

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue

de l'obtention d'un master en recherche opérationnelle

Option Modélisation Mathématique et évaluation des performance des réseaux

Flots et tensions dans un réseau

Réalisé par :

CHOUGAR Cylia

ELBEY Fatima Zohra

Devant le jury composé de :

Président : *M^r* A.KHELOUFI

Encadreur : *M^r* K.KABYL

Examineur : *M^r* A.ANDJOUH

Examineur : *M^r* R.BOUKOUCHA

Promotion : 2016-2017

Remerciement

On voudrait remercier à travers ce modeste travail tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Un remerciement particulier est adressé à notre promoteur M^r Kabyle pour nous avoir accordé l'honneur d'assurer la direction du présent travail, et pour tous les conseils qu'il nous a prodigués tout au long de la réalisation de ce projet.

Nous tenons à témoigner de notre profonde gratitude aux membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait d'avoir accepté de juger ce travail.

Nos remerciements sont adressés à tous nos camarades de promotion ainsi qu'à toutes les personnes qui nous ont soutenus dans notre tâche.

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail :

À ma mère et à mon père,
À mes frères et ma sœur,
À mes amies,
À ma meilleure amie Lydia,
Et à ma binôme Fatima Zohra,
Cylia

À ma mère et mon père,
À mes frères,
À mes amies,
Et à ma binôme Cylia,
Fatima Zohra

Table des matières

Introduction générale	7
1 Définitions et quelques concepts de bases de la théories des graphes	8
1.1 Graphe orienté	8
1.1.1 Quelques définitions Algébriques	9
1.1.2 Quelques définitions relatives aux structures d'un graphe	10
1.2 Degré d'un sommet	12
1.2.1 Application multivoque d'un graphe	12
1.2.2 Quelques graphes particuliers	12
1.3 Graphe non orienté	14
1.3.1 Multigraphe non orienté	14
1.3.2 Graphe non orienté associe	14
1.3.3 Graphe non orienté simple	15
1.3.4 Graphe non orienté complet	15
1.4 Chaînes, cycles, chemins et circuits	15
1.4.1 Représentation sagittale	17
1.4.2 Fermeture transitive d'un graphe	17
1.5 Connexité et forte connexité	17
1.5.1 Graphe connexe, composantes connexes	17
1.5.2 Graphe fortement connexe, composante fortement connexe	18
1.5.3 Graphe réduit	18
1.6 Représentation d'un graphe	19
1.6.1 Matrice associées à un graphe	19
1.7 Opération dans les graphes	22
1.7.1 Homomorphisme de graphe	22
1.7.2 Isomorphisme de graphe	22

2	Cycle et Cocycle	24
2.1	Cycle	24
2.2	Vecteur associé à un cycle	24
2.2.1	Cycle indépendants base de cycles	26
2.2.2	Base de cycles	26
2.2.3	Nombre cyclomatique	26
2.3	Cocycles	27
2.3.1	Vecteur associé à un cocycle	27
2.3.2	Cocycle élémentaire	28
2.3.3	Base de cocycle	29
2.3.4	Nombre cocyclomatique	29
2.3.5	Relation de dualité entre cycles et cocycles	30
3	Arbres et Arborescences	32
3.1	Arbre	32
3.1.1	Propriété	32
3.1.2	Propriétés des arbres	33
3.1.3	Arbre de poids minimum	37
3.2	Arborescence	37
3.2.1	Propriété de l'arborescence	38
4	Flot et Tension	39
4.1	Flot	39
4.1.1	Définition Algébrique des flots	40
4.1.2	Opération sur les flots	41
4.2	Système de générateurs des flots	42
4.3	Système de générateurs des tensions	43
4.3.1	Opération sur les tensions	43
4.3.2	Propriétés des tensions	43
4.4	Flot maximum, tension maximum	46
4.4.1	Le problème du flot maximum dans un réseau de transport	46
4.4.2	Définition des coupes capacité d'une coupe	47
4.4.3	Le théorème du flot maximum et de la coupe minimale	47
4.4.4	Le problème du flot compatible	48
4.4.5	Théorème du flot compatible(Hoffman 1960)	49
4.5	Algorithme de Ford-Fulkerson	49
4.5.1	Description	50

4.5.2	Optimisation linéaire	51
4.6	Composante de tension maximum	52
5	Mise en œuvre du programme	53
5.1	Présentation du logiciel Matlab/Simulink(V6)	53
5.2	Implémentation de L'algorithme de Ford-Felkerson	53
5.2.1	Algorithme Général de Flot Maximal	53
5.3	Application numériques	54
	Conclusion générale	60
	Bibliographique	61

Table des figures

1.1	Exemple d'un graphe orienté	8
1.2	Extrémité d'un arc	9
1.3	Extrémité initiale et terminale	9
1.4	Graphe à 4 sommets et 3 arcs	10
1.5	Exemple sur le sous-graphe	10
1.6	Exemple sur le graphe partiel	11
1.7	Exemple sur le sous-graphe partiel	11
1.8	Exemple sur les degrés d'un sommet	12
1.9	Exemple sur les successeurs et prédécesseurs d'un sommet	13
1.10	Montre un graphe complet et un graphe non complet	13
1.11	Graphe non orienté	14
1.12	Multigraphe non orienté	14
1.13	Graphe non orienté simple	15
1.14	Exemple sur une chaîne et un cycle	16
1.15	Exemple sur une chemin et un circuit	16
1.16	Exemple sur la chaîne élémentaire et simple	16
1.17	Sagittale	17
1.18	Sagittale	17
1.19	Exemple d'un graphe connexe	18
1.20	Exemple sur composante connexe	18
1.21	Exemple sur composante fortement connexe	19
1.22	Graphe réduit	19
1.23	Exemple d'une matrice d'incidence sommets - arcs	20
1.24	Exemple d'une matrice d'incidence sommet - arête	20
1.25	Exemple d'une matrice adjacence	21
1.26	Exemple d'une matrice associe	21
1.27	Exemple sur l'isomorphisme de graphe	22

2.1	Vecteur associé à un cycle	25
2.2	Graphe H	25
2.3	Base de cycle	26
2.4	Cocycle	28
2.5	Cocycle élémentaire	28
2.6	Base de cocycle	29
3.1	Exemple sur un arbre	33
3.2	Une base de cycle associé à l'arbre	35
3.3	Un arbre	35
3.4	Une base de cocycle associé à l'arbre	36
3.5	Un arbre et un coarbre	36
4.1	Exemple d'un flot	40
5.1	Le réseau	54
5.2	L'exécution	55
5.3	La solution	56
5.4	Graphe 1	56
5.5	Graphe 2	57
5.6	Graphe 3	58
5.7	Graphe 4	58

Liste des tableaux

- 1.1 Exemple sur les degrés d'un sommet 12
- 1.2 Exemple sur les successeurs et prédécesseurs d'un sommet 13

- 2.1 Base de cocycle 30

- 3.1 Base de cycle associé à l'arbre 36
- 3.2 Base de cocycle associé à l'arbre 37

Introduction générale

Plusieurs situations de la vie quotidienne font appel aux graphes, c'est-à-dire l'utilisation des graphes pour modéliser les problèmes, afin d'optimiser certains paramètres.

Ce mémoire se focalise à l'étude de problèmes dans lequel les composantes du vecteur flot, composantes indiquées par les arcs, satisfont à la loi de Kirchoff.

Le flot joue un rôle important en théorie de graphes. cette importance résulte de l'utilisation des flots dans plusieurs domaines. Les flots d'un multigraphe forment un sous-ensemble engendré par les arêtes, les éléments orthogonaux à ce sous-ensemble sont appelés tensions. Les tensions sont utilisées dans la modélisation des problèmes d'ordonnancement, avec la contrainte sur les tâches, c'est-à-dire deux tâches A et B ne peuvent pas être réalisées en même temps. Ce qui montre que le problème est difficile (électricité). Ces tensions satisfont à la deuxième loi de Kirchoff. Dans notre étude présentons un cas réel modélisé en un problème de flot dans un réseau, et en utilisant les techniques d'optimisations nous donnons le flot maximum. Ce manuscrit s'articule autour de cinq chapitres dont le premier est consacré à la présentation de certaines notions de base et notation de la théorie des graphes, le deuxième chapitre consiste à la présentation des cycles et cocycles, ainsi que leurs propriétés. Dans le troisième chapitre nous présentons l'arbre et l'arborescence que nous allons utiliser-la, le chapitre quatre qui concerne la présentation de flot maximum et la tension maximum dans un réseau et dans le chapitre cinq nous donnons une implémentation d'un cas réel modélisé sous forme d'un problème de flot maximum dans un réseau et terminons notre manuscrit par une conclusion.

Définitions et quelques concepts de bases de la théories des graphes

Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter certaines notions de base de la théorie des graphes que nous allons utiliser par la suite dans notre travail.

1.1 Graphe orienté

Un graphe $G = (X, U)$ est déterminé par la donné :

- D'un ensemble X dont les éléments sont appelés des sommets, si $|X| = n$ alors le graphe G est dit d'ordre fini appelé des arcs.
- Graphiquement les sommets représentés par des points ou des nœud et l'arc $u = (i, j)$ sera représenté par une flache allant de i vers j .

Exemple 1

$$X = \{A, B, C\}; U = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, A\}\}$$

Le graphe $G(X, U)$ est donné par la figure suivante :

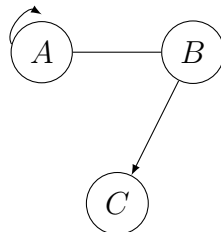


FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe orienté

1.1.1 Quelques définitions Algébriques

1. **Extrémités d'un arc** : Si $u = (i, j) \in U$ avec $i, j \in K$, $K \subset \mathbb{N}$. u est un arc de G est :

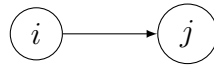


FIGURE 1.2 – Extrémité d'un arc

- "i" est l'extrémité initiale de l'arc u .
- "j" est l'extrémité terminale de l'arc u .
- si $i = j$ alors $u = (i, i)$, on dit que l'est une boucle.

Exemple 2 $G = (X, U)$; $X = \{1, 2, 3, 4\}$; $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

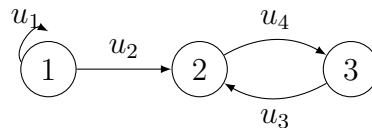


FIGURE 1.3 – Extrémité initiale et terminale

$$u_1 = (1, 1); u_2 = (1, 2); u_3 = (3, 2); u_4 = (2, 3)$$

$$\begin{cases} 3 : \text{l'extrémité initiale de } u_3 \\ 2 : \text{l'extrémité terminale de } u_3 \end{cases}$$

2. **Adjacence** :

- Deux sommets sont adjacents (ou voisins) s'ils sont joints par un arc
- Deux arcs sont adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune.

Exemple 3

$G = (X, U)$ graphe orienté, (i, j) un arc de u , on dit que :

- i et j sont deux sommets adjacents.
- i et j sont adjacent à l'arc u .
- L'arc u est adjacent aux sommets i et j , on utilise aussi le mot "incident"
- Deux arcs u et v sont adjacents s'ils sont incidents à un même sommet

Dans le graphe de la Figure 1.4 l'arc u et v sont incidents, car ils ont le sommet k en commun.

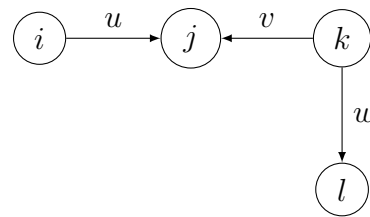


FIGURE 1.4 – Graphe à 4 sommets et 3 arcs

3. Multigraphe orienté :

Dans un graphe orienté, on a au plus un arc entre deux sommets donnés pour pallier à cette limitation, on utilise les multigraphes, qui autorisent les arcs parallèles.

Un multigraphe orienté $G = (X, U, \alpha, W)$ est la donnée :

- D'un ensemble X dont les éléments sont les sommets du graphe.
- D'un ensemble U dont les éléments sont les arcs du graphe.
- De deux fonctions $\alpha : U \rightarrow X$ et $W : U \rightarrow X$ qui à chaque arc $a \in U$ associent son extrémité initiale $\alpha(a)$ et son extrémité terminale $W(a)$.

1.1.2 Quelques définitions relatives aux structures d'un graphe

a) Sous graphe

Soit $G = (X, U)$ un graphe et $A \subset X$; $A \neq \emptyset$, le sous graphe engendré par A est le graphe G_A dont les sommets sont les éléments de A et dont les arcs sont les arcs de G ayant leurs extrémités dans A . Dans le graphe de la Figure 1.5, le graphe H est un sous graphe de G engendré par les sommets $\{1, 2\}$.

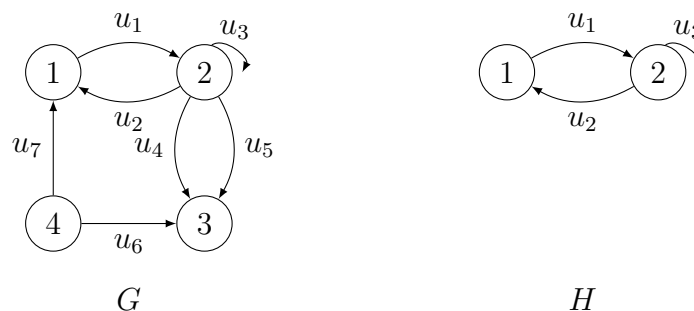


FIGURE 1.5 – Exemple sur le sous-graphe

b) Graphe partiel

Soit $G = (X, U)$ un graphe et soit $V \subset U$ et $V \neq \emptyset$ le graphe partiel engendré par V est le graphe ayant le même ensemble de sommets que G et dont les arcs sont les arcs de V .

Dans la Figure 1.6, le graphe H' est un graphe partiel de graphe G' engendré par les arcs $\{u_2, u_3\}$

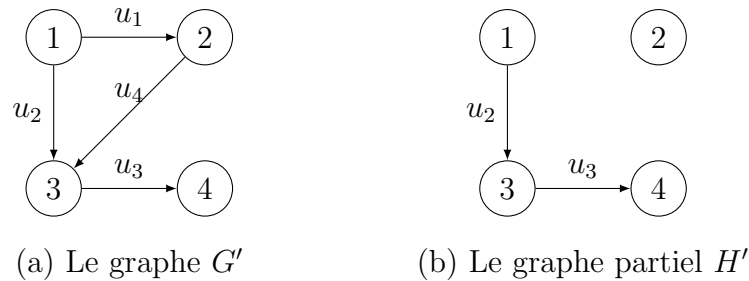


FIGURE 1.6 – Exemple sur le graphe partiel

c) Le sous-graphe partiel

Soit $G = (X, U)$ un graphe. Soit $A \subset X$; $V \subset U$ tel que $A \neq \emptyset$; $V \neq \emptyset$.

Le sous-graphe partiel engendré par A et V est le graphe partiel engendré par V . Dans la Figure 1.7 le graphe H'' et le sous graphe partiel G' engendré par les sommets $\{1, 2, 3\}$ et les arcs $\{u_1, u_2, u_4\}$

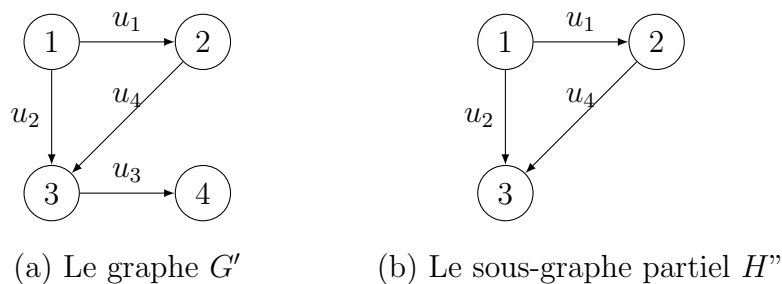


FIGURE 1.7 – Exemple sur le sous-graphe partiel

d) Complémentaire d'un 1-graphe :

Soit $G = (X, U)$ un graphe, son graphe complémentaire $G = (X, \bar{U})$ a le même ensemble de sommets que G et comme arcs, les arcs complémentaires à U (Par rapport a X^2) :

$$(i, j) \in U \implies (i, j) \text{ n'appartient pas } \bar{U}$$

$$(i, j) \text{ n'appartient pas } U \implies (i, j) \in \bar{U}$$

e) P-graphe :

Un p -graphe est un graphe dans le quel il n'existe jamais plus de " p " arcs de la forme (i, j) entre deux sommets quelconque, i et j pris sous cet ordre.

Un 1-graphe est un graphe tel qu'il n'existe jamais plus d'un arc de la forme $(i, j) \forall i, j \in X$

1.2 Degré d'un sommet

$G = (X, U)$ graphe orienté, à tout sommet i de G , on associe :

- $d_G^+(i)$ demi-degré extérieur de " i ", c'est le nombre d'arcs ayant i comme extrémité initiale.
- $d_G^-(i)$ demi-degré intérieur de " i ", c'est le nombre d'arcs ayant i comme extrémité terminale.
- $d_G(i) = d_G^+(i) + d_G^-(i)$ degré de " i ", c'est le nombre d'arcs ayant i comme extrémité.

La table 1.1 montre les degrés des sommets de graphe de la Figure 1.8

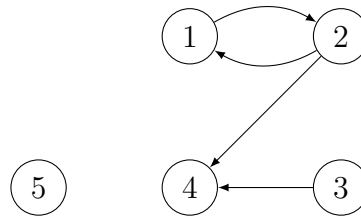


FIGURE 1.8 – Exemple sur les degrés d'un sommet

i	1	2	3	4	5
$d_G^+(i)$	1	2	1	0	0
$d_G^-(i)$	1	1	0	2	0
$d_G(i)$	2	3	1	2	0

TABLE 1.1 – Exemple sur les degrés d'un sommet

Remarque 1.2.1

Un sommet de degré zéro est dit isolé.

1.2.1 Application multivoque d'un graphe

On dit que j est un successeur de i s'il existe un arc ayant i comme extrémité initiale et j comme extrémité terminale. Et s'il existe un arc ayant i comme extrémité terminale, on dit que j est un prédécesseur de i . La table 1.2 montre les successeurs et les prédécesseurs des sommets de la Figure 1.9.

1.2.2 Quelques graphes particuliers

Graphe symétrique : $G = (X, U)$ est dit symétrique si pour toute paire sommets i et j il y a autant d'arcs de la forme (i, j) que de la forme (j, i) ; si : $(i, j) \in U \implies (j, i) \in U$

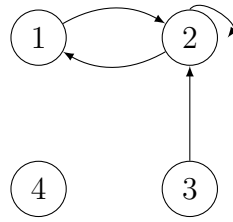


FIGURE 1.9 – Exemple sur les successeurs et prédécesseurs d'un sommet

i	1	2	3	4
Γ_i^+	{2}	{1,2,3}	\emptyset	\emptyset
Γ_i^-	{2}	{1,2}	{2}	\emptyset

TABLE 1.2 – Exemple sur les successeurs et prédécesseurs d'un sommet

Graphe antisymétrique On dit qu'un graphe $G = (X, E)$ est antisymétrique si pour toute paire de sommet (i, j) tel que $(i, j) \in U$ alors $(j, i) \notin U$, sinon $i = j$.

Graphe transitif : On dit qu'un graphe est transitif si : pour tout sommet $i, j, k \in X$ tel que $(i, j) \in U$ et $(j, k) \in U$ alors $(i, k) \in U$

S'il existe un arc allant de i à j et un arc j à k alors il existe un arc allant de i à k

Graphe complet : Un graphe $G = (X, U)$ est complet si $\forall (i, j) \in X$ il existe au moins un arc de la forme (i, j) ou (j, i) , c'est-à-dire : $(i, j) \notin U \implies (j, i) \in U ; \forall i \neq j$

Exemple 4



FIGURE 1.10 – Montre un graphe complet et un graphe non complet

Graphe biparti : Un graphe est dit biparti, si l'ensemble de ses sommets peut être partitionner en deux parties X_1 et X_2 de sorte que deux sommets quelconques de la même partie ne soient jamais adjacents

Un graphe est biparti complet si : $\forall i \in X_1 ; \forall j \in X_2$, il existe au moins un arc entre i et j .

Graphe réflexif : Un graphe $G = (X, U)$ est dit réflexif si $\forall i \in X : (i, i) \in U$, c'est-à-dire tout sommet du graphe admet une boucle.

1.3 Graphe non orienté

On dit que G est un graphe non orienté (ou bien indirect) si la précision de sens de lien (i, j) et la distinction entre extrémité initiale et extrémité terminale ne jouent aucun rôle.

On appelle tout élément $(i, j) \in E$ une arête qui est représentée graphiquement par un segment sans flèche liant les deux nœuds i et j . La Figure 1.11 montre un graphe non orienté à 5 sommets et 7 arcs

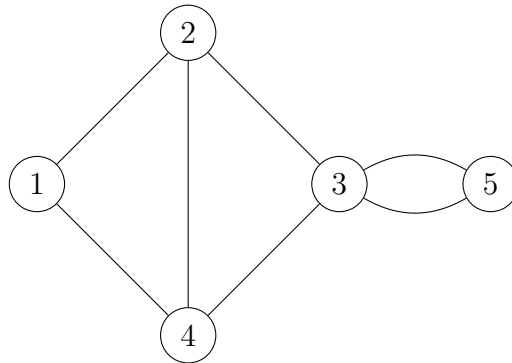


FIGURE 1.11 – Graphe non orienté

1.3.1 Multigraphe non orienté

Un multigraphe $G = (X, E)$ est un graphe pour lequel il peut exister plusieurs arêtes entre deux sommets

La Figure 1.12 montre un multigraphe non orienté

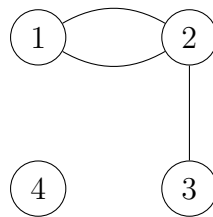


FIGURE 1.12 – Multigraphe non orienté

1.3.2 Graphe non orienté associé

À chaque graphe orienté, on peut lui associer un graphe non orienté.

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, son graphe non orienté associé est le graphe $G' = (X, E)$ ayant le même ensemble de sommets X et dont l'ensemble d'arête E vérifié :

$$(x, y) \in E \iff (x, y) \in U \text{ et } (y, x) \in U$$

1.3.3 Graphe non orienté simple

Un graphe est dit simple :

- S'il est sans boucles.
- S'il n'y a jamais plus d'un arête entre deux sommets quelconque.

La Figure 1.13 montre un graphe simple non orienté

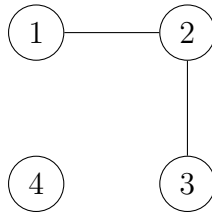


FIGURE 1.13 – Graphe non orienté simple

1.3.4 Graphe non orienté complet

Un graphe $G = (X, E)$ est dit complet si pour toute paire de sommets (i, j) il existe au moins une arête entre i et j .

1.4 Chaînes, cycles, chemins et circuits

Chaîne : Une chaîne joignant deux sommets 0 et k dans un graphe G est une suite de sommets relie par des arêtes tel que deux sommets successifs ont une arête commune, On la note par $(0, 1, \dots, k)$. On dit que 0 et k sont les extrémités de la chaîne

Cycle : C'est une chaîne dont les extrémité coïncidents $(0, 1, \dots, 0)$ avec $0 = k$

Chemin : Est une suite de sommets reliés successivement par arcs orienté dans le même sens, on le note par $(0, 1, \dots, k)$

Circuit Est un chemin qui se ferme sur elle même. (C'est-à-dire est un chemin $(0, 1, \dots, k)$ dont les extrémités coïncidents $0 = k$)

Exemple 5

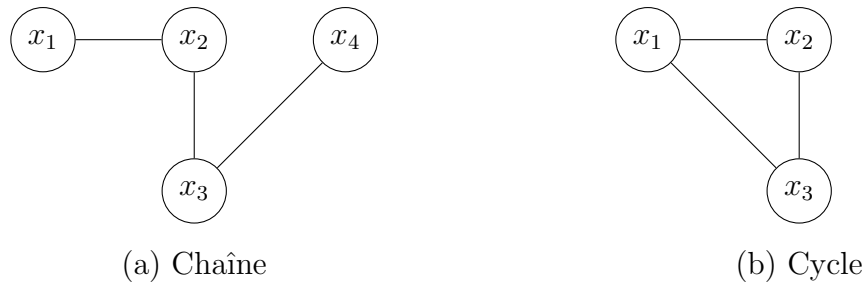


FIGURE 1.14 – Exemple sur une chaîne et un cycle

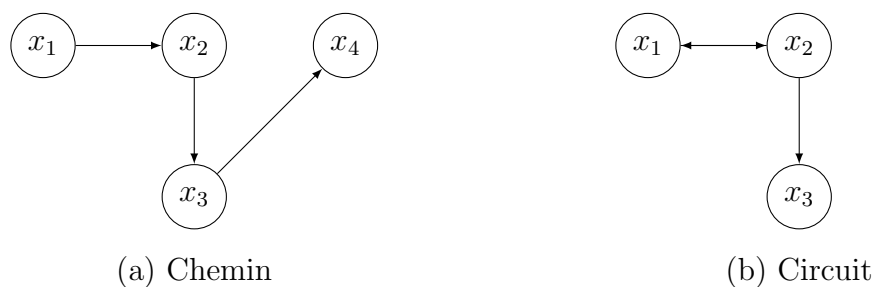


FIGURE 1.15 – Exemple sur une chemin et un circuit

Chaîne (chemin) élémentaire : Est une chaîne (chemin) qui passe une et une seule fois par ses sommets

Cycle (circuit) élémentaire : Est une cycle (circuit) qui passe par ses sommets une et une seule fois

Chaîne (chemin) simple : Est une chaîne (chemin) qui passe par ses arêtes (arcs) une et une seule fois

Cycle (circuit) simple : Est une cycle (circuit) qui passe par ses arêtes (arcs) une et une seule fois

La Figure 1.16 montre une chaîne élémentaire et simple dans un graphe

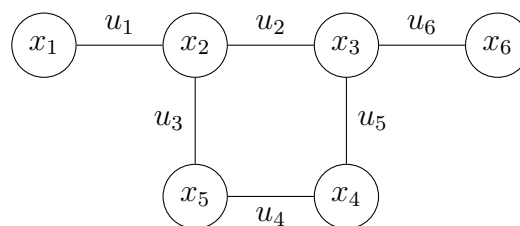


FIGURE 1.16 – Exemple sur la chaîne élémentaire et simple

La chaîne $C = (u_1, u_2, u_6, u_2, u_3, u_4, u_5)$ n'est pas simple

La chaîne $L = (x_1, x_2, x_3, x_6, x_3, x_2, x_5, x_4, x_3)$ n'est pas élémentaire

1.4.1 Représentation sagittale

Étant donné un ensemble X et l'ensemble U , alors on peut donner la représentation sagittale de $G = (X, U)$ par un dessin, pour $X = \{A, B, C, D\}$ et $U = \{(A, B), (B, A), (B, D), (C, D)\}$ le graphe associé et donné par la figure 1.17

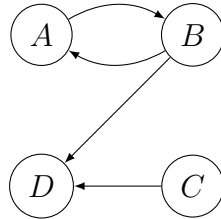


FIGURE 1.17 – Sagittale

Un même graphe peut avoir des représentation sagittale en apparence très différentes :



FIGURE 1.18 – Sagittale

1.4.2 Fermeture transitive d'un graphe

On appelle fermeture transitive de l'application multivoque Γ^+ , définie par :

$$\Gamma^+(i) : X \longrightarrow P(X)$$

$$i \longrightarrow \Gamma^+ = \Gamma_i^+ \cup \Gamma_i^{+2} \cup \dots \cup \Gamma_i^{+n-1} = \Gamma_i^+$$

Où Γ_i^{+k} représente l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre à partir du sommet i par un chemin de longueur k (arcs). Γ_i^+ : représente l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre par un chemin de longueur 1 (arc) à partir du sommet i . On dit Γ_i^{+k} est l'ensemble des descendants de i

1.5 Connexité et forte connexité

1.5.1 Graphe connexe, composantes connexes

- Un graphe G est dit connexe si et seulement si : $\forall i, j \in X$, il existe une chaîne reliant i et j

La Figure 1.19 montre un graphe connexe

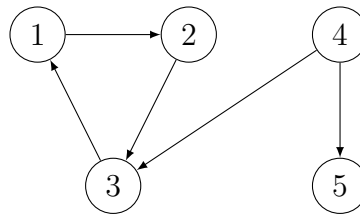


FIGURE 1.19 – Exemple d'un graphe connexe

- On appelle composante connexe un ensemble de sommets qui ont deux à deux la relation de connexité en plus tout sommet en dehors de la composante connexe n'a pas de relation de connexité avec les sommets de cette composante.

Le graphe de la Figure 1.20 possède deux composantes connexes **1.5.1** Un graphe G est

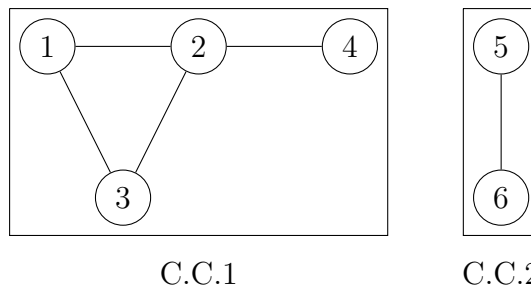


FIGURE 1.20 – Exemple sur composante connexe

connexe s'il contient une seule composante connexe.

1.5.2 Graphe fortement connexe, composante fortement connexe

Remarque • Un graphe G est dit fortement connexe si et seulement si $\forall i \in X, \forall j \in X$, il existe un chemin de i à j et un chemin de j à i .

- On appelle composantes fortement connexes un ensemble de sommets qui ont deux à deux la relation de forte connexité de plus tout sommet en dehors de la composantes fortement connexes n'a pas de relation de forte connexité avec aucun élément de cette composante.

Le graphe de la Figure 1.21 possède deux composantes fortement connexes **1.5.2** Un graphe G est forte connexité s'il contient une seule composante fortement connexe.

1.5.3 Graphe réduit

On appelle graphe réduit du graphe $G = (X, U)$ le graphe $G_r = (X_r, U_r)$

Remarque • Les sommets sont représentés par des composantes fortement connexes

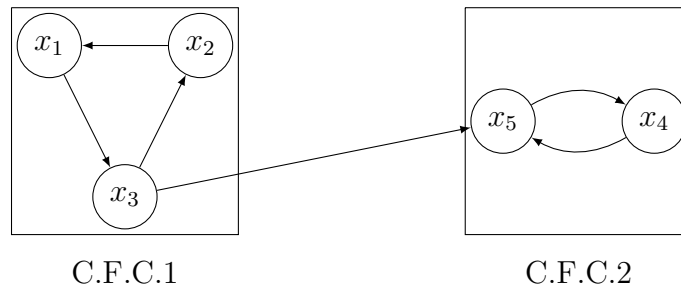


FIGURE 1.21 – Exemple sur composante fortement connexe

- Les arcs (i, j) dans G avec le sommet $i \in C_i$ et le sommet $j \in C_j$ alors il existe un arc (C_i, C_j) dans le graphe réduit

Le graphe réduit du graphe précédent est donne dans la Figure 1.22



FIGURE 1.22 – Graphe réduit

1.6 Représentation d'un graphe

1.6.1 Matrice associées à un graphe

a) Matrice d'incidence sommet arc (Matrice d'incidence aux arcs)

La matrice d'incidence aux arcs est une matrice $n \times m$, tel que chaque ligne associée à un sommet et chaque colonne associée à un arc et qui prennent les valeurs suivantes :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est l'extrémité initiale de } u_j \\ -1 & \text{si } x_i \text{ est l'extrémité terminal de } u_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 1.6.1

d_G^+ est égale le nombre de valeurs (1) d'une ligne corresponde

d_G^- est égale le nombre de valeurs (-1) d'une ligne corresponde

La matrice de graphe de la Figure 1.23 est donnée par :

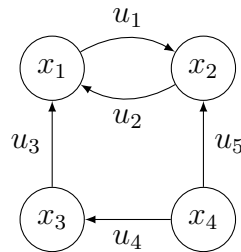


FIGURE 1.23 – Exemple d’une matrice d’incidence sommets - arcs

$$A = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b) Matrice d’incidence sommets - arêtes

Soit $G = (X, U)$ un graphe, X l’ensemble des sommets ($|X| = n$) et U l’ensemble des arête ($|U| = m$)

La matrice d’incidence sommets - arêtes du graphe G est la matrice B de type $n \times m$ dont l’élément b_{ij} de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est :

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est l'une des extrémité de l'arête } u_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice d’incidence du graphe de la Figure 1.24 est :

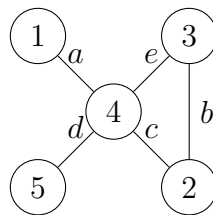


FIGURE 1.24 – Exemple d’une matrice d’incidence sommet - arête

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Matrice d'adjacence (matrice d'incidence sommets - sommets)

La matrice d'adjacence est une matrice $n \times n$ tel que chaque ligne et chaque colonne correspond à un sommet du graphe qui prennent les valeurs :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un arc orienté } (i, j); i = I(u); j = T(u) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice d'adjacence du graphe de la Figure 1.25 est donné par :

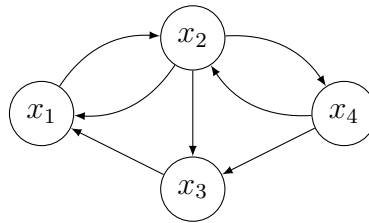


FIGURE 1.25 – Exemple d'une matrice adjacence

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Remarque 1.6.1

S'il existe k arcs de type (i, j) , alors $m_{ij} = k$ avec $k \geq 1$.

Remarque 1.6.2

Le sommet des valeurs d'une ligne est égale $d_G^+(x)$

Le sommet des valeurs d'une colonne est égale $d_G^-(x)$

La matrice d'adjacence de graphe de la Figure 1.26 est :

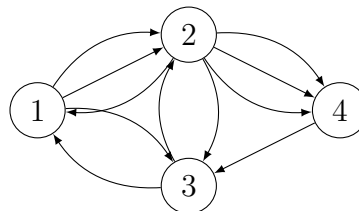


FIGURE 1.26 – Exemple d'une matrice associe

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_G^+(x_2) = 1 + 0 + 1 + 3 = 5$$

$$d_G^-(x_2) = 2 + 0 + 1 + 0 = 3$$

1.7 Opération dans les graphes

1.7.1 Homomorphisme de graphe

Deux graphe orienté (respectivement non orienté) $G = (X, U)$ et $G' = (X', U')$ sont homomorphisme s'il existe une application :

$$f : X \longrightarrow X'$$

$$i, j \in U \implies (f(i), f(j)) \in U'$$

$$\text{respectivement } i, j \in U \implies (f(i), f(j)) \in U'$$

On parlera alors d'homomorphisme de G dans G' .

1.7.2 Isomorphisme de graphe

Deux graphes $G = (X, U)$ et $G' = (X', U')$ sont isomorphe s'il existe une application bijective :

$$f : X \longrightarrow X'$$

$$i, j \in X : (i, j) \in U \iff (f(i), f(j)) \in U'$$

Les deux graphes de la Figure 1.27 sont isomorphismes

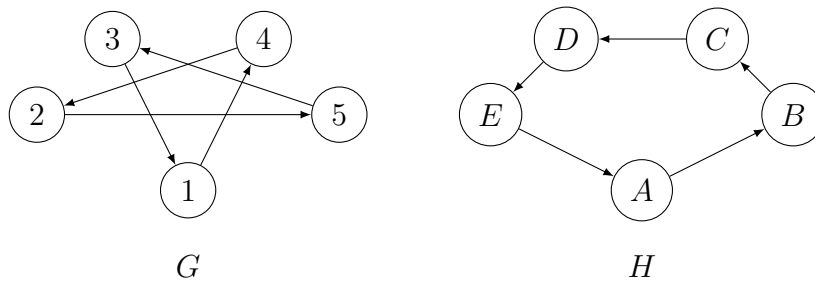


FIGURE 1.27 – Exemple sur l'isomorphisme de graphe

L'application $f : \begin{cases} 1 \longrightarrow A \\ 2 \longrightarrow C \\ 3 \longrightarrow B \\ 4 \longrightarrow E \\ 5 \longrightarrow D \end{cases}$ est une isomorphisme entre les deux graphes

Cycle et Cocycle

Introduction

À tout cycle et cocycle on peut lui associer un vecteur représentatif, comment on le représente ? et quel est la relation de dualité qui existe entre cycle et cocycle ? la première partie de ce travail a pour but d'associer ses vecteurs représentatifs, puis la deuxième partie sera consacrée aux relations de dualité qui existent entre cycle et cocycle.

2.1 Cycle

Un cycle est une chaîne d'arcs tous distincts dont les extrémités coïncident.

2.2 Vecteur associé à un cycle

$G = (X, U)$ un graphe. Soit C sur lequel on définit un sens de parcours. Un arc du cycle est orienté dans le sens de parcours (respectivement en sens inverse du sens de parcours) s'il est adjacent à l'arc qui le précède par son extrémité initiale (respectivement terminale) et à l'arc qui le suit par son extrémité terminale (respectivement initiale).

- C^+ désigne l'ensemble des arcs du cycle C orientés dans le sens de parcours
- C^- désigne l'ensemble des arcs du cycle C orientés dans le sens inverse de parcours

Définition 2.2.1

A un cycle C du graphe G , on associe le vecteur $C = (C_1, C_2, \dots, C_m) \in \mathbb{R}^m$ dit vecteur représentatif de C défini par :

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{si } u_j \in C^+ \\ -1 & \text{si } u_j \in C^- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 2.2.1

C désigne à la fois et le vecteur associé au cocycle.

Dans le grahe de la Figure 2.1

$$C = \{u_1, u_4, u_5, u_2\}$$

$$C^+ = \{u_1, u_4\}$$

$$C^- = \{u_5, u_2\}$$

Le vecteur vecteur représentatif du cycle C est $C = \{1, -1, 0, 1, -1\}$

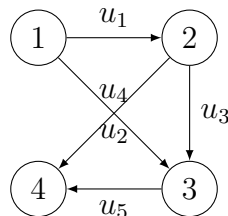


FIGURE 2.1 – Vecteur associé à un cycle

Remarque 2.2.2

Le vecteur représentatif d'un circuit à toutes ses composantes non nulles égales à 1.

Définition 2.2.2

1. Un cycle dit élémentaire est un cycle qui utilise une et une seul fois ses sommets.
2. Un cycle dit minimal s'il ne contient pas un autre cycle c'est à dire on ne peut pas déduire un autre cycle par suppression d'arcs.

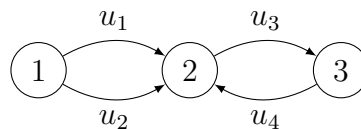


FIGURE 2.2 – Graphe H

$$C = \{u_1, u_4, u_3, u_2\} = \{1, 2, 3, 2, 1\}$$

C n'est pas élémentaire car il utilise le sommet 2 deux fois.

C n'est pas minimal car il contient deux cycles $\{u_1, u_2\} \subset C$ et $\{u_3, u_4\} \subset C$

2.2.1 Cycle indépendants base de cycles

Définition 2.2.3

On dit que les cycles C^1, C^2, \dots, C^p sont indépendants si leurs vecteurs associés vérifient :

$$\lambda_1.C^1 + \lambda_2.C^2 + \dots + \lambda_p.C^p = 0 \implies, \lambda_i = 0, \forall i = \overline{1, p}$$

2.2.2 Base de cycles

Théorème 2.2.1[9]

Une base de cycle est un ensemble minimal de cycle indépendants (C^1, C^2, \dots, C^k) tel que tout vecteur C représentatif d'un cycle puisse se mettre sous la forme combinaison linéaire des cycles de la base.

2.2.3 Nombre cyclomatique

Théorème 2.2.2[13]

On définit $V(G) = m - n + p$ la dimension de la base de cycle

ou : m : n d'arcs ; n : n de sommets ; p : n de composante connexe

Si G est connexe alors : $V(G) = m - n + 1$: nombre cyclomatique.

Exemple 1

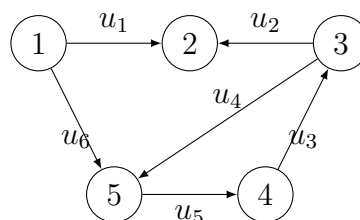


FIGURE 2.3 – Base de cycle

Base de cycle

Nombre cyclomatique $V(G) = m - n + 1 = 6 - 5 + 1 = 2$

notre base contient deux cycles linéairement indépendants

$$C_1 = (u_1, u_2, u_4, u_6)$$

$$\lambda_1 = (1, -1, 0, 1, 0, -1)$$

$$C_2 = (u_4, u_5, u_3)$$

$$\lambda_2 = (0, 0, 1, 1, 1, 0)$$

(C_1, C_2) sont linéairement indépendants car leur vecteur représentatif λ_1, λ_2 sont L.I.

(C_1, C_2) sont élémentaires et minimaux alors (C_1, C_2) forme une base de cycle de G .

Démonstration du théorème [9]

Considérons une succession de graphes partiels $G = G_0, G_1, \dots, G_m$. Le graphe $G_0 = (X, \phi)$ est constitué par les sommets de G isolés les un des autres, et chaque graphe G_i est obtenu à partir de précédent G_{i-1} par l'adjonction d'un arc u_i de G .

– Pour G_0 , on a $V(G_0) = 0 = m_0 - n_0 + p_0$ (il n'y a pas de cycles) où $m_0 = |u_0| = 0$, $n_0 = |X| = n$ et $p_0 = n$: le nombre de composantes connexes de G_0 .

– Pour G_i :

- Si l'arc posé u_i ferme un nouveau cycle U^i , alors $V(G_i) = V(G_{i-1}) + 1$ puisque m augmente d'une unité et p reste constant.
- Sinon $V(G_i) = V(G_{i-1})$ puisque m augmente et p diminue d'une unité.

On a donc $V(G) = m - n + p$ cycles $U^{i_1}, U^{i_2}, \dots, U^{i_k}$ forme par l'adjonction des arcs $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$ respectivement. Ces cycle ne peuvent pas être dépendants c'est-à-dire on n'a pas $\lambda_1 U^{i_1} + \lambda_2 U^{i_2} + \dots + \lambda_k U^{i_k} = 0$ avec $\lambda_j \neq 0$. Car le cycle λ_j contient l'arc U^{i_j} que les autres cycles ne contient pas.

Donc $V(G) = m - n + p$ cycles indépendants.

Théorème 2.2.3[9]

Tout cycle U est une somme de cycle élémentaire disjoints.

2.3 Cocycles

2.3.1 Vecteur associé à un cocycle

Soit $G = (X, U)$ un graphe.

Soit A une partie dans X , ($A \subset X, A \neq \phi$)

On définit :

$$W^+(A) = \{u \in U / I(u) \in A \text{ et } T(u) \notin A\}$$

$$W^-(A) = \{u \in U / I(u) \notin A \text{ et } T(u) \in A\}$$

On appelle cocycle relatif à la partie A le cocycle $W(A) = W^+(A) \cup W^-(A)$

Le vecteur représentatif d'un cocycle noté Y est défini comme suit :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } u_j \in W^+(A) \\ -1 & \text{si } u_j \in W^-(A) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 2.3.1

Si $W^+(A)$ ou $W^-(A)$ est vide le cocycle est appelé cocircuit (tout les arcs sont orientés dans le même sens).

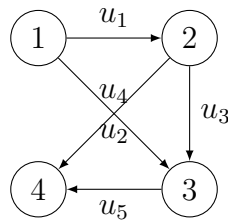


FIGURE 2.4 – Cocycle

La Figure 2.4 montre un cocycle

$$A = \{2\}; W^+(A) = \{u_3, u_4\}; W^-(A) = \{u_1\}$$

$$W(A) = W^+(A) \cup W^-(A) = \{u_3, u_4, u_1\}$$

Le vecteur représentatif : $y = (-1, 0, 1, 1, 0)$.

2.3.2 Cocycle élémentaire

Définition 2.3.1

Un cocycle est dit élémentaire s'il est formé d'arcs reliant deux sous graphes connexes G_{A_1}, G_{A_2} de G , avec $A_1 \neq \phi, A_2 \neq \phi, A_1 \cup A_2$ est une composante connexe en d'autre terme, si je supprime les arcs de ce cocycle j'aurais exactement deux cocycle ou encore, il est dit minimal c-a-d s'il ne contient pas un ensemble d'arcs qu'est un cocycle.

La Figure 2.5 montre un cocycle élémentaire

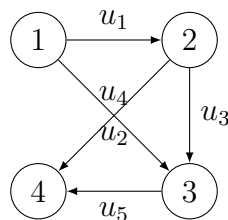


FIGURE 2.5 – Cocycle élémentaire

$$A = \{1, 4\}; W^+(A) = \{u_1, u_2\}; W^-(A) = \{u_4, u_5\}; W(A) = \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$$

$W(A)$ n'est pas élémentaire

$W(A)$ n'est pas minimal car il contient un autre cocycle $W(A_1) = \{u_4, u_5\}$ relatif à l'ensemble $A_1 = \{4\}$.

Définition 2.3.2

L'ensemble d'arcs u d'un graphe $G = (X, U)$ est dit "déconnectant" si $(X, u/u')$ contient plus de composantes connexes que G .

Théorème 2.3.1[9]

Un ensemble d'arcs U' du graphe $G = (X, U)$ est un cocycle élémentaire si et seulement si U' est déconnectant minimal.

Preuve Un cocycle est un ensemble déconnectant et un ensemble déconnectant contient un cocycle.

Un cocycle élémentaire est déconnectant. comme il est élémentaire donc il ne contient pas strictement de cocycle. donc c'est un cocycle déconnectant minimal. si U' est déconnectant minimal alors il ne contient pas d'ensemble déconnectant. Donc c'est un cocycle élémentaire.[9]

Théorème 2.3.2[9]

Tout cocycle est somme de cocycle élémentaire disjoints.

2.3.3 Base de cocycle

Une base de cocycle est un ensemble de cocycle (W_1, W_2, \dots, W_k) dont leurs vecteurs sont linéairement indépendants et tout autre cocycle W s'écrit sous la forme : $W = \alpha_1 W^1 + \alpha_2 W^2 + \dots + \alpha_k W^k, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, k}$.

2.3.4 Nombre cocyclomatique

On définit $\lambda(G) = n - p$ la dimension de la base de cocycle

Où m : n d'arcs ; n : n de sommets ; p : n de composante connexe

Si G est connexe alors :

$$\lambda(G) = n - 1 : \text{nombre cocyclomatique.}$$

Exemple 2

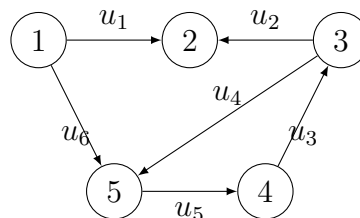


FIGURE 2.6 – Base de cocycle

Base de cocycle :

nombre cocyclomatique : $\lambda(G) = n - 1 = 4$, notre base contient 4 cocycles.

(W_1, W_2, W_3, W_4) sont L.I car leurs vecteurs représentatifs L.I et sont élémentaires (minimaux) donc $B = \{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ est une base de cocycle.

A_i	$W(A_i)$	Vecteur représentatif
$A_1 = \{1\}$	$W(A_1) = \{u_1, u_6\}$	$\lambda_1 = (1, 0, 0, 0, 0, -1)$
$A_2 = \{2, 3\}$	$W(A_2) = \{u_1, u_3, u_4\}$	$\lambda_2 = (-1, 0, -1, 1, 0, 0)$
$A_3 = \{3, 4, 5\}$	$W(A_3) = \{u_2, u_6\}$	$\lambda_3 = (0, 1, 0, 0, 0, -1)$
$A_4 = \{1, 2, 3, 5\}$	$W(A_4) = \{u_3, u_5\}$	$\lambda_4 = (0, 0, -1, 0, 1, 0)$

TABLE 2.1 – Base de cocycle

2.3.5 Relation de dualité entre cycles et cocycles

Théorème 2.3.3 ("Lemme des arcs colorés, dit deminty")[9]

Soit $G = (X, U)$ dont les arcs $U_1, U_2, U_3 \dots U_m$ sont colorés soit en noir, soit en rouge, soit en vert. supposons que l'arc U_1 est coloré en noir.

Alors une seule des deux propositions suivantes est vérifiée :

(P₁) Il passe par l'arc U_1 un cycle élémentaire d'arcs rouges et noirs avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens.

(P₂) Il passe par l'arc U_1 un cocycle élémentaire d'arcs verts et noirs avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens.

Coloration 2.3.1

Tout arc d'un graphe $G = (X, u)$ appartient soit à un circuit élémentaire soit à un cocircuit élémentaire (mais pas aux deux).

Coloration 2.3.2

Pour un $G = (X, U)$ connexe contenant au moins un arc, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est fortement connexe
2. Tout arc appartient à un circuit
3. G ne comporte pas de cocircuit

Preuve – (1) \Rightarrow (2)

Soit $u = (x, y) \in U$.

G étant fortement connexe, alors il existe un chemin, donc un chemin élémentaire C de x à y .

Alors u appartient à un circuit (ici c'est $C' = u \cup C$).

– (2) \Rightarrow (3)

Puisque tout arc appartient soit à un circuit élémentaire ou à un cocircuit. Donc G ne comporte pas de cocircuit.

– (3) \Rightarrow (1)

G est connexe et ne comporte pas de cocircuit.

On suppose G non fortement connexe.

Soient Q_1 et Q_2 deux composantes fortement connexes de G reliées par un arc $u = (a, b)$.
 l'arc $u = (a, b)$ n'appartient pas à un circuit sinon a et b seraient dans la même composante connexe. Donc u appartient à un cocircuit, donc contradiction.[9]

Théorème 2.3.4[9]

Soit $G = (X, U)$ un graphe, $U = U^+ \cup U^-$ un cycle de G et $W(A) = W^+(A) \cup W^-(A)$ un cocycle de G dont les vecteurs représentatifs sont U et W respectivement, alors U et W sont orthogonaux, c'est-à-dire que le produit scalaire $U.W = \langle U, W \rangle = \sum_{j=1}^m U_j W_j = 0$.

Arbres et Arborescences

Introduction

Les arbres et les Arborescences sont des structures fondamentales utilisée dans de très nombreux domaines : informatique, théorie des questionnaire, optimisation combinatoires, etc. . .

Leur importance et leur intérêt résultent de propriétés remarquables qui sont étudiées dans ce chapitre.

3.1 Arbre

3.1.1 Propriété

Soit $G = (X, U)$ un graphe $|X| = n$; $|U| = m$. Alors :

1. G connexe $\Rightarrow m \geq n - 1$
2. G sans cycle $\Rightarrow m \leq n - 1$

Définition 3.1.1

- Un Arbre est un graphe connexe sans cycle.
- Un sommet pendant est un sommet ayant son degré est égale à 1 (x sommet pendant $\Rightarrow d_G(x) = 1$).
- Une feuille est un sommet pendant dans l'arbre.
- Une forêt est un graphe non connexes ou chaque composante connexe est un arbre, en d'entre terme une forêt est un graphe non connexe sans cycle

La Figure 3.1 montre un arbre

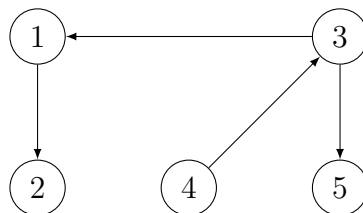


FIGURE 3.1 – Exemple sur un arbre

3.1.2 Propriétés des arbres

Théorème 3.1.1[12]

Soit $G = (X, U)$ un graphe avec $|x| = n \geq 2$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. G connexe et sans cycle.
2. G connexe et minimale pour cette propriété (c'est-à-dire si on supprime un arc de G , il n'est plus connexe)
3. G connexe possède $(n - 1)$ arcs.
4. G est sans cycle maximal pour cette propriété (c'est-à-dire si on ajoute un arc à G , il possède un cycle)
5. G est sans cycle et possède $(n - 1)$ arcs.
6. Il existe dans G une chaîne unique joignant tout couple de sommets.

Propriété 3.1.1

$G = (X, T)$ est un arbre si et seulement si il y a une chaîne unique entre deux sommets[12] quelconques.

Démonstration Soit $G = (X, T)$ un arbre.

S'il existait deux chaînes disjointes L_1 et L_2 , leur différence symétrique $L_1 \triangle L_2$ contiendrait un cycle d'où une contradiction.

Réciproquement, un graphe dans lequel il existe une chaîne unique entre deux sommets quelconques est nécessairement connexe et sans cycle (car s'il contenait un cycle, deux sommets quelconques du cycle seraient reliés par deux chaînes distinctes, d'où une contradiction).

Propriété 3.1.2[12]

Si G a N sommets et P composantes connexes, une maximale de G comporte exactement $N - P$ arcs.

Propriété 3.1.3[12]

Soit $\tau = (X, T)$ une forêt maximale de $G = (X, U)$. Alors τ et G ont le même nombre de connexité.

Démonstration Tout arc $U \in \vartheta - T$ a ses deux extrémités dans la même composante connexe. sinon en rajoutant l'arc U à τ on obtiendrait une forêt de cardinalité supérieure d'où une contradiction. Donc on ne change pas le nombre de composantes connexes en ajoutant à τ dans les arcs $U - T$.

Propriété 3.1.4[12]

Un graphe G admet un graphe partiel qui est un arbre si et seulement s'il est connexe.

Démonstration D'après la propriété 3.1.3 une forêt maximale de G est connexe, donc c'est un arbre de G .

Propriété 3.1.5[12]

Soit $\tau = (X, T)$ une forêt maximale de $G(X, T)$. Alors, Portant arc $u \in \bar{T} = \vartheta - T$
Il passe un cycle et un seul u^u dont tous les arcs (autre que u) appartient à τ

Démonstration L'arc U ne peut relier deux composantes connexes de τ sinon τ ne serait pas maximale dans G (en rajoutant l'arc U on obtiendrait une forêt de cardinalité supérieure). Donc, si $U = (i, j)$, les extrémités i et j de U appartiennent à la même composante connexe.

D'après la propriété 3.1.1, il existe dans τ une chaîne L unique entre i et j , et $U^u = L + \{U\}$ est le cycle (unique) cherché.

Propriété 3.1.6[12]

Soit $\rho = (X, T)$ une forêt maximale de $G = (X, U)$. Alors, partout arc $U \in T$ il passe un cocycle et un seul Θ^u dont tous les arcs (autre que U) appartiennent à $\bar{T} = U - T$.

Démonstration Les extrémités de U appartiennent à la même composante connexe de G , soit X_1 pour fixer les idées. Le sous-graphe de τ engendré par X_1 est un arbre $\tau_1 = (X_1, U_1)$.

En retirant à τ_1 l'arc U , on crée deux composantes connexes $A \subset X_1 - A$ et $\bar{A} = X_1 - A$. Le cocycle $W(A) = \Theta^u$ de G contient donc l'arc U et tous ses autre arc sont dans $\bar{T} = U - T$.

Théorème 3.1.2[12]

Soit $G = (X, U)$ Un graphe à N sommets, M arcs et P composantes connexes. Soit $\tau = (X, T)$ une forêt maximale de G et pour $U \in \bar{T}$, notant U^u le cycle (unique) contenu dans $T + \{U\}$. les cycles $\{U^u\}$ pour U parcourant \bar{T} , forment une base de cycles du graphe G , dont la dimension est le nombre cyclotomique de G .

$$V(G) = M - N + P$$

Base de cycle associée à l'arbre

Théorème 3.1.3[13]

Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe H un arbre maximale de G , si u_i est un arc de G ne figurent pas dans H détermine un cycle C_i , les différents C_i constituent une base de cycle indépendants appelés cycles associée à l'arbre H .

Remarque 3.1.1

Ce théorème donne un algorithme simple pour construire une base de cycle d'un graphe connexe.

Si G n'est pas connexe, on traitera chacune des composantes connexes.

La Figure 3.2 montre une base de cycle associé à l'arbre

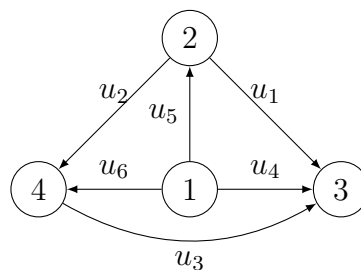


FIGURE 3.2 – Une base de cycle associé à l'arbre

$$\gamma(G) = m - n + p = 6 - 4 + 1 = 3$$

u_3, u_5, u_6 arc $\notin H$

La Figure 3.3 montre un arbre

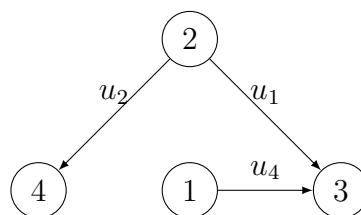


FIGURE 3.3 – Un arbre

(C_1, C_2, C_3) est la base de cycle associée à H

Coarbre

Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe et (V, W) une partition de U en deux classes : $V \cap W = \emptyset, V \cup W = U$ (X, W) est coarbre si et seulement si (X, V) est un arbre de G .

Arcs	Les cycle créés
u_3	$C_1 = (u_3, u_1, u_2)$
u_5	$C_2 = (u_5, u_1, u_4)$
u_6	$C_3 = (u_6, u_1, u_4, u_2)$

TABLE 3.1 – Base de cycle associé à l’arbre

Base de cocycle associé à l’arbre

Théorème 3.1.4[13]

Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe $F = (X, W)$ un coarbre, si U_i est un arc ne figurent pas dans F , son adjonction à F détermine un seul cocycle W et les différents cocycle W constituent une base de cocycle indépendants.

Remarque 3.1.2

Ce théorème donne une méthode simple pour déterminé une base de cocycle.

La Figure 3.4 montre une base de cocycle associé à l’arbre

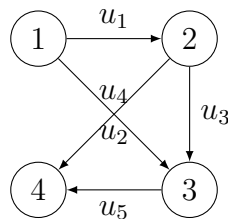


FIGURE 3.4 – Une base de cocycle associé à l’arbre

Base de cocycle : $\lambda(G) = n - 1 = 3$, 3 cocycle.

La Figure 3.5 montre un arbre et un coarbre

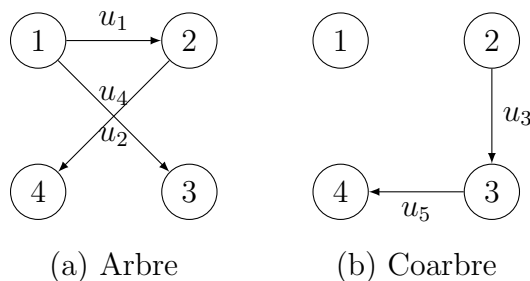


FIGURE 3.5 – Un arbre et un coarbre

W_1, W_2 et W_3 forme une base de cocycle

Arcs	Les cocycles créés
u_1	$W_1 = w(\{1, 3\}) = (u_1, u_3, u_5)$
u_2	$W_2 = w(\{3\}) = (u_2, u_3, u_5)$
u_4	$W_3 = w(\{4\}) = (u_4, u_5)$

TABLE 3.2 – Base de cocycle associé à l'arbre

3.1.3 Arbre de poids minimum

Graphe valué

Définition 3.1.2

Un graphe valué est un graphe noté $G(X, U, C)$ tel que : $C : U \longrightarrow \mathbb{R}^*$ c'est-à-dire : toute arête (arc) U de ϑ est associé un $C(U^+)$ appelé poids, valeurs ou cout de U .

Définition 3.1.3

Si $A = (X, V)$ un arbre de $G(X, U)$ on appelle poids de l'arbre A le nombre $C(A) = \sum_{u \in V} C(u)$

La construction d'un arbre de poids minimum peut se faire en utilisant l'algorithme suivant :

- L'algorithme de Kruskal
- L'algorithme de Prin

Théorème 3.1.5[9]

Le nombre de sommets d'un arbre est égal au nombre d'arêtes augmenté de 1

3.2 Arborescence

Définition 3.2.1

Un sommet a d'un graphe $G = (X, U)$ est une racine (respectivement anti racine) s'il existe un chemin joignant a et x (respectivement x et a) $\forall x \in \chi$.

Définition 3.2.2

Un graphe et dit quasi-fortement connexe si pour tout couple de sommets (x, y) il existe un sommet z relie à x par un chemin et relie à y par un autre chemin.

Remarque 3.2.1

Un graphe fortement connexe est quasi-fortement connexe mais la réciproque n'est pas vraie.

Remarque 3.2.2

Un graphe quasi-fortement connexe est connexe.

Définition 3.2.3

1. Un graphe $G = (X, U)$ d'ordre $n \geq 2$ est une arborescence si G est un arbre muni d'une racine
2. Un graphe $G' = (X, U)$ d'ordre $n \geq 2$ est une anti-arborescence si G est un Arbre muni d'une anti-racine

Remarque 3.2.3

Une arborescence est un arbre mais la réciproque est fausse.

Le concept d'arborescence est essentiellement orienté.

Théorème 3.2.1[13]

Un graphe $G = (X, U)$ admet une racine si et seulement si G est quasi fortement connexe.

Coloration 3.2.1

Un graphe $G = (X, U)$ admet un graphe partiel qui soit une arborescence si et seulement si G est quasi fortement connexe

3.2.1 Propriété de l'arborescence

Théorème 3.2.2[13]

Soit $G = (X, U)$ un graphe d'ordre $n \geq 2$ les propriétés suivantes sont équivalentes. Pour caractériser l'arborescence :

1. G est quasi fortement connexe et sans cycle
2. G est quasi fortement connexe admet $(n - 1)$ arcs
3. G est un arbre admettant une racine a
4. Il existe un sommet a qu'est relié à tout autre sommet par un chemin unique issu de a
5. G est quasi fortement connexe et cette propriété disparaît par suppression d'un arc quelconque
6. G est connexe et il existe un sommet a tel que $d_G^-(a) = 0$; $d_G^-(x) = 1$; $\forall x \in X$; $x \neq a$
7. G sans cycle et l'on a : $d_G^-(a) = 0$; $d_G^-(x) = 1$; $\forall x \in X$; $x \neq a$

Flot et Tension

Introduction

Modéliser un réseau de transport (routier - énergie - information - etc...) par un graphe pondéré connexe.

Optimiser utilisation d'un réseau de transport compte tenu des contraintes de capacité.

4.1 Flot

Définition 4.1.1

Soit $G = (X, U)$ Un graphe connexe dont les arcs sont numérotés $U = 1, 2, \dots, M$ un flot dans G est un vecteur à M composantes.

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M)^T \in \mathbb{R}^M$$

Tel que en tout sommet $i \in X$ de G , la première loi de Kirchhoff soit vérifiée, c'est-à-dire :

$$\sum_{u \in W^+(i)} \varphi_u = \sum_{u \in W^-(i)} \varphi_u \quad (4.1)$$

Pour $u \in U$, la composante u du vecteur φ est appelée quantité de flot ou flux sur l'arc u .

La relation (4.1) exprime simplement que la somme des flux entrant en un sommet, est égale à la somme des flux sortant (loi de conservation aux nœuds).

Exemple 4.1.1

Le courant électrique dans un réseau est un exemple classique de flot sur un graphe.

Soit G le graphe à 4 sommets et 6 arcs de la figure. Le Vecteur $\varphi = [5, 3, 2, -2, 1, -4]$ est un flot sur G . (On pourra s'assurer que la loi de conservation aux nœuds est bien vérifiée).

L'orientation choisie pour les arcs est arbitraire, mais la négativité de la composante φ_4 par exemple, indique que le courant électrique va du sommet 2 au sommet 3 sur l'arc 4.

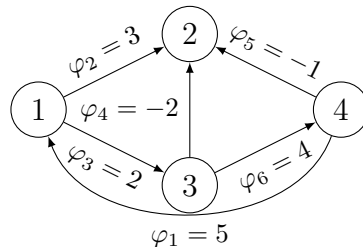


FIGURE 4.1 – Exemple d'un flot

4.1.1 Définition Algébrique des flots

Soit $M = (a_{iu})$; $i = 1, \dots, N$; $u = 1, \dots, m$ la matrice d'incidence sommet arcs du graphe G .

À chaque sommet $i \in X$ correspond la ligne i de M , et on a :

$$W^+(i) = \{u \in U / a_{iu} = +1\}$$

$$W^-(i) = \{u \in U / a_{iu} = -1\}$$

Les lois de conservation aux nœuds (4.1) peuvent donc se mettre sous la forme matricielle équivalente :

$$M \cdot \varphi = 0_n \tag{4.2}$$

Si on considère l'application linéaire δ associée à la matrice $M (\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N)$, l'ensemble φ des flots sur G constitue, D'après (4.2), le noyau de δ .

C'est donc un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^m , et sa dimension vérifie :

$$\dim(\varphi) + \text{rang}(M) = A$$

Si G possède p composantes connexes, On a : $\text{rang}(M) = N - p$ et par suite, la dimension de φ est :

$$\dim(\varphi) = A - N + P$$

Qui n'est autre que le nombre cyclomatique de G noté $V(G)$ on peut déduire de la définition précédente, le résultat :

Théorème 4.1.1[12]

Un flot sur un arbre est nécessairement identiquement nul.

Démonstration Le flot φ vérifié : $M.\varphi = 0$ ou M est la matrice d'incidence d'un arbre M a N lignes et $N - 1$ colonnes. En supprimant une ligne quelconque (la N -ème par exemple) on obtient une matrice carré régulière M' de déterminant ± 1 alors :[12]

$$M'.\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = (0, 0, \dots, 0)$$

4.1.2 Opération sur les flots

Soient φ, φ_1 et φ_2 des flots sur G et $K \in \mathbb{R}$

Lemme 4.1.1

1. $K.\varphi$ est un flot sur G .
2. $\varphi_1 + \varphi_2$ est un flot sur G .
3. $\varphi_1 - \varphi_2$ est un flot sur G .
4. Le seul flot possible sur un arbre est le flot $\varphi = 0$.
5. Le vecteur qui représente un cycle est un flot. (il est très facile de vérifier la conservation des flots)

Flot élémentaire : Soit C un circuit élémentaire sur G (c'est-à-dire, il passe au plus une fois par un sommet).

On appelle \underline{v} le vecteur constitué par les éléments v_i tels que :

- $v_i = 1$ si $u_i \in C, i = 1, \dots, m$.
- $v_i = 0$ sinon

\underline{v} est un flot cyclique élémentaire sur G .

Théorème 4.1.2[12]

Tout flot φ se décompose en une somme de flots cycliques élémentaires linéairement indépendants :

$$\varphi = \lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \dots + \lambda_K.v_K, \lambda_i \geq 0$$

Définition 4.1.1

On effectuée une "décomposition conforme" d'un flot φ sur un graphe $G = (X, U)$ si on a trouvé q cycles C_1, C_2, \dots, C_q dont les vecteurs représentatifs sont $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^q$ tels que :

- $\varphi = \delta_1\gamma^1 + \delta_2\gamma^2 + \dots + \delta_q\gamma^q$
- $\delta_j, j = 1, 2, \dots, q$
- $\varphi(u) > 0$ (resp < 0) et $u \in C_j \Rightarrow u \in C_j^+$ (resp $u \in C_j^-$)

Théorème 4.1.3[9]

Tout flot φ admet une décomposition conforme.

Définition 4.1.2

On appelle φ flot sur le graphe $G = (X, U)$ de matrice d'incidence M , un ensemble de valeurs de l'anneau A indicées par U qui vérifient $M.\varphi_u = 0$.

Autrement dit φ_u est un élément du noyau de l'application M de A^u dans A^X .

La composante φ_u du flot φ_u est le flux sur l'arc u .

Définition 4.1.3

L'ensemble $\Phi = \{\varphi_u \in A^u, M.\varphi_u = 0\}$, est appelé module des flots. On rappelle qu'un module est à un anneau, ce qu'un espace vectoriel est à un corps. Les propriétés que nous montrerons seront essentiellement des propriétés d'espaces vectoriels. Nous insisterons sur celles qui nécessitent la notion de module.

Proposition 4.1.1

- Soient $\varphi_u \in \Phi, \lambda \in A$, alors $\lambda.\varphi_u$ est un flot.
- Soient $\varphi_u^1, \varphi_u^2 \in \Phi$, alors $\varphi_u^1 + \varphi_u^2$ est un flot.

4.2 Système de générateurs des flots

Nous continuons l'étude des flots sur un graphe par la description du flot canonique φ^C correspondant au cycle élémentaire C .

Soit $C = (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ un cycle élémentaire de $G = (X, U)$ les arêtes de ce cycle sont orientées de façon quelconque.

Choisissons une orientation arbitraire de ce cycle, appelons C^+ (*resp* C^-) l'ensemble des arêtes de C orientées dans le sens de cette orientation (respectivement en sens contraire).

Définition 4.2.1

Le flot canonique φ_u^C est défini de la façon suivante :

1. $\forall U \notin C, \varphi_u^C = 0$;
2. $\forall U \in C^+, \varphi_u^C = 1$;
3. $\forall U \in C^-, \varphi_u^C = -1$.

Proposition 4.2.1

Le vecteur φ_u^C ainsi défini est un flot.

Remarque 4.2.1

On sait, par définition, que l'arbre H est connexe et sans cycle. En particulier les deux sommets x, y de l'arc $U = (x, y)$ sont connexes, la définition de la connexité nous assure de l'existence de ce cycle commençant par l'arc $U = (x, y)$.

Proposition 4.2.2

Les flots ainsi construits forment un système de générateurs du module des flots. En d'autres termes tout flot est combinaison linéaire à coefficients dans A des flots construits précédemment. Le nombre de flots linéairement indépendants sur le graphe $G = (X, U)$ est égal à $|u| - |X| + 1$.

4.3 Système de générateurs des tensions

Définition 4.3.1

Une tension (ou différence de potentiel) est un vecteur $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^n$, tel que pour tout cycle élémentaire C on ait :

$$\sum_{i \in C^+(x)} \theta_i = \sum_{i \in C^-(x)} \theta_i$$

4.3.1 Opération sur les tensions

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $\theta, \theta_1, \theta_2 \in H$ désigne l'ensemble des tensions alors :

1. $\lambda\theta$ est une tensions.
2. $\theta_1 + \theta_2$ est aussi une tensions.

4.3.2 Propriétés des tensions

Théorème 4.3.1[9]

Un vecteur $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ est une tension si et seulement si il existe une fonction t définie sur l'ensemble X et à valeur dans \mathbb{R} telle que pour tout arc i on ait :

$$(\theta_i = t(\text{extrémité terminale de l'arc } i) - t(\text{extrémité initiale de l'arc } i)).$$

La fonction t est par définition un potentiel attachés à la tension θ .

Corollaire 4.3.1

Le vecteur représentatif d'un cycle est un tension.

Preuve Considérons le cocycle $W(a)$ ou $a \subset X$ est

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On aura : $t(\text{extrémité terminal de l'arc } i) - t(\text{extrémité initiale de l'arc } i)$

$$W(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in W^+ \\ -1 & \text{si } i \notin W^- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 4.3.1[9]

Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe, $H(X, V)$ un arbre maximal, $1, 2, \dots, l$ les arcs de cet arbre, W^1, W^2, \dots, W^l les cocycle associées à H .

Une tension $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ est définie d'une façon unique par ces valeurs sur les arcs de l'arbre au moyen de la formule : $\theta = \theta_1 W^1 + \theta_2 W^2 + \dots + \theta_L W^L$.

Preuve Posons $\theta' = \theta - \theta_1 W^1 - \theta_2 W^2 - \dots - \theta_L W^L$ est une tension qui a toutes ses valeurs nulles surtout les arcs de l'arbre (x, v) .

Si on définit par une fonction potentiel $t'(x_1) = t'(x_2) = \dots = t'(x_m) = 0$. Donc

$$\theta' = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^L \theta_i W^i. [9]$$

Théorème 4.3.2[9]

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ soit une tension ≥ 0 est que l'on ait :

$$\theta = \lambda_1 W^1 + \lambda_2 W^2 + \dots + \lambda_K W^K$$

où : $\lambda_1, \dots, \lambda_K \geq 0$ et W^1, W^2, \dots, W^K sont des cocircuits élémentaire.

Définition 4.3.2

On appelle tension θ_u sur le graphe $G = (X, U)$ un vecteur de A^U , tel que pour tout flot φ_u sur G , le produit :

$$\theta_U \varphi_U = \sum_{u \in U} \theta_U \varphi_U = 0$$

Proposition 4.3.1

Le fait que tout flot se décompose sur une base canonique, implique qu'il suffit pour que θ_U soit une tension que le produit décrit dans la définition précédente soit vérifié pour les seuls flots correspondant aux cycles d'une base canonique.

Un vecteur qui est "orthogonal" à tous les cycles sera donc orthogonal à ceux d'une telle base. Une tension satisfait donc la deuxième loi de Kirchhoff, la loi des mailles.

On rappelle que l'ensemble des flots est noté Φ :

$$\Phi = \{\varphi_U \in A^U, M.\varphi_U = 0\}$$

De la même façon on note Θ l'ensemble des tensions :

$$\Theta = \{\theta_U \in A^U, \forall \varphi_U, \theta_U \varphi_U = 0\}$$

Proposition 4.3.2

Θ est un sous module de A^U , c'est-à-dire :

- Pour tous $\theta_U \in \Theta, \lambda \in A, \lambda \theta_U$ appartient à Θ .
- Pour tous $\theta_{U^1}, \theta_{U^2} \in \Theta, \theta_{U^1} + \theta_{U^2}$ appartient à Θ .

Θ est par définition, un sous module orthogonal à Φ .

Définition 4.3.3 (Potentiel, différence de potentiel)

Un vecteur $V_X \in A^X$ est appelé potentiel.

Soit M^t la matrice transposée de M le vecteur $\theta'_U = M^t V_X$ est appelé différence de potentiel :

$$\forall U = (x, y) \in U, \theta'_U = V_y - V_x$$

Proposition 4.3.3

Toute différence de potentiel est une tension.

Proposition 4.3.4

Toute tension est différence de potentiel.

Remarque 4.3.1

Nous n'avons fait aucune restriction sur θ_A , c'est-à-dire que tout élément de A^H peut être une tension sur l'arbre H .

Si l'on écrit le système linéaire dont les potentiels sont solution on a :

$$M^t.V_x = \theta_H$$

La matrice M^t transposée de la matrice M est de rang $n - 1$, c'est pour quoi l'une des valeurs de V_x été choisie arbitrairement. Le potentiel est défini à une constante près.

Proposition 4.3.5

Toute tension sur un arbre H de $G = (X, U)$ se prolonge de façon unique sur G .

Définition 4.3.4 (Tension canonique)

Étant donné un cocycle $W(Y)$ on construit sur $G = (X, U)$ une tension dite canonique θ_{UW} en donnant aux sommets de X/Y un potentiel égal à 1 et à ceux de Y un potentiel nul. Les arcs de ce cocycle ont donc une valeur de tension égal à 1 ou -1 selon leur orientation, les arcs qui n'appartiennent pas au cocycle ont une tension nulle.

Définition 4.3.5 (Base canonique du module des tensions)

Soit $G = (X, U)$ un graphe et H un arbre de G à chaque arc U de H correspond un cocycle élémentaire, noté W_U , obtenu en choisissant pour ensemble Y l'une des deux composantes connexes obtenue à partir de l'arbre H en lui étant l'arc U . Comme l'on veut que l'arc U appartienne à W_u^+ , on choisit pour Y celle contenant l'origine de U .

L'ensemble de $n - 1$ tensions canoniques θ_{UW}^u correspondantes vont constituer une Base, canonique, du module des tensions.

Proposition 4.3.6

Les tensions d'une Base canonique forment un système de générateurs du module des tensions.

4.4 Flot maximum, tension maximum

4.4.1 Le problème du flot maximum dans un réseau de transport

Soit $G = (X; U)$ un graphe orienté tel que pour tout $u \in U$; $\Gamma_u = [a_u; b_u]$, avec $a_u; b_u \in \mathbb{Z}$ et $b_u \geq a_u$.

Définition 4.4.1 (Position du problème)

On appelle Réseau de transport un graphe $G = [X, U]$ où chaque arc $u \in U$ est muni d'un nombre $C_u \geq 0$ appelé la capacité de l'arc u . Lorsqu'on fait circuler un flot sur G , ce nombre indique la limite supérieure du flux admissible sur l'arc u .

Dans la suite, et sauf mention contraire, les capacités C_u seront supposées être des nombres entiers ≥ 0 .

Étant donnés deux sommets particuliers $S \in X$ (source) et $t \in X$ (puits) ($S \neq t$) de G , on considère le graphe $G^0 = [X, U^0]$ déduit de G en rajoutant un arc (t, S) dont les extrémités initiale et terminale sont respectivement t et S . L'arc (t, S) est appelé l'arc de retour du flot, et on convient de lui attribuer le numéro 0. Les arcs de G^0 sont donc numérotés $0, 1, \dots, M$.

On dit que le vecteur $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M]^T$ est un flot de S à t dans G , si et seulement si les lois de conservation aux nœuds sont vérifiées en tout les sommets de G sauf aux sommets S et t ou on a :

$$\sum_{u \in W^+(s)} \varphi_u = \sum_{u \in W^-(t)} \varphi_u = \varphi_0$$

La quantité φ_0 est appelée la valeur du flot.

On remarque que si $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M]^T$ est un flot de S à t dans G et de valeur φ_0 , alors $\varphi' = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_M]^T$ est simplement un flot dans G^0 .

Le problème du flot maximum de S à t dans G muni des capacités $C_u (u \in U)$, revient alors à déterminer un flot $\varphi' = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_M]$ dans G^0 vérifiant les contraintes de capacité : $0 \leq \varphi_u \leq C_u (\forall u = 1, \dots, M)$ et tel que la composante φ_0 sur l'arc de retour (valeur du flot) soit maximale.

4.4.2 Définition des coupes capacité d'une coupe

On appelle coupe séparant S et t un ensemble d'arcs de la forme : $W^+(A)$ ou $A \subset X$ est un sous-ensemble de sommets tel que $S \in A$ et $t \notin A$.

On définit la capacité de la coupe $W^+(A)$ comme la somme des capacités des arcs qui la constituent :

$$\sum_{u \in W^+(A)} C_u$$

4.4.3 Le théorème du flot maximum et de la coupe minimale

Théorème 4.4.1[12]

La valeur maximal d'un flot de s à t dans $G = [X, U]$ muni des capacités $C_u (u \in U)$ est égal à la capacité d'une coupe de capacité minimale séparant S et t .

Définition 4.4.2 (flot compatible)

Un flot φ_u sur le graphe G est dit compatible si :

$$\forall u \in U, a_u \leq \varphi_u \leq b_u$$

Les valeurs a_u et b_u sont les capacités minimum et maximum de l'arc u .

Définition 4.4.3 (Graphe d'écart)

Soit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M)^T$ un flot entre s et t dans $G = [X, U]$ compatible avec les contraintes de capacité $0 \leq \varphi_u \leq C_u (\forall u = 1, \dots, M)$.

Le graphe d'écart associé à φ est le graphe $\overline{G}(\varphi) = [X, \overline{U}(\varphi)]$ ayant le même ensemble de sommets que G et dont l'ensemble des arcs, $\overline{U}(\varphi)$ est constitué de la façon suivante : à chaque arc $u = (i, j) \in U$ de G on associe au plus deux arcs de $\overline{G}(\varphi)$

$$u^+ = (i, j) \text{ si } \varphi_u < C_u; u^-(j, i) \text{ si } \varphi_u > 0$$

(Autrement dit, si l'arc u est rouge, il lui correspond u^+ et u^- dans $\overline{G}(\varphi)$, si U est noir, il lui correspond U^+ seulement, si U est vert, il lui correspond U^- seulement)

On associe également à chaque arc de $\overline{G}(\varphi)$ une capacité (capacité résiduelle) égale à $C_u - \varphi_u$ dans le premier cas à φ_u dans le second cas.

Remarque 4.4.1

On remarque qu'à tout arc de $\overline{G}(\varphi)$ correspond, par construction un arc, et un seul, de G .

L'intérêt du graphe d'écart apparait dans le théorème suivant :

Théorème 4.4.2[12]

Soit φ un flot de S à t dans G , compatible avec les capacités $C_u (u \in U)$ et soit $\overline{G}(\varphi)$ le graphe d'écart associé à φ .

Une condition nécessaire et suffisante pour que le flot φ soit maximal est qu'il n'existe pas de chemin de S à t .

4.4.4 Le problème du flot compatible

Théorème 4.4.3 (Théorème de compatibilité)[12]

Soit un graphe $G = [X, U]$ connexe. À chaque arc $u \in U$ de G on affecte deux nombres b_u et C_u tels que : $b_u \leq C_u$.

Le problème est de trouver un flot φ dans G compatible avec les contraintes :

$$b_u \leq \varphi_u \leq C_u (\forall u \in U)$$

Une condition nécessaire d'existence

Si φ est un flot dans G , on peut écrire, pour tout sous ensemble de sommets $A \subset X$:

$$\sum_{u \in W^+(A)} \varphi_u - \sum_{u \in W^-(A)} \varphi_u = 0$$

Cette équation exprime simplement que la somme des flux entrant dans A est égale à la somme des flux sortant de A une conséquence directe de la loi de conservation aux nœuds.

Si φ est un flot compatible, on doit alors avoir nécessairement :

$$\sum_{u \in W^+(A)} C_u - \sum_{u \in W^-(A)} b_u \geq 0 (\forall A \subset X) \tag{4.3}$$

Le premier membre de (4.3) est appelé la capacité de la coupe associée à A .

4.4.5 Théorème du flot compatible (Hoffman 1960)

Étant donné un graphe $G = [X, U]$ et pour chaque arc $u \in U$ deux nombres b_u et C_u tels que : $b_u \leq C_u$ une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un flot φ vérifiant :

$$b_u \leq \varphi_u \leq C_u (\forall u \in U)$$

est que :

$$\sum_{u \in W^+(A)} C_u - \sum_{u \in W^-(A)} b_u \geq 0 \quad (4.4)$$

Pour tout cocycle $W(A) = W^+(A) \cup W^-(A)$.

Remarque 4.4.2

Le Théorème de Hoffman peut être considéré comme une généralisation du Théorème du flot maximum et de la coupe minimale. En effet, ce dernier apparaît comme un cas particulier dans lequel : $b_u = 0 (\forall u \in U)$ sauf pour l'arc de retour $0 = (t, s)$ pour lequel on pose $b_0 = c_0 = \varphi_0$ (valeur du flot). La condition (4.4) devient alors :

$$\sum_{u \in W^+(A)} C_u - \varphi_0 \geq 0 (\forall A \subset X, s \in A, t \notin A)$$

et par conséquent il existe un flot de valeur φ_0 entre s et t si et seulement si :

$$\min_{\substack{A \subset X \\ s \in A, t \notin A}} \left\{ \sum_{u \in W^+(A)} C_u \right\} \geq \varphi_0$$

Un flot maximum est donc tel que :

$$\varphi_0 = \min_{\substack{A \subset X \\ s \in A, t \notin A}} \left\{ \sum_{u \in W^+(A)} C_u \right\}$$

Définition 4.4.4 (φ -retournement d'un arc)

Soit un flot sur le graphe $G = (X, U)$ φ -retourner l'arc $u = (i, j)$, consiste à considérer le graphe $G' = (X, U')$ avec $U' = (U \setminus \{u\}) \cup \{u' = (j, i)\}$, et le vecteur $\varphi'_{U'}$ tel que $\varphi'_{U' \setminus u'} = \varphi_{U \setminus u}$, $\varphi'_u = -\varphi_u$ et $\Gamma_{u'} = [-b_u, -a_u]$.

Proposition 4.4.1

Lorsque φ_u est un flot compatible de G , $\varphi'_{U'}$ est un flot compatible de G' , et réciproquement.

4.5 Algorithme de Ford-Fulkerson

L'algorithme de Ford-Fulkerson construit un flot et détermine une coupe qui vérifient le critère d'optimalité.

4.5.1 Description

La coupe s'obtient en réalisant une partition (dynamique) des sommets en sommets marqués et non marqués.

Obtention d'un flot complet

Le flot est construit par améliorations successives jusqu'à l'obtention d'un flot complet

Définition 4.5.1

Un flot est dit complet si tout chemin allant de a à b comporte au moins un arc saturé
Tant qu'il existe un chemin de a à b n'ayant aucun arc saturé, on peut améliorer le flot sur ce chemin.

On le détermine de façon systématique en balayant les arcs depuis chaque nœud, dans un ordre convenu (arbitraire).

Marquage des sommets

Le marquage des sommets tente de construire une chaîne allant de a à b . Sur cette chaîne, certains arcs seront parcourus dans le bon sens (arc progressifs) et d'autres en sens contraire (régressifs), choisis d'après la règle :

- Un arc progressif v doit vérifier : $\varphi(v) < C(v)$
- Un arc régressif w doit vérifier : $\varphi(w) > 0$
- Si on arrive à marquer b , la chaîne ainsi construite est dite améliorante, car on peut augmenter le flot :
 - En ajoutant une unité sur tout arc progressif v ,
 - En retranchant une unité sur tout arc régressif w .

La loi de Kirchhoff reste vérifiée sur les sommets de la chaîne, sauf en a et en b , où on a ajouté une unité.

- S'il est impossible de marquer b , cette partition des sommets (en marqués et non marqués) détermine une coupe d'arcs (d, f) ayant, par construction, la propriété suivante :
 - Si c'est d qui est marqué, alors $\varphi(u) = C(u)$,
 - Si c'est f , alors $\varphi(u) = 0$. i.e. :

$$\varphi(K) = C(K)$$

En résumé

L'algorithme est fini Il y a un arrêt des itérations, car :

- Le nombre de sommets est fini (et le graphe supposé sans circuit),
- On ne peut augmenter le flot que jusqu'à la limite des capacités.

L'arrêt définit une coupe qui est l'ensemble K des arcs ayant une seule marque : soit à leur origine (d), soit à leur extrémité (f). Le flot est maximum par obtention d'une coupe minimale.

Remarque 4.5.1

La coupe ainsi déterminée n'est pas forcément unique.

4.5.2 Optimisation linéaire

Formulation primale

Le problème du flot maximum est un problème d'optimisation linéaire sous contraintes linéaires et on peut se proposer de le résoudre comme tel.

Soient :

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m)$$

$$M(n, m) = \text{matrice d'adjacence}$$

alors le problème s'écrit :

$$\max \varphi = (M\Phi | e_1)$$

$$\Phi \geq 0$$

$$\Phi \leq C$$

Formulation duale

On peut aussi résoudre le problème dual :

$$\min \theta = (\Theta | C)$$

$$\Theta \geq 0$$

$$\Theta \geq M^* e_1$$

Lemme 4.5.1

La valeur maximal d'un flot de $S \tilde{A} t$ compatible avec les capacités C_u n'excède jamais la capacité d'une coupe séparant S et t .

Corollaire 4.5.1

Si un flot φ et une coupe $W^+(A)$ sont tels que la valeur φ_0 du flot est égale à la capacité de la coupe alors φ est un flot maximum de s à t . et $W^+(A)$ est une coupe de capacité minimale séparant S et t .

Corollaire 4.5.2

Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème du flot maximum de s à t dans G ait une solution de valeur finie, est qu'il n'existe pas de chemin de capacité infinie entre s et t .

4.6 Composante de tension maximum

Définition 4.6.1 (tension compatible)

Une tension θ_U sur le graphe G est dite compatible si :

$$\forall u \in U, a_u \leq \theta_u \leq b_u$$

Les vecteurs a_u et b_u sont les capacités minimum et maximum de l'arc u .

Définition 4.6.2 (θ -retournement d'un arc)

Soit θ_U une tension sur le graphe $G = (X, U)$ θ -retourner l'arc $u = (i, j)$, consiste à considérer le graphe $G' = (X, U')$ avec $U' = (U \setminus \{u\}) \cup \{u' = (j, i)\}$, et le vecteur $\theta'_{U'}$ tel que $\theta'_{U' \setminus u'} = \theta_{U \setminus u}$, $\theta'_{u'} = -\theta_u$, et

$$\Gamma_{u'} = [-b_u, -a_u]$$

Proposition 4.6.1

Lorsque θ_U est une tension compatible de G , $\theta'_{U'}$ est une tension compatible de G' , et réciproquement.

Proposition 4.6.2 (analogue au Théorème d'Hoffman)

Soit C un cycle tel que l'arc g est dans C^+ , toute tension compatible maximum sur l'arc g satisfait l'inégalité :

$$\theta_g \leq \sum_{u \in C^-} b_u - \sum_{u \in C^+ \setminus g} a_u$$

Théorème 4.6.1 (tension compatible)[8]

Une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une tension compatible sur G est que pour tout cycle C on ait :

$$\sum_{v \in C^+} a_v \leq \sum_{v \in C^-} b_v$$

Mise en œuvre du programme

Introduction

L'évolution des outils informatiques a profondément influencé les méthodes de travail des ingénieurs et des chercheurs, tels que le traitement numériques des données, leur visualisation, ainsi que les techniques de modélisation et de simulation se sont notamment généralisé. Dans ce domaine un logiciel commercial est devenu, ces dernières années presque incontournable : Matlab.

5.1 Présentation du logiciel Matlab/Simulink(V6)

Le logiciel Matlab est un logiciel de manipulation de données numériques et de programmation dont le champ d'application est essentiellement les sciences appliquées. Son objectif, par rapport aux autres langages, est de simplifier au maximum la transcription en langage informatique d'un problème mathématique, en utilisant une écriture la plus proche possible du langage naturel scientifique.

Le logiciel fonctionne sous Windows et sous Linux. Son interface de manipulation HMI utilise les ressources usuelles du multi-fenêtrage. Son apprentissage n'exige que la connaissance de quelques principes de base à partir desquels l'utilisation des fonctions évoluées est très intuitive grâce à l'aide intégrée aux fonctions.

5.2 Implémentation de L'algorithme de Ford-Felkerson

5.2.1 Algorithme Général de Flot Maximal

Initialisation par un flot initial réalisation ($\varphi = 0$) Tant que le flot n'est pas maximal

Algorithme de Ford-Felkerson

Marquage de la source S

Tant qu'on marque des sommets

pour tout sommet marque i

Marquer les sommets j non marquer tel que
 $\varphi(i, j) < C(i, j)$ ou $\varphi(j, i) > 0$

Fin pour

Fin tant que

Si le puits "p" n'est pas marqué **alors**

Le flot est maximal

Sinon

Amélioration du flot

Fin si

5.3 Application numériques

Soit le problème suivant :

Exemple 1 (Trafic routier)

Les capacités d'un réseau routier entre deux villes E et S sont données sur le graphe G de la figure. Les nombres entre deux sommets du graphe correspondent au nombre maximum de véhicules que cet arc peut écouler en une heure (en centaines de véhicules).

On voudrait savoir quel est le nombre maximal de véhicules pouvant circuler chaque heure de la ville E vers la ville S .

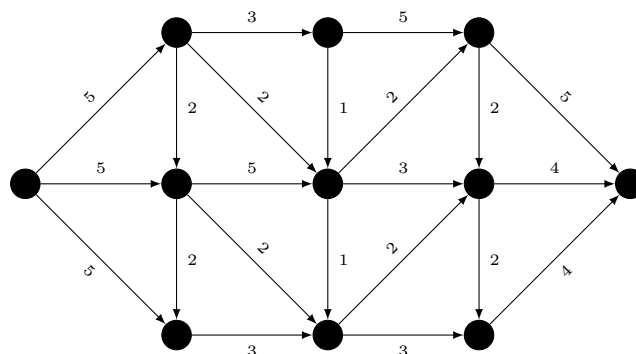


FIGURE 5.1 – Le réseau

Résolution du problème par l'algorithme de ford -Fulkerson

Implémente sous Matlab

```

>> flomax
flow max
s=1
t=11
La solution
  N arrêt      flu
     1      5.00000000
     2      5.00000000
     3      3.00000000
     4      0.00000000
     5      0.00000000
     6      3.00000000
     7      2.00000000
     8      3.00000000
     9      2.00000000
    10      3.00000000
    11      0.00000000
    12      0.00000000
    13      3.00000000
    14      2.00000000
    15      3.00000000
    16      2.00000000
    17      3.00000000
    18      0.00000000
    19      1.00000000
    20      5.00000000
    21      4.00000000
    22      4.00000000
flo max = 13.00000000
fx >>
    
```

FIGURE 5.2 – L'exécution

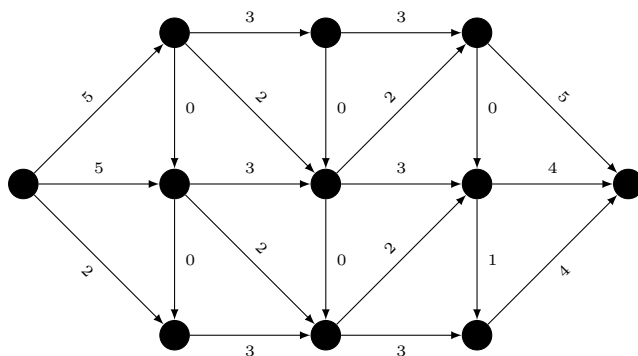


FIGURE 5.3 – La solution

Exemple 2 (Raffinerie de pétrole)

Une raffinerie de pétrole située dans le port P reçoit son pétrole brut de source S à travers le réseau de pipe-lines schématisés par le graphe G de la figure.

Les nombres encadrés placés sur les arcs sont les capacités des divers éléments du réseau (la source et les points de transit $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$). Les capacités sont exprimées en milliers de litres par heure.

On complète le graphe par une "super source" s et les arcs $(s, S_1), (s, S_2), (s, S_3)$ que l'on munit d'une capacité supérieure égale à la quantité qui peut être délivrée par chacun des puits.

La conservation des flux aux sommets S_1, S_2, S_3 permet de limiter ce qui part de chacun des puits à ce qu'ils peuvent fournir.

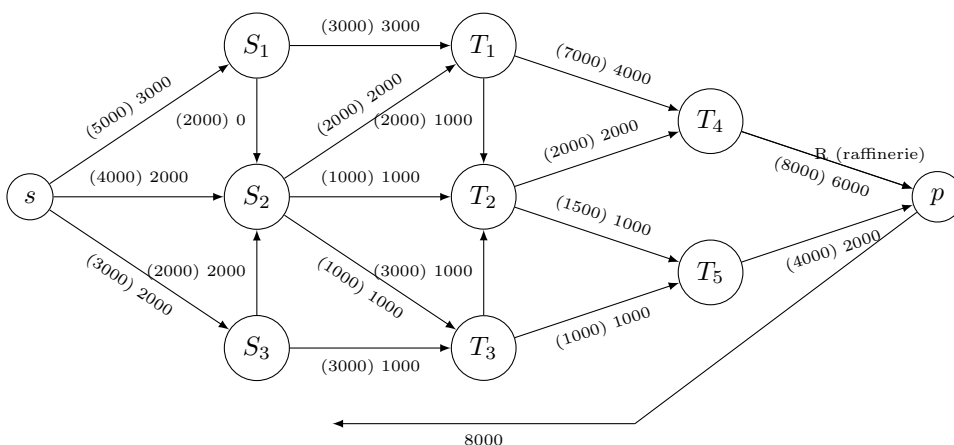


FIGURE 5.4 – Graphe 1

Actuellement il arrive une quantité de 8000 à la raffinerie. Pour voir si cette quantité est maximale, on recherche s'il existe une chaîne améliorante qui permettrait d'augmenter la valeur du flot.

Marquage1 :

$s, S_1, S_2, S_3(-), T_3, T_2, T_5, p$.

Le long de cette chaîne on peut envoyer un flot de 500, la limitation est due à l'arc (T_2, T_5) .

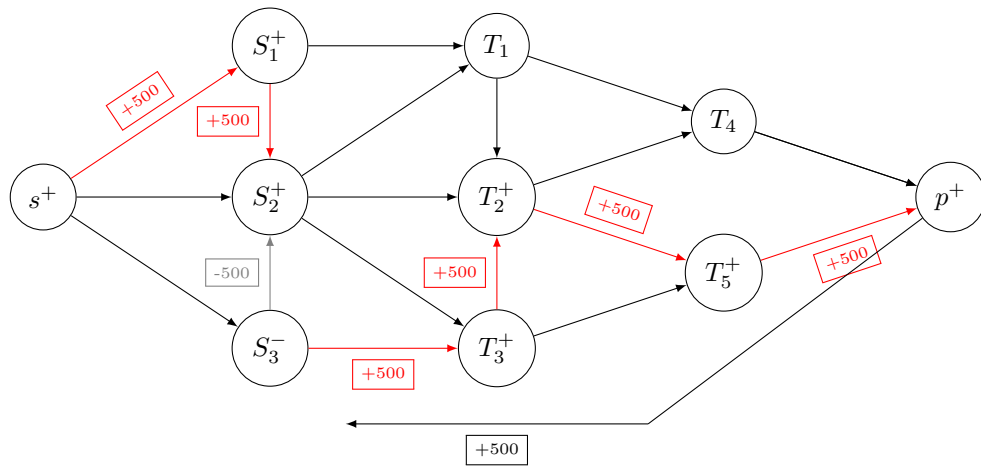


FIGURE 5.5 – Graphe 2

Marquage 2 :

$s, S1, S2, S3(-), T3, T2, T1(-), T4, p$

Le long de cette chaîne on peut envoyer un flot de 1000, la limitation est due à l'arc $(T1, T2)$ sur lequel le flux ne peut pas diminuer de plus de 1000.

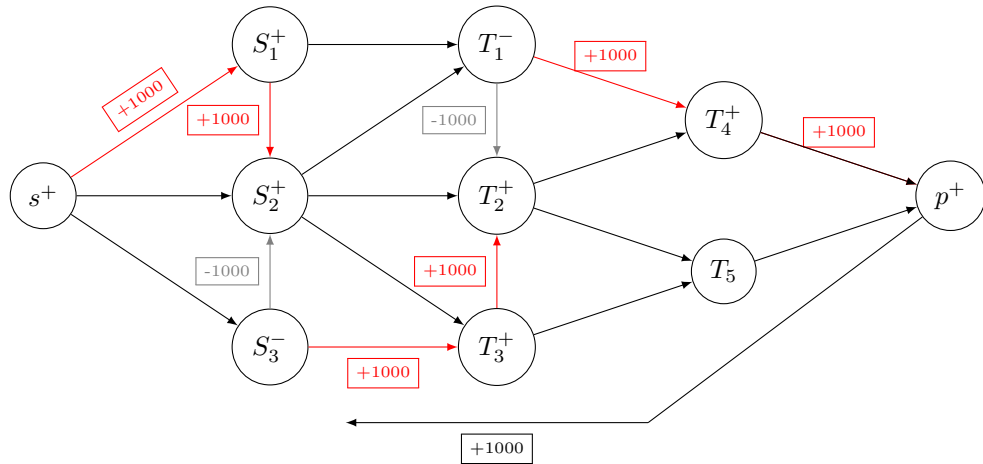


FIGURE 5.6 – Graphe 3

Marquage 3

$s, S1, S2, S3, T3, T2 \dots$ et c'est tout.

Arcs de la coupe $(S1, T1)(S2, T1)(T2, T4)(T2, T5)(T3, T5)$

Capacité = $3000 + 2000 + 2000 + 1500 + 1000 = 9\ 500$

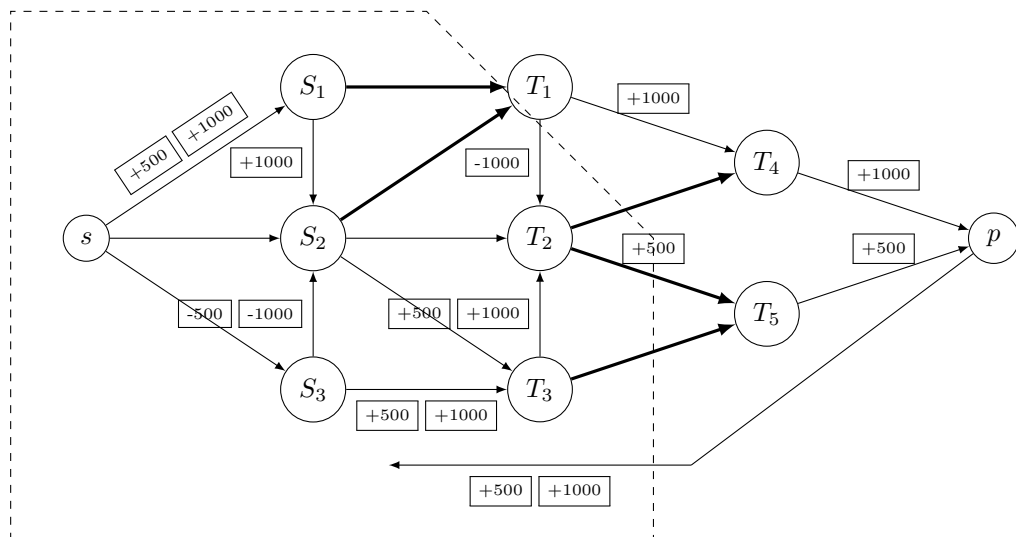


FIGURE 5.7 – Graphe 4

Afin d'augmenter encore cette quantité, doit-on augmenter la capacité des sources, ou celle de certains éléments de pipe-line ? Dans l'un ou l'autre cas préciser lesquels.

Pour augmenter la quantité envoyée à la raffinerie, il faut impérativement augmenter la capacité d'au moins un des arcs de cette coupe.

Conclusion

Comme perspective, nous allons présenter une application sur la tension et donner les algorithmes de résolution.

Conclusion générale

Notre travail consiste à la présentation de Flot et de tension la présentation de flot et de tension qui ont comme principe pour modéliser diverses situations par des graphes pondérés connexes pour résoudre des problèmes d'optimisation, par exemple une société livre livre par train à Alger des containers de marchandises remplis à Annaba. L'entreprise a le droit d'envoyer un nombre limité de containers par jour sur chaque tronçon de voie. Expédier un maximum de containers chaque jour, donc le problème est de modéliser la situation par un graphe sur forme de flot, afin de trouver la valeur optimale en faisant appel à certaines techniques d'optimisation dans les réseaux.

Dans notre travail nous avons présenter quelques caractéristiques de flot et tension, puis nous avons implémenté le problème de flot sur le logiciel MatLab.

Comme perspective, nous allons modélise une situation réelle sur forme d'un graphe de tension, pour lequel nous allons appliquer un algorithme afin de trouver la tension maximum

Bibliographie

- [1] A. Ghouila-Houri, Flots et tensions dans un graphe, Thèse, Gauthier-Vilars, Paris (1962).
- [2] Boussad Mammeri, Théorie des graphes, mathématiques 2, Pascal Laurent,(bM)2007.
- [3] C. Berge, Graphes et Hypergraphes, Dunod, Paris-Bruxelles-Montréal, 1973
- [4] C. Berge, Programmes, jeux et réseaux de transports, Dunod, Paris-Bruxelles-Montréal, 1962
- [5] C. Berge, Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris, 1958.
- [6] Cned - Académie en ligne
- [7] L.R. Ford and D.R. Fulkerson, Maximal ow through a network, Canadian Journal of Mathematics 8 (1956) 399 ...
- [8] J. Francois Maurras. Monographie sur les flots et tensions sur un graphe, université Marseille, 2007.
- [9] M. BOURAINE. Flot et Tension dans un graphe. mémoire de fin de cycle, université de Béjaia, 2012-2013.
- [10] M. Hadjiat, Problèmes de tension sur un graphe, algorithmes et complexité, Thèse, Université de la Méditerranée (1996).
- [11] M. Hadjiat et J.F. Maurras, Dualité entre flot et tension, Actes des Troisièmes Journées du groupe MODE, Brest, (1995) (Rapport interne du LIM 053 1995).
- [12] M. Michel Gondran, Michel Minoux. Graphes et algorithmes.61, Bd Saint-Germain Paris 5, 1985.
- [13] M. Taouinate, cours de la théorie des graphes. Université de Béjaia, 2012-2013.

Résumé

Dans ce travail, nous avons élaboré le flot et la tension dans un graphe, après avoir rappelé les concepts mathématiques importants qui jouent un rôle essentiel en théorie des graphes dans les trois premiers chapitres.

Une implémentation de flot citées ci-dessus dans un seul programme a été faite sous MatLab, afin d'assurer que notre programme soit applicable quelque soit le réseau de transport. Nous avons réalisé un exemple par l'algorithme de Ford-Fulkerson citées.

Mots clés

Graphes, Flot, Tension, Arbres

Abstract

In this work, we have developed the flow and the tension in a graph, after recalling the important mathematical concepts which play an essential role in graph theory in the first three chapters.

An implementation of flow cited above in a single program was made under MatLab, to ensure that our program is applicable regardless of the transportation system. We have made an example by the Ford-Fulkerson algorithm cited.

Key words

Graphs, Flow, Tension, Trees