

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique



Université Abderrahmane MIRA Bejaia

Faculté de Technologie

Département Génie Electrique

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme de Master en
électronique
Spécialité : Automatique

Thème :

Commande Numérique RST *Appliqué sur un Pendule Inversé*

Réaliser par :

Mr AISSAT Abderrahim

Soutenu devant le jury :

Pr MENDIL

Dr TAFININE

Encadré par

Dr LEHOUCHE

Année Universitaire

2016/2017

Dédicaces :

Je dédie ce petit travail :

A mes chères Parents :

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel, ma gratitude et ma Considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon Instruction et mon bien être.

A ma grande sœur et mon petit frère

Votre présence dans ma vie m'enlumine et votre soutien me pousse à toujours avancé mais votre sourire me donne l'envie de continué quoiqu'il arrive.

A tous mes amis

Sans citer les noms pour ne pas risquer d'oublier quelqu'un... Merci de rendre mon existence aussi joyeuse que vous pouvez et aussi prometteuse que vous espérez.

Remerciements :

Je remercie d'abord le Dieu, le tout grand et puissant, qui m'a donné la volonté et la force d'entamer et de terminer ce travail.

A mon cher maître, encadreur du mémoire,
Mr Lehouche Hocine

Je suis très heureux et honorés de vous avoir comme encadreur de ce travail. J'ai le grand plaisir de travailler sous votre direction, et avoir trouvé auprès de vous le conseiller et le meilleur guide qui m'a reçu en toutes circonstances avec gentillesse, sympathie, sourire et bienveillance durant toute la période du travail.

Vous êtes le meilleur exemple, vous m'avez appris à travailler avec abnégation, conscience et surtout de tout cœur.

Veillez monsieur, trouvé dans ce modeste travail l'expression de ma haute considération et de mon profond respect.

Table des Matières

Table des matières :

Introduction Générale.....	1
I. Chapitre I : Modélisation du pendule inversé	2
I.1 Introduction	2
I.2 Le pendule inversé.....	2
I.2.1 Objectif de l'étude d'un pendule inversé	2
I.3 Modélisation du pendule inversé.....	3
I.3.1 Paramètres de l'ensemble chariot-pendule.....	4
I.3.2 Energie cinétique du système en mouvement	5
I.3.3 Energie potentielle du système.....	6
I.3.4 Modèle de connaissance de l'ensemble chariot et pendule.....	6
I.4 Linéarisation du modèle autour des point d'équilibre	7
I.4.1 Position d'équilibre stable ($\theta = \pi$)	8
I.4.2 Position d'équilibre instable ($\theta = 0$).....	9
I.5 Représentation d'état du système chariot-pendule	11
I.5.1 Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule	11
I.5.2 Elaboration du modèle avec SIMULINK.....	11
I.6 Linéarisation du model d'état autour du point d'équilibre instable.....	13
I.7 Application numérique	14
I.7.1 La représentation d'état ($\theta = 0$)	14
I.7.2 Test de commandabilité	15
I.7.3 La fonction de transfert ($\theta = 0$).....	15
I.8 Conclusion.....	16
II Chapitre II : La Commande RST	17
II.1 Introduction	17
II.2 Définition.....	17
II.3 Equations du système bouclé.....	19
II.4 Synthèse algébrique de la loi de commande RST	19
II.4.1 Principe de la synthèse	19
II.4.2 Choix des poles en boucles fermée ($P(z^{-1})$)	20
II.4.3 Rejet de perturbations.....	21
II.4.4 Compensation des poles et des zéros	22
II.4.5 Calcul du correcteur RST	22
II.4.6 Résolution de l'équation diophantienne.....	23

Table des matières

II.5	Annulation de l'erreur vis-à-vis de la consigne.....	24
II.6	Exemple de calcul d'un régulateur RST.....	25
II.7	Conclusion.....	28
III.	Chapitre III Application de la commande RST et évaluation des performances	29
III.1	Introduction	29
III.2	Stabilisation du pendule a $\theta = 0$	29
III.2.1	Discretisation de la fonction de transfert $G_2(s)$	29
III.2.2	Décomposition de la fonction de transfert	29
III.2.3	Elaboration du modèle de référence	30
III.2.4	Calcul de $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$	31
III.2.5	La Poursuite de consigne.....	33
III.2.6	Application du régulateur et simulation	33
III.3	Stabilisation du chariot a $x = 0$	35
III.3.1	Discretisation de la fonction de transfert $G_1(s)$	35
III.3.2	Décomposition de fonction de transfert $G_1(z^{-1})$	35
III.3.3	Elaboration du modèle de référence.....	36
III.3.4	Calcul de $Rx(z^{-1})$ et $Sx(z^{-1})$	36
III.3.5	La Poursuite de consigne.....	37
III.3.6	Application du régulateur et simulation	38
III.4	Etude de la stabilité.....	39
III.4.1	Le critère de Nyquist	39
III.4.2	Le critère de Rivers	40
III.4.3	Les marges de gain et de phase	40
III.5	Conclusion	42
	Conclusion Générale	43

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

*Liste des Figures et
des Tableaux*

Liste des Figures et des Tableaux :

Figure I.1 HONDA Roadster NC 750 en équilibre a l'arrêt.....	2
Figure I.2 robot humanoïde nao édition académique v3+.....	3
Figure I.3 Schémas de l'ensemble chariot pendule inversé.....	4
Figure I.4 : schéma Simulink du modèle chariot-moteur-pendule.....	12
Figure I.5 : réponse impulsionnelle du modèle comme conditions initial[0,0, π , 0].....	12
Figure I.6 : réponse impulsionnelle du modèle comme conditions initial[0,0,0,0].....	13
Figure II.1 Schéma classique d'un système asservi numérique avec élément-correcteur.....	17
Figure II.2 schéma du principe d'un système asservi par un régulateur RST.....	18
Figure II.3 principe de la synthèse algébrique du régulateur RST.....	20
Figure II.4. Carte des poles et des zéros du système (II.31).....	25
Figure II.5 schéma du régulateur RST implémenté sur un système de premier ordre.....	27
Figure II.6 le suivie de consigne résultant de l'implémentation du régulateur RST.....	27
Figure III.1 position des poles et les zéros de $G_2(z^{-1})$	30
Figure III.2 position des poles et les zéros de $M(z^{-1})$	31
Figure III.3 schémas du régulateur avec le système, avec poursuite et régulation.....	33
Figure III.4 schéma du régulateur RST associer au Pendule.....	34
Figure III.5 position du pendule après implémentation du régulateur RST1.....	34
Figure III.6 position du chariot après implémentation du régulateur RST1.....	34
Figure III.7 position des poles et les zéros de $G_1(z^{-1})$	35
Figure III.8 schéma des deux contrôleurs RST associé au système chariot-Pendule.....	38
Figure III.9 angle du pendule après implémentation du régulateur RST2.....	38
Figure III.10 position du chariot après implémentation du régulateur RST2.....	39
Figure III.11 Marges de stabilité suivant le critère de Rivers.....	40

Liste des Figures et des Tableaux

Figure III.12 Diagramme de nyquist de G_2 réguler avec RST1.....	41
Figure III.13 Diagramme de nyquist de G_1 réguler avec RST2.....	41
Tableau I.1 : paramètres de l'ensemble chariot et pendule.....	4

Symboles et Notations

Symboles et Notations

Symboles et Notations :

$q(t)$: Les degrés de liberté

D_f : L'énergie dissipée par frottement

F : La force généralisée

L: Lagrangien du système

E_c : Energie cinétique totale du système

E_p : Energie potentielle totale du système

F(t) : Force exercé sur le chariot

X(t) : Position du chariot

$\Theta(t)$: Angle de rotation du pendule

M : Masse du chariot

m : Masse du pendule

b : Coefficient de frottement des roues du chariot

g : intensité de la pesanteur

d : Coefficient de frottement de la rotation du pendule

l : Demi-longueur du pendule

v_c : La vitesse du centre de gravité du pendule

$\dot{\Theta}$: La vitesse angulaire du pendule

J : Le moment d'inertie du pendule

\vec{i} : Vecteur unitaire du repère x

\vec{j} : Vecteur unitaire du repère y

ε : très petite variation

Q_c : Matrice de commandabilité

z^{-d} : Le terme de retard pure

c_i : Constantes

Introduction
Générale

Introduction Générale :

Le contrôle des systèmes mécaniques est un domaine de recherche très actif, du fait de leur forte présence dans la vie quotidienne. Bien que leur étude en tant qu'objets dynamiques ait débuté avec Newton, Euler et Lagrange au *XVI^e* et *XVII^e* siècles, la *commande* des systèmes mécaniques industriels a vu le jour 150 ans plus tard avec l'invention du régulateur de Watt, permettant d'asservir la vitesse de rotation des machines à vapeur. Durant le siècle dernier, des applications scientifiques, industrielles et militaires ont motivé l'analyse rigoureuse et la conception de contrôle des systèmes mécaniques. Ces questions, d'origine pratique, ont vite révélé d'intéressants problèmes théoriques [1].

On peut citer le pendule inversé comme un exemple de ces systèmes mécaniques qui occupe une place importante dans l'industrie moderne comme un outil de transport. Ce problème classique de l'automatique qui est toujours utilisé pour tester les nouvelles méthodes de commandes, et le défi de le contrôler est devenu un outil essentiel dans les laboratoires vu que le système est non linéaire, instable et multi variable [2].

De nombreuses techniques de commande ont été appliquées pour la stabilisation du pendule inversé comme la commande PID, la commande par redressement[3], commande PD, la logique floue, les réseaux de neurones artificiels[2-4], et beaucoup d'autres commandes appliquées avec succès, toute fois une commande polynomiale[5] n'a jamais été essayée.

L'objet de ce travail est la modélisation et l'application de la commande polynomiale RST pour la stabilisation d'un pendule inversé posé sur un chariot qui se déplace sur un seul axe. L'illustration de ce travail a été organisée en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation du pendule inversé, et obtenir des modèles qu'on a utilisés pour la simulation du système en boucle ouverte.

Dans le deuxième chapitre, on introduit le principe de la commande RST, ainsi que les étapes à suivre afin d'obtenir les différents polynômes constituant le régulateur.

Le troisième chapitre démontre le calcul des deux régulateurs RST qui stabilisent le pendule inverse dans un état stationnaire du chariot, puis les implémentés au système avec quoi on a pu le simuler avec correcteur, pour ensuite étudier les différentes marges de stabilité que nous propose nos régulateurs.

Enfin une conclusion générale clôture le mémoire.

CHAPITRE I :

Modélisation Du Pendule Inversé

I. Chapitre I : Modélisation du pendule inversé

I.1 Introduction :

Dans ce premier chapitre on s'intéresse à la modélisation du pendule inversé pour illustrer la commande à développer ultérieurement dans ce mémoire, et pour ceci on doit trouver une des méthodes de modélisation qu'on va adapter afin d'avoir de simples résultats utilisables pour la réalisation de la commande.

I.2 Le pendule inversé

Le pendule inversé est un système instable à une seule entrée et plusieurs sorties, SIMO (Single Input Multiple Output), et possède des non-linéarités non négligeables dues à sa structure dynamique et aux forces de friction. C'est un outil didactique et un problème classique utilisé en automatique. C'est pourquoi il est souvent utilisé pour tester les performances et la robustesse des nouvelles lois de commande. [6]

I.2.1 Objectif de l'étude d'un pendule inversé

L'importance de l'étude du pendule inversé est devenue plus importante que jamais vu que non seulement il est utilisé dans l'industrie robotique des usines, mais il est plus utilisé dans les objets de la vie quotidienne de l'humain, qui est un exemple d'un double pendule inversé lui-même, et cela se traduit par différents exemples comme la nouvelle moto de HONDA roadster NC 750 qui ne tombe pas même à l'arrêt, elle utilise un dispositif d'un double pendule inversé parallèle appelé « Riding Assist » pour assurer la stabilité, ce dispositif s'active si la vitesse de la moto est inférieure à 4.8 km/h ou elle est à l'arrêt, le premier pendule c'est la fourche, et le deuxième pendule est la fourche de la roue arrière, des moteurs agissent sur sa fourche et ses roues afin de corriger son assiette et la maintenir en équilibre [7].



Figure I.1 HONDA Roadster NC 750 en équilibre à l'arrêt

On a dit que l'humain est un exemple d'un pendule inversé, et ceci grâce à la sa marche qui peut être modélisée par un pendule double inversé dont les deux axes principaux sont les chevilles et les hanches. Nos articulations travaillent sans arrêt pour nous maintenir debout. C'est le même principe utilisé dans la robotique humanoïde[8].



Figure I.2 robot humanoïde nao édition académique v3+

I.3 Modélisation du pendule inversé

Il existe deux méthodes de détermination des équations de mouvement d'un pendule inversé :

- Le principe fondamental de la dynamique permet de trouver simplement les équations d'état du système. Les calculs engendrés sont relativement lourd pour les systèmes complexes et l'utilisation d'un logiciel de calcul formel peut s'avérer utile.[9]
- La méthode du formalisme d'Euler-Lagrange qui est basé sur le principe de la conservation de l'énergie mécanique [6-10]

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D_f}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.1})$$

$$L = E_c - E_p \quad (\text{I.2})$$

$q(t)$: Les degrés de liberté

D_f : L'énergie dissipée par frottement

F : La force généralisée

L : Lagrangien du système

E_c : Energie cinétique totale du système

E_p : Energie potentielle totale du système

I.3.1 Paramètres de l'ensemble chariot-pendule [3-4]

Comme le montre la figure I.3, l'ensemble chariot-pendule est un système à deux degrés de liberté qui sont représentés par deux coordonnées généralisées :

- X : représentant le déplacement horizontal du chariot avec le sens à droite comme direction positif en mètre
- Θ : représentant l'angle du pendule (la rotation du pendule) avec le sens des aiguilles d'une montre comme direction positif en radian

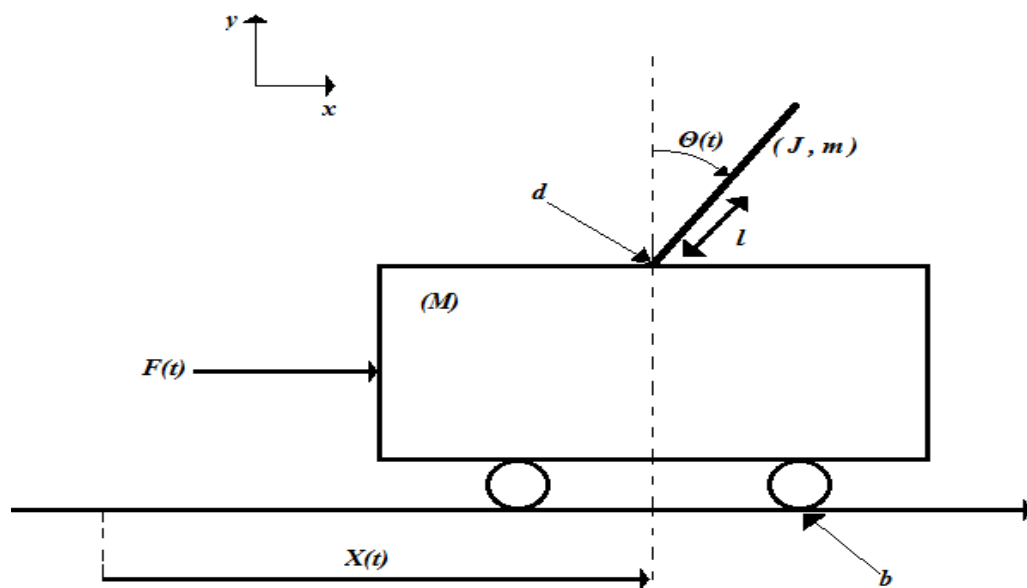


Figure I.3 Schémas de l'ensemble chariot pendule inversé

Paramètres	Valeurs	Description
$F(t)$	/	Force exercé sur le chariot (N)
$X(t)$	/	Position du chariot (m)
$\Theta(t)$	/	Angle de rotation du pendule (rad)
M	2.3kg	Masse du chariot
m	0.2kg	Masse du pendule
b	0.00005Ns.m	Coefficient de frottement des roues du chariot
g	9.81ms^2	La gravité (intensité de la pesanteur)
d	0.005Nms/rad	Coefficient de frottement de la rotation du pendule
l	0.3m	Demi-longueur du pendule

Tableau I.1 : paramètres de l'ensemble chariot et pendule

I.3.2 Energie cinétique du système en mouvement

L'énergie cinétique totale de notre système est traduite par la somme de l'énergie cinétique totale du chariot et celle du pendule.

La cinétique du chariot est son déplacement linéaire sur les rails et celle du pendule est le balancement de ce dernier sur son axe de rotation.

L'énergie cinétique du chariot en mouvement est donnée par l'équation :

$$E_{cM} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (\text{I.3})$$

L'énergie cinétique du pendule est exprimée par l'équation :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.4})$$

v_c : La vitesse du centre de gravité du pendule

$\dot{\theta}$: La vitesse angulaire du pendule

J : Le moment d'inertie du pendule

La position du centre de gravité du pendule, notée \vec{r}_c à partir de ces coordonnées, est donnée par :

$$\vec{r}_c = (x + l \sin\theta) \vec{i} + l \cos\theta \vec{j} \quad (\text{I.5})$$

\vec{i} : Vecteur unitaire du repère x

\vec{j} : Vecteur unitaire du repère y

Donc la vitesse du centre de gravité du pendule est :

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = (\dot{x} + l \cos\theta \dot{\theta}) \vec{i} - l \dot{\theta} \sin\theta \vec{j} \quad (\text{I.6})$$

En remplaçant \vec{v}_c par son équation (I.6) dans l'équation de l'énergie cinétique du pendule (I.4), on obtient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + 2\dot{x} l \dot{\theta} \cos\theta + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.7})$$

Après simplification (vu que $(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1$) on obtient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + 2\dot{x} l \dot{\theta} \cos\theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.8})$$

Alors l'énergie cinétique totale de l'ensemble chariot et pendule est exprimé par :

$$E_c = E_{cM} + E_{cm} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.9})$$

I.3.3 Energie potentielle du système

L'énergie potentielle totale de notre système est traduite seulement par le pendule qui est en mouvement, vu que le chariot est en mouvement sur un rail horizontal.

L'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donné par :

$$E_p = mgl \cos \theta \quad (\text{I.10})$$

I.3.4 Modèle de connaissance de l'ensemble chariot et pendule

Maintenant que l'expression de l'énergie cinétique totale (équation I.9) et l'expression de l'énergie potentielle totale (équation I.10) sont établies, on utilise l'équation générale d'Euler-Lagrange pour déterminer les équations du mouvement de l'ensemble chariot-pendule[4].

En remplaçant les équations (I.9) et (I.10) dans l'équation (I.2) on obtiendra :

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (\text{I.11})$$

Donc a partir de l'équation de Lagrange (I.1) on définit l'équation suivante pour le pendule inversé :

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (\text{I.12})$$

Maintenant on calcule les équations de lagrange par rapport à chaque degrés de liberté :

- **Premier degrés de liberté : $q(t)=x(t)$**

$$F - b\dot{x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \quad (\text{I.13})$$

F : la force exercée sur le chariot

La dérivée partielle du Lagrangien par rapport a \dot{x} et x s'écrit [3] :

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta) - 0 = F - b\dot{x} \quad (\text{I.14})$$

Ce qui nous donne la première équation de Lagrange qui s'écrit alors :

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F - b\dot{x} \quad (\text{I.15})$$

- **Deuxième degrés de liberté : $q(t)=\theta(t)$**

$$-d\dot{\theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (\text{I.16})$$

La dérivée partielle du Lagrangien par rapport a $\dot{\theta}$ et θ s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(ml\dot{x} \cos \theta + ml^2\dot{\theta} + J\dot{\theta}) - (-ml\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} + mgl \sin \theta) = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.17})$$

Ce qui nous donne la deuxième équation de Lagrange qui s'écrit :

$$(ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta + ml\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} - ml\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.18})$$

Alors le modèle de connaissance de l'ensemble chariot et pendule est décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \\ (ml^2 + J)\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

D'après le système d'équations (I.19) on peut remarquer la relation qui existe entre l'accélération du chariot \ddot{x} et l'accélération angulaire du pendule $\ddot{\theta}$ qui est une relation de dépendance. Ainsi, lorsque il n y a pas de force extérieure ($F=0$), si on déplace le pendule de sa position d'équilibre, il ne sera soumis qu'à sa propre inertie.

I.4 Linéarisation du modèle autour des point d'équilibre

Avant de procéder à l'analyse du modèle de système, on linéarise les équations différentielles (I.19). Il a deux points d'équilibre : ($\theta = 0$) qui est un point d'équilibre instable et ($\theta = \pi$) qui est un point d'équilibre stable[6-11].

Pour des petites variations de θ autour du point d'équilibre θ_0

$$\begin{cases} \Theta = \theta_0 + \varepsilon \\ \dot{\Theta} = \dot{\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

Le développement en série de Taylor du premier ordre d'une fonction de Θ au voisinage du point d'équilibre instable [$\theta = 0$] est donné par [3-6]:

$$\begin{cases} f(\Theta) \approx f(\theta_0) + \varepsilon \left. \frac{df}{d\Theta} \right|_{\theta_0} \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

Et les termes du haut ordre sont négligés

$$\dot{\varepsilon}^2 \approx 0 \quad (\text{I.22})$$

I.4.1 Position d'équilibre stable ($\theta = \pi$)

Pour ($\theta = \pi$), le développement limite du premier ordre des équations (I.20) et (I.21) est :

$$\begin{cases} \cos\theta \approx \cos\pi + (\pi - \theta)(-\sin\pi) = -1 \\ \sin\theta \approx \sin\pi + (\pi - \theta)\cos(\pi) = -\theta \\ \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

En substituant ces linéarisations dans le système d'équations (I.19) et en négligeant les termes du haut ordre, on trouve le système d'équation linéarisé suivant :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\theta} = F \\ (ml^2 + J)\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - ml\ddot{x} + mgl\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

En appliquant la transformée de Laplace sur le système d'équation linéarisé ci-dessus, on trouve :

$$\begin{cases} (M + m)s^2X(s) + bsX(s) - mls^2\theta(s) = F(s) \\ (ml^2 + J)s^2\theta(s) + ds\theta(s) - mls^2X(s) + mgl\theta(s) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Ou $X(s) = L(x(t))$ et $\theta(s) = L(\theta(t))$

En substituant pour éliminer $X(s)$ ou $\theta(s)$ dans (I.25), on trouve les deux fonctions de transfert suivant :

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s} \quad (\text{I.26})$$

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{c_1 s}{b_4 s^3 + b_3 s^2 + b_2 s + b_1}$$

Avec :

$$a_2 = ml^2 + J$$

$$a_1 = d$$

$$a_0 = mgl$$

$$b_4 = (M + m)(ml^2 + J) - m^2 l^2 \quad (\text{I.27})$$

$$b_3 = (M + m)d + (ml^2 + J)b$$

$$b_2 = (M + m)mgl + db$$

$$b_1 = mglb$$

$$c_1 = ml$$

Les fonctions de transfert respectivement de la position du chariot et de la rotation du pendule sont :

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{(ml^2 + J)s^2 + ds + mgl}{((M + m)(ml^2 + J) - m^2 l^2)s^4 + ((M + m)d + (ml^2 + J)b)s^3 + ((M + m)mgl + db)s^2 + mglb} \quad (\text{I.28})$$

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{mls}{((M + m)(ml^2 + J) - m^2 l^2)s^3 + ((M + m)d + (ml^2 + J)b)s^2 + ((M + m)mgl + db)s + mglb}$$

I.4.2 Position d'équilibre instable ($\Theta = 0$)

On se limite aux petites variations de Θ autour du point de fonctionnement $\theta_0 = 0$ correspondant à la position verticale de la barre [16].

Pour ($\Theta = 0$), le développement limite du premier ordre des équations (I.20) et (I.21) est :

$$\begin{cases} \cos\theta \approx \cos(0) + \theta[-\sin(0)] = 1 \\ \sin\theta \approx \sin(0) + \theta[\cos(0)] = \theta \\ \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

En substituant ces linéarisations dans le système d'équations (I.19) et en négligeant les termes du haut ordre, on trouve le système d'équation linéarisé suivant :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} = F \\ (ml^2 + J)\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + ml\ddot{x} - mgl\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

En appliquant la transformée de Laplace sur le système d'équation linéarisé ci-dessus, on trouve :

$$\begin{cases} (M + m)s^2X(s) + bsX(s) + mls^2\theta(s) = F(s) \\ (ml^2 + J)s^2\theta(s) + ds\theta(s) + mls^2X(s) - mgl\theta(s) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

Où $X(s) = L(x(t))$ et $\theta(s) = L(\theta(t))$

En substituant pour éliminer $X(s)$ ou $\theta(s)$ dans (I.31), on trouve les deux fonctions de transfert suivant :

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s} \quad (\text{I.32})$$

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{c_2s}{b_4s^3 + b_3s^2 + b_2s + b_1}$$

Avec

$$\begin{aligned} a_2 &= ml^2 + J \\ a_1 &= d \\ a_0 &= -mgl \\ b_4 &= (M + m)(ml^2 + J) - m^2l^2 \\ b_3 &= (M + m)d + (ml^2 + J)b \\ b_2 &= -(M + m)mgl + db \\ b_1 &= -mglb \\ c_2 &= -ml \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

Les fonctions de transfert respectivement de la position du chariot et de la rotation du pendule sont :

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{(ml^2 + J)s^2 + ds - mgl}{((M + m)(ml^2 + J) - m^2l^2)s^4 + ((M + m)d + (ml^2 + J)b)s^3 + (-(M + m)mgl + db)s^2 - mglbs}$$

(I.34)

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-mls}{((M + m)(ml^2 + J) - m^2l^2)s^3 + ((M + m)d + (ml^2 + J)b)s^2 + (-(M + m)mgl + db)s - mglb}$$

I.5 Représentation d'état du système chariot-pendule

Le modèle (I.19) décrit le régime transitoire de l'ensemble pendule-chariot lorsque l'entrée est une force extérieure F [3].

I.5.1 Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule

Afin d'obtenir le modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule, on utilise une nouvelle fois le modèle (I.19). Le vecteur d'état est :

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T \quad (\text{I.35})$$

Après quelques manipulations mathématiques, on obtient le modèle non linéaire (I.36) où la grandeur de commande est la force F .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-bN}{D}x_2 - \frac{m^2l^2g}{D}\cos x_3 \sin x_3 + \frac{mld \cos x_3}{D}x_4 + \frac{mlN \sin x_3}{D}x_4^2 + \frac{FN}{D} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{mgl}{N}\sin x_3 - \frac{d}{N}x_4 + \frac{mlb \cos x_3}{D}x_2 + \frac{m^3l^3g \cos^2 x_3 \sin x_3}{ND} - \frac{m^2l^2d \cos^2 x_3}{ND}x_4 - \frac{m^2l^2 \cos x_3 \sin x_3}{D}x_4^2 - \frac{mlF}{D}\cos x_3 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

$$\text{Ou } h = M + m, \quad N = ml^2 + J, \quad D = hN - m^2l^2 \cos^2 x_3$$

I.5.2 Elaboration du modèle avec SIMULINK:

D'après le modèle obtenu (I.36) on va pouvoir le traduire sous forme de schémas block avec SIMULINK comme suit :

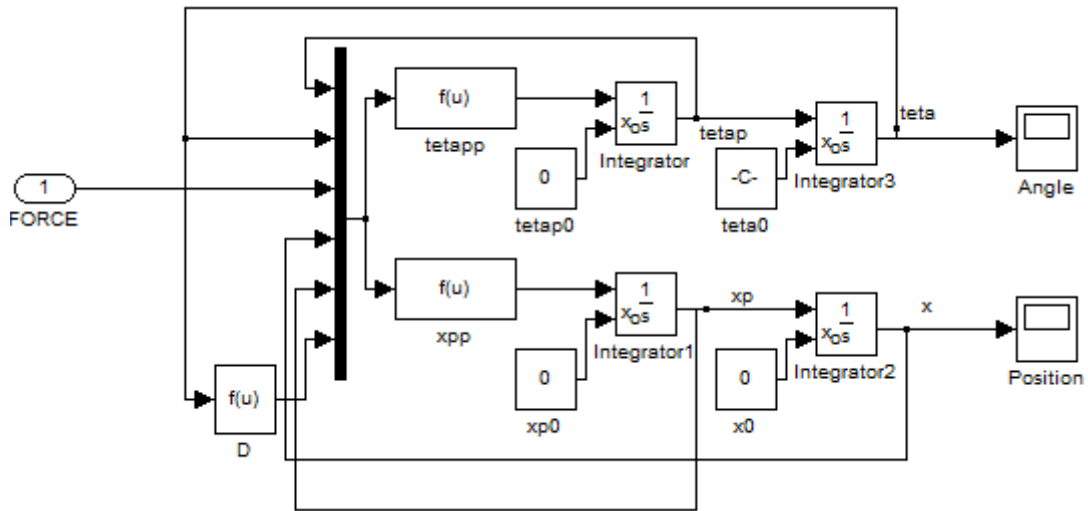


Figure I.4 : schéma Simulink du modèle chariot-moteur-pendule

Donc on appliquant à l'entrée une impulsion d'amplitude 1 pendant 0.1s on va obtenir les résultats suivant par rapport aux conditions initial $\theta = \pi$ correspondant au pendule simple et a $\theta = 0$ correspondant au pendule inversé :

Pendule simple ($\theta = \pi$) :

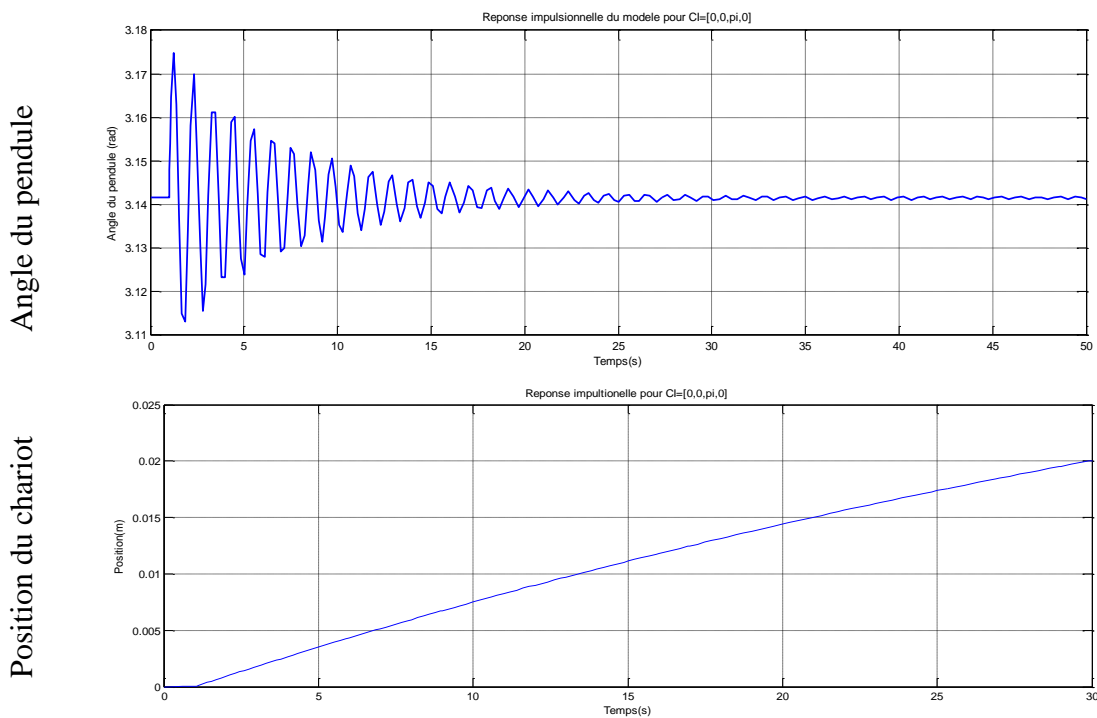


Figure I.5 : réponse impulsionnelle du modèle comme conditions initial $[0,0, \pi, 0]$

Pendule inversé ($\theta = 0$) :

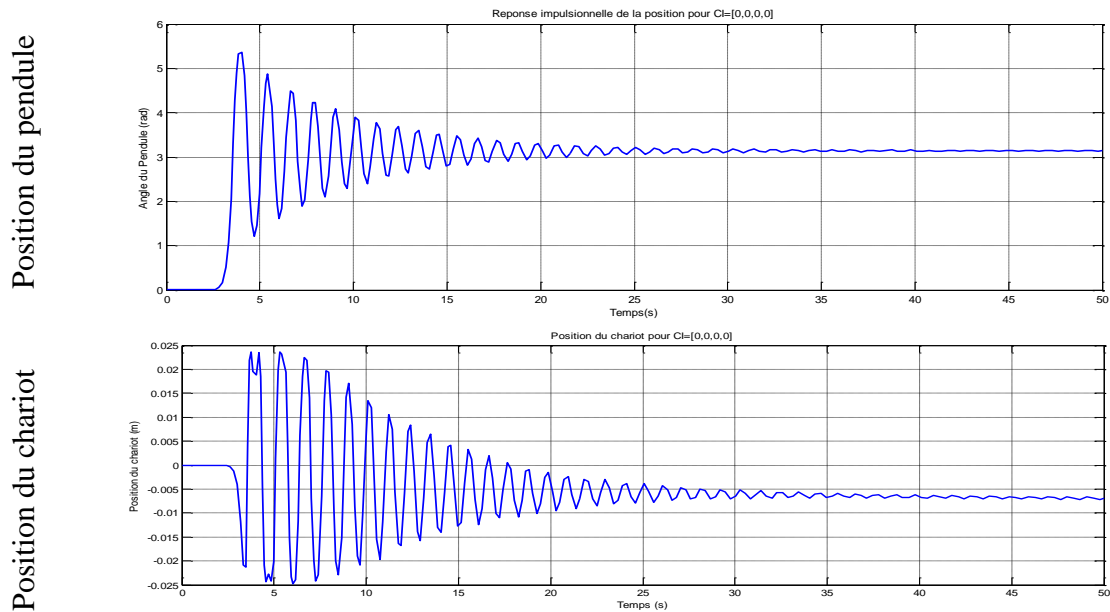


Figure I.6 : réponse impulsionnelle du modèle comme conditions initial[0,0,0,0]

On remarque d'après les résultats illustrer dans la figure I.8 que dans la position initial stable ($\theta = \pi$) lorsque il est écarté par l'impulsion le pendule se stabilise dans cette position après un régime transitoire, et lorsque le pendule est initialement en position inversé (position instable($\theta = 0$)), il se stabilise dans la position d'équilibre stable ($\theta = \pi$) après un régime transitoire, et le chariot continue à évoluer dans les deux cas pour stabiliser le pendule à cause du balancement de ce dernier.

I.6 Linéarisation du model d'état autour du point d'équilibre instable:

Comme les résultats précédant l'on décrit, le pendule en position inversé ($\theta = 0$) revient toujours à sa position stable ($\theta = \pi$), et comme l'objectif de la commande de notre système est d'asservir la position du chariot x et l'angle θ à zéro, on conclue qu'une linéarisation autour du point d'équilibre instable ($\theta = 0$) doit etre etablie.

On a déjà utilisé la linéarisation du système {I.4.2} pour obtenir la fonction de transfert (I.34) du système en position instable, donc on va utiliser la même approche pour linéariser la représentation d'état du système qui est traduit par (I.36).

Donc on tenon compte de {I.4.2} et l'équation (I.29) on obtient le modèle linéariser du système chariot-moteur-pendule suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-bN}{D}x_2 - \frac{m^2l^2g}{D}x_3 + \frac{mld}{D}x_4 + \frac{FN}{D} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{mgl}{N}x_3 - \frac{d}{N}x_4 + \frac{mlb}{D}x_2 + \frac{m^3l^3g}{ND}x_3 - \frac{m^2l^2d}{ND}x_4 - \frac{mlF}{D} \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

A partir du modèle (I.37) on obtient le système matriciel suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{D} & -\frac{m^2l^2g}{D} & \frac{mld}{D} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{D} & \frac{mgl}{N} + \frac{m^3l^3g}{ND} & -\frac{d}{N} - \frac{m^2l^2d}{ND} \end{bmatrix} \quad (\text{I.38})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{N}{D} & 0 & -\frac{ml}{D} \end{bmatrix}^T, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ou } h = M + m, \quad N = ml^2 + J, \quad D = hN - m^2l^2$$

Après avoir obtenu les matrices A et B on peut tester la commandabilité de notre système.

I.7 Application numérique :

On remplace les indices par leurs valeurs on trouve les résultats suivants :

I.7.1 La représentation d'état ($\Theta = 0$) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0201 & -0.0687 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0058 & 2.8632 & -0.0243 \end{bmatrix} \quad (\text{I.39})$$

$$B = [0 \quad 0.4028 \quad 0 \quad -0.1167]^T, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On calcule les valeurs propres de A :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -0.02, \quad \lambda_3 = -1.7044, \quad \lambda_4 = 1.6799$$

I.7.2 Test de commandabilité :

Avec $n = 4$ donc la matrice de commandabilité est :

$$Qc = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \quad (\text{I.40})$$

$$Qc = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & -0.008 & 0.008 \\ 0.4 & -0.008 & 0.008 & -0.0007 \\ 0 & -0.12 & 0.005 & -0.33 \\ -0.117 & 0.005 & -0.33 & 0.023 \end{bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

D'après le critère de KALMAN le système est st commandable si et seulement si la matrice de commandabilité Qc est de rang n

Vu que le rang de Qc est 4 donc $rank(Qc) = n = 4$

D'après le critère de KALMAN le système est commandable.

I.7.3 La fonction de transfert ($\Theta = 0$):

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{0.01801s^2 + 0.005s - 0.5886}{0.04144s^4 + 0.0134s^3 - 1.471s^2 - 0.02943} \quad (\text{I.42})$$

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-0.06s}{0.04144s^3 + 0.0134s^2 - 1.471s - 0.02943}$$

Les poles de $G_1(s)$:

$$p1 = 0 \quad , \quad p2 = -6.11 \quad , \quad p3 = 5.809 \quad , \quad p4 = -0.02$$

Les poles de $G_2(s)$:

$$p1 = -6.11 \quad , \quad p2 = 5.809 \quad , \quad p3 = -0.02$$

On remarque qu'il existe des valeurs propres nulles ou négatives, et des pôles nuls ou positif, donc le modèle linéaire autour du point d'équilibre $\theta = 0$ est instable, et comme le système est commandable, ça justifie l'utilisation d'une commande permettant la stabilisation du pendule au point d'équilibre $\theta = 0$.

I.8 Conclusion

A l'aide du formalisme d'Euler-Lagrange on put modéliser le système chariot-pendule pour décrire une fonction de transfert et un modèle matricielle qui décrit le comportement du système autour de ses points d'équilibre, cependant , vu que notre but est l'inversement du pendule, on a remarqué l'instabilité de notre système par rapport à ce point, ce qui a imposé une linéarisation autour de ce point même qui correspond a $\theta = 0$.

Donc une commande est impératif, pour, évidemment, tenter de stabiliser notre système au tour du point $\theta = 0$ qui traduit l'inversement du pendule, et l'introduction de cette commande fera l'objet du deuxième chapitre.

CHAPITRE II :

La Commande RST

II Chapitre II : La Commande RST

II.1 Introduction

L'objectif est d'essayer d'introduire une commande à l'aide d'un régulateur RST pour stabiliser le pendule à sa position instable ($\theta = 0$) et de contrôler le déplacement du chariot.

Mais avant, dans ce chapitre, on va définir le principe de cette commande et la méthode appliquée pour déterminer les paramètres du régulateur.

II.2 Définition

Reprenons le schéma classique d'un système asservi numérique avec élément-correcteur :

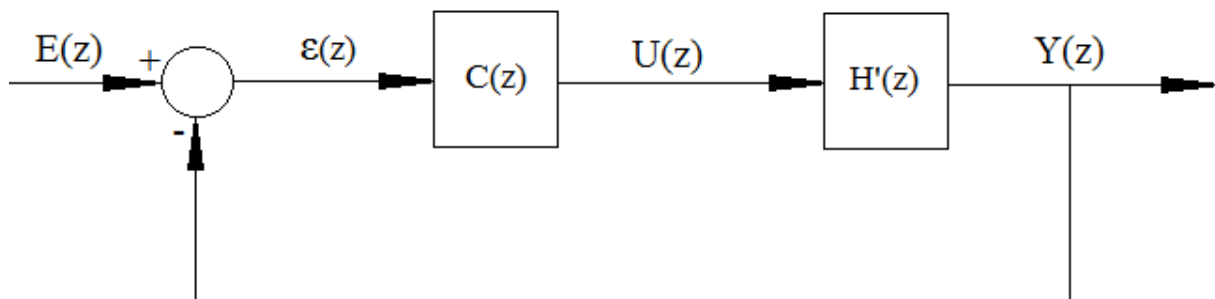


Figure II.1 Schéma classique d'un système asservi numérique avec élément-correcteur

Où $H'(z)$ représente le processus $F(s)$ associé à un bloqueur d'ordre zéro [15] :

$$H'(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{F(s)}{s} \right]$$

Les fonctions de transfert du correcteur et du processus peuvent se mettre sous la forme de fonctions rationnelles propres :

$$C(z) = \frac{R(z)}{S(z)} \quad \text{et} \quad H'(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Ce qui nous amène à en déduire une structure plus détaillée du correcteur et du système appelé la structure RST.

La structure RST est la structure de régulateur linéaire la plus générale qui a pour but d'effectuer une régulation en boucle fermée d'un système automatique.

Le régulateur RST est fondé sur une décomposition suivant trois polynômes conduisant à une structure de commande dont le schéma bloc est représenté sur la FIG.II.1 ces trois polynômes qui sont calculés à partir d'une stratégie de placement de pôles pour des systèmes stables ou instables [10] :

- Sans restriction sur les degrés des polynômes $B(z^{-1})$ et $A(z^{-1})$

- Sans restriction sur le retard du procédé
- Sans restriction sur les zéros du procédé (stables ou instables)

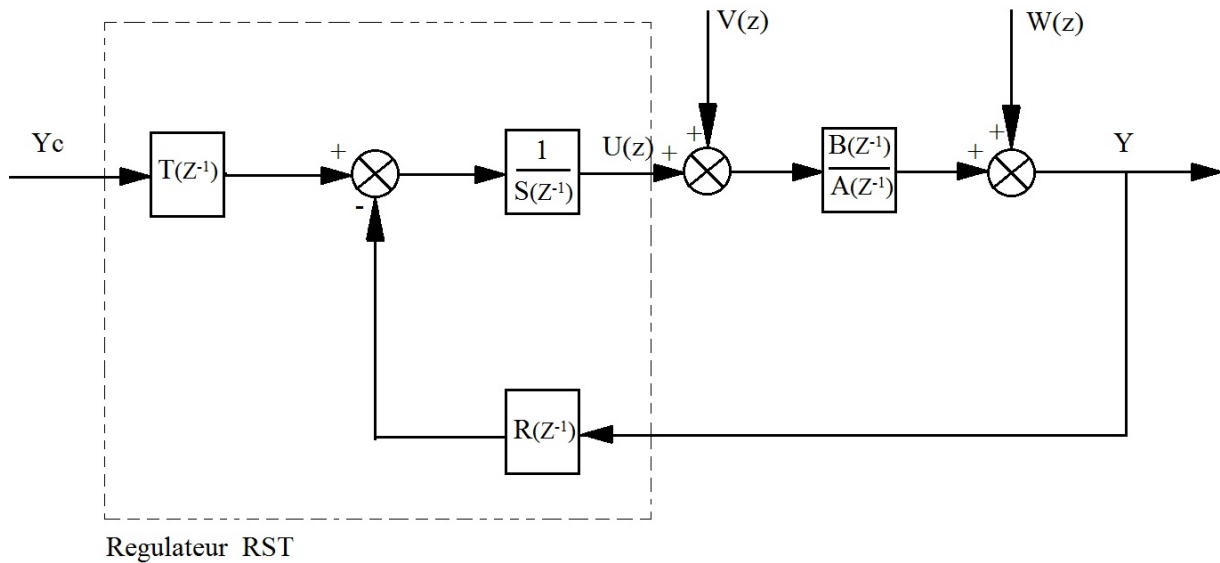


Figure II.2 schéma du principe d'un système asservi par un régulateur RST

On note que le procédé est défini par $B(z^{-1})/A(z^{-1})$ et Yc représente la consigne, Y est la sortie, $V(z)$ est une perturbation de charge et $W(z)$ traduit des perturbations de mesure avec :

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1(z^{-1}) + \dots + a_{n_A}(z^{-n_A})$$

$$B(z^{-1}) = b_1(z^{-1}) + b_2(z^{-2}) + \dots + b_{n_B}(z^{-n_B}) = z^{-1}B^*(z^{-1})$$

On tenant compte de cette structure on peut déduire la forme générale de la loi de commande :

$$S(z^{-1}) U(z) = T(z^{-1}) Yc - R(z^{-1}) Y \quad (\text{II.1})$$

Donc l'entrée $U(z)$ peut se mettre sous la forme :

$$U(z) = \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})} Yc - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} Y \quad (\text{II.2})$$

Et d'après la FIG.II.1 la sortie du système bouclé est :

$$Y = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) + \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} V(z) + W(z) \quad (\text{II.3})$$

II.3 Equations du système bouclé

On va reprendre les équations (II.2) et (II.3), seulement les termes (z^{-1}) et (z) ne seront pas écrits juste pour alléger la forme des équations [12], donc :

$$SU = TY_c - RY \quad (\text{II.4})$$

$$AY = BU + BV + AW \quad (\text{II.5})$$

En multipliant (II.4) par A , et (II.5) par R , on peut remplacer (II.5) dans (II.4) comme ceci :

$$\begin{aligned} ASU &= ATY_c - ARY \\ &= ATY_c - BRU - BRV - ARW \\ (AS + BR)U &= ATY_c - BRV - ARW \\ U &= \frac{AT}{AS + BR}Y_c - \frac{BR}{AS + BR}V - \frac{AR}{AS + BR}W \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

En multipliant cette fois (II.4) par B , et (II.5) par S on aura :

$$\begin{aligned} ASY &= BSU + BSV + ASW \\ &= BTY_c - BRY + BSV + ASW \\ (AS + BR)Y &= BTY_c + BSV + ASW \\ Y &= \frac{BT}{AS + BR}Y_c - \frac{BS}{AS + BR}V - \frac{AS}{AS + BR}W \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

II.4 Synthèse algébrique de la loi de commande RST

II.4.1 Principe de la synthèse

Pour $V = W = 0$ la fonction de transfert du montage en asservissement est [12] :

$$\frac{Y(z^{-1})}{Y_c(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} \quad (\text{II.8})$$

‘Les polynômes $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ et $T(z^{-1})$ du régulateur RST vont être dimensionnées afin que cette fonction de transfert en boucle fermée soit égale à la fonction de transfert $G_m(z^{-1})$ d’un modèle à poursuivre, ou modèle de référence’ [13] :

$$G_m(z^{-1}) = \frac{B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} \quad (\text{II.9})$$

Il faut juste noter que $G_m(z^{-1})$ est une fonction rationnelle strictement propre, et le polynôme $A_m(z^{-1})$ est monique et ses poles sont tous à l’intérieur du cercle unité.

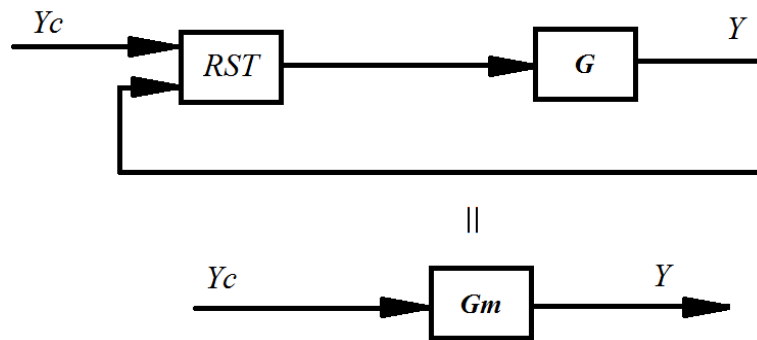


Figure II.3 principe de la synthèse algébrique du régulateur RST

Donc il faut que $G = G_m$ ce qui veut dire que :

$$\frac{z^{-d}B(z^{-1})T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})} = \frac{z^{-d}B(z^{-1})T(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} \quad (\text{II.10})$$

Et on remarque le terme z^{-d} ou d est le nombre entier des périodes d’échantillonnage contenues dans le retard pur [17].

II.4.2 Choix des poles en boucles fermée ($P(z^{-1})$)

on va choisir des poles de sorte à ce que $P(z^{-1})$ soit stable et exprime l’amortissement et la fréquence propre que l’on désire. Et cela on séparant le polynôme $P(z^{-1})$ en deux parties [12]:

$$P(z^{-1}) = P_d(z^{-1}) P_a(z^{-1})$$

- $P_d(z^{-1})$ contient les poles dominants du système
- $P_a(z^{-1})$ contient les poles auxiliaires du système

Pour le calcul de $P_d(z^{-1})$: la partie $P_d(z^{-1})$ contient les deux poles complexes dominants qui sont caractérisés par la pulsation propre ω_n et le coefficient d’amortissement ζ [14].

Le polynôme P_d vaut alors

$$P_d(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$$

Avec :

- $p_1 = -2e^{-\zeta\omega_n T_e} \cos(\omega_n T_e \sqrt{1 - \zeta^2})$
- $p_2 = e^{-2\zeta\omega_n T_e}$

Et $0.25 \leq \omega_n T_e \leq 1.5$; $0.7 \leq \zeta \leq 1$

Tout en sachant que :

$$D = 100e^{\frac{-\pi\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \text{et} \quad Tr = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

D : le dépassement

Tr : temps de réponse

Pour $P_d(z^{-1})$ Les pôles auxiliaires sont introduits pour la robustesse et ils sont choisis plus rapides que les pôles dominants

II.4.3 Rejet de perturbations :

Pour rejeter une perturbation d'ordre n il faut que la fonction de transfert entre le sortie du comparateur et le point d'application de la perturbation possède $n + 1$ intégrateurs donc on va ajouter des parties fixes a ces fonctions de transferts [5-17] :

Rejet de perturbation d'entrée : $-\frac{BS}{AS+BR}V$

- pour une perturbation constante : $S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})S_1(z^{-1})$
- pour une perturbation rampe : $S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^2S_1(z^{-1})$

Rejet de perturbation de sortie : $-\frac{AS}{AS+BR}W$

- pour une perturbation constante : $A(z^{-1})S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})A_1(z^{-1})S_1(z^{-1})$
- pour une perturbation rampe : $A(z^{-1})S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^2A_1(z^{-1})S_1(z^{-1})$

Donc le rejet de perturbation se résume avec des Parties fixes à ajouter :

Quel que soit p tel que : $S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^p S_1(z^{-1})$

II.4.4 Compensation des poles et des zéros

On décompose notre fonction de transfert sous la forme [12-17]

$$G(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{B^+(z^{-1})B^-(z^{-1})}{A^+(z^{-1})A^-(z^{-1})} \quad (\text{II.11})$$

- $B^-(z^{-1})$ et $A^-(z^{-1})$ contiennent respectivement les zéros et les poles de $G(z)$ située a l'extérieur du cercle unité, ou sur lui, qui ne doivent pas être compensé
- $B^+(z^{-1})$ et $A^+(z^{-1})$ contiennent respectivement les zéros et les poles de $G(z)$ que l'on souhaite compenser

Vu que B^- contient des zéros instable on ne peut pas se permettre de le laisser apparaitre dans le dénominateur du système bouclé alors :

$$B_m = B^- B'_m \quad (\text{II.12})$$

Le B^+ et le A^+ peuvent respectivement être facteur de chaque côté de la somme $AS + BR$ on déduit que :

$$S = B^+ S_0 = (1 - z^{-1})^p B^+ S_2 \quad (\text{II.13})$$

$$R = A^+ R_0 \quad (\text{II.14})$$

$$T = A^+ T_0 \quad (\text{II.15})$$

Donc (II.7) devient

$$Y = \frac{z^{-d} B^- T_0}{A^- S_0 + z^{-d} B^- R_0} Y_C - \frac{z^{-d} B S_0}{A^+ (A^- S_0 + z^{-d} B^- R_0)} V - \frac{A^- S_0}{A^- S_0 + z^{-d} B^- R_0} W \quad (\text{II.16})$$

II.4.5 Calcul du correcteur RST :

Donc pour un suivie de consigne on doit avoir [14]:

$$\frac{B^- T_0}{A^- S_0 + z^{-d} B^- R_0} = \frac{B_m}{A_m} \quad (\text{II.17})$$

On remplaçant l'équation (II.12) on obtient :

$$\frac{T_0}{A^- S_0 + z^{-d} B^- R_0} = \frac{B'_m}{A_m} \quad (\text{II.18})$$

On déduit a partir de (II.18) que :

$$T_0(z^{-1}) = B'_m(z^{-1}) A_0(z^{-1}) \quad (\text{II.19})$$

$$(1 - z^{-1})^p A^-(z^{-1}) S_2(z^{-1}) + z^{-d} B^-(z^{-1}) R_0(z^{-1}) = A_m(z^{-1}) A_0(z^{-1}) \quad (\text{II.20})$$

On multiplie (II.20) par A^+ et B^+ :

$$AS + BR = A^+ B^+ A_0 A_m \quad (\text{II.21})$$

Le polynôme caractéristique du système bouclé contient les deux termes compensés A^+ et B^+ mais ces termes disparaissent de la fonction de transfert entre la sortie et la consigne.

On note que $A_0(z^{-1})$ est un polynôme monique et stable ajouter pour filtration des perturbations.

L'équation (II.21) est de la forme $AX + BY = C$ avec A , B et C connues, X et Y inconnues, et ceci est appelé une équation diophantienne [12-14].

II.4.6 Résolution de l'équation diophantienne :

Pour résoudre cette équation on adopte une méthode matricielle permettant de trouver les paramètres des polynômes R et S :

On pose :

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= a_0 + a_1(z^{-1}) + \dots + a_n(z^{-n}) \\ B(z^{-1}) &= b_1(z^{-1}) + b_2(z^{-2}) + \dots + b_m(z^{-m}) \\ S_2(z^{-1}) &= s_0 + s_1(z^{-1}) + s_2(z^{-2}) + \dots + s_l(z^{-l}) \\ R_0(z^{-1}) &= r_0 + r_1(z^{-1}) + r_2(z^{-2}) + \dots + r_q(z^{-q}) \\ P(z^{-1}) &= A_m(z^{-1}) A_0(z^{-1}) p_0 + p_1(z^{-1}) + \dots + p_p(z^{-p}) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

On reprend l'équation (II.20) et soit :

$$n = \deg\{(1 - z^{-1})^p A^-(z^{-1})\}$$

$$m = \deg\{z^{-d} B^-(z^{-1})\}$$

$$p = \deg\{P(z^{-1})\}$$

Si $q < n + m$ alors il existe une solution unique d'ordre minimal tel que :

$$\bullet \quad l = \deg\{S_2(z^{-1})\} = m - 1 \quad \text{et} \quad q = \deg\{R_0(z^{-1})\} = n - 1$$

Si $q \geq n + m$ alors il existe deux solutions d'ordre minimal telles que :

- $l = \deg\{S_2(z^{-1})\} = m - 1$ et $q = \deg\{R_0(z^{-1})\} = q - m$
- $l = \deg\{S_2(z^{-1})\} = q - n$ et $q = \deg\{R_0(z^{-1})\} = n - 1$

Le choix des degrés étant fait, l'équation (II.20) peut être transformée suivant une formulation matricielle ce qui nous permet d'obtenir on utilisons les notations (II.22) la forme matricielle suivante :

$$\max\{n + l, m + q\} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & & & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots & b_2 & b_1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & b_2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_0 & b_m & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ a_n & \vdots & & & a_1 & 0 & b_m & \ddots & & & & 0 \\ 0 & a_n & & & a_2 & \vdots & 0 & \ddots & & & & b_0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & b_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_n & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b_m \end{array} \right\} \begin{array}{c} [s_0] \\ \vdots \\ \vdots \\ s_l \\ r_0 \\ \vdots \\ [r_q] \end{array} = \begin{array}{c} [p_0] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ p_p \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array} \quad (\text{II.23})$$

$l + 1$ $q + 1$

Il suffit que $\max\{n + l, m + q\} = l + q + 1$ et A et B soient premiers entre eux pour que cette matrice soit inversible [12].

II.5 Annulation de l'erreur vis-à-vis de la consigne :

Comme R et T ne sont pas égaux, l'ajout d'intégrateurs adéquat dans le polynôme S n'est pas suffisant pour rendre la différence entre la consigne et la sortie nulle en régime permanent, donc il faut faire en sorte que $\varepsilon(k) = Y_c(k) - y(k)$ tende vers zéro quand $k \rightarrow \infty$, donc on doit assurer un gain continu à l'unité pour le système bouclé, alors il faudra que [14-17] :

$$Gm(1) = \frac{B_m(1)}{A_m(1)} = 1 \quad (\text{II.24})$$

Ce qui veut dire que :

$$Bm(1) = Am(1) \quad (\text{II.25})$$

D'après l'équation (II.12), on conclue qu'il faudra ajuster B'_m de sorte à satisfaire la condition (II.24). on pose $B'_m = b'_0$ ce qui nous donne :

$$B'_m = b'_0 = \frac{A_m(1)}{B^-(1)} \quad (\text{II.26})$$

A partir de l'équation (II.15) et (II.18) dans le cas de la compensation ($A^+ = 1$) et si on choisit $A_0 = 1$

A cause de l'équation (II.17), La condition (II.24) entraîne que :

$$\frac{B(1)T(1)}{A(1)S(1) + B(1)R(1)} = 1 \quad (\text{II.27})$$

Dans le cas où la boucle ouverte possède un intégrateur ($A(1) = 0$ ou bien $S(1) = 0$) la relation (II.27) devient alors :

$$T(1) = R(1) \quad (\text{II.28})$$

Le cas particulier ci-dessus nous conduit à :

$$T(z^{-1}) = t_0 = b'_0 = \sum_i c_i \quad (\text{II.29})$$

II.6 Exemple de calcul d'un régulateur RST :

On pose la fonction de transfert continu de premier ordre suivante :

$$Ge(s) = \frac{500}{s + 10} \quad (\text{II.30})$$

Son équivalent en discret avec une période d'échantillonnage de $Te = 0.01$ est :

$$Ge(z^{-1}) = \frac{4.758z^{-1}}{1 - 0.9048z^{-1}} \quad (\text{II.31})$$

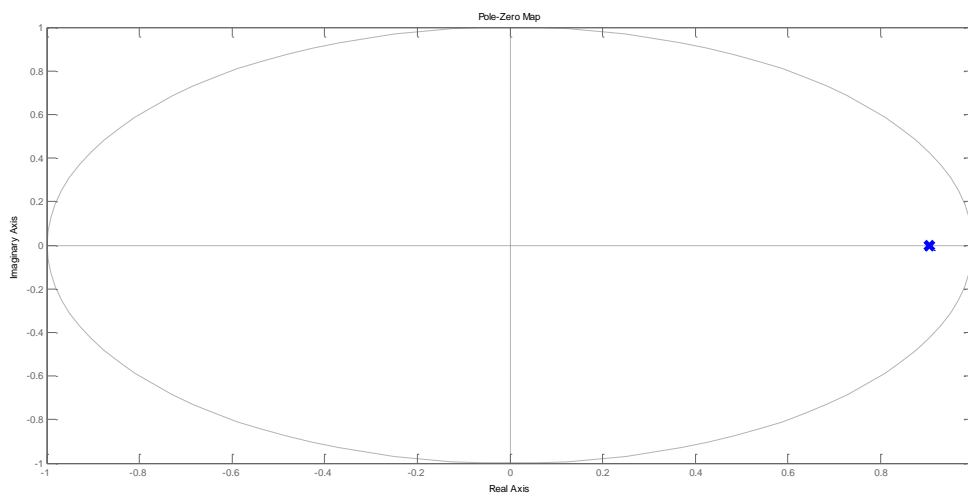


Figure II.4. Carte des poles et des zéros du système (II.31)

On remarque que le pole est au bon côté du disque unité ce qui le rend compensable

$$\begin{cases} B^+ = 1 \\ B^- = 4.758 \\ A^+ = 1 - 0.9048z^{-1} \\ A^- = 1 \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

On opte pour un modèle de deuxième ordre de la forme :

$$M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{II.33})$$

Pour $\zeta = 0.5$ et $\omega_n = 35 \text{ rad/s}$ correspondant a $D_e = 16.3\%$ et $T_r = 0.103s$

$$M(s) = \frac{1225}{s^2 + 35s + 1225} \quad (\text{II.34})$$

On utilise l'approximation bilinéaire on va obtenir le système échantillonner a $Te = 0.01s$ suivant :

$$M(z^{-1}) = \frac{B_m}{A_m} = \frac{0.0254(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.608z^{-1} + 0.7097z^{-2}} \quad (\text{II.35})$$

On utilise les équations (II.17) et (II.19) avec la condition pour le suivie de consigne (II.24) on va obtenir :

$$B'_m(z^{-1}) = 0.0053(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \quad (\text{II.36})$$

On ajouton un intégrateur dans $S(z^{-1})$ et on accepton que $A_0 = 1$ ça nous conduit à résoudre l'équation diophantienne suivante :

$$(1 - z^{-1})A^-S_2 + z^{-1}B^-R_0 = A_m A_0 \quad (\text{II.37})$$

Après résolution de l'équation diophantienne (II.38) on obtient les coefficients des polynômes S_2 et R_0 , ce qui nous donne, après qu'on remplace dans les équations (II.13),(II.14) et (II.15), les polynômes suivant :

$$S(z^{-1}) = 1 - 1.7097z^{-1} + 0.7097z^{-2}$$

$$R(z^{-1}) = 2.1375 \cdot 10^{-2} - 1.934 \cdot 10^{-2}z^{-1}$$

$$T(z^{-1}) = 5.3 \cdot 10^{-3} + 5.805 \cdot 10^{-3}z^{-1} - 4.29 \cdot 10^{-3}z^{-2} - 4.8 \cdot 10^{-3}z^{-3}$$

Ces trois polynômes représentent les trois paramètres du régulateur RST qu'on implémente dans Simulink comme le démontre la figure II.4 :

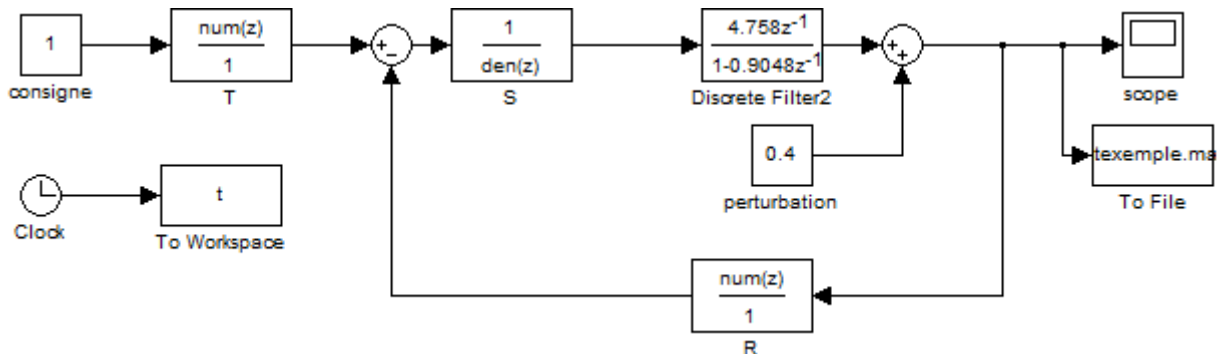


Figure II.5 schéma du régulateur RST implémenté sur un système de premier ordre

Le résultat de simulation est représenté sur la figure II.5 :

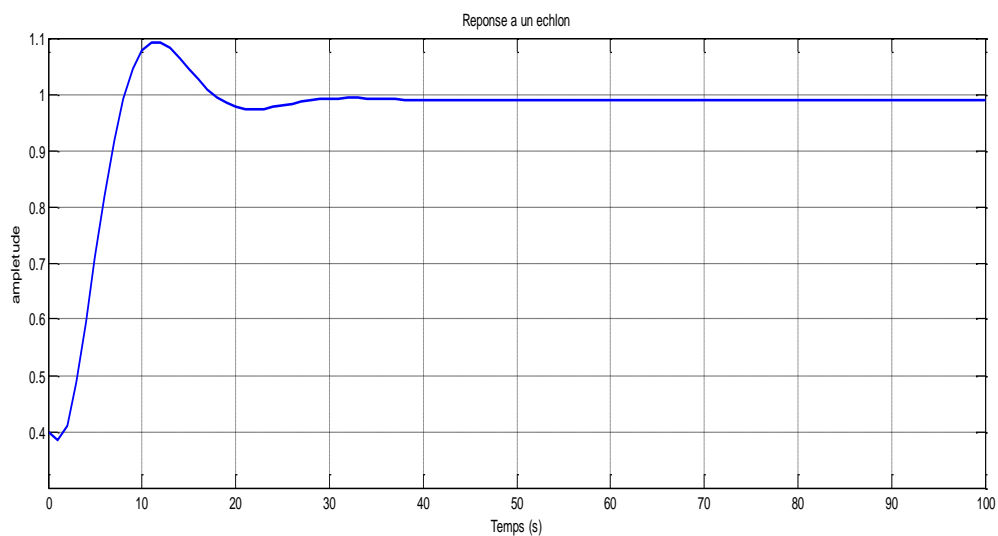


Figure II.6 le suivi de consigne résultant de l'implémentation du régulateur RST

On voit très bien que même en présence d'une perturbation à la sortie du système l'intégrateur qu'on a ajouté permet d'éliminer cette perturbation pour permettre au système de suivre la consigne

Cet exemple nous a permis de résumer la synthèse et les étapes à suivre afin d'obtenir un régulateur RST permettant la régulation du système (II.31) et le suivi d'une consigne suivant le modèle (II.36)

II.7 Conclusion :

Après avoir défini la structure RST et son origine à partir du schéma classique du correcteur, on a pu évaluer la synthèse algébrique à suivre pour obtenir les trois polynômes qui servent à asservir notre système en boucle fermée et qui permettent le suivi d'une consigne donnée.

Le résumé de cette synthèse a été illustré par un exemple d'asservissement d'un système de premier ordre qui suit une consigne donnée après l'avoir forcé à se comporter comme un système de deuxième ordre.

L'application de cette synthèse sur la fonction de transfert du pendule inversé (I.34) sera l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE III :

Application de la commande RST Et Evaluation Des Performances

III. Chapitre III Application de la commande RST et évaluation des performances

III.1 Introduction

Dans ce chapitre on va essayer de déterminer un régulateur RST qui permet de stabiliser le pendule à sa position haute ($\theta = 0$) et un autre pour garder le chariot à la position $x = 0$ et ceci on se servant des fonctions de transfert du pendule et du chariot par rapport à la force exercée sur le chariot obtenu dans le chapitre I.

III.2 Stabilisation du pendule à $\theta = 0$

III.2.1 Discrétisation de la fonction de transfert $G_2(s)$:

On reprend l'équation (I.34) :

$$G_2(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-mIs}{((M+m)(ml^2+J) - m^2l^2)s^3 + ((M+m)d + (ml^2+J)b)s^2 + (-(M+m)mgl + db)s - mglb}$$

Puis on servant des valeurs du Tableau I.1 on remplace chaque signe par sa valeur respective pour obtenir :

$$G_2(s) = \frac{-0.06s}{0.04144s^3 + 0.0134s^2 - 1.471s - 0.02943} \quad (\text{III.1})$$

Pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.05s$, on calcule à l'aide d'un Bloquer d'ordre zéro la fonction de transfert discrète suivante :

$$G_2(z^{-1}) = \frac{-0.001814z^{-1} + 9.727 \cdot 10^{-6}z^{-2} + 0.001804z^{-3}}{1 - 3.073z^{-1} + 3.057z^{-2} - 0.984z^{-3}} \quad (\text{III.2})$$

III.2.2 Décomposition de la fonction de transfert :

Pour décider des poles et des zéros à compenser on doit d'abord consulter leur emplacement par rapport au cercle limite[17] (disque unité).

Ce qui nous conduit à la figure III.1 qui montre où se situe les poles et les zéros de $G_2(z^{-1})$ par rapport au disque unité :

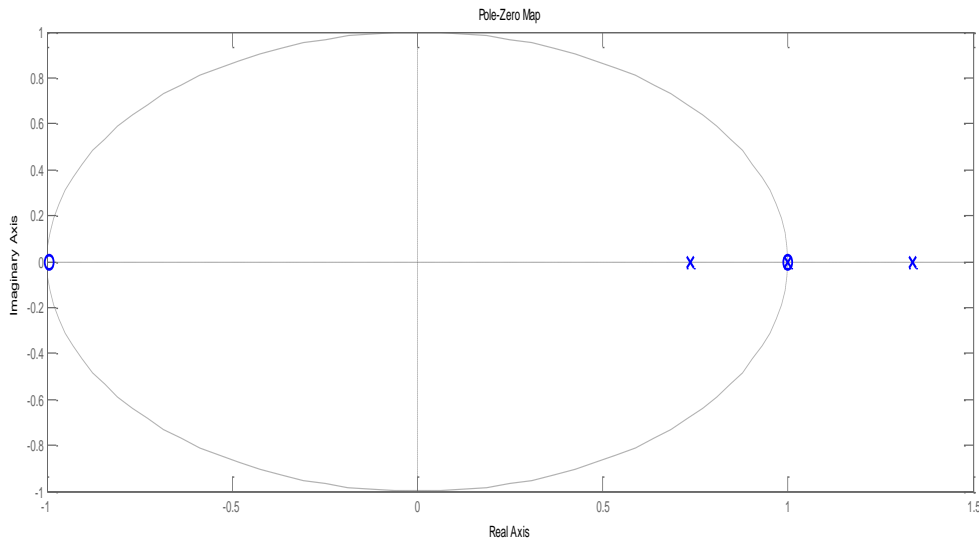


Figure III.1 position des poles et les zéros de $G_2(z^{-1})$

On remarque bien qu’il y’a un pole qui se situe à l’intérieur du disque unité, ce même pole qu’on choisit de ne pas compenser.

$$\left. \frac{Y}{V} \right|_{\substack{y_c=0 \\ W=0}} = \frac{BS}{AS + BR} = \frac{BB^+S_0}{A^+B^+A_0A_m} = \frac{BS_0}{A^+A_0A_m} \tag{III.3}$$

D’après l’équation (III.3) on voit que les poles du procédé que l’on a choisi de compenser apparaissent comme des poles de la fonction de transfert de v vers y . Ceci peut ne pas être souhaitable, par exemple comme dans notre cas, ou le pole est à partie réelle positive mais très lent, la résultante étant alternée, le transitoire provoqué à la sortie par une perturbation de charge décroissant alors lui aussi très lentement [12].

Donc on va placer volontairement ce pôle dans $A^-(z^{-1})$. Ce qui nous donne la décomposition suivante :

$$\begin{cases} B^+ = 1 \\ B^- = -0.001814z^{-1} + 9.727 \cdot 10^{-6}z^{-2} + 0.001804z^{-3} \\ A^+ = 1 \\ A^- = 1 - 3.073z^{-1} + 3.057z^{-2} - 0.984z^{-3} \end{cases} \tag{III.4}$$

III.2.3 Elaboration du modèle de référence :

D’après le paragraphe II.4.2 on opte pour les paramètres suivant :

$$\zeta = 0.7 \quad \text{et} \quad \omega_n = 5 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad T_e = 0.05s$$

Ces même paramètres qu'on va utiliser pour élaborer le modèle de référence de deuxième ordre suivant :

$$M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{25}{s^2 + 7s + 25} \quad \text{(III.5)}$$

Ensuite on discrétise se système avec la période T_e en utilisons l'approximation bilinéaire de Taustin, ce qui nous donne le modèle discret suivant :

$$M(z^{-1}) = \frac{B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} = \frac{0.01312(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.654z^{-1} + 0.706z^{-2}} \quad \text{(III.6)}$$

Le choix de l'approximation bilinéaire de Taustin, au lieu du bloquer d'ordre zéro, pour la discrétisation est pour mieux faciliter le calcul du suivie de consigne, vu que l'approximation bilinéaire de Taustin nous donne un deuxième ordre au numérateur avec un gain visible.

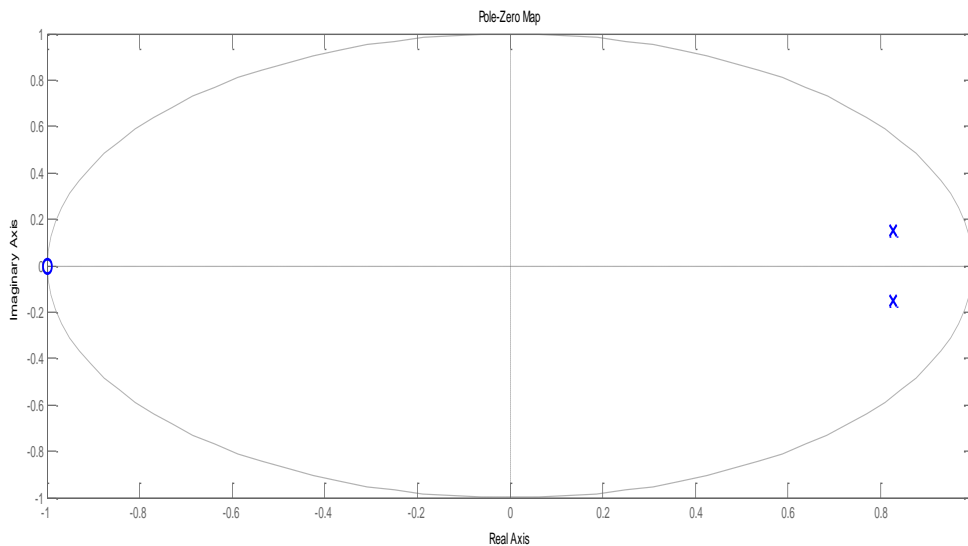


Figure III.2 position des poles et les zéros de $M(z^{-1})$

Et d'après la figure III.2 on voit très bien que les poles et les zéros sont tous situé à l'intérieur du cercle limite.

III.2.4 Calcul de $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$

III.2.4.1 Choix des degrés de $R(z^{-1})$ et $S(z^{-1})$

On remarque que :

$$Deg\{A^-\} = n = 3$$

$$Deg\{B^-\} = m = 3$$

Pour $A_0 A_m(z^{-1}) = P(z^{-1})$ avec $A_0 = 1$ et d'après le paragraphe II.4.6 on peut distinguer que $q < n + m$ et donc :

$$l = \text{deg}\{S_2(z^{-1})\} = m - 1 = 2$$

$$q = \text{deg}\{R_0(z^{-1})\} = n - 1 = 2$$

III.2.4.2 Rejet de perturbations :

Pour les parties fixes on rajoute deux parties fixe pour un rejet de perturbations de sortie harmonique une pour S et l'autre pour R avec :

$$H_r = H_s = 1 + \alpha z^{-1} + z^{-2} \quad \text{avec} \quad \alpha = -2\cos\omega_0 T_e$$

Donc on peut conclure que les degrés de R et S sont en prenons compte des équations (II.13) et(II.14) :

$$\text{deg}\{H_s S(z^{-1})\} = 4$$

$$\text{deg}\{H_r R(z^{-1})\} = 4$$

Donc on obtient l'équation diophantienne suivante :

$$A^-(z^{-1})H_s(z^{-1})S(z^{-1}) + B^-(z^{-1})H_r(z^{-1})R(z^{-1}) = P(z^{-1}) \quad \text{(III.7)}$$

III.2.4.3 Résolution de l'équation diophantienne

D'après l'adaptation matricielle (II.23) on obtient le système matricielle a partir de (III.7) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccccc} a'_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_{r0} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a'_1 & a'_0 & \ddots & & \vdots & b'_{11} & b'_{00} & \ddots & & & & \vdots \\ a'_2 & a'_1 & \ddots & \ddots & \vdots & b'_{21} & b'_{10} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & a'_2 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & b'_{22} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a'_0 & b'_m & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a'_n & \vdots & & \ddots & a'_1 & 0 & b'_m & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & a'_n & & & a'_2 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & b'_{00} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & b'_{10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & b'_{20} \\ 0 & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a'_n & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b'_m \end{array} \right\} \begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_l \\ r_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ r_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ p_p \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.8)}$$

{8colones}

La résolution de cette équation va nous donner les polynômes suivants :

$$S(z^{-1}) = 1 - 4.78 \cdot 10^{13} z^{-1} - 1.063 \cdot 10^{13} z^{-2} + 4.769 \cdot 10^{13} z^{-3} + 1.083 \cdot 10^{13} z^{-4} \quad \text{(III.9)}$$

$$R(z^{-1}) = -2.64 \cdot 10^{16} + 7.51 \cdot 10^{16} z^{-1} - 6.22 \cdot 10^{16} z^{-2} + 0.76 \cdot 10^{16} z^{-3} + 0.59 \cdot 10^{16} z^{-4} \quad \text{(III.10)}$$

III.2.5 La Poursuite de consigne

On remarque que :

$$B^-(1) = -0.001814 + 9.727 \cdot 10^{-6} + 0.001804 = 0 \tag{III.11}$$

Donc l'équation (II.24) va tendre vers la consigne zéro correspondent à la position debout du pendule.

Alors notre $T(z^{-1})$ devras compenser la dynamique de régulation qui est la même avec la dynamique de poursuite [14], ce qui nous conduit a :

$$T(z^{-1}) = GP(z^{-1})$$

Et on précise que :

$$G = \begin{cases} 1/B(1) & \text{si } B(1) \neq 0 \\ 1 & \text{si } B(1) = 0 \end{cases}$$

On déduit que le régulateur RST1 responsable de la stabilisation du pendule est :

$$\begin{aligned} S(z^{-1}) &= 1 - 4.78 \cdot 10^{13} z^{-1} - 1.063 \cdot 10^{13} z^{-2} + 4.769 \cdot 10^{13} z^{-3} + 1.083 \cdot 10^{13} z^{-4} \\ R(z^{-1}) &= -2.64 \cdot 10^{16} + 7.51 \cdot 10^{16} z^{-1} - 6.22 \cdot 10^{16} z^{-2} + 0.76 \cdot 10^{16} z^{-3} + 0.59 \cdot 10^{16} z^{-4} \\ T(z^{-1}) &= GP(z^{-1}) = 1 - 1.654 z^{-1} + 0.706 z^{-2} \end{aligned} \tag{III.12}$$

III.2.6 Application du régulateur et simulation :

le schémas du système en tenon compte de la poursuite est résumer par la figure (III.3) :

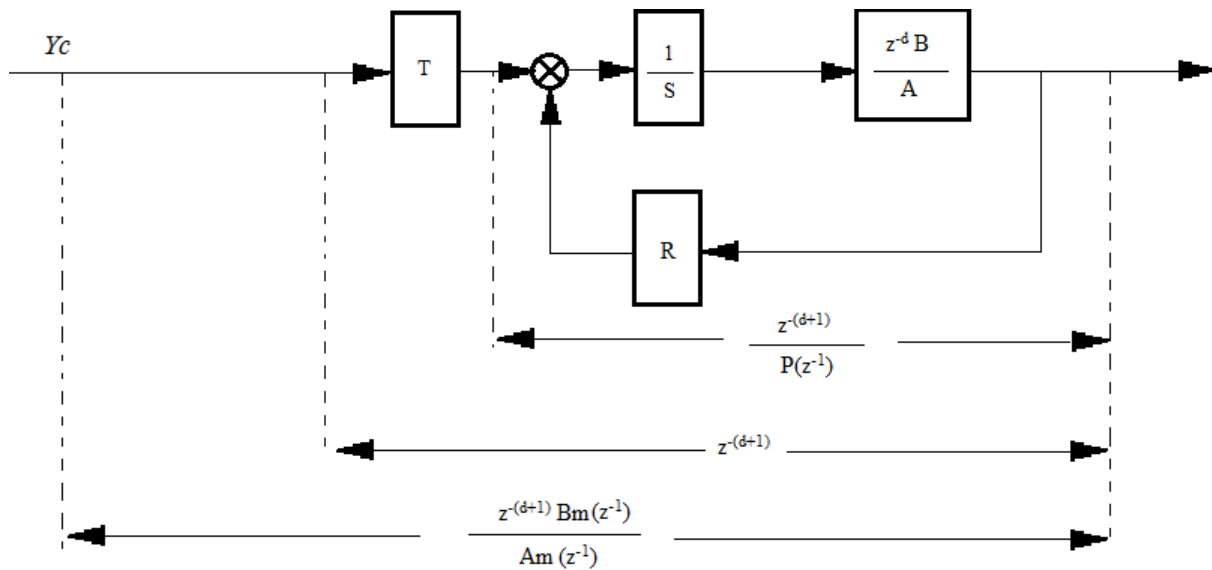


Figure III.3 schémas du régulateur avec le système, avec poursuite et régulation

Donc le schéma du régulateur connecté au pendule [2] est comme suit :

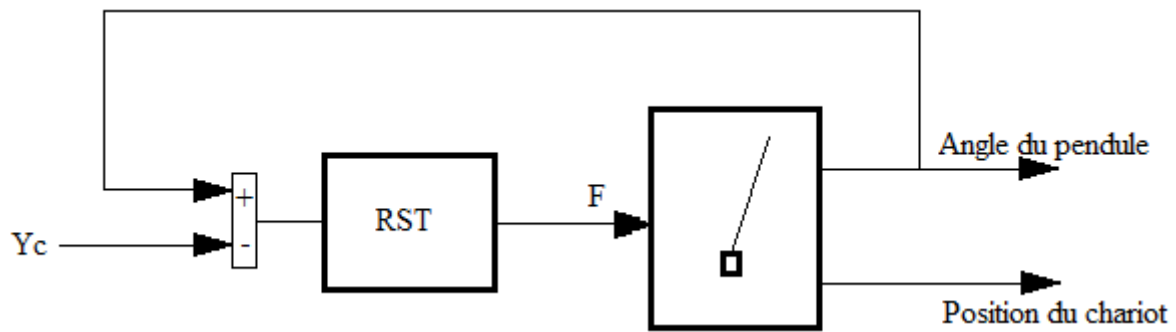


Figure III.4 schéma du régulateur RST associé au Pendule

Après simulation on a obtenu les résultats suivant :

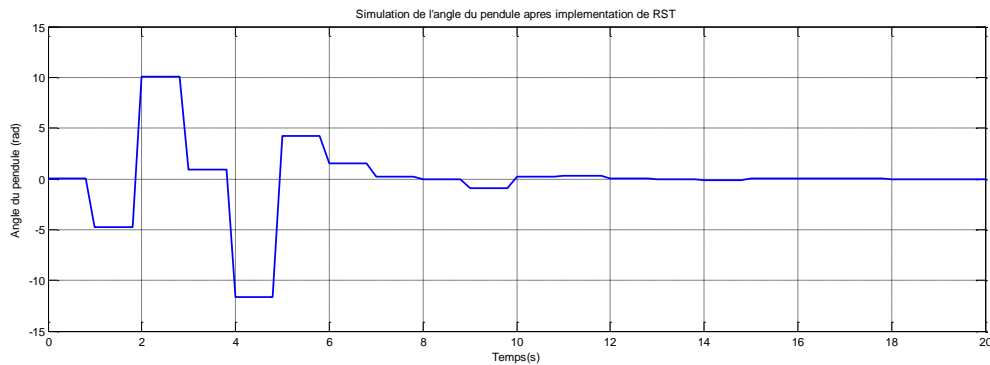


Figure III.5 position du pendule après implémentation du régulateur RST1

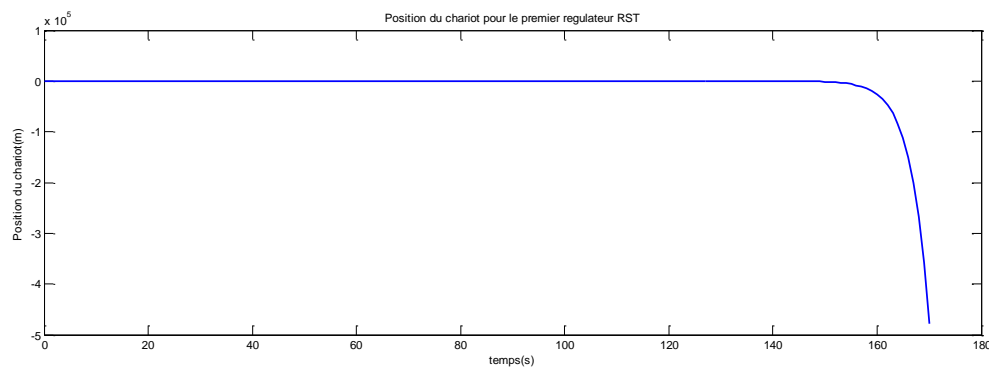


Figure III.6 position du chariot après implémentation du régulateur RST1

On remarque d’après la figure III.4 que le pendule se stabilise vers sa position debout équivalente a la consigne donné $\theta = 0$ mais ceci sans prendre en compte de la position du chariot qui elle se stabilise pour un moment pour ensuite divergé pour garder le pendule a sa position debout comme le démontre la figure III.5.

Donc pour garder le chariot proche du centre du rail ou bien de la position zéro le calcul d'un deuxième régulateur RST2 est obligé pour garder le chariot au centre, et pour cela on va suivre les mêmes étapes précédentes pour calculer RST2 a base de la fonction de transfert reliant la position du chariot avec la force exercé sur lui à savoir la fonction de transfert $G_1(s)$ [2].

III.3 Stabilisation du chariot a $x = 0$

III.3.1 Discrétisation de la fonction de transfert $G_1(s)$:

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{(ml^2 + J)s^2 + ds - mgl}{((M + m)(ml^2 + J) - m^2l^2)s^4 + ((M + m)d + (ml^2 + J)b)s^3 + (-(M + m)mgl + db)s^2 - mglbs}$$

Puis on servant des valeurs du Tableau I.1 on remplace chaque signe par sa valeur respective pour obtenir :

$$G_1(s) = \frac{0.01801s^2 + 0.005s - 0.5886}{0.04144s^4 + 0.0134s^3 - 1.471s^2 - 0.2934s} \tag{III.13}$$

Pour une période d'échantillonnage $T_e = 0.05s$, on calcule à l'aide d'un bloquer d'ordre zéro la fonction de transfert discrète suivante :

$$G_1(z^{-1}) = \frac{0.0005433z^{-1} - 0.005806z^{-2} - 0.0005869z^{-3} + 0.0005355z^{-4}}{1 - 4.073z^{-1} + 6.192z^{-2} - 4.041z^{-3} + 0.984z^{-4}} \tag{III.14}$$

III.3.2 Décomposition de fonction de transfert $G_1(z^{-1})$:

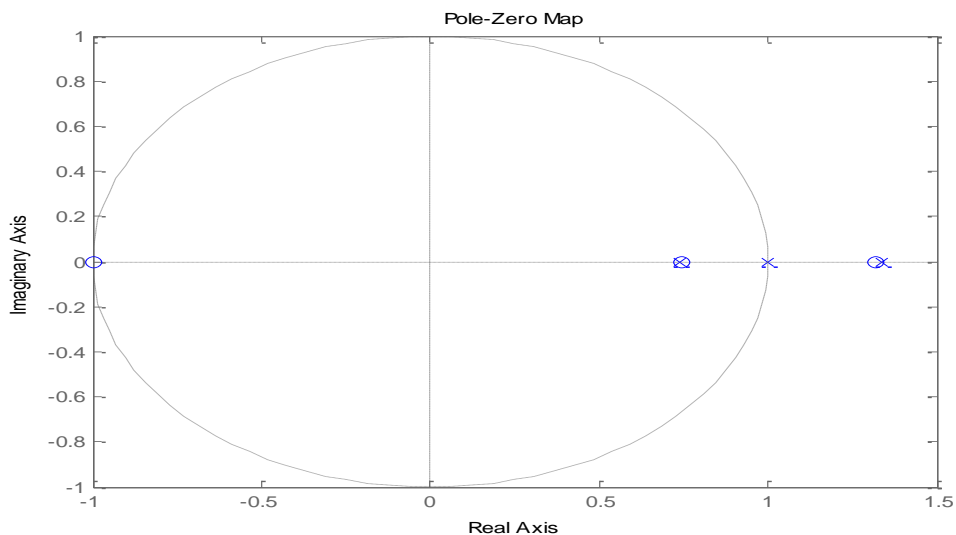


Figure III.7 position des poles et les zéros de $G_1(z^{-1})$

On remarque qu'il y'a un pôle et un zéro a l'intérieur du disque unité, mais on choisit de ne pas les compenser pour garder mieux garder la stabilité du système physique comme expliquer dans le paragraphe III.2.2.

$$\begin{cases} B^+ = 1 \\ B^- = 0.0005433z^{-1} - 0.005806z^{-2} - 0.0005869z^{-3} + 0.0005355z^{-4} \\ A^+ = 1 \\ A^- = 1 - 4.073z^{-1} + 6.192z^{-2} - 4.041z^{-3} + 0.984z^{-4} \end{cases} \quad \text{(III.15)}$$

III.3.3 Elaboration du modèle de référence

Pour le modèle de référence on va garder les mêmes caractéristiques du modèle précédant exprimé par l'équation (III.6) on prend toujours :

$$\zeta = 0.7 \quad \text{et} \quad \omega_n = 5 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad T_e = 0.05s$$

III.3.4 Calcul de $R_x(z^{-1})$ et $S_x(z^{-1})$

III.3.4.1 Choix des degrés de $R_x(z^{-1})$ et $S_x(z^{-1})$

$$\text{Deg}\{A^-\} = n = 4$$

$$\text{Deg}\{B^-\} = m = 4$$

Pour $A_0A_m(z^{-1}) = P(z^{-1})$ avec $A_0 = 1$ et d'après le paragraphe II.4.6 on peut distinguer que $q < n + m$ et donc :

$$l = \text{deg}\{S_2(z^{-1})\} = m - 1 = 3$$

$$q = \text{deg}\{R_0(z^{-1})\} = n - 1 = 3$$

III.3.4.2 Rejet de perturbations :

On rajoute deux parties fixe pour un rejet de perturbations une pour S et l'autre pour R mais avec des intégrateur de premier ordre :

$$H_r = H_s = 1 - z^{-1}$$

Donc on peut conclure que les degrés de R et S sont en prenons compte des équations (II.13) et (II.14) :

$$\text{deg}\{H_s S(z^{-1})\} = 4$$

$$\text{deg}\{H_r R(z^{-1})\} = 4$$

Donc on obtient l'équation diophantienne suivante :

$$A^-(z^{-1})H_s(z^{-1})S(z^{-1}) + B^-(z^{-1})H_r(z^{-1})R(z^{-1}) = P(z^{-1}) \quad \text{(III.16)}$$

III.3.4.3 Résolution de l'équation diophantienne

D'après l'adaptation matricielle (II.23) on obtient le système matricielle a partir de (III.16)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{10 lignes} \end{array} \right\} \left[\begin{array}{cccccccccccc} a'_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_{10} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a'_1 & a'_0 & \ddots & & \vdots & b'_1 & b'_0 & \ddots & & & & \vdots \\ a'_2 & a'_1 & \ddots & \ddots & \vdots & b'_2 & b'_1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & b'_2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a'_0 & b'_m & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a'_n & \vdots & & & a'_1 & 0 & b'_m & & & & & 0 \\ 0 & a'_n & & & a'_2 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & b'_0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & b'_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & b'_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a'_n & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & b'_m \end{array} \right] \begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_l \\ r_0 \\ \vdots \\ r_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.17)}$$

10 colonnes
{10 colonnes}

La résolution de cette équation va nous donner les polynômes suivants :

$$S_x(z^{-1}) = 1 - 1.128 \cdot 10^{13}z^{-1} + 1.206 \cdot 10^{13}z^{-2} + 1.219 \cdot 10^{13}z^{-3} - 1.112 \cdot 10^{13}z^{-4} \quad \text{(III.18)}$$

$$R_x(z^{-1}) = 2.08 \cdot 10^{16} - 8.47 \cdot 10^{16}z^{-1} + 1.27 \cdot 10^{17}z^{-2} - 8.39 \cdot 10^{16}z^{-3} + 2.04 \cdot 10^{16}z^{-4} \quad \text{(III.19)}$$

III.3.5 La Poursuite de consigne

$$B^-(1) = 0.0005433 - 0.005806 - 0.0005869 + 0.0005355 = -8.87 \cdot 10^{-4} \quad \text{(III.20)}$$

Pour une poursuite de consigne il faut suivre l'équation (II.12) sauf que :

$$B'_m = T_0 = b'_0(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \quad \text{(III.21)}$$

$$B_m = 0.01312(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \quad \text{(III.22)}$$

Donc d'après les équations (III.20), (III.21) et (III.22) l'équation (II.12) va devenir :

$$0.01312(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) = -8.87 \cdot 10^{-4} \times b'_0(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \quad \text{(III.23)}$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$b'_0 = \frac{0.01312}{B^-(1)} = -147.9 \quad \text{(III.24)}$$

Et en suivant les équations (III.21),(II.15) et (II.18) on va obtenir :

$$T_x(z^{-1}) = -147.9(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \quad \text{(III.25)}$$

On déduit que le régulateur RST2 responsable de la stabilisation du chariot est :

$$R_x(z^{-1}) = 2.08 \cdot 10^{16} - 8.46 \cdot 10^{16} z^{-1} + 1.27 \cdot 10^{17} z^{-2} - 8.389 \cdot 10^{16} z^{-3} + 2.043 \cdot 10^{16} z^{-4}$$

$$S_x(z^{-1}) = 1 - 1.128 \cdot 10^{13} z^{-1} + 1.206 \cdot 10^{13} z^{-2} + 1.219 \cdot 10^{13} z^{-3} - 1.112 \cdot 10^{13} z^{-4}$$

$$T_x(z^{-1}) = -147.9 - 295.8z^{-1} - 147.9z^{-2}$$

Comme on est arrivé à calculer les trois polynômes constituant le régulateur RST2, maintenant on va l'appliquer sur le système avec une consigne nulle et observer le comportement du chariot avec lui.

III.3.6 Application du régulateur et simulation :

Donc le schéma des régulateurs connecté au pendule [2] est comme suit :

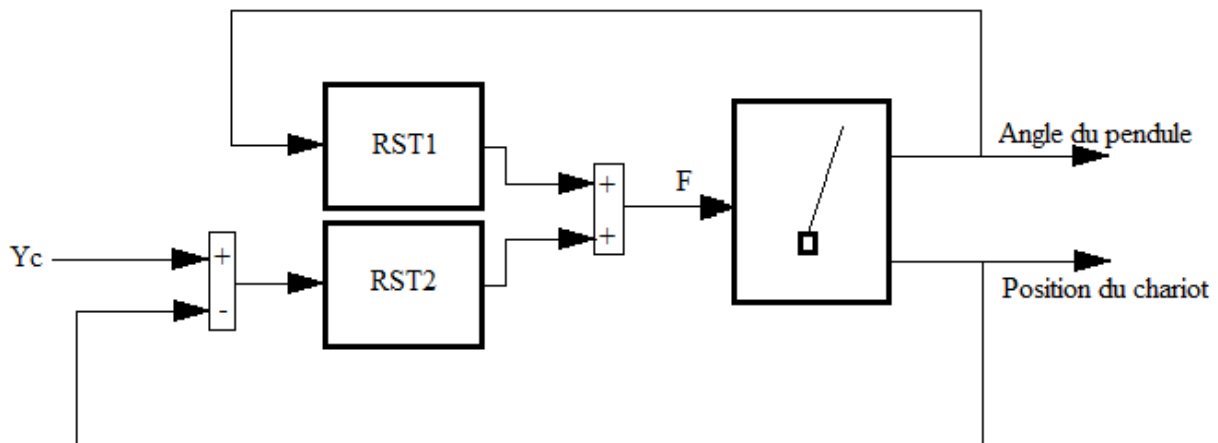


Figure III.8 schéma des deux contrôleurs RST associé au système chariot-Pendule

Après simulation on a obtenu les résultats suivant :

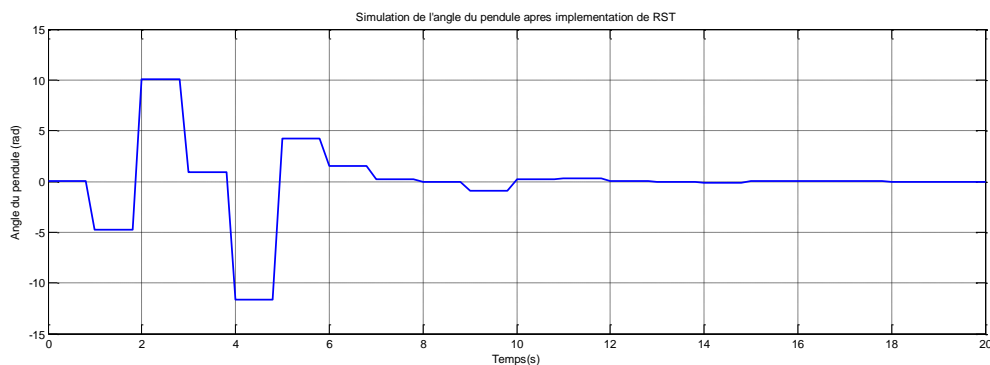


Figure III.9 angle du pendule après implémentation du régulateur RST2

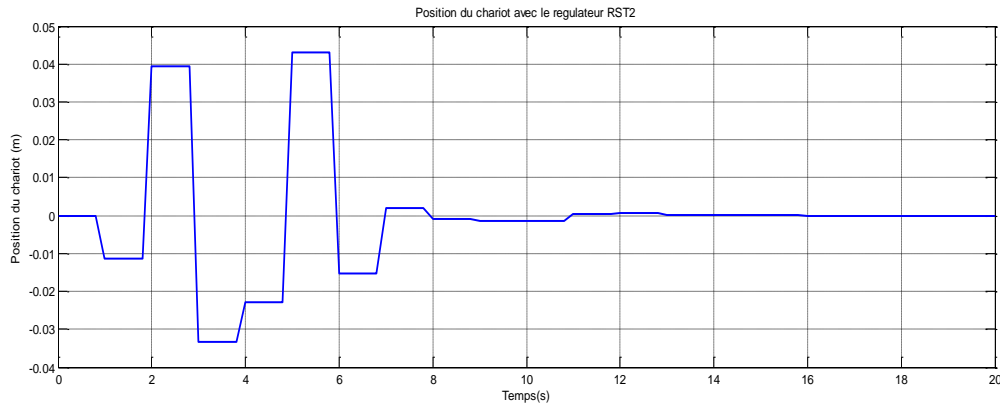


Figure III.10 position du chariot après implémentation du régulateur RST2

On remarque dans la figure III.7 très bien que le graphe avance pour se stabiliser autour de la consigne exigé avec le régulateur RST2.

Après avoir stabilisé le pendule a sa position debout, et le chariot a la position zéro (ou bien au milieu du rail concernant la maquette), une étude de la stabilité de l'ensemble du correcteur et du système est exigé pour déduire les différentes marges de stabilité afin de savoir les limite d'utilisation de nos régulateur.

III.4 Etude de la stabilité

Il existe différentes méthodes pour juger la stabilité d'un système à base de sa fonction de transfert, et pour l'étude de la stabilité des régulateurs qu'on a calculé, on va utiliser le critère de Nyquist et de rivers qui se traduit par :

III.4.1 Le critère de Nyquist :

Le système asservi (en boucle fermée) est stable si et seulement si son lieu de transfert en boucle ouverte encercle le point -1 dans le sens anti-horlogique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables [17-15].

La marge de gain est décrite par la distance entre -1 et la courbe de F_{BO} sur le diagramme de nyquist [18], comme suit :

$$G_M = -|F_{BO}(e^{j\omega\pi T})|$$

Et la marge de phase est la distance de $\arg[F_{BO}]$ par rapport a -180° au moment ou $|F_{BO}| = 0db$ [12-14], donc :

$$\Phi_M = 180^\circ + \arg[F_{BO}(e^{j\omega_{co}T})]$$

Ou ω_{co} est la pulsation de coupure de gain.
Et ω_{π} est la pulsation de coupure de déphasage.

Les valeurs typiques de ces grandeurs pour une conception « robuste » sont [10] :

- Marge de gain : $M_G \geq 6db$
- Marge de phase : $M_{ph} \geq 30^\circ$

III.4.2 Le critère de Rivers :

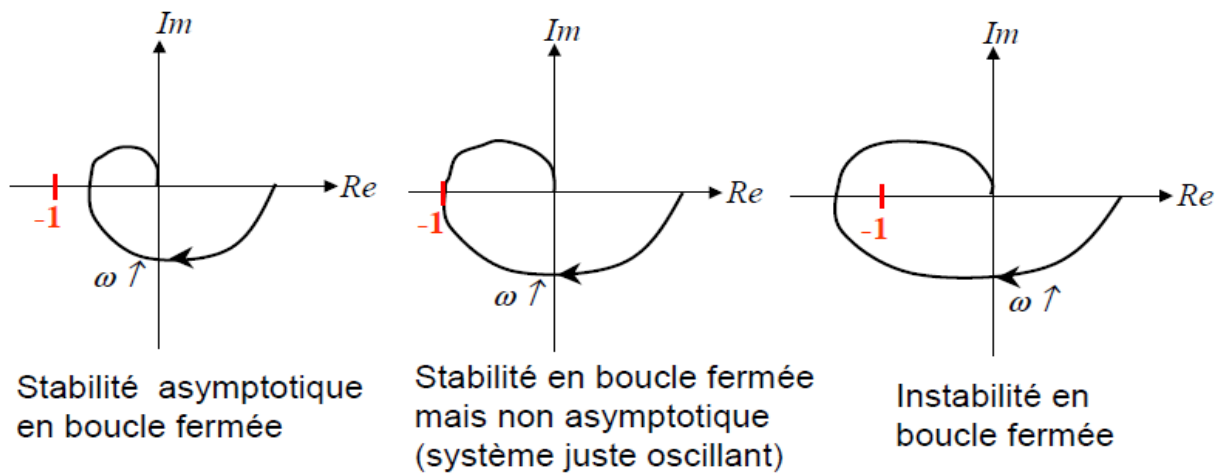


Figure III.11 Marges de stabilité suivant le critère de Rivers

Si le système est stable en boucle ouverte ($G_{BO}(s)$ n'a pas de pôles ni zéros instables), une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique du système en boucle fermée est qu'en parcourant le lieu de Nyquist de $G_{BO}(s)$ dans le sens des pulsations ω croissantes, on laisse le point critique -1 à gauche [19].

III.4.3 Les marges de gain et de phase :

III.4.3.1 Fonction de transfert du pendule et RST1

Pour le système qui décrit le régulateur RST1 avec la fonction de transfert traduisant le comportement du pendule on a obtenu avec MATLAB le diagramme de nyquist suivant :

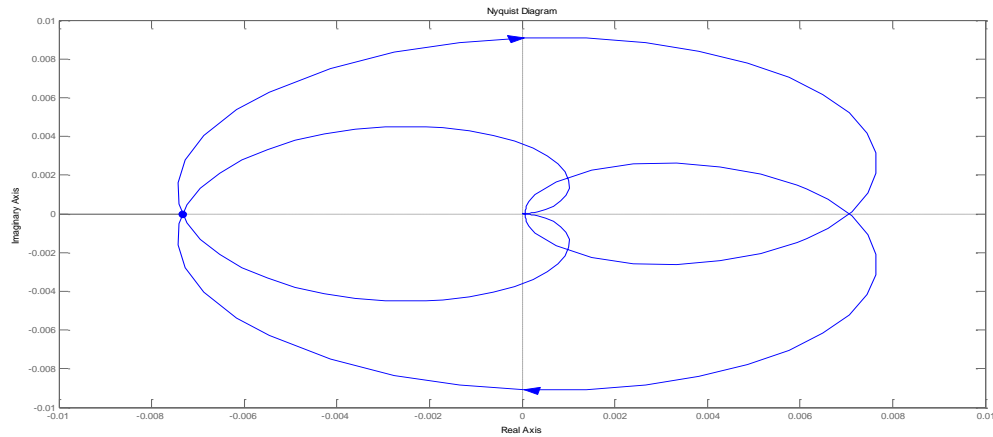


Figure III.12 Diagramme de nyquist de G_2 réguler avec RST1

On remarque clairement que le point critique $[-1, 0]$ est très loin des courbes du diagramme de nyquist et on déduit les marges suivante :

- Marge de Gain : $M_G = 42.7 \text{ db}$
- Marge de Phase : $M_{Ph} = \infty$

Donc d’après le critère de Nyquist et de Rivers on déduit que le système régulé à l’aide du régulateur RST1 est stable.

III.4.3.2 Fonction de transfert du chariot et RST2

Pour le système régulateur RST2 avec la fonction de transfert traduisant la position du chariot on a obtenu le diagramme de nyquist suivant :

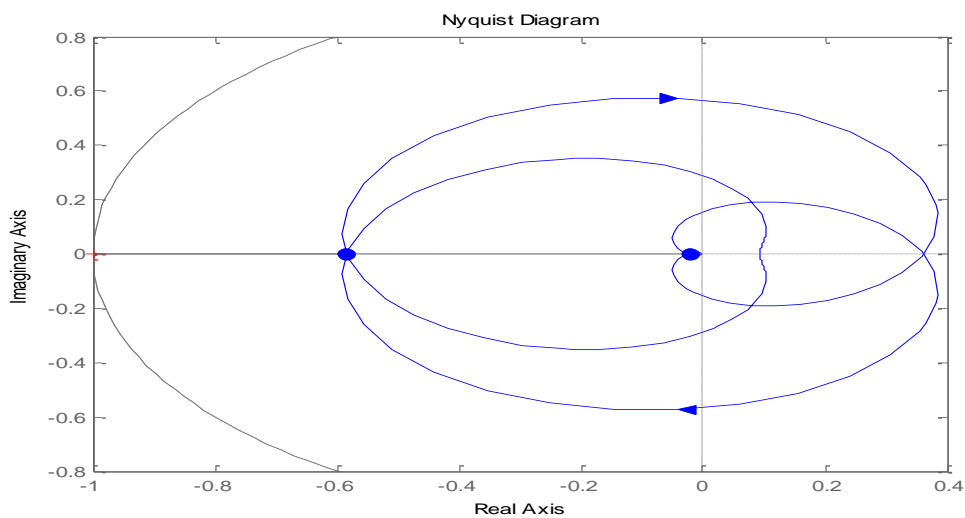


Figure III.13 Diagramme de nyquist de G_1 réguler avec RST2

On remarque aussi que le point critique $[-1, 0]$ est loin et on déduit les marges suivantes :

- Marge de Gain : $M_G = 4.67 \text{ db}$
- Marge de Phase : $M_{Ph} = \infty$

Donc d'après le critère de Nyquist et de Rivers on déduit que le système régulé à l'aide du régulateur RST2 est stable

Remarque :

Après le calcul de la marge de phase d'un système à l'aide du diagramme de nyquist si cette dernière est infinie, on dit que le système est inconditionnellement stable.

III.5 Conclusion :

A partir des étapes élaborées dans le deuxième chapitre pour le calcul des régulateurs RST, on a pu dans ce chapitre calculer des régulateurs RST qui stabilisent le pendule, et le chariot aux consignes désiré à savoir $\theta = 0$ et $x = 0$.

Et concernant l'étude de la stabilité, le critère de nyquist nous a permis de déduire des marges de stabilité satisfaisante pour les deux régulateurs implémenté à leurs fonctions de transferts respectives.

Conclusion
Générale

Conclusion Générale :

Ce travail a été consacré à la modélisation et à la commande d'un pendule inversé, et cette étude nous a amenés à comprendre les équations et le comportement dynamique du système chariot-pendule.

La modélisation du système à l'aide du formalisme de Lagrange-Euler a été largement détaillée dans le premier chapitre, pour ensuite réaliser une linéarisation qui nous définit les fonctions de transfert régissant du comportement du système. Les fonctions obtenus mis en évidence les fortes non linéarités, et l'instabilité du système.

Et comme les fonctions de transfert obtenus possèdent des pôles instables, et vu les contraintes exigées en position qui limite le déplacement du chariot, une commande à double régulateur est exigée pour stabiliser à la fois le pendule et contrôler le déplacement de son chariot.

La méthode de calcul des régulateurs a été clairement présentée dans le deuxième chapitre, et un exemple d'application a été proposé pour nous familiariser avec la commande et les différents avantages qu'elle peut nous procurer en termes de performances et de choix.

Finalement, le troisième chapitre est complètement consacré à l'élaboration des régulateurs RST pour la commande du pendule inversé, dans un premier temps, on a réalisé une commande RST qui stabilise le pendule autour de son point d'équilibre instable, à savoir la position debout, et stabiliser le système le choix du modèle de références, des compensations ainsi que les pôles dominants est critique et doit être bien choisis. Et la mauvaise interprétation de certaines étapes du calcul peuvent nous mener à des résultats erronés. Une fois les polynômes calculés, on a implémenté le régulateur RST sur le système.

A la fin, on souhaite que ce travail soit repris par d'autres étudiants en vue de l'améliorer et augmenter les performances obtenues et pour cela on peut proposer :

- Choisir un autre modèle de référence avec un ordre supérieur
- Essayer de changer les pôles dominants

ANNEXES

Annexe I :

ζ	$t_r \omega_n$	$t_r \omega_n(5\%)$	$t_{pic} \omega_n$	$T_p \omega_n$	D%	ω_R / ω_n	ω_c / ω_n	ω_c / ω_R	M_{db}	ζ
0.1	1.68	30	3.16	6.31	73	0.99	1.54	1.56	14	0.1
0.15	1.74	20	3.18	6.36	62	0.98	1.53	1.56	10.5	0.15
0.2	1.81	14	3.21	6.41	53	0.96	1.51	1.57	8.1	0.2
0.25	1.88	11	3.24	6.49	44	0.94	1.48	1.59	6.3	0.25
0.30	1.97	10.1	3.29	6.59	37	0.91	1.45	1.61	4.8	0.30
0.35	2.06	7.9	3.35	6.71	31	0.87	1.42	1.63	3.6	0.35
0.4	2.16	7.7	3.43	6.86	25	0.82	1.37	1.67	2.7	0.4
0.45	2.28	5.4	3.52	7.04	21	0.77	1.33	1.72	1.9	0.45
0.5	2.42	5.3	3.63	7.26	16	0.71	1.27	1.80	1.2	0.5
0.55	2.58	5.3	3.76	7.52	12.6	0.63	1.21	1.93	0.7	0.55
0.60	2.77	5.2	3.93	7.85	9.5	0.53	1.15	2.17	0.3	0.60
0.65	3.00	5.0	4.13	8.27	6.8	0.39	1.08	2.74	0.1	0.65
0.7	3.29	3	4.40	8.80	4.60	0.14	1.01	7.14	0	0.7
0.75	3.66	3.10	4.75	9.50	2.84	–	0.94	–	–	0.75
0.80	4.16	3.40	5.24	10.50	1.52	–	0.87	–	–	0.80
0.85	4.91	3.70	5.96	11.93	0.63	–	0.81	–	–	0.85
0.90	6.17	4.00	7.21	14.41	0.15	–	0.75	–	–	0.90
0.95	9.09	4.10	10.06	20.12	0.01	–	0.69	–	–	0.95

Tableau A.1 : Tableau des valeurs numériques d'un modèle du second ordre

Annexe 2 :

Équation diophantienne $ax + by = c$

L'équation $ax + by = c$, où les coefficients a , b et c sont trois entiers relatifs (a et b non tous deux nuls) et où les inconnues x et y sont entiers relatifs, est une des équations diophantiennes les plus simples à résoudre. Sa résolution s'appuie sur l'algorithme d'Euclide, le théorème de Bachet-Bézout (qui correspond au cas, appelé aussi **identité de Bézout**, où c est égal au PGCD de a et b) et le théorème de Gauss.

Dans l'ensemble des entiers relatifs, une telle équation possède, ou bien aucune solution, ou bien une infinité de solutions.

Lorsque les coefficients et les inconnues sont des entiers naturels, l'équation possède un nombre fini de solutions. Le théorème de Paoli en donne le nombre à 1 près.

Le théorème de Bachet-Bézout affirme que cette équation admet toujours au moins une solution.

La première étape de la résolution consiste à trouver une solution particulière, c'est-à-dire un couple d'entiers relatifs (x_0, y_0)

Vérifiant : $ax_0 + by_0 = 1$.

- L'algorithme d'Euclide étendu permet d'en exhiber une. (On peut remarquer que cet algorithme s'interprète comme le calcul du développement en fraction continue du rationnel a/b ; l'avant dernière réduite h_{n-1}/k_{n-1} fournit une solution du problème, puisque $k_{n-1}a - h_{n-1}b = (-1)^{n+1}$.)
- On peut travailler modulo b , en cherchant d'abord un entier x_0 tel que $ax_0 \equiv 1 \pmod{b}$. L'entier y_0 se calcule ensuite en prenant égal à $(1 - ax_0)/b$.
- Pour trouver un x_0 inverse de $a \pmod{b}$, on peut se servir du théorème de Fermat généralisé par Euler, d'après lequel $a^{\varphi(b)}$ est congru à 1 modulo b , où φ est l'indicatrice d'Euler : l'entier $x_0 = a^{\varphi(b)-1}$ convient. De même, l'entier $x_0 = a^{\lambda(b)-1}$ convient, où λ est la fonction de Carmichael.
- Mais on peut aussi, si b n'est pas trop grand, chercher une solution par simple balayage, en cherchant quel entier x_0 compris entre 1 et $|b| - 1$ vérifie la congruence linéaire $ax_0 \equiv 1 \pmod{b}$.

Une solution particulière (x_0, y_0) étant connue, l'ensemble des solutions est formé des couples $(x_0 + bk, y_0 - ak)$ où k est un entier relatif quelconque.

Annexe 3 :

TYPE DE VARIABLES (OU DE PEOCEDE)	PERIODE D'ECHANTILLONNAGE (s)
DEBIT	1 – 3
NIVEAU	5 – 10
PRESSION	1 – 5
TEMPERATURE	10 – 180
DISTILLATION	10 – 180
ASSERVISSEMENTES	0.001 – 0.05
REACTEURS CATALYTIQUES	10 – 45
CIMENTERIES	20 – 45
SECHAGE	20 – 45

Tableau A.3 Choix de la période d'échantillonnage pour la régulation numérique de procédés
(valeurs indicatives)

Annexe 4 : fonction MATLAB pour résoudre l'équation diophantienne :

```
function [Rp, Sp, nrp, nsp]=bezoutd(A,B,Hs,Hr,P)
PRECISION=1e-16;
D=size(A);
if D(1)>1, A=A'; end;
D=size(B);
if D(1)>1, B=B'; end;
D=size(Hs);
if D(1)>1, Hs=Hs'; end;
if D(1)==0, Hs=1; end;
D=size(Hr);
if D(1)>1, Hr=Hr'; end;
if D(1)==0, Hr=1;end;
D=size(P);
if D(1)>1, P=P'; end;
na=length(A)-1;nb=length(B)-1;np=length(P)-1;
nhs=length(Hs)-1;nhr=length(Hr)-1;
if (nhs>0), Ah=conv(A,Hs); else Ah=A*Hs; end;
nah=length(Ah)-1;
if (nhr>0), Bh=conv(B,Hr); else Bh=B*Hr; end;
nbh=length(Bh)-1;
if (np>nah+nbh-1), disp('Bezout error: too many poles');end;
if (np<nah+nbh-1), rootsPdes=roots(P);nexta=nah+nbh-1-np;
rmin=1e-16;angle=[0:nexta-1]'/nexta*2*pi;j=sqrt(-1);
rootsPextra=rmin*exp(j*angle);P=poly([rootsPdes;rootsPextra]);
np=nah+nbh-1;
end;
nsp=nbh-1;
nrp=nah-1;
if (np>nah+nbh-1),
disp('Order of model den is low Add a polynomial of higher order to Hs or Hr.
');
end;
M=[];
for j=1:nsp+1,
V=[];
if (j>1), V=[V ; zeros(j-1,1)]; end;% zeros in front of Ah
V=[V ; Ah'];% Ah
if (j<=nsp), V=[V ; zeros(nsp+1-j,1)]; end;% zeros behind Ah
if (length(V)~=nah+nbh), disp('bezoutb: error V'); end;
M=[M V]; % add one column to M
end;
for j=1:nrp+1,
V=[];
if (j>1), V=[V ; zeros(j-1,1)]; end;
V=[V ; Bh'];
if (j<=nrp), V=[V ; zeros(nrp+1-j,1)]; end;
if (length(V)~=nah+nbh), disp('bezoutb: error V'); end;
M=[M V];
end;
D=size(M);
if (D(1)~=nah+nbh), disp('bezoutb: error size M row'); end;
if (D(2)~=nah+nbh), disp('bezoutb: error size M column'); end;
P=P';global M1;
M1=M;
X= M\P;
X=real(X);
X=X';
Sp=X(1:nsp+1);
Rp=X(nsp+2:nsp+nrp+2);
```


Annexe 5 : schémas Simulink :

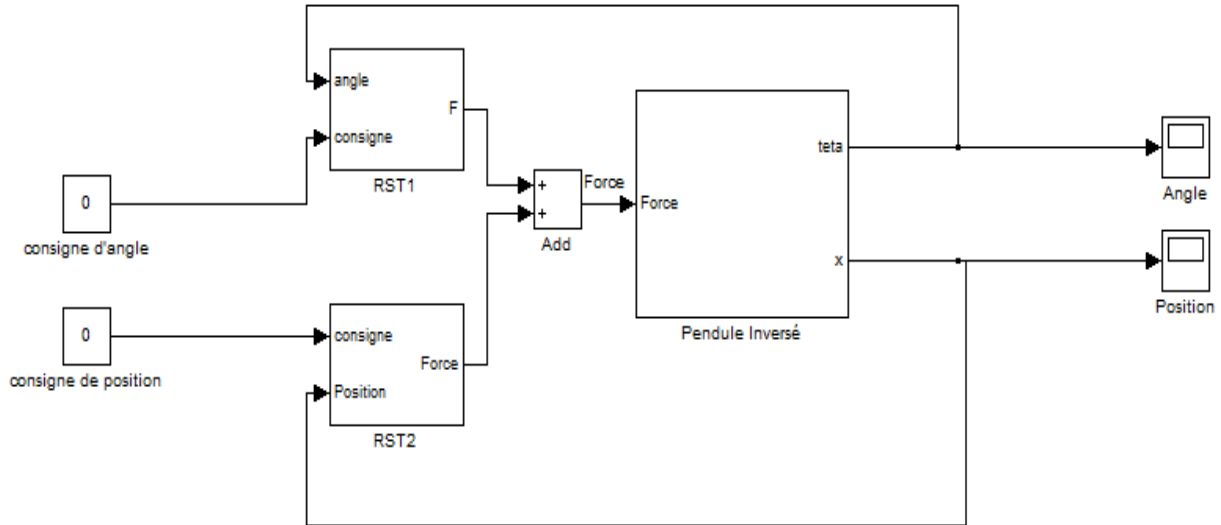


Figure A.1 Schéma du système avec les deux régulateurs

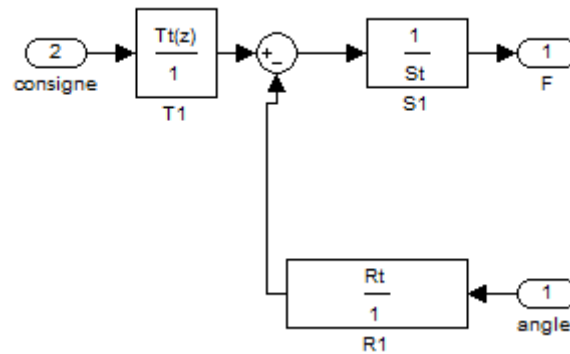


Figure A.2 Schéma du sous-système RST1

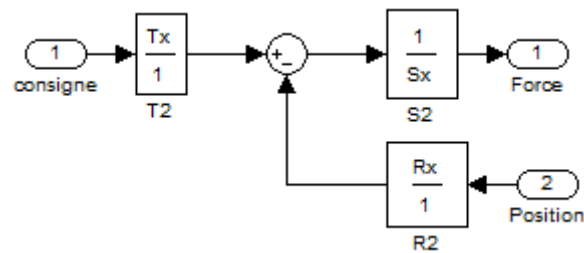


Figure A.2 Schéma du sous-système RST2

Bibliographie

Bibliographie :

- [1] Samer Riachy « Contribution à l'estimation et à la commande de systèmes mécaniques sous actionnes , Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lille, 2008.
- [2] Jia-Jun Wang « Simulation studies of inverted pendulum based on PID controllers », ELSEVIER 2010,
- [3] Boussalem Chahira. « Implémentation de régulateurs fractionnaires pour la stabilisation d'un pendule inversé», Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou.2012.
- [4] Freddy Mudry « Modélisation et régulation d'un pendule inversé » institut d'Automatisation industrielle (IAI) de l'eivd, 2003.
- [5] Fulvio Boattini « RST Digital Controls », Article CERN TE\RPC, 2012
- [6] Lahouazi Ferhat .«Mise en œuvre d'une stratégie de commande neuro floue: Application a un pendule inversé», Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou.2011.
- [7] www.moto.honda.fr/motorcycles/range/adventure/nc750x/overview.html
- [8] <http://www.robotshop.com/blog/fr/robot-humanoide-nao-edition-academique-v3plus-aldebaran-jpg>
- [9] Luc Jaulin. « Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes», collection automatique de base dirigée par Alain Richard, Lavoisier, 2005.
- [10] Etienne Dombre « Analyse et modélisation des robots manipulateurs », Lavoisier, 2001.
- [11] Andrew K. Stimac « Standup and Stabilization of the Inverted Pendulum », Bachelor of Science at the M.I.T, 1999.
- [12] Emmanuel Godoy, Eric Ostertag « Commande numérique des systèmes Approches fréquentielle et polynomiale », ellipses, 2003.
- [13] Roland Longchamp « Commande numérique de systèmes dynamiques » volume 2, Presses polytechniques et universitaires de romandes, 2006.
- [14] Ioan Doré Landau « commande des systèmes conception, identification et mise en œuvre » Lavoisier, 2002.

Bibliographie

- [15] A.Jutard M.Betemps, « Commande Polynomiales RST »,INSA de Lyon, 1998
- [16] Andrew K.stimac « Standup and Stabilisation of the inverted pendulum » , MIT, 1999.
- [17] Jacques Gangloff ,Michel de MATHELIN « Commande Numérique des Systèmes », article de l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg,2013.
- [18] Alireza Karimi « Robust Control », Article du Laboratoire d'Automatique de l'Ecole Polytechnique Fédérale De Lausanne.
- [19] www.asi.insa-rouen.fr/enseignement/siteUV/auto/didacticiel/notions/revers.htm

Résumé

Ce Travail Présente une porte sur la modélisation et la commande d'un pendule inversé sur un chariot qui se déplace selon un seul axe. Ce travail se constitue de trois chapitres. D'abord, Le premier chapitre porte sur la modélisation du système chariot-pendule. Ensuite dans le second chapitre on a présenté le principe et la méthode d'application de la commande RST. Enfin, le troisième chapitre est consacré à la réalisation d'un régulateur RST qui commande le système modélisé. L'application et les résultats de simulation sont obtenus via Simulink/MATLAB.

Mots clés : Pendule inverse, pendule sur chariot, commande RST, Placement de poles, commande robuste.

Abstract

This Work presente a door to the modeling and control of an inverted pendulum on a trolley that moves along a single axis. This work consists of three chapters. First of all, the first chapter deals with the modeling of the trolley-pendulum system. Then, in the second chapter, we presented the principle and the method of application of the RST command. Finally, the third chapter is devoted to the realization of an RST regulator which controls the modeled system. The application and simulation results are obtained via Simulink / MATLAB.

Key words : Inverted pendulum, pendulum on trolley, RST control, Pole placement, robust control.