>r</sup> A. KHELOUFI pour son encadrement, sa confiance et ses précieuses remarques.*

*M<sup>r</sup> M. MOUZAIA pour l'honneur qu'il a bien voulu me faire en acceptant de présider le jury.*

*M<sup>r</sup> S. AISSAOUI pour avoir accepté d'examiner ce mémoire, ce qui m'inspire un grand honneur.*

*Enfin, je tiens à remercier ma famille pour l'écoute, la présence, le soutien, les encouragements et l'amour qu'elle me porte de jour en jour. .*

---

# *Dédicaces*

*Je dédie cet humble et modeste travail :*

*À ma très chère mère, dont l'amour, les prières silencieuses et le soutien inébranlable ont été le pilier de ma vie. À chaque étape, son regard bienveillant et ses mots rassurants ont su apaiser mes inquiétudes. Ce travail est le fruit de ses sacrifices, de sa tendresse et de sa force infinie.*

*À mon père bien-aimé, dont les conseils sages, l'exemple de courage et les encouragements constants ont toujours nourri en moi le goût de l'effort et le respect du savoir. Je lui dois cette soif d'apprendre et cette persévérance sans relâche.*

*À mes frères et soeurs, compagnons fidèles de chaque instant, pour leur affection sincère, leur compréhension, leur écoute et leur présence réconfortante. Leur soutien, parfois discret mais toujours réel, m'a donné la force de continuer, même dans les moments les plus exigeants. À toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont apporté aide, soutien, encouragement ou inspiration, Je vous dédie également ce travail avec toute ma reconnaissance.*

*Qu'Allah récompense chacun d'entre vous pour ce que vous avez apporté à mon cheminement.*

*LARBI Thiziri*

---

# Résumé

*Dans ce mémoire nous nous intéressons à l'étude des quaternions et leur utilisation dans la représentation des rotations en 3D. Notre objectif principal est de montrer comment les quaternions permettent d'éviter des problèmes liés aux angles d'Euler, notamment le phénomène de blocage de cardan*

*En premier lieu, nous avons présenté les notations de base sur les quaternions ainsi que leurs propriétés les plus importantes.*

*Ensuite nous avons introduit leur application dans les rotations tridimensionnelles et comparé leur efficacité avec d'autres méthodes classiques.*

**Mots-clés :** Quaternions, rotations 3D.

---

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Une introduction aux quaternions</b>	<b>3</b>
1.1 Historique des quaternions . . . . .	3
1.2 Algèbre des quaternions . . . . .	5
1.2.1 Opérations arithmétiques sur les quaternions . . . . .	5
1.2.2 Conjugaison . . . . .	14
1.3 Module et inverse d'un quaternion . . . . .	17
1.3.1 Module d'un quaternion . . . . .	17
1.3.2 Inverse d'un quaternion . . . . .	18
1.4 Représentations polaire et exponentielle d'un quaternion . . . . .	20
1.4.1 Représentation polaire d'un quaternion . . . . .	20
1.4.2 Représentation exponentielle d'un quaternion . . . . .	20
1.5 Produit vectoriel, produit scalaire et produit mixte des quaternions . . . . .	21
1.5.1 Produit vectoriel des quaternions . . . . .	21
1.5.2 Produit scalaire des quaternions . . . . .	22
1.5.3 Produit mixte des quaternions . . . . .	22
1.6 Représentations matricielles des quaternions . . . . .	23
1.6.1 Représentation des quaternions par des matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . . . . .	24
1.6.2 Représentation des quaternions par des matrices $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . . . . .	25
<b>2 Quaternions et rotation spatiale</b>	<b>28</b>
2.1 Angles et convention d'Euler . . . . .	28
2.1.1 Rotation autour des axes $X, Y, Z$ . . . . .	28
2.1.2 Propriétés des matrices de rotation . . . . .	29

---

2.1.3	Convention des angles d'Euler $X - Y - Z$ en rotation extrinsèque . . . . .	31
2.1.4	Convention des angles d'Euler $Z - Y' - X''$ en rotation intrinsèque .	31
2.1.5	Mouvements d'un avion dans l'espace et problème de blocage des Cardan . . . . .	32
2.2	Quaternions et rotation spatiale . . . . .	38
2.2.1	Définitions et propriétés . . . . .	38
2.2.2	Matrice d'une rotation associée a une quaternion . . . . .	43
2.2.3	Interpolation des quaternions . . . . .	44

---

# Notations

$\mathcal{H}$	L'ensemble des quaternions,
$\mathcal{H}^*$	L'ensemble des quaternions non nuls,
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes,
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels,
$\mathbb{Z}$	L'ensemble des entiers relatifs,
$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels,
$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$	Matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ ,
$\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$	Matrices carrées d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbb{R}$ ,
$q = a + bi + cj + dk$	Représentation algébrique d'un quaternion $q$ ,
$Sc(q)$	Partie scalaire du quaternion $q$ ,
$Vec(q)$	Partie vectorielle du quaternion $q$ ,
$q_1 = b_1i + c_1j + d_1k$	Représentation algébrique d'un quaternion pur $q_1$ ,
$\mathbf{q}$	Quaternion imaginaire pur ou simplement quaternion pur,
$\bar{q}$	Conjugué d'un quaternion $q$ ,
$\ q\ $	Module (ou norme) d'un quaternion $q$ ,
$q^{-1}$	Inverse d'un quaternion $q$ ,
$q_1 \times q_2$	Produit vectoriel des quaternions purs $q_1$ et $q_2$
$q_1 \cdot q_2$	Produit scalaire des quaternions $q_1$ et $q_2$ ,
$q_1 \cdot (q_2 \times q_3)$	Produit mixte des quaternions purs $q_1, q_2$ et $q_3$ ,

$0_{\mathcal{H}}$	Quaternion nul,
$1_{\mathcal{H}}$	Quaternion unité,
$B^T$	La matrice orthogonale de la matrice $B$ ,
$\text{SO}(3, \mathbb{R})$	Groupe spatial orthogonal.

---

# Introduction générale

Les quaternions sont une extension des nombres complexes qui ont trouvé des applications majeures dans divers domaines des mathématiques, de la physique, de l'informatique et de l'ingénierie, notamment pour la représentation des rotations dans l'espace tridimensionnel.

Introduits au 19<sup>ème</sup> siècle par le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton, les quaternions ont révolutionné la manière de modéliser les mouvements dans l'espace en offrant une alternative plus efficace et plus stable que les systèmes classiques tels que les matrices de rotation ou les angles d'Euler.

Dans le cadre des rotations tridimensionnelles, les quaternions offrent plusieurs avantages notables, tels que la capacité à éviter le *blocage de cardan* ; un phénomène limitant les rotations lorsqu'un axe d'orientation se retrouve aligné avec un autre et la possibilité de réaliser des interpolations plus fluides et naturelles entre différentes orientations, notamment à travers des méthodes comme la *slerp* (Spherical Linear Interpolation).

Au-delà de leur utilisation dans le domaine des mathématiques, les quaternions sont devenus essentiels dans de nombreux secteurs technologiques. Des jeux vidéo et des animations 3D à la robotique, en passant par les systèmes de navigation spatiale, les quaternions permettent une gestion plus précise et efficace des rotations, ce qui est crucial pour le bon fonctionnement de nombreuses applications en temps réel. Leur capacité à fournir une description compacte et stable des rotations dans des systèmes tridimensionnels fait d'eux un outil incontournable dans la modélisation de mouvements complexes.

Ainsi, il est possible de souligner l'importance croissante des quaternions dans des domaines allant de la réalité virtuelle à la simulation, en passant par la conception de robots autonomes et la navigation spatiale, où la gestion de l'orientation et de la position est fondamentale.

Ce manuscrit est composé essentiellement de deux chapitres.

Le premier chapitre est consacré à donner une présentation générale des quaternions.

Nous donnons quelques unes des leurs propriétés essentielles.

Le deuxième chapitre est consacré aux liens entre quaternion et rotations dans l'espace.

Le mémoire se termine par une conclusion.

---

# Une introduction aux quaternions

## 1.1 Historique des quaternions

La problématique des nombres complexes a suscité un grand intérêt parmi les mathématiciens de 18<sup>ème</sup> et du 19<sup>ème</sup> siècles.

Existe-t-il à un équivalent aux nombres complexes en dimension trois ? La réponse à cette question n'était pas évidente, et de nombreux mathématiciens y compris Hamilton, se sont penchés sur ce sujet.

Au début des années 1830 Hamilton a commencé à développer (étendre) les nombres complexes, ajoutant une unité imaginaire "j" pour les nombres complexes ( $a + bi$ ) en 2D. Son but était de trouver des nombres complexes en 3D qui pourraient être représenté par le triplet :  $a + bi + cj$  où  $i^2 = j^2 = -1$  de telle sorte que la multiplication des triplets soit comme le produit des nombres complexes (en particulier ; la multiplication soit distributive et commutative). Considérons

$$z = a + bi + cj, z_1 = a_1 + b_1i + c_1j \text{ et } z_2 = a_2 + b_2i + c_2j.$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j) + (a_2 + b_2i + c_2j) \\ &= a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j \end{aligned}$$

et

$$z^2 = (a + bi + cj)(a + bi + cj) = a^2 - b^2 - c^2 + 2abi + 2acj + bc(ij + ji).....(1)$$

En utilisant la commutativité,

$$z^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2abi + 2acj + 2bcij$$

Chaque matin, les enfants de Hamilton (Archibald et William Edwin) lui pose la question suivante : "Eh bien, papa, pouvez-vous multiplier des triplets ?"

Il répondait Non, je ne peux que les additionner et les soustraire.

Aussi, il souhaitait que la norme d'un produit de deux triplets soit égale au produit des normes associées,

$$|(a + bi + cj)|^2 = |(a + bi + cj)(a + bi + cj)| = |(a + bi + cj)||a + bi + cj|.....(2)$$

Celà est vrai si  $ij = 0$ . En effet, dans ce cas, nous avons

$$|(a^2 - b^2 - c^2) + 2abi + 2acj + 2bcij| = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Hamilton considère que le terme  $ij$  dans l'expression (1) ne devrait peut-être pas être écrit comme un double produit, mais plutôt sous la forme d'une somme  $ij + ji$  où  $ij = -ji$ , afin de préserver l'égalité souhaitée (2). Cela implique que la loi de commutativité n'est plus respectée ; il décide alors de poser  $ij = k$  et  $ji = -k$ . Ainsi, le problème de la multiplication de triplets de nombres réels n'est pas à considérer dans un espace à 3 dimensions, mais bien dans un espace à 4 dimensions.

L'ajout d'un troisième terme imaginaire n'était qu'une partie de la réponse. Enfin, le 16 octobre 1843, alors qu'il se promenait avec sa femme le long du canal royal en Irlande, une idée soudaine lui vint. Il réalisa comment les trois termes imaginaires pouvaient résoudre tous leurs produits. la solution est  $q = a + bi + cj + dk$  avec  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ , et il les appela quaternions. Il profita de l'occasion pour immortaliser cet événement en gravant les règles sur le mur du pont de Broome qu'il traversait à ce moment-là. En tant qu'inventeur, il avait le droit de choisir les noms associés à la notation, comme lorsqu'il appelle la partie réelle un nombre réel et la partie imaginaire un vecteur.

Sir William Rowan Hamilton est reconnu comme l'inventeur de l'algèbre des quaternions, qui est devenue la première algèbre non commutative à être découverte. Pour

résoudre le problème, cela a pris plus de dix ans. Cette invention a fourni le premier cadre mathématique pour manipuler des quantités vectorielles bien que cela ait été affiné par le physicien théorique, chimiste et mathématicien américain Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Hamilton a atteint son invention par des voies algébriques et géométriques, car il était évident pour lui que les quaternions avaient un potentiel géométrique significatif.

En 1853, Hamilton sort un ouvrage intitulé "Lectures on quaternions". Cependant, n'étant pas satisfait de son travail et désireux de proposer un livre de qualité pour l'étude des quaternions, il publie une version corrigée sous le titre "Elements of quaternions".

## 1.2 Algèbre des quaternions

### 1.2.1 Opérations arithmétiques sur les quaternions

Les quaternions sont une extension des nombres complexes et sont composés de quatre éléments. Un quaternion "q" peut être exprimé sous la forme

$$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$$

où  $q_1, q_2, q_3$  et  $q_4$  sont des nombres réels et  $i, j$  et  $k$  sont des unités imaginaires qui satisfont les relations suivantes :

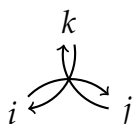
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Ces relations peuvent être aussi écrites comme suit :

$$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad \text{et} \quad ki = j = -ik. \quad (1.2.1)$$

En particulier, les éléments  $i, j, k$  sont anticommutés deux à deux. Nous résumons la multiplication des unités imaginaires dans le tableau ci-dessous :

×	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	- $j$
$j$	$j$	- $k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	- $i$	-1



L'ensemble des quaternions est noté  $\mathcal{H}$ , i. e.,

$$\mathcal{H} = \{q_1 + q_2i + q_3j + q_4k : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}\}.$$

**Définition 1.2.1.** Soit

$$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k \in \mathcal{H}.$$

Le nombre réel  $q_1$  est appelé partie scalaire du quaternion  $q$  et est noté  $Sc(q)$ . Le quaternion

$$\mathbf{q} = q_2i + q_3j + q_4k$$

est appelé partie vectorielle du quaternion  $q$  et est noté  $Vec(q)$ . Si  $q = \mathbf{q}$ , le quaternion  $q$  est dit quaternion imaginaire pur ou simplement quaternion pur.

$$T = \{q \in \mathcal{H} \mid q = \mathbf{q}\}$$

est l'ensemble des quaternions purs.

**Lemme 1.2.1.** L'ensemble  $T$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$  de dimension 3, il est isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ .

*Démonstration.* Soit

$$T = \{ai + bj + ck, (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Nous avons  $T \neq \emptyset$  car

$$0 = 0i + 0j + 0k \in T.$$

Soient

$$p = a_1i + b_1j + c_1k \in T.$$

et

$$q = a_2i + b_2j + c_2k \in T.$$

Nous avons

$$p + q = (a_1 + a_2)i + (b_1 + b_2)j + (c_1 + c_2)k \in T.$$

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $q = ai + bj + ck \in T$ . Nous avons

$$\lambda q = \lambda(ai + bj + ck) = (\lambda a)i + (\lambda b)j + (\lambda c)k \in T.$$

Par suite,  $T$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$ . ■

**Lemme 1.2.2.** *Soit*

$$C = \{q \in \mathcal{H} : pq = qp \ \forall p \in \mathcal{H}\}$$

le centre de  $\mathcal{H}$ . Alors

$$C = \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{H}$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre, alors  $\mathbb{R} \subset \mathcal{H}$ . Nous avons  $\mathbb{R} \subset C$ . En effet, soit  $a \in \mathbb{R}$  nous avons

$$ap = pa \ \forall p \in \mathcal{H}.$$

Réciproquement,  $q = a + bi + cj + dk \in C$ , alors  $q$  commute nécessairement avec tous les éléments de  $\mathbb{H}$ , et en particulier avec  $i, j$  et  $k$ . Nous avons

$$qi = (a + bi + cj + dk)i = ai + bi^2 + cji + dki = ai - b - ck + dj$$

et

$$iq = i(a + bi + cj + dk) = ai + bi^2 + cij + dik = ai - b + ck - dj.$$

En égalant les deux expressions, nous obtenons

$$ai - b - ck + dj = ai - b + ck - dj.$$

Ce qui donne

$$-2ck + 2dj = 0.$$

Par conséquent,

$$c = d = 0$$

car  $j$  et  $k$  sont linéairement indépendants. Un raisonnement analogue avec  $j$  et  $k$  conduit également à  $b = 0$ . Ainsi  $q = a$  ce qui signifie que  $q$  est un réel. Finalement, Donc le centre de  $\mathcal{H}$  est exactement  $\mathbb{R}$ . ■

**Définition 1.2.2.** *Deux quaternions*

$$p = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k$$

et

$$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k,$$

où  $p_r, q_r \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \{1, \dots, 4\}$ , sont dits égaux et on écrit  $p = q$  si

$$p_r = q_r, \ r \in \{1, \dots, 4\}.$$

On peut définir les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication pour les quaternions. Soient

$$p = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k$$

et

$$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k,$$

où  $p_r, q_r \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \{1, \dots, 4\}$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, on définit ces opérations comme suit :

1. Addition :

$$p + q := (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2)i + (p_3 + q_3)j + (p_4 + q_4)k.$$

2. Soustraction :

$$p - q = (p_1 - q_1) + (p_2 - q_2)i + (p_3 - q_3)j + (p_4 - q_4)k.$$

3. Multiplication par un réel :

$$\lambda p = (\lambda p_1) + (\lambda p_2)i + (\lambda p_3)j + (\lambda p_4)k.$$

4. Multiplication des quaternions :

$$pq = (p_1 + p_2i + p_3j + p_4k)(q_1 + q_2i + q_3j + q_4k).$$

En utilisant les règles (1.2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} pq &= p_1q_1 + p_1q_2i + p_1q_3j + p_1q_4k + p_2q_1i + p_2q_2i^2 + p_2q_3ij + p_2q_4ik \\ &\quad + p_3q_1j + p_3q_2ji + p_3q_3j^2 + p_3q_4jk + p_4q_1k + p_4q_2ki + p_4q_3kj + p_4q_4k^2 \\ &= p_1q_1 + p_1q_2i + p_1q_3j + p_1q_4k + p_2q_1i - p_2q_2 + p_2q_3k - p_2q_4j \\ &\quad + p_3q_1j - p_3q_2k - p_3q_3 + p_3q_4i + p_4q_1k + p_4q_2j - p_4q_3i - p_4q_4, \end{aligned}$$

ou d'une manière équivalente,

$$\begin{aligned} pq &= (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4) + (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)i \\ &\quad + (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)j + (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)k. \end{aligned}$$

**Exemple 1.** Soient  $p = 1 + i + j + k$ , et  $q = 1 + j + k$ . Alors

$$\begin{aligned} pq &= (1 + i + j + k)(1 + j + k) \\ &= 1 + j + k + i + ij + ik + j + j^2 + jk + k + kj + k^2 \\ &= 1 + j + k + i + k - j + j - 1 + i + k - i - 1 \\ &= -1 + i + j + 3k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 qp &= (1 + j + k)(1 + i + j + k) \\
 &= 1 + i + j + k + j + ji + j^2 + jk + k + ki + kj + k^2 \\
 &= 1 + i + j + k + j - k - 1 + i + k + j - i - 1 \\
 &= -1 + i + 3j + k.
 \end{aligned}$$

**Remarque 1.2.1.** De l'exemple précédent, il s'ensuit qu'en général  $pq \neq qp$ .

Dans le lemme suivant, nous donnerons quelques propriétés des opérations d'addition et de multiplication des quaternions.

**Lemme 1.2.3.** Soient

$$p = p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4, \quad q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4 \text{ et } r = r_1 + ir_2 + jr_3 + kr_4, \in \mathcal{H}.$$

Alors, on a les propriétés suivantes :

1. Commutativité de l'addition :

$$p + q = q + p.$$

2. Associativité de l'addition :

$$(p + q) + r = p + (q + r).$$

3. Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$p(q + r) = pq + pr$$

et

$$(q + r)p = qp + rp.$$

4. Associativité de la multiplication :

$$p(qr) = (pq)r.$$

*Démonstration.* 1. Commutativité de l'addition : nous avons

$$\begin{aligned}
 p + q &= (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4) + (q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4) \\
 &= (p_1 + q_1) + i(p_2 + q_2) + j(p_3 + q_3) + k(p_4 + q_4) \\
 &= (q_1 + p_1) + i(q_2 + p_2) + j(q_3 + p_3) + k(q_4 + p_4) \\
 &= (q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4) + (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4) \\
 &= q + p.
 \end{aligned}$$

2. Associativité de l'addition : nous avons

$$\begin{aligned}
 (p + q) + r &= ((p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4) + (q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4)) + (r_1 + ir_2 + jr_3 + kr_4) \\
 &= ((p_1 + q_1) + i(p_2 + q_2) + j(p_3 + q_3) + k(p_4 + q_4)) + (r_1 + ir_2 + jr_3 + kr_4) \\
 &= ((p_1 + q_1) + r_1) + i((p_2 + q_2) + r_2) + j((p_3 + q_3) + r_3) + k((p_4 + q_4) + r_4) \\
 &= (p_1 + (q_1 + r_1)) + i(p_2 + (q_2 + r_2)) + j(p_3 + (q_3 + r_3)) + k(p_4 + (q_4 + r_4)) \\
 &= (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4) + ((q_1 + r_1) + i(q_2 + r_2) + j(q_3 + r_3) + k(q_4 + r_4)) \\
 &= (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4) + ((q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4) + (r_1 + ir_2 + jr_3 + kr_4)) \\
 &= p + (q + r).
 \end{aligned}$$

3. Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : nous avons

$$\begin{aligned}
 p(q + r) &= (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4)((q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4) + (r_1 + ir_2 + jr_3 + kr_4)) \\
 &= (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4)((q_1 + r_1) + i(q_2 + r_2) + j(q_3 + r_3) + k(q_4 + r_4)) \\
 &= (p_1(q_1 + r_1) - p_2(q_2 + r_2) - p_3(q_3 + r_3) - p_4(q_4 + r_4)) \\
 &\quad + i(p_1(q_2 + r_2) + p_2(q_1 + r_1) + p_3(q_4 + r_4) - p_4(q_3 + r_3)) \\
 &\quad + j(p_1(q_3 + r_3) - p_2(q_4 + r_4) + p_3(q_1 + r_1) + p_4(q_2 + r_2)) \\
 &\quad + k(p_1(q_4 + r_4) + p_2(q_3 + r_3) - p_3(q_2 + r_2) + p_4(q_1 + r_1)) \\
 &= (p_1q_1 + p_1r_1 - p_2q_2 - p_2r_2 - p_3q_3 - p_3r_3 - p_4q_4 - p_4r_4) \\
 &\quad + i(p_1q_2 + p_1r_2 + p_2q_1 + p_2r_1 + p_3q_4 + p_3r_4 - p_4q_3 - p_4r_3) \\
 &\quad + j(p_1q_3 + p_1r_3 - p_2q_4 - p_2r_4 + p_3q_1 + p_3r_1 + p_4q_2 + p_4r_2) \\
 &\quad + k(p_1q_4 + p_1r_4 + p_2q_3 + p_2r_3 - p_3q_2 - p_3r_2 + p_4q_1 + p_4r_1) \\
 &= (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4) + (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)i \\
 &\quad + (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)j + (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)k \\
 &\quad + (p_1r_1 - p_2r_2 - p_3r_3 - p_4r_4) + (p_1r_2 + p_2r_1 + p_3r_4 - p_4r_3)i \\
 &\quad + (p_1r_3 - p_2r_4 + p_3r_1 + p_4r_2)j + (p_1r_4 + p_2r_3 - p_3r_2 + p_4r_1)k \\
 &= pq + pr.
 \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
 (q + r)p &= ((q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4) + (r_1 + ir_2 + jr_3 + kr_4))(p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4) \\
 &= ((q_1 + r_1) + i(q_2 + r_2) + j(q_3 + r_3) + k(q_4 + r_4))(p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4) \\
 &= ((q_1 + r_1)p_1 - (q_2 + r_2)p_2 - (q_3 + r_3)p_3 - (q_4 + r_4)p_4) \\
 &\quad + i((q_1 + r_1)p_2 + (q_2 + r_2)p_1 + (q_3 + r_3)p_4 - (q_4 + r_4)p_3) \\
 &\quad + j((q_1 + r_1)p_3 - (q_2 + r_2)p_4 + (q_3 + r_3)p_1 + (q_4 + r_4)p_2) \\
 &\quad + k((q_1 + r_1)p_4 + (q_2 + r_2)p_3 - (q_3 + r_3)p_2 + (q_4 + r_4)p_1) \\
 &= (q_1p_1 + r_1p_1 - q_2p_2 - r_2p_2 - q_3p_3 - r_3p_3 - q_4p_4 - r_4p_4) \\
 &\quad + i(q_1p_2 + r_1p_2 + q_2p_1 + r_2p_1 + q_3p_4 + r_3p_4 - q_4p_3 - r_4p_3) \\
 &\quad + j(q_1p_3 + r_1p_3 - q_2p_4 - r_2p_4 + q_3p_1 + r_3p_1 + q_4p_2 + r_4p_2) \\
 &\quad + k((q_1p_4 + r_1p_4 + q_2p_3 + r_2p_3 - q_3p_2 - r_3p_2 + q_4p_1 + r_4p_1) \\
 &= (q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3 - q_4p_4) + (q_1p_2 + q_2p_1 + q_3p_4 - q_4p_3)i \\
 &\quad + (q_1p_3 - q_2p_4 + q_3p_1 + q_4p_2)j + (q_1p_4 + q_2p_3 - q_3p_2 + q_4p_1)k \\
 &\quad + (r_1p_1 - r_2p_2 - r_3p_3 - r_4p_4) + (r_1p_2 + r_2p_1 + r_3p_4 - r_4p_3)i \\
 &\quad + (r_1p_3 - r_2p_4 + r_3p_1 - r_4p_2)j + (r_1p_4 + r_2p_3 - r_3p_2 + r_4p_1)k \\
 &= qp + rp.
 \end{aligned}$$

4. Associativité de la multiplication : nous avons

$$\begin{aligned}
p(qr) &= (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4)((q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4)(r_1 + ir_2 + jr_3 + kr_4)) \\
&= (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4)\left((q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 - q_4r_4) + (q_1r_2 + q_2r_1 + q_3r_4 - q_4r_3)i\right. \\
&\quad \left.+ (q_1r_3 - q_2r_4 + q_3r_1 + q_4r_2)j + (q_1r_4 + q_2r_3 - q_3r_2 + q_4r_1)k\right) \\
&= \left(p_1(q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 - q_4r_4) - p_2(q_1r_2 - q_2r_1 + q_3r_4 + q_4r_3)\right. \\
&\quad \left.- p_3(q_1r_3 + q_2r_4 + q_3r_1 - q_4r_2) - p_4(q_1r_4 + q_2r_3 - q_3r_2 + q_4r_1)\right) \\
&\quad + i\left(p_1(q_1r_2 + q_2r_1 + q_3r_4 - q_4r_3) + p_2(q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 - q_4r_4)\right. \\
&\quad \left.+ p_3(q_1r_4 + q_2r_3 - q_3r_2 + q_4r_1) - p_4(q_1r_3 - q_2r_4 + q_3r_1 + q_4r_2)\right) \\
&\quad + j\left(p_1(q_1r_3 - q_2r_4 + q_3r_1 + q_4r_2) - p_2(q_1r_4 + q_2r_3 - q_3r_2 + q_4r_1)\right. \\
&\quad \left.+ p_3(q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 - q_4r_4) + p_4(q_1r_2 + q_2r_1 + q_3r_4 - q_4r_3)\right) \\
&\quad + k\left(p_1(q_1r_4 + q_2r_3 - q_3r_2 + q_4r_1) + p_2(q_1r_3 - q_2r_4 + q_3r_1 + q_4r_2)\right. \\
&\quad \left.- p_3(q_1r_2 + q_2r_1 + q_3r_4 - q_4r_3) + p_4(q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 - q_4r_4)\right) \\
&= \left((p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4)r_1 + (-p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_4 + p_4q_3)r_2\right. \\
&\quad \left.(-p_1q_3 + p_2q_4 - p_3q_1 - p_4q_2)r_3 + (-p_1q_4 - p_2q_3 + p_3q_2 - p_4q_1)r_4\right) \\
&\quad + i\left((p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)r_1 + (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4)r_2\right. \\
&\quad \left.- (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)r_3 + (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)r_4\right) \\
&\quad + j\left((p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)r_1 + (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)r_2\right. \\
&\quad \left.+ (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4)r_3 - (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)r_4\right) \\
&\quad + k\left((p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)r_1 - (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)r_2\right. \\
&\quad \left.+ (p_1q_2 + p_2q_1 - p_3q_4 - p_4q_3)r_3 + (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4)r_4\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (pq)r &= ((p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4)(q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4))(r_1 + ir_2 + jr_3 + kr_4) \\
 &= \left( (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4) + (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)i \right. \\
 &\quad \left. + (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)j + (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)k \right) (r_1 + ir_2 + jr_3 + kr_4) \\
 &= \left( (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4)r_1 - (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)r_2 \right. \\
 &\quad \left. - (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)r_3 - (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)r_4 \right) \\
 &\quad + i \left( (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)r_1 + (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4)r_2 \right. \\
 &\quad \left. - (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)r_3 + (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)r_4 \right) \\
 &\quad + j \left( (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)r_1 + (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)r_2 \right. \\
 &\quad \left. + (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4)r_3 - (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)r_4 \right) \\
 &\quad + k \left( (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)r_1 - (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)r_2 \right. \\
 &\quad \left. + (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)r_3 + (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4)r_4 \right).
 \end{aligned}$$

Par suite,

$$p(qr) = (pq)r.$$

Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Dans le lemme suivant, nous donnerons quelques propriétés concernant la partie scalaire d'un quaternion.

**Lemme 1.2.4.** *Soient*

$$p = p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4, \quad q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4 \text{ et } r = r_1 + ir_2 + jr_3 + kr_4, \in \mathcal{H}.$$

*Alors, nous avons*

$$Sc(pqr) = Sc(qrp) = Sc(rpq).$$

*Démonstration.* Compte tenu des calculs du lemme précédent, nous avons

$$\begin{aligned}
 Sc(pqr) &= p_1(q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 - q_4r_4) - p_2(q_1r_2 - q_2r_1 + q_3r_4 + q_4r_3) \\
 &\quad - p_3(q_1r_3 + q_2r_4 + q_3r_1 - q_4r_2) - p_4(q_1r_4 + q_2r_3 - q_3r_2 + q_4r_1)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 Sc(qrp) &= q_1(r_1p_1 - r_2p_2 - r_3p_3 - r_4p_4) - q_2(r_1p_2 - r_2p_1 + r_3p_4 + r_4p_3) \\
 &\quad - q_3(r_1p_3 + r_2p_4 + r_3p_1 - r_4p_2) - q_4(r_1p_4 + r_2p_3 - r_3p_2 + r_4p_1) \\
 &= p_1(q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 - q_4r_4) - p_2(q_1r_2 - q_2r_1 + q_3r_4 + q_4r_3) \\
 &\quad - p_3(q_1r_3 + q_2r_4 + q_3r_1 - q_4r_2) - p_4(q_1r_4 + q_2r_3 - q_3r_2 + q_4r_1) \\
 &= Sc(pqr)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 Sc(rpq) &= r_1(p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4) - r_2(p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_4 + p_4q_3) \\
 &\quad - r_3(p_1q_3 + p_2q_4 + p_3q_1 - p_4q_2) - r_4(p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1) \\
 &= p_1(q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 - q_4r_4) - p_2(q_1r_2 - q_2r_1 + q_3r_4 + q_4r_3) \\
 &\quad - p_3(q_1r_3 + q_2r_4 + q_3r_1 - q_4r_2) - p_4(q_1r_4 + q_2r_3 - q_3r_2 + q_4r_1) \\
 &= Sc(pqr) \\
 &= Sc(qrp).
 \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Notons que le quaternion

$$0 + i0 + j0 + k0 = 0_{\mathcal{H}}$$

est appelé l'élément neutre de l'addition ou le quaternion nul et le quaternion

$$1 + i0 + j0 + k0 = 1_{\mathcal{H}}$$

est le quaternion unité. Notons que l'inverse d'un élément  $p \in \mathcal{H}$  par rapport à l'addition est  $-p$ .

## 1.2.2 Conjugaison

**Définition 1.2.3.** *Le conjugué d'un quaternion  $q$  noté  $\bar{q}$  est un quaternion qui inverse les signes des parties imaginaires du quaternion  $q$ . Il est défini comme suit : si  $q = a + bi + cj + dk$ , alors*

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

Dans le lemme suivant, nous donnerons quelques propriétés de l'opération de conjugaison des quaternions.

**Lemme 1.2.5.** Soient  $p, q \in \mathcal{H}$ . Alors

1. Le conjugué du conjugué d'un quaternion est le quaternion original. Autrement dit,

$$\overline{\overline{p}} = p.$$

2. Le conjugué de la somme est la somme des conjugués. Autrement dit,

$$\overline{p + q} = \overline{p} + \overline{q}.$$

3. Le produit d'un quaternion par son conjugué est un nombre réel non négatif. Nous avons

$$p\overline{p} = \overline{p}p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2.$$

4. Le conjugué du produit est le produit des conjugués, mais l'ordre des quaternions est inversé.

Autrement dit,

$$\overline{pq} = \overline{q}\overline{p}.$$

5. Si  $r = ir_2 + jr_3 + kr_4 \in \mathcal{H}$ , alors  $\overline{r} = -r$ .

*Démonstration.* Soient

$$p = (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4), \quad q = (q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4), \quad r = (ir_2 + jr_3 + kr_4) \in \mathcal{H}.$$

1. Nous avons

$$\begin{aligned} \overline{\overline{p}} &= \overline{\overline{p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4}} \\ &= \overline{p_1 - ip_2 - jp_3 - kp_4} \\ &= p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4 \\ &= p. \end{aligned}$$

2. Nous avons  $\overline{p} = p_1 - ip_2 - jp_3 - kp_4$ ,  $\overline{q} = q_1 - iq_2 - jq_3 - kq_4$  et

$$p + q = (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2)i + (p_3 + q_3)j + (p_4 + q_4)k.$$

Alors

$$\begin{aligned} \overline{p + q} &= (p_1 + q_1) - i(p_2 + q_2) - j(p_3 + q_3) - k(p_4 + q_4) \\ &= (p_1 - ip_2 - jp_3 - kp_4) + (q_1 - iq_2 - jq_3 - kq_4) \\ &= \overline{p} + \overline{q}. \end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \bar{p}\bar{p} &= (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4)(p_1 - ip_2 - jp_3 - kp_4) \\
 &= p_1^2 - ip_1p_2 - jp_1p_3 - kp_1p_4 + ip_1p_2 - i^2p_2^2 - jip_2p_3 - ikp_2p_4 \\
 &\quad + jp_1p_3 - jip_2p_3 - j^2p_3^2 - jkp_3p_4 + kp_1p_4 - kip_2p_4 - kjp_4p_3 - k^2p_4^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant les règles (1.2.1), nous obtenons

$$p\bar{p} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
 \bar{p}p &= p_1^2 + (-p_2)^2 + (-p_3)^2 + (-p_4)^2 \\
 &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2.
 \end{aligned}$$

4. Nous avons

$$\begin{aligned}
 pq &= (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4)(q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4) \\
 &= (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4) + (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)i \\
 &\quad + (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)j + (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)k.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \bar{p}\bar{q} &= (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4) - (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)i \\
 &\quad - (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)j - (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)k.
 \end{aligned}$$

Nous avons aussi,

$$\begin{aligned}
 \bar{q}\bar{p} &= (q_1 - iq_2 - jq_3 - kq_4)(p_1 - ip_2 - jp_3 - kp_4) \\
 &= p_1q_1 - iq_1p_2 - jq_1p_3 - kq_1p_4 - p_2q_2 - iq_2p_1 + ijq_2p_3 + ikq_2p_4 \\
 &\quad - p_3q_3 - jq_3p_1 + jiq_3p_2 + jkq_3p_4 - p_4q_4 - kq_4p_1 + kiq_4p_2 + kjq_4p_3 \\
 &= (p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4) - (p_1q_2 + p_2q_1 + p_3q_4 - p_4q_3)i \\
 &\quad - (p_1q_3 - p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2)j - (p_1q_4 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_1)k \\
 &= \bar{p}\bar{q}.
 \end{aligned}$$

5. Nous avons  $\bar{r} = -ir_2 - jr_3 - kr_4 = -(ir_2 + jr_3 + kr_4) = -r$ .

■

Les propriétés précédentes peuvent être résumées dans le théorème et la proposition ci dessous.

**Théorème 1.2.1.** *La conjugaison constitue un automorphisme du groupe additif  $\mathcal{H}$ , mais pas du groupe multiplicatif  $(\mathcal{H}^*, \times)$ . C'est également une involution.*

**Propriété 1.2.1.** *La conjugaison des quaternion est un anti-automorphisme d'algèbre (c'est à dire une application linéaire de l'espace vectoriel  $\mathcal{H}$  dans lui-même et inverse l'ordre des produits.*

## 1.3 Module et inverse d'un quaternion

### 1.3.1 Module d'un quaternion

**Définition 1.3.1.** *On définit le module d'un quaternion comme la racine carrée du produit de celui-ci avec son conjugué. Si  $q = a + bi + cj + dk$ , alors*

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Dans le lemme suivant, nous énonçons quelques propriétés du module d'un quaternion.

**Lemme 1.3.1.** *Soient  $p, q \in \mathcal{H}$ . Alors*

1.  $|p| = |\bar{p}|$ .
2.  $|pq| = |p||q|$ .
3.  $(|p| + |q|)^2 = |p|^2 + 2|p\bar{q}| + |q|^2$ .

*Démonstration.* Soient  $p = (p_1 + ip_2 + jp_3 + kp_4)$ ,  $q = (q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4) \in \mathcal{H}$ .

1. Nous avons

$$\begin{aligned} |\bar{p}| &= \sqrt{p_1^2 + (-p_2)^2 + (-p_3)^2 + (-p_4)^2} \\ &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2} \\ &= |p|. \end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
 |pq|^2 &= (pq)(\overline{pq}) \\
 &= (pq)(\overline{q}\overline{p}) \\
 &= p(q\overline{q})\overline{p} \\
 &= p|q|^2\overline{p} \\
 &= p\overline{p}|q|^2 \\
 &= |p|^2|q|^2.
 \end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
 (|p| + |q|)^2 &= |p|^2 + 2|p||q| + |q|^2 \\
 &= |p|^2 + 2|p||\overline{q}| + |q|^2 \\
 &= |p|^2 + 2|p\overline{q}| + |q|^2.
 \end{aligned}$$

■

### 1.3.2 Inverse d'un quaternion

**Définition 1.3.2.** L'inverse d'un quaternion  $q$  existe si et seulement si le quaternion  $q$  est non nul. L'inverse est noté  $q^{-1}$  et est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 q^{-1} &= \frac{\overline{q}}{q\overline{q}} \\
 &= \frac{\overline{q}}{|q|^2}, \quad q \neq 0_{\mathcal{H}}.
 \end{aligned}$$

**Lemme 1.3.2.** Soient  $p, q \in \mathcal{H}^*$ . Alors, l'inverse d'un produit des deux quaternions  $p$  et  $q$  est le produit inversé des inverses de  $p$  et  $q$ , c'est-à-dire :

$$(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}.$$

*Démonstration.* Nous avons

$$\begin{aligned}
 (pq)^{-1} &= \frac{\overline{pq}}{pq\overline{pq}} \\
 &= \frac{\overline{q}\overline{p}}{pq\overline{q}\overline{p}} \\
 &= \frac{\overline{q}\overline{p}}{q\overline{q}p\overline{p}} \\
 &= \frac{\overline{q}}{q\overline{q}} \cdot \frac{\overline{p}}{p\overline{p}} \\
 &= q^{-1}p^{-1}.
 \end{aligned}$$

■

### Quaternion unitaire (unité) :

Un quaternion de longueur 1 est appelé quaternion unitaire (ou quaternion unité). L'ensemble de tels quaternion est noté  $F$

$$F = \{q \in \mathcal{H} \mid \|q\| = 1\}.$$

L'ensemble des quaternions unités  $F$  est un sous-groupe de  $\mathcal{H}^*$ .

*Démonstration.* 1.  $F \neq \emptyset$ , en effet  $1 \in F$ .

2. Si  $q_1, q_2 \in F$ , alors

$$\|q_1q_2\| = \|q_1\|\|q_2\| = 1 \cdot 1 = 1.$$

Par suite,  $q_1q_2 \in F$ .

3. Soit  $q \in F$ , alors

$$q^{-1} = \overline{q}$$

et

$$\|q^{-1}\| = \|q\| = 1$$

Par conséquent,  $q^{-1} \in F$ .

■

**Proposition 1.3.1.** *Les quaternions unitaires forment une représentation de la sphère  $S^3$  dans l'espace des quaternions..*

*Démonstration.*

$$q \text{ unitaire} \iff \|q\| = 1 \iff a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \iff q \in S^3$$

■

## 1.4 Représentations polaire et exponentielle d'un quaternion

### 1.4.1 Représentation polaire d'un quaternion

Si  $q = a + bi + cj + dk \in \mathcal{H}$ ,  $\exists \theta \in \mathbb{R}$  et  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  tel que :

$$q = |q|e^{\vec{v}\theta} = |q|(\cos \theta + \vec{v} \sin \theta), \quad |\vec{v}| = 1,$$

où  $\vec{v}$  est un vecteur unitaire pur, il représente l'axe de  $q$ .

$$\vec{v} = \frac{V(q)}{|V(q)|} = \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}, \quad b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$$

et  $\theta$  son angle,  $\cos \theta = \frac{a}{|q|}$ ,  $\sin \theta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{|q|}$ .

$$\theta = \arctan\left(\frac{|V(q)|}{Sc(q)}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{a}\right)$$

### 1.4.2 Représentation exponentielle d'un quaternion

On peut utiliser la forme polaire du quaternion  $q = |q|(\cos \theta + \vec{v} \sin \theta)$  pour écrire :

$$e^q = e^{a + \vec{v}\theta} = e^a \left( \cos(|\vec{v}|\theta) + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \sin(|\vec{v}|\theta) \right)$$

ou

$$e^q = |q|e^{\vec{v}\theta} = |q|(\cos \theta + \vec{v} \sin \theta).$$

- Ce qui permet d'introduire l'élevation à la puissance quaternion unitaire :

$$q = \cos \theta + V \sin \theta$$

$$q^t = (\cos \theta + V \sin \theta)^t = \exp(t \ln(q)) = \exp(t(\cos \theta + V \sin \theta))$$

- Il est également possible de définir le logarithme d'un quaternion unitaire :

$$\ln(q) = \ln(\cos \theta + V \sin \theta) = \ln(\exp(V\theta)) = V\theta.$$

## 1.5 Produit vectoriel, produit scalaire et produit mixte des quaternions

### 1.5.1 Produit vectoriel des quaternions

Le produit vectoriel (ou extérieur) est une opération qui associe deux quaternions purs. Elle en génère un troisième.

**Définition 1.5.1.** Soient  $q_1 = b_1i + c_1j + d_1k$  et  $q_2 = b_2i + c_2j + d_2k$  deux quaternions purs. Le produit vectoriel de  $q_1$  et  $q_2$  est noté  $q_1 \times q_2$  et est défini comme suit :

$$q_1 \times q_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = (c_1d_2 - c_2d_1)i + (b_2d_1 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - b_2c_1)k.$$

**Propriétés :** Soient  $q_1, q_2$  et  $q_3$  trois quaternions purs et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, on a

1. Anticommutativité :

$$q_1 \times q_2 = -q_2 \times q_1$$

2. Multiplication par un scalaire :

$$(\lambda q_1) \times q_2 = q_1 \times (\lambda q_2) = \lambda(q_1 \times q_2).$$

3. Distributivité du produit extérieur par rapport à l'addition :

$$q_1 \times (q_2 + q_3) = (q_1 \times q_2) + (q_1 \times q_3).$$

4. Norme du produit vectoriel :

$$\|q_1 \times q_2\| = \|q_1\| \|q_2\| \sin(q_1, q_2)$$

5.

$$q_1 \times q_2 = \vec{0} \Leftrightarrow q_1 \parallel q_2.$$

6.

$$q_1 \times q_2 = \frac{1}{2}(q_1q_2 - q_2q_1) = \frac{1}{2}(q_1q_2 - \overline{q_1q_2}).$$

## 1.5.2 Produit scalaire des quaternions

Contrairement au produit vectoriel, le produit scalaire est une opération qui permet de générer un nombre réel à partir de deux quaternions.

**Définition 1.5.2.** Soient  $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$  et  $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$  deux quaternions. Le produit scalaire de  $q_1$  et  $q_2$  est noté  $q_1 \cdot q_2$  et est défini comme suit :

$$q_1 \cdot q_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2.$$

**Propriétés :** Soient  $q_1, q_2$  et  $q_3$  trois quaternions et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, on a

1. Commutativité :

$$q_1 \cdot q_2 = q_2 \cdot q_1$$

2. Multiplication par un scalaire :

$$(\lambda q_1) \cdot q_2 = q_1 \cdot (\lambda q_2) = \lambda(q_1 \cdot q_2).$$

3. Distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition :

$$q_1 \cdot (q_2 + q_3) = (q_1 \cdot q_2) + (q_1 \cdot q_3).$$

4.

$$q_1 \cdot q_2 = \frac{1}{2}(\overline{q_1}q_2 + \overline{q_2}q_1) = \frac{1}{2}(q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1}).$$

## 1.5.3 Produit mixte des quaternions

**Définition 1.5.3.** Soient  $q_1 = b_1i + c_1j + d_1k$ ,  $q_2 = b_2i + c_2j + d_2k$  et  $q_3 = b_3i + c_3j + d_3k$  trois quaternions purs. On appelle produit mixte de  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ , le réel noté  $(q_1, q_2, q_3)$  et défini par :

$$(q_1, q_2, q_3) := q_1 \cdot (q_2 \times q_3).$$

**Propriétés :** Soient  $q_1 = b_1i + c_1j + d_1k$ ,  $q_2 = b_2i + c_2j + d_2k$  et  $q_3 = b_3i + c_3j + d_3k$  trois quaternions purs. Alors, on a

1. Représentation du produit mixte à l'aide d'un déterminant

$$(q_1, q_2, q_3) = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = b_1(c_2d_3 - c_3d_2) + c_1(b_3d_2 - b_2d_3) + d_1(b_2c_3 - b_3c_2).$$

2. Le produit mixte ne change pas si ses facteurs sont permutés d'une manière circulaire

$$(q_1, q_2, q_3) = (q_2, q_3, q_1) = (q_3, q_1, q_2).$$

Autrement dit,

$$q_1 \cdot (q_2 \times q_3) = q_2 \cdot (q_3 \times q_1) = q_3 \cdot (q_1 \times q_2)$$

3. Le produit mixte change de signe si deux facteurs sont permutés

$$(q_1, q_2, q_3) = -(q_2, q_1, q_3) = -(q_1, q_3, q_2) = -(q_3, q_2, q_1).$$

**Remarque 1.5.1.** Soient

$$q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$$

et

$$q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k.$$

Alors :

$$q_1q_2 = (a_1 + \vec{V}_1)(a_2 + \vec{V}_2) = a_1a_2 - \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + a_1\vec{V}_2 + a_2\vec{V}_1 + \vec{V}_1 \times \vec{V}_2,$$

avec  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$  le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

et  $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$  le produit vectoriel :

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k$$

## 1.6 Représentations matricielles des quaternions

On peut associer des matrices aux quaternions de deux manières standard :

1. La première consiste à utiliser des matrices à coefficients complexes de dimension  $2 \times 2$ , notées  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .
2. La seconde consiste à utiliser des matrices à coefficients réels de dimension  $4 \times 4$ , notées  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

Ces associations permettent d'identifier l'ensemble des quaternions  $\mathcal{H}$  comme une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

### 1.6.1 Représentation des quaternions par des matrices $M_2(\mathbb{C})$

Soit  $q = a + bi + cj + dk$ , où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . On peut écrire :

$$q = a + bi + cj + dk = (a + bi) + j(c - di) = z_1 + jz_2,$$

avec  $z_1 = a + bi$  et  $z_2 = c - di$ . Donc  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

Ainsi, on associe à  $q$  la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi & -(c + di) \\ c - di & a - bi \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Les matrices associées aux unités imaginaires sont :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices associées aux quaternions est :

$$\mathcal{H}_M = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

qui forme une sous-algèbre de  $M_2(\mathbb{C})$ .

- Conjugaison :

$$\text{conj}(A) = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - bi & c + di \\ -c + di & a + bi \end{pmatrix}.$$

Soient  $A_1, A_2 \in \mathcal{H}_M$  et  $L \in \mathbb{R}$ . Nous avons

$$\text{conj}(A_1 + A_2) = \text{conj}(A_1) + \text{conj}(A_2),$$

$$\text{conj}(LA) = L \text{conj}(A),$$

$$\text{conj}(A_1 A_2) = \text{conj}(A_1) \text{conj}(A_2),$$

$$\text{conj}(\text{conj}(A)) = A.$$

- Déterminant de  $A$  :

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{vmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{vmatrix} = (a + bi)(a - bi) - (-c - di)(c - di) \\ &= a^2 - abi + bai + b^2 i^2 - [-c^2 - cdi + dci - d^2 i^2] \end{aligned}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

- **Addition :**

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \begin{pmatrix} q_1 + q_2 & -(c_1 - d_1i) \\ c_1 - d_1i & q_1 - q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_3 + q_4 & -(c_3 - d_3i) \\ c_3 - d_3i & q_3 - q_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (q_1 + q_2) + (q_3 + q_4) & -(c_1 - d_1i) - (c_3 - d_3i) \\ (c_1 - d_1i) + (c_3 - d_3i) & (q_1 - q_2) + (q_3 - q_4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Multiplication :**

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= \begin{pmatrix} q_1 + q_2 & -(c_1 - d_1i) \\ c_1 - d_1i & q_1 - q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 + q_4 & -(c_3 - d_3i) \\ c_3 - d_3i & q_3 - q_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (q_1 + q_2)(q_3 + q_4) + (c_1 - d_1i)(c_3 - d_3i) & -(q_1 + q_2)(c_3 - d_3i) + (c_1 - d_1i)(q_3 - q_4) \\ (c_1 - d_1i)(q_3 + q_4) + (q_1 - q_2)(c_3 - d_3i) & (c_1 - d_1i)(c_3 - d_3i) + (q_1 - q_2)(q_3 - q_4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Transposée de A :**

$$A^t = \begin{pmatrix} z_1 & \overline{z_2} \\ -\overline{z_2} & z_1 \end{pmatrix}$$

## 1.6.2 Représentation des quaternions par des matrices $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

L'ensemble  $\mathcal{H}$  des quaternions possède une structure d'algèbre sur  $\mathbb{R}$ , et peut être vu comme un espace vectoriel réel de dimension 4 avec pour base canonique  $1, i, j, k$ . Ainsi, tout quaternion peut s'écrire sous forme :

$$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$$

avec  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}$ . Il est possible de représenter les quaternions par des matrices réelles  $4 \times 4$ . Cette représentation matricielle permet de traduire des opérations algébriques (addition, multiplication, conjugaison, norme) en termes de calcul matriciel. Par exemple, le quaternion  $qq_1 + q_2i + q_3j + q_4k$  peut être associé à la matrice :

$$M(q) = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cadre, l'addition et la multiplication des quaternions sont équivalentes à l'addition et à la multiplication matricielle. De plus, la norme d'un quaternion correspond à la racine carrée du déterminant de la matrice associée, tandis que la conjugaison d'un quaternion est représentée par la transposée de la matrice associée au quaternion. Ainsi, les matrices offrent une alternative élégante pour exprimer les quaternions et effectuer leurs produits. Soient deux quaternions :

$$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$$

et

$$p = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k.$$

Le produit  $qp$  peut être calculé algébriquement, mais aussi à l'aide du produit matriciel des matrices associées à  $q$  et à  $p$  :

$$qp = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & -q_4 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

Le produit  $M(q) \cdot M(p)$  donne alors le quaternion  $qp$  sous forme matricielle. D'autre part, l'ensemble des matrices associées aux quaternions imaginaires purs  $i, j, k$  dans la base  $1, i, j, k$  est donné par :

$$M(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces matrices vérifient les relations fondamentales des quaternions, notamment :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

**Exemple 2.** Soient  $q_1 = 1 + i + j + k$  et  $q_2 = 1 + j + k$ . Alors :

$$q_1q_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -1 + i + j + 3k.$$

**Matrice orthogonale :**

Nous pouvons prouver que la matrice de quaternion de norme unitaire est orthogonale en démontrant que le produit de cette matrice avec sa transposée donne l'identité.

Dans le contexte de matrices,  $B$  désignera la matrice associée à un quaternion  $q = a + bi + cj + dk$ , avec  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . La matrice  $B$  est définie par :

$$B = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

Le produit  $BB^T$  est :

$$BB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4,$$

---

# Quaternions et rotation spatiale

## 2.1 Angles et convention d'Euler

La première étude sur les rotations a été réalisée par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1776. Depuis, l'analyse des rotations en  $3D$  a été au centre de recherches approfondies dans divers domaines, notamment la mécanique, la robotique, l'informatique graphique, et l'orbite des satellites.

### 2.1.1 Rotation autour des axes $X, Y, Z$

Un mouvement de rotation dans l'espace implique un déplacement circulaire autour d'un axe fixe. Nous allons caractériser ces rotations à l'aide de leur matrice associée (nous parlerons alors de rotations vectorielles).

#### Rotation autour de l'axe $X$ :

Cette rotation modifie les coordonnées  $y$  et  $z$ , tandis que la coordonnée  $x$  reste inchangée. La matrice de rotation pour une rotation d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $X$ ,  $y = R_X(\alpha) \cdot r$  avec  $y$  : nouvelle coordonné après la rotation,  $r$  point dans l'espace pour faire la rotation.

$$R_X(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

**Rotation autour de l'axe Y :**

Cette rotation modifie les coordonnées  $x$  et  $z$  toutes, et la coordonnée  $y$  inchangée, la matrice de rotation pour une rotation d'un angle  $\beta$  autour de l'axe Y est :

$$R_Y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

$$y = R_Z(\beta) \cdot \mathbf{r}$$

**Rotation autour de l'axe Z :**

Cette rotation modifie toutes les coordonnées  $x$  et  $y$  et la coordonnée  $z$  inchangée, la matrice de rotation pour une rotation d'un angle  $\gamma$  autour de l'axe Z est :

$$R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$y = R_Z(\gamma) \cdot \mathbf{r}$$

**Exemple 3.**  $X = (1, 0, 0)$  point dans l'espace. Appliquons une rotation de  $90^\circ$  (ou  $\frac{\pi}{2}$  radians) autour de l'axe Z.

$$X' = R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot X = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Après une rotation de  $90^\circ$  autour de l'axe Z, le point  $(1, 0, 0)$  devient  $(0, 1, 0)$ .

**2.1.2 Propriétés des matrices de rotation**

- Une matrice  $R \in M_3(\mathbb{R})$  est dite matrice de rotation si elle vérifie les conditions suivantes :

$$RR^T = I \quad \text{et} \quad \det(R) = 1.$$

L'ensemble de ces matrices forme le groupe spécial orthogonal noté  $SO(3, \mathbb{R})$  :

$$SO(3, \mathbb{R}) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid RR^T = I \text{ et } \det(R) = 1\}.$$

- Si  $R_1$  et  $R_2$  sont des matrices de rotation 3D, alors leur produit  $R_1R_2$  et  $R_2R_1$  sont également des matrices de rotation.
- L'inverse d'une rotation d'angle  $\theta$  autour du même axe est donné par  $R(-\theta)$ . En termes matriciels, cela signifie que  $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$ . De plus, ces matrices ont un déterminant égal à 1, ce qui signifie qu'elles préservent l'orientation de l'espace.
- La composition de deux rotations dans l'espace donne une nouvelle rotation, bien que l'axe et l'angle de cette rotation résultante ne soient pas immédiatement connus. Par exemple, la matrice  $R_1R_2$  correspond à l'application successive de la rotation  $R_2$  suivie de la rotation  $R_1$ , appliquée d'abord  $R_2$  puis  $R_1$ . En général, ces deux compositions donnent des résultats différents, ce qui signifie que le groupe  $SO(3, \mathbb{R})$  n'est pas commutatif.

**Convention d'Euler :**

Dans le cadre de l'étude de la représentation des rotations 3D en mathématiques appliquées, il convient de noter que les angles d'Euler ne suivent pas une norme unique, mais leurs systèmes varient selon différents facteurs incluant :

1. L'ordre des axes (comme  $Z - Y - X$  ou  $Z - Y - Z$ ),
2. Le sens de rotation (horaire ou antihoraire),
3. Le type de rotation (intrinsèque avec axes mobiles comme  $Z - Y' - X''$  ou extrinsèque avec axes fixes comme  $Z - Y - X$ ),
4. L'ordre de multiplication des matrices (droite-gauche ou gauche-droite).

Ces systèmes se classent en 12 possibilités, dont 6 variantes classiques (Tait-Bryan) utilisées en aéronautique et robotique, comme le système  $Z - Y - X$  pour lacet-tangage-roulis, et 6 variantes symétriques comme  $Z - Y - Z$  utilisée en mécanique céleste.

En pratique :

1. L'aviation civile suit le système  $Z - Y - X$  en extrinsèque.
2. La robotique utilise  $Z - Y' - X''$  en intrinsèque.

### 2.1.3 Convention des angles d'Euler $X - Y - Z$ en rotation extrinsèque

#### Principes fondamentaux :

Dans un référentiel orthonormé fixe  $(O, X, Y, Z)$  dit absolu, la convention  $X - Y - Z$  de rotation extrinsèque implique trois rotations successives autour des axes fixes (référentiel global).

#### Caractéristiques des rotations extrinsèques :

- (a) **Invariance des axes :** Toutes les transformations s'appliquent relativement aux axes initiaux.
- (b) **Séquence de rotations :** - Rotation primaire  $R_x(\alpha)$ , - Rotation secondaire  $R_y(\beta)$ ,  
- Rotation tertiaire  $R_z(\gamma)$ .
- (c) **Ordre de multiplication des matrices :** Produit matriciel effectué dans l'ordre de droite à gauche :

$$R_{xyz} = R_z(\gamma) R_y(\beta) R_x(\alpha).$$

La matrice après calculs est :

$$R_{xyz} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}.$$

### 2.1.4 Convention des angles d'Euler $Z - Y' - X''$ en rotation intrinsèque

#### Principes fondamentaux :

Dans un référentiel orthonormé fixe noté  $(O, X, Y, Z)$  dit absolu, la convention  $Z - Y' - X''$  de rotation intrinsèque implique trois rotations successives autour des axes mobiles (référentiel lié à l'objet).

**Caractéristiques des rotations :**

- (a) **Intrinsèques** : Les rotations se font autour des axes du repère en mouvement, donc après chaque rotation, les axes changent de position.
- (b) **Séquence de rotations** :
- Première rotation** : Une rotation d'angle  $\gamma$  est effectuée autour de l'axe  $Z$  (fixe). On obtient ainsi un nouveau repère  $(Ox'y'z')$ , qui est orienté différemment mais reste orthonormé.
- (c) **Deuxième rotation** : Ensuite, une rotation d'angle  $\beta$  est effectuée autour de l'axe  $Y'$ , qui appartient désormais au repère mobile  $(Ox'y'z')$  issu de la première rotation. Cette opération produit un nouveau repère  $(Ox''y''z'')$ .
- (d) **Troisième rotation** : Enfin, une rotation d'angle  $\alpha$  est effectuée autour de l'axe  $X''$ , qui appartient au repère obtenu précédemment  $(Ox''y''z'')$ . Cette dernière rotation donne l'orientation finale du système.

L'ordre de multiplication des matrices de rotation est effectué dans l'ordre de gauche à droite :

$$R_{zy'x''} = R_z(\gamma) \cdot R_{y'}(\beta) \cdot R_{x''}(\alpha).$$

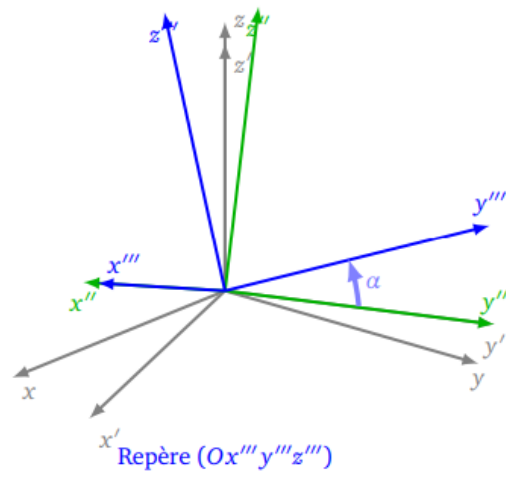
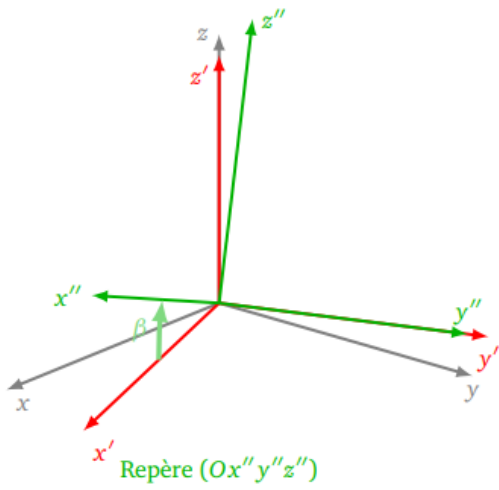
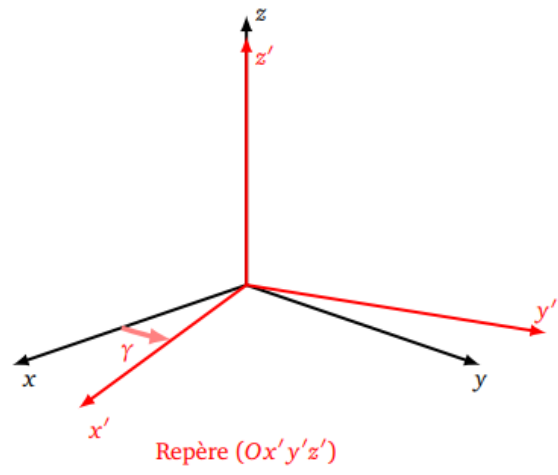
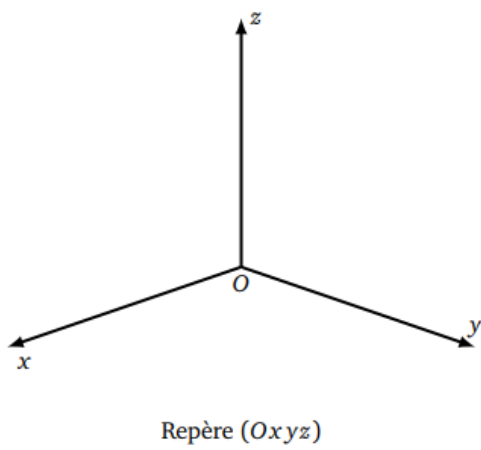
### 2.1.5 Mouvements d'un avion dans l'espace et problème de blocage des Cardan

Pour contrôler et orienter un avion dans l'espace, le pilote utilise trois commandes principales, chacune agissant sur un axe spécifique du repère aéronautique. Nous utilisons un système de coordonnées tridimensionnel (OXYZ) appelé repère lié, qui est attaché à l'avion et se déplace avec lui. Ce repère permet de décrire précisément comment l'avion change d'orientation.

#### Définition des Axes du Repère Lié

- **Axe X (longitudinal)** : Orienté vers l'avant de l'avion.
- **Axe Y (transversal)** : S'étendant de l'aile gauche à l'aile droite.
- **Axe Z (vertical)** : Pointant vers le haut ou le bas selon l'assiette.

À partir de ces axes, on décrit trois rotations fondamentales :



(a) **Rotation autour de l'axe Z** : Mouvement de lacet (yaw)

**Explication :**

La rotation autour de l'axe Z, appelée lacet (yaw), permet à l'avion de modifier sa trajectoire horizontale (gauche/droite) sans inclinaison ni changement d'altitude.

(b) **Rotation autour de l'axe Y** : Mouvement de tangage (pitch)

**Explication :**

Le tangage (pitch) correspond à la rotation autour de l'axe Y, provoquant une élévation ou une descente du nez de l'avion.

(c) **Rotation autour de l'axe X** : Mouvement de roulis (Roll)

**Explication :**

Le roulis (roll) est une rotation autour de l'axe X, induisant une inclinaison latérale (une aile baisse, l'autre se lève).

**Remarque 2.1.1.** *Chaque rotation impacte à la fois la position de l'avion et l'orientation du repère lié.*

**Problème de blocage des Cardan (gimbal lock) dans le mouvement d'un avion :**

**Analyse Mathématique**

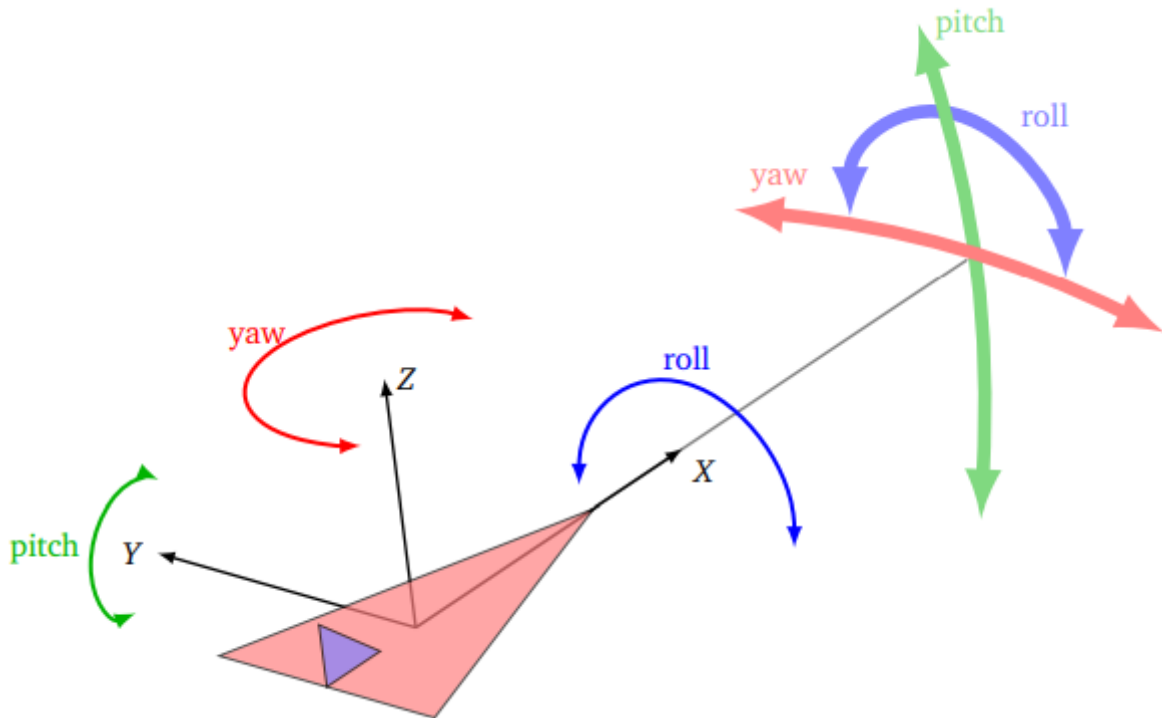
Considérons un avion en position verticale dans le référentiel absolu ( $Oxyz$ ). Dans le référentiel lié à l'avion ( $Ox''y''z''$ ) :

(a) Lors de l'application de la séquence de rotations selon la convention  $Z \rightarrow Y' \rightarrow X''$  :

- En position verticale, l'axe  $x''$  coïncide avec l'axe Z original.
- Cette coïncidence entraîne la perte d'un degré de liberté.

(b) **Conséquence :**

- Le nombre de degrés de liberté passe de 3 à 2 seulement.



- Les rotations restantes s'effectuent autour de l'axe  $y'$  et de l'axe  $Z$  (qui coïncide avec  $x''$ ).

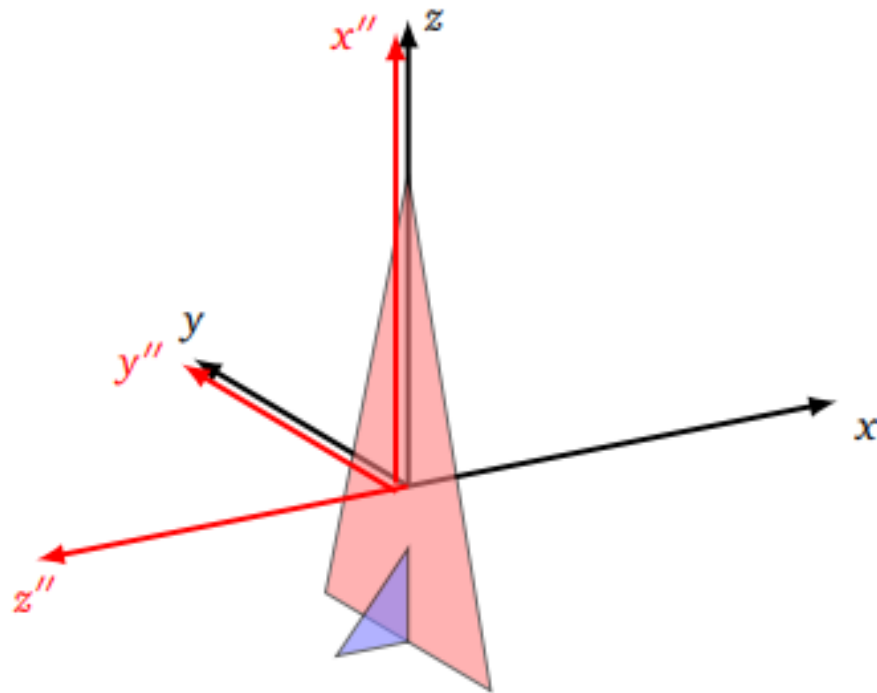
Dans la convention  $Z - Y' - X''$ , lorsque l'angle de tangage atteint  $90^\circ$ , une situation de blocage (gimbal lock) se produit. La matrice totale est donnée par :

$$R_{\text{total}} = R_z(\gamma) R_{y'}(\beta) R_{x''}(\alpha) = R_z(\gamma + \beta) R_{y'}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$R_{\text{total}} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\gamma + \beta) & \cos(\gamma + \beta) \\ 0 & \cos(\gamma + \beta) & -\sin(\gamma + \beta) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Les deux rotations  $R_z$  et  $R_{x''}$  agissent autour du même axe (car  $x''$  coïncide avec  $z$ ).
- Le système ne peut distinguer le mouvement de lacet et de roulis (les mouvements de lacet et de roulis fusionnent en un seul mouvement).
- Les angles  $\gamma$  et  $\beta$  deviennent indiscernables.
- Le système perd un degré de liberté essentiel.

Pour résoudre le problème du blocage des angles d'Euler, nous utilisons les quaternions comme une alternative mathématique plus efficace pour représenter la rotation dans l'espace tridimensionnel.



Les quaternions se distinguent par leur capacité à maintenir toutes les degrés de liberté sans aucune perte, même dans des cas de rotations critiques. C'est ce qui les rend idéaux pour des applications dynamiques complexes telles que les systèmes de navigation aérienne et spatiale, les simulations de mouvement dans l'animation, et la robotique.

**Exemple 4.** on a  $P = (1, 0, 0)$  point dans l'espace,

et  $\theta = \frac{\pi}{3}$  ( $60^\circ$ ) ordre  $(Z, Y, X)$  c'est une séquence de rotation

on va appliquer cette séquence selon deux conventions (extrinsèque, intrinsèque)

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R_z\left(\frac{\pi}{3}\right)_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad R_x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(a) **Rotation d'Euler extrinsèques (Z, Y, X)**

*l'ordre inverse*

on applique les rotations autour des axes fixes, on compose les rotations dans

$$R = R_x R_y R_z$$

$$\text{étape1 : } R_y R_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{étape2 : } R_x(R_y R_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Appliqué à  $P = (1, 0, 0)^T$ ,

$$P' = R.P = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.808 \\ 0.533 \end{bmatrix}^T$$

**Rotation d'Euler intrinsèques (Z, Y, X)** les axes bougent avec l'objet les rotations appliquées dans l'ordre gauche à droite  $R = R_z R_y R_x$

$$\text{étape1 : } R_y R_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{étape2 : } R_z(R_y R_x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{8} + \frac{1}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

# appliqué à  $P = (1, 0, 0)^T$

$$P'' = R.P = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.433 \\ -0.866 \end{bmatrix}^T = \left( -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

## 2.2 Quaternions et rotation spatiale

### 2.2.1 Définitions et propriétés

On peut considérer une rotation comme une transformation dans l'espace, qui décrit la position et l'orientation d'un corps rigide en trois dimensions autour d'un point fixe.

En raison des erreurs de calcul accumulées, un quaternion unitaire peut être utilisé pour corriger ce problème. Les quaternions unitaires sont faciles à combiner et évitent le verrouillage de cardan. De plus, ils sont généralement plus stables numériquement et peuvent s'avérer plus efficaces que les matrices de rotation.

Les quaternions sont utilisés dans divers domaines tels que la robotique, l'informatique graphique, l'aéronautique et la réalité virtuelle. Chaque vecteur unitaire est considéré comme un axe de rotation, et le quaternion représentant une rotation autour de cet axe sera associé à ce vecteur.

En revanche, le produit " $q \cdot P \cdot q^{-1}$ " découvert par Hamilton et Cayley est applicable à toutes les orientations entre quaternions et vecteurs, et il est également assez simple à calculer. De plus, nous avons observé que ce produit peut être exprimé en tant que matrice.

L'objectif de cette section est de démontrer que la conjugaison par un quaternion unitaire (de norme 1) peut être interprétée comme une rotation dans l'espace. Pour cela, on définit l'application suivante sur l'ensemble des quaternions :

$$R_q(p) = q \cdot P \cdot \bar{q},$$

Cette transformation appliquée à un quaternion pur  $P$ , agit comme une rotation dans  $\mathbb{R}^3$ , où  $\bar{q}$  désigne le conjugué de  $q$ . Cette simplification est valable car  $q$  est unitaire, c'est-à-dire  $q\bar{q} = 1$ , ce qui implique  $q^{-1} = \bar{q}$ .

Soit  $T$  l'ensemble des quaternions purs, c'est-à-dire les quaternions sans partie réelle. Cet ensemble forme un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$  engendré par les éléments  $i, j, k$ , et est isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ .

Ainsi, à tout quaternion pur  $bi + cj + dk$ , on associe le vecteur  $(b, c, d)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Nous montrerons que  $T$  est stable sous l'action des applications  $R_q$ , c'est-à-dire que ces applications correspondent précisément aux rotations de  $\mathbb{R}^3$ .

**Théorème 2.2.1.** *Pour tout  $q \in F$  (où  $F$  est l'ensemble des quaternions unitaires), l'application  $R_q : P \mapsto qP\bar{q}$  est une application linéaire de  $\mathcal{H}$  qui préserve la norme. Autrement dit,  $R_q$  est un endomorphisme orthogonal de  $\mathcal{H}$ . De plus,  $R_q$  laisse invariants les sous-espaces vectoriels  $\mathbb{R}$  (les quaternions réels) et  $T$  (les quaternions purs)*

*Démonstration.* La linéarité de  $R_q$  est immédiate.

Pour  $p_1, p_2 \in \mathcal{H}$  et  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$R_q(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = q \cdot (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) \cdot \bar{q}.$$

En développant, on obtient :

$$R_q(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = \lambda_1 (q p_1 \bar{q}) + \lambda_2 (q p_2 \bar{q}) = \lambda_1 R_q(p_1) + \lambda_2 R_q(p_2).$$

D'autre part, on a par le théorème (1) pour un quaternion  $p$  :

$$\|R_q(p)\| = \|qP\bar{q}\| = \|q\| \|P\| \|\bar{q}\| = \|P\|,$$

puisque  $q$  et  $\bar{q}$  ont également la norme 1. Passons maintenant à la racine carrée, nous déduisons que  $R_q$  conserve la norme.

Enfin, pour  $b \in \mathbb{R}$ ,  $R_q(b) = q \cdot b \cdot \bar{q} = b \cdot q \cdot \bar{q} = b \cdot \|q\|^2 = b$ .

Soit  $P \in T$  un quaternion pur (c'est-à-dire  $P$  est de la forme  $bi + cj + dk$ ). Alors,

$$S_q(p) + \overline{S_q(p)} = q \cdot P \cdot \bar{q} + \overline{q \cdot P \cdot \bar{q}}.$$

En utilisant la conjugaison involutive ( $\overline{\bar{z}} = z$ ), on obtient :

$$= q \cdot P \cdot \bar{q} + \bar{q} \cdot \bar{P} \cdot q.$$

Puisque  $P$  est un quaternion pur,  $\bar{P} = -P$ . Ainsi,

$$S_q(p) + \overline{S_q(p)} = q \cdot P \cdot \bar{q} + \bar{q} \cdot (-P) \cdot q = S_q(p) + S_q(-P) = S_q(0) = 0.$$

Donc  $S_q(p)$  est aussi un quaternion pur, et donc  $T$  est stable par  $S_q$ . ■

**Remarque 2.2.1.** *L'application  $R$  est un homomorphisme car :*

$$R_{q_1 q_2}(P) = q_1 q_2 P \overline{q_2 q_1} = q_1 (q_2 P \overline{q_2}) \bar{q}_1 = R_{q_1}(R_{q_2}(P)).$$

*La restriction de  $R_q$  à  $T$  définit donc un endomorphisme orthogonal de  $T$  (isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ ), cet endomorphisme est une isométrie c'est-à-dire une symétrie ou une rotation.*

*On va noter  $\Gamma_q$  l'isométrie de  $T$  ainsi définie par le quaternion  $q$ .*

**Théorème 2.2.2.** Soit  $\vec{u} = (x, y, z)$  un vecteur unitaire et  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . La rotation d'axe  $\vec{u}$  d'angle  $\alpha$  (dans le sens direct) correspond à l'application  $\Gamma_q$ , où le quaternion de rotation  $q$  est donné par :

$$q = \cos \frac{\alpha}{2} + x \sin \frac{\alpha}{2} i + y \sin \frac{\alpha}{2} j + z \sin \frac{\alpha}{2} k.$$

ou

$$q = \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \vec{u}$$

## Composition des Rotations

L'utilisation des quaternions pour représenter les rotations facilite le calcul des rotations composées.

Prenons deux rotations  $R_{q_1}$  et  $R_{q_2}$  représentées par deux quaternions unitaires  $q_1$  et  $q_2$ . L'effet de la rotation composite  $R_{q_1} \circ R_{q_2}$  sur un quaternion pur  $P$  obtenu en appliquant d'abord la rotation associée à  $q_2$ , puis celle liée à  $q_1$ , est identique à celui de la rotation engendrée par le produit  $q_1 q_2$  :

$$R_{q_1}(R_{q_2}(P)) = R_{q_1}(q_2 P \bar{q}_2) = q_1 (q_2 P \bar{q}_2) \bar{q}_1 = (q_1 q_2) P (\bar{q}_1 \bar{q}_2) = R_{q_1 q_2}(P).$$

**Propriété 2.2.1.** La rotation associée au quaternion de rotation  $q$  est équivalente à celle associée à  $-q$  :

$$R_{-q}(P) = (-q)(P)(-\bar{q}) = (-1)q(P)(-1)\bar{q} = q(P)\bar{q} = R_q(P).$$

**Propriété 2.2.2.** La rotation inverse (d'angle  $-\alpha$  et de même axe) associée à  $q^{-1}$  (qui est égal à  $\bar{q}$  puisque  $q$  est unitaire) correspond à la transformation :

$$R_q(P) = q^{-1} p q.$$

**Propriété 2.2.3.** L'itération de la rotation  $R$  appliquée  $n$  fois (soit une rotation d'angle  $\theta$ ) est associée à  $q^n$  c'est-à-dire la transformation :

$$q^n p q^{-n}.$$

### Détermination de l'axe et de l'angle de rotation à partir d'un quaternion

Étant donné un quaternion unitaire  $q = a + bi + cj + dk$ , les expressions permettant de retrouver ces éléments sont les suivantes :

**Axe de rotation  $\vec{v}$  (vecteur unitaire) :**

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

**Angle de rotation  $\theta$  :**

$$\theta = 2 \cdot \arctan_2 \left( \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}, a \right).$$

**Exemple 5.** Soit rotation  $R_1$  daxe  $(1, 1, 0)$  et dangle  $\pi$ , rotation  $R_2$  daxe  $(0, 1, 1)$  et dangle  $\pi$   
 Quelles sont laxe et langle de la rotation  $R_2 \circ R_1$  ?

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad q = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \vec{v}_1 = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \quad q_2 = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \vec{v}_2 = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(j + k) = \frac{1}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k$$

$q_1, q_2$  : les quaternions de rotation associés à  $R_1, R_2$

$\Rightarrow$  Le quaternion associé à la rotation  $R_2 \circ R_1$  est :

$$\begin{aligned} q &= q_2 q_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}j \left( \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j \right) + \frac{1}{\sqrt{2}}k \left( \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j \right) \\ &= \frac{1}{2}(ji + jj) + \frac{1}{2}(ki + kj) = \frac{1}{2}(-k - 1) + \frac{1}{2}(j + k) \\ &= -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}ki = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}k. \end{aligned}$$

Trouver l'axe et l'angle :

$$\vec{V} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1)$$

$$\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 2 \arctan 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

Donc  $R_2 \circ R_1$  est une rotation d'axe  $(-1, 1, -1)$  et d'angle

$$\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

**Exemple 6.** Trouver la rotation du vecteur  $(1, 0, 0)$  d'angle  $90^\circ$  autour de l'axe  $Z$   
(Axe unitaire de rotation)  $\vec{u} = (0, 0, 1)$ ; Angle de rotation  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

**étape 1)**

Calcule du quaternion de rotation unitaire  $|q| = 1$

$$q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)(0i + 0j + 1k) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)k = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k$$

**étape 2)**

Le vecteur à faire tourner s'écrit sous forme d'un quaternion pur

$$\vec{v} = (1, 0, 0) \Rightarrow p = 0 + i + 0j + 0k$$

**étape 3)**

Applique la rotation  $p' = q \cdot p \cdot \bar{q}$ ; Le produit quaternion n'est pas commutatif

$$V' = q v \bar{q} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k\right) i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}k\right) = j$$

$$\text{Donc } \vec{V}' = (0, 1, 0)$$

$\Rightarrow$  une rotation de  $90^\circ$  autour de  $Z$  transforme  $(1, 0, 0)$  en  $(0, 1, 0)$

### 2.2.2 Matrice d'une rotation associée a une quaternion

Le recours aux quaternions permet d'effectuer les compositions des rotations de manière plus efficace que l'utilisation directe des matrices. Toutefois, lorsqu'il s'agit de déterminer l'effet d'une rotation définie par un quaternion unitaire  $q$  sur un vecteur donné, il est souvent préférable de commencer par calculer la matrice de rotation correspondante, puis de l'appliquer au vecteur sous forme de produit matriciel.

**Théorème 2.2.3.** Pour tout quaternion  $q$  de norme 1,  $R_q$  est une rotation, c'est-à-dire un endomorphisme orthogonal de déterminant 1.

*Démonstration.* En exprimant  $q = a + bi + cj + dk$ , on peut calculer la matrice associée à  $R_q$  en base canonique  $(i, j, k)$ . Le calcul explicite montre que cette matrice est orthogonale de déterminant 1, ce qui confirme que  $R_q$  représente une rotation (puisque  $F$  est isomorphe à la sphère de dimension 4).

Pour obtenir les coefficients de la première colonne, en calculant :

$$\begin{aligned} R_q(i) &= (a + bi + cj + dk)i(a - bi - cj - dk) \\ &= (ai + bii + cji + dki)(a - bi - cj - dk) \\ &= (a^2i + abi - ack + adj) - (ba - b^2i - bcj - bdk) - (ca - cbj - c^2i + cdj) + (da - dbi + dcj + d^2k) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + 2(ad + bc)j + 2(bd - ac)k \end{aligned}$$

Pour la deuxième et troisième colonne, en calculant :

$$\begin{aligned} R_q(j) &= (a + bi + cj + dk)j(a - bi - cj - dk) \\ &= 2(bc - ad)i + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)j + 2(ab + cd)k \\ R_q(k) &= (a + bi + cj + dk)k(a - bi - cj - dk) \\ &= 2(ac + bd)i + 2(cd - ab)j + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)k \end{aligned}$$

■

$$M_R = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cb + ad) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Avec  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , une autre écriture de la matrice est :

$$M_R = \begin{pmatrix} 2(a^2 + b^2) - 1 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & 2(a^2 + c^2) - 1 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cb + ad) & 2(a^2 + d^2) - 1 \end{pmatrix}.$$

Pour appliquer cette rotation à un vecteur de l'espace  $V = (x, y, z)^T$ , il suffit de multiplier ce vecteur par la matrice :

$$\vec{v}' = M_R \cdot \vec{v}.$$

### 2.2.3 Interpolation des quaternions

L'interpolation sphérique linéaire a été introduite pour la première fois par Ken Shoemake en 1985, la méthode d'interpolation linéaire classique (LERP) présentant des limitations notables dans le contexte des rotations, qu'elles soient représentées par des matrices ou des angles d'Euler, ces limitations se manifestent principalement par des discontinuités dans les mouvements, des distorsions géométriques. La solution à ces problèmes a été l'adoption des quaternions unitaires pour la représentation des rotations. (Cette approche offre une interpolation sphérique naturelle (SLERP)).

Shoemake s'est inspiré de la géométrie hyperbolique et des travaux de William Rowan Hamilton pour résoudre ce problème.

Le SLERP est une méthode fondamentale pour l'interpolation entre quaternions, offrant une transition optimale entre des rotations dans l'espace tridimensionnel. Cette technique préserve la norme unitaire des quaternions tout en suivant les géodésiques sur la sphère unité  $S^3$ , garantissant ainsi le chemin rotationnel le plus court et le plus naturel.

Son implémentation s'avère particulièrement cruciale dans divers domaines (robotique, spatial : orientation des satellites), animation 3D. L'interpolation entre deux quaternions génère un troisième

L'interpolation sphérique linéaire pour les quaternions est définie par la formule suivante :

$$q = \frac{\sin((1-r)\theta)}{\sin\theta} q_1 + \frac{\sin(r\theta)}{\sin\theta} q_2 \quad \text{où } r \in [0, 1] \text{ représente le paramètre d'interpolation (chemin)}$$

$\theta$  est l'angle entre les deux quaternions  $q_1$  et  $q_2$ , et est déterminé à l'aide du produit scalaire à 4 dimensions des deux quaternions :

$$\cos\theta = q_1 \cdot q_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 = \frac{q_1 \cdot q_2}{|q_1||q_2|}$$

(S'ils sont unitaires, de norme 1) cette relation se simplifie :

$$\cos\theta = q_1 \cdot q_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$$

**Exemple 7.** Trouver le quaternion au mi-chemin entre  $q_1$  et  $q_2$  avec  $\alpha = 90^\circ$

$$q_1 = \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)k \right] = \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)k \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k$$

$$q_2 = \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

→ Trouve  $\theta$  :

$$\cos \theta = q_1 \cdot q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$q = \frac{\sin((1-r)\theta)}{\sin \theta} q_1 + \frac{\sin(r\theta)}{\sin \theta} q_2$$

$$= \frac{\sin((1-0,5) \cdot 60^\circ)}{\sin 60^\circ} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right) + \frac{\sin(30^\circ)}{\sin 60^\circ} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right) + \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{2} + \sqrt{2}k) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}i + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}i + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}k$$

---

# Conclusion

Les quaternions, en tant que structure algébrique à quatre dimensions, constituent une extension des nombres complexes et offrent une méthode élégante et efficace pour représenter les rotations et autres transformations géométriques dans l'espace tridimensionnel. Grâce à leurs propriétés uniques, telles que l'évitement du gimbal lock et la possibilité d'interpolation fluide entre différentes orientations, les quaternions se sont imposés comme un outil incontournable dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques. Que ce soit en robotique, dans les animations informatiques, en réalité virtuelle ou en navigation spatiale, les quaternions facilitent des manipulations précises et stables des rotations, rendant possibles des applications complexes. Ce mémoire a présenté un aperçu des quaternions, en abordant leur définition, leurs propriétés fondamentales et leurs diverses applications géométriques. En conclusion, la compréhension des quaternions ouvre la voie à une exploration plus approfondie de leurs nombreux usages et de leurs avantages dans le monde moderne, offrant une base solide pour les chercheurs et les professionnels des domaines liés aux rotations et transformations dans l'espace tridimensionnel.

---

# Bibliographie

- [1] F. Dusseault-Bélangier, Quaternions et rotations, CAMUS 1 (2010), 91-98.
- [2] J. P. Morais, S. Georgiev, W. Sprößig, Real quaternionic calculus handbook, Birkhäuser/Springer 216 p. (2014).
- [3] O. Govers, Des nombres complexes aux algèbres des quaternions, Mémoire de fin d'études, université de Liège (2022).
- [4] W. R. Hamilton, On quaternions ; or on a new system of imaginiaries in algebra, London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 25(3), (1844), 489-495.
- [5] C. Mourougane, cours de l'université de Rennes 1 (2009-2010).
- [6] Y.-B. Jia, Quaternions and rotations, Lecture Notes, Iowa State University, Ames, IO, (2015).
- [7] J. Vince, Quaternions for Computer Graphics. Springer-Verlag, (2021).
- [8] F. Zhang, Quaternions and matrices of quaternions, Linear Algebra Appl. 251, 21-57 (1997).
- [9] Quaternion, [www.ann.jussieu.fr/frey/papers/scienti.c](http://www.ann.jussieu.fr/frey/papers/scienti.c) 20 visualisation/quaternions.pdf.
- [10] Quaternion, Wikipedia. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternion>.