République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Analyse et Probabilités

THEME

Dérivées non entières en viscoélastisité linéaire.
Modèles et problèmes ouverts.

Présenté par : M. MOULAÏ Abderrezak

Soutenu le 10/06/2012

Devant le jury :

M.	**Fatah BOUHMILA**	M.C.A	U. Bejaia	Président
M.	**Hocine BECHIR**	Professeur	U. Bejaia	Promoteur
M^{me}.	**Halima BECHIR**	M.A.A	U. Bejaia	Co-promoteur
M.	**Rachid BENMEZIANE**	M.C.B	U. Bejaia	Examinateur

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord monsieur Bechir et madame Bechir mes promoteurs pour m'avoir proposé ce sujet; ainsi que pour la patience et le soutien qu'ils m'ont offerts. Egalement pour tout ce qu'il m'ont appris sur la didactique. Il ont toujours respecté mes choix et me faisaient part de leurs critiques sans m'imposer leurs points de vue. Particulièrement je remercie M. Bechir de s'être engagé à m'encadrer pour un sujet contenant des notions de mécanique, qu'il m'a fait découvrir

J'adresse mes remerciements aux membres du jury : Merci M. Bouhmila d'avoir accepté de présider le jury, pour ses remarques pertinentes et constructives. Merci M. Benméziane pour avoir accepté d'être membre de ce jury. Je leur exprime ma reconnaissance pour m'avoir aidé à surmonter quelques difficultés lors de la préparation de ce travail.

Je tiens à remercier, particulièrement, tous les enseignants qui m'ont aidé directement ou indirectement : M. Kerai, Mm Tas, M.Berboucha, Mme Bouraine, Mlle Mohedeb, M. Akroun (à qui je souhaite un prompt rétablissement) et surtout Mlle Nasri.

Je remercie tous les amis que je ne peux pas citer, mais qui étaient une source de soutien moral et qui étaient présents dans les moments difficiles. J'ai des pensées particulières à Abderrezak, Salah, Sofiane, Bou3lem... Vos amitiés nous ont été précieuses.

Je remercie particulièrement M. le chef de département M. Boukhlifa pour nous avoir écoutés et accueillis, mes camarades de classe et moi, dans son bureau et pour ses encouragements permanents.

Je remercie infiniment tous les enseignants qui ont contribué à ma formation tout au long de mon parcours. je leurs présente toute ma reconnaissance.

Je remercie très chaleureusement mes très chers parents pour leurs encouragements, leur participation, leur soutien et leur patience.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes chers parents.

A mes neveux et nièces Lyna, A.Raouf et Merieme.

A toute ma famille.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Rappels et préliminaires **4**

1.1 Quelques fonctions spéciales 4

1.1.1 La fonction Gamma 4

1.1.2 La fonction Erreur 5

1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler 5

1.2 Rappel sur certains théorèmes de la théorie de la mesure et de l'intégration 5

1.3 Aperçu sur le produit de convolution 6

2 Dérivations non entière **9**

2.1 Historique et motivation 9

2.2 Approche de Riemann-Liouville 10

2.3 Approche de Caputo 15

2.4 Propriétés et analyse comparative 17

2.5 Approche de Grünwald-Letnikov 18

3 Les équations différentielles fractionnaires (EDF) **22**

3.1 La fonction de Mittag-Leffler 22

3.2 L'existence et l'unicité des solutions d'une EDF 23

3.3 Résolution analytique d'un problème aux limites 30

3.3.1 Par transformation aux équations intégrales de Volterra[6] 31

3.3.2 Transformation de Laplace[11] 33

3.3.3 Quelques propriétés de la transformée de Laplace 35

4 Application en Rhéologie linéaire **43**

4.1 Définition de la viscoélasticité linéaire et position du problème 43

4.2 Modèles rhéologiques simples 46

4.2.1 Modèle de Kelven Voight 47

4.2.2 Modèle de Maxwell 49

4.2.3 Modèle de Zener 51

4.3 Modèle rhéologique composé de Zener 53

4.3.1 Le "spring-pot" 55

4.3.2 Modèle de Zener fractionnaire 56

Conclusion et perspectives **59**

Bibliographie **60**

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est un champ des Mathématiques, qui consiste à généraliser les opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre entier. En particulier, la question sur la dérivation non entière remonte à la fin du $17^{\text{ème}}$ siècle. Cette élégante théorie a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches récents ou anciens. L'histoire affirme que la théorie de la dérivation fractionnaire est née le 30 Septembre 1695, toutefois elle reste encore mystérieuse! En effet, il n'y avait pas d'interprétations géométrique et physique acceptables de ces opérateurs. En fait la question sur la signification géométrique du concept de la dérivation non entière, a été posé à plusieurs reprises. Plus précisément, cela figurait en tant que problème ouvert, lors de la clôture de la première **C**onférence **I**nternationnale sur le **C**alcul **F**ractionnaire à New Haven(USA), en 1974. Récemment, en 1996, la conférence sur les méthodes des transformées et les fonctions spéciales dans la ville de Varna(Bulgarie) a montré que le problème était encore irrésolu! Ce qui rend ce domaine trés interessant en terme de matière de recherche.

Ce travail, consiste en une synthèse de certaines approches de dérivées non entières. Pour cela nous adoptons le plan suivant :

En premier lieu, nous rappelons quelques notions et outils de base de l'analyse, essentiellement la théorie de la mesure et de l'intégration, la convolution au sens des fonctions. Dans le second chapitre, nous verrons, concrètement, que la généralisation de la dérivation et de l'intégration découle exclusivement de la généralisation de la fonction Gamma de la fonction factorielle. Plus précisémént si on pose $I^{(1)}f(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx$ et qu'on applique cette défintion de l'opérateur $I^{(\cdot)}$ on aura $I^{(n)}f(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x)\,dx$ alors cette définition peut être étendue pour $n > 0$ quelconque, puisque $(n-1)! = \Gamma(n)$. Ainsi on définit l'intégrale d'ordre arbitraire d'une fonction continue. Ensuite on s'inspire d'une idée trés simple[**3**], "la dérivation n'est pas l'opérateur inverse de l'intégration". En effet, nous avons $\frac{dI^{(1)}f}{dt}(t) = f(t)$ mais $I^{(1)}f'(t) = f(t) - f(0)$. Ainsi la dérivée, au sens de Riemann-Liouville, d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction f en t, si elle existe, est la dérivée d'ordre $E(\alpha)+1$ de $I^{(E(\alpha)-\alpha+1)}f(t)$. En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $D^{\alpha}_{RL}f(t) = f^{(\alpha)}(t)$. Cependant, la dérivée d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, au sens de Riemann-Liouville, d'une constante est non nulle. On récupère cette propriété dans la dérivation, au sens de Caputo. On retrouve une expression similaire pour la dite dérivée. En effet, la dérivée au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$, d'une fonction causale f en t, si elle existe, est la dérivée, au sens de Riemann-Liouville, de $f(t) - \sum\limits_{k=0}^{E(\alpha)} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k$. L'intérêt majeur des dérivées non entières est qu'elles définissent de nouvelles classes de fonctions (On le constate implicitement dans ce travail) qui correspondront à l'espace qui contient les solutions des **E**quations **D**ifférentielles **F**ractionnaires avec des conditions initiales. Par ailleurs, pour la dérivée au sens de Grünwald Letnikov, celle-ci est construite à partir de la définition de la dérivée (comme étant la limite d'un quotient différentiel) : $f'(t) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h}$ par suite $D^{(n)}_t f(t) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\left(\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C^j_n f(t-jh)\right)$. Ainsi cette somme peut être étendue à l'infini (puisque $\Gamma(j)$ tend vers l'infini lorsque j tend vers un entier négatif) et cela aprés avoir remplacé la factorielle par la fonction Gamma. Ainsi, cela établit la définition de la dérivée d'ordre α arbitraire, au sens de Grünwald Letnikov.

Les **E**quations **D**ifférentielles **F**ractionnaires, font l'objet du troisième chapitre. Comme son nom l'indique elle généralise le concept d'EDO dans lequel les dérivées sont au sens de Caputo. La différence entre la théorie des EDO et EDF est que, dans la première, la solution analytique est définie moyennant les fonctions usuelles ou sous forme intégrale, en revanche dans la seconde, la solution analytique est définie comme étant une série de fonctions dépendant de paramètres. Cette série de fonctions est généralement la fonction de Mittag-Leffler qui généralise naturellement la fonction Exponentielle. En effet $E_{\alpha,\beta}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$ $|t| < \infty, \alpha, \beta > 0$ et en particulier, les fonctions élémentaires (sinus, cosinus ..) peuvent être exprimées au moyen de cette élégante fonction de Mittag-

Leffler. Ce qui rend encore cette théorie d'autant plus intéressante est que pour α entier naturel, en retrouve exactement les mêmes résultats que dans la théorie des EDO.

Et nous terminons ce travail par quelques exemples élémentaires de la Rhéologie. Plus précisément, nous balayons brièvement trois exemples de viscoélasticité linéaire dans lesquels intervient cette notion de dérivée fractionnaire.

CHAPITRE 1 Rappels et préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle des résultats essentiels, en particulier le produit de convolution puisque la majorité des propriétés sont issues de théorème de Fubini ainsi que celui du changement de variables.

1.1 Quelques fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

C'est une fonction définie par une intégrale, dont le domaine de définition est $]0,\infty[$.

En effet

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \forall \alpha > 0 \tag{1.1.1}$$

Elle généralise, naturellement, la factorielle puisqu'elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n! \tag{1.1.2}$$

Plus généralement, la fonction Gamma vérifie l'expression généralisée suivante

$$\forall \alpha > 0, \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{1.1.3}$$

Elle est prolongée sur $\mathbb{R}$ tout entier, et vérifie $\Gamma(\alpha) \longrightarrow \infty$ lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ ainsi que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-, \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \tag{1.1.4}$$

Concernant sa régularité, Γ est de classe C^{∞} sur son domaine de définition. De plus pour n assez grand, la fonction Γ vérifie la formule dite de Stirling, suivante

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n} n^{n} e^{-n} \tag{1.1.5}$$

1.1.2 La fonction Erreur

Cette fonction joue un rôle remarquable en théorie des Probabilités. Elle est définie par l'intégrale suivante

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} e^{-x^{2}} dx \tag{1.1.6}$$

Elle est de classe C^{∞} et vérifie $\lim\limits_{t \to \infty} \operatorname{erf}(t) = 1$. La fonction Erreur n'est d'autre que la fonction de répartition de loi Gaussienne.

1.1.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une fonction spéciale qui sera définie ultérieurement..

1.2 Rappel sur certains théorèmes de la théorie de la mesure et de l'intégration

Théorème 1.2.1 (Continuité sous le signe $\int$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, I un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que, à $t \in \mathbb{R}$ **fixé**, on définit l'application $f(\cdot, t) : E \longrightarrow \mathbb{R}$, qui $x \mapsto f(x, t)$. On suppose que l'application $f(\cdot, t)$ ainsi définie vérifie $f(\cdot, t) \in L^{1}(E)$, $\forall t \in I$. Et on note F l'application définie de I dans $\mathbb{R}$ par $F(t) = \int_{E} f(x, t)\, dm(x)$. On suppose de plus que :*

1. *L'application $f(x, \cdot)$, définie pour presque tout $x \in E$ par $t \mapsto f(x, t)$, est continue en t_0, pour presque tout $x \in E$.*

2. *$\exists G \in L^1(E)$ telle que $|f(\cdot,t)| \leq G$ m p.p pour tout $t \in V(t_0)$, où $V(t_0)$ désigne un certain voisinage de t_0.*

   Alors F, ainsi définie, est continue en t_0.

Preuve. Consulter **[3]**. ■

Théorème 1.2.2 (Dérivabilité sous le signe $\int$) *Soient (E,T,m) un espace mesuré, I un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :*

1. *$\forall t \in I\ f(\cdot,t) \in L^1(E)$,*
2. *Pour presque tout $x \in E$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe sur I,*
3. *$\exists g \in L^1(E)$ tel que $\forall t \in I \left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$ m p.p sur E. Alors la fonction F définie de I dans $\mathbb{R}$ par $F(t) = \int\limits_E f(x,t)\,dm(x)$ est dérivable sur I et :*

$$\forall t \in I, F'(t) = \int\limits_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dm(x) \tag{1.2.1}$$

Preuve. Consulter **[3]**. ■

Proposition 1.2.1 (Intégration par parties répétées) *Soient $f,g \in C^n([a,b])$. On alors l'égalité*

$$\int\limits_a^b fg^{(n)} = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)}\right]_a^b + (-1)^n \int\limits_a^b f^{(n)} g \tag{1.2.2}$$

1. *Si $n = 2 : \int_a^b fg'' = [f\ g' - f'g]_a^b + \int_a^b f''g$*
2. *Si $n = 3 : \int_a^b fg''' = [f\ g'' - f'g' + f''g']_a^b - \int_a^b f'''g$*

1.3 Aperçu sur le produit de convolution

Dans tout ce qui suit, nous ne manipulons que des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par conséquent nous ne rappelons que les propriétés fondamentales de la convolution dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.1 *Soient f et g deux fonctions mesurables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. On dit que f et g sont* ***convolables*** *au point t si $\int_{\mathbb{R}} |f(t-x)\, g(x)|\, dx < \infty$. Dans ce cas, on note*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)\, g(x)\, dx \tag{1.3.1}$$

Remarque 1.3.1 *En particulier, le produit de convolution existe dans les cas suivants :*

1. *f et g sont localement intégrables et toutes les deux à support compact dans $\mathbb{R}$.*

2. *$f \in L^1(\mathbb{R})$ et g est bornée, dans ce cas en particulier on a $t \mapsto (f * g)(t)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.*

3. *$f, g \in L^2(\mathbb{R})$*

4. *Le cas que nous rencontrerons le plus souvent est celui où f et g sont localement intégrables et nulles sur $]-\infty, 0[$. Dans ce cas $g(t-x) = 0$ si $t < x$, par conséquent l'écriture se réduit à*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx \tag{1.3.2}$$

Nous rappelons que le support d'une fonction est l'ensemble défini par
$Supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}$.

Propriétés et conséquences

1. Si $(f * g)(t)$ existe, alors $(f * g)(t) = (g * f)(t)$.

2. $Supp(f * g) \subset Supp(f) + Supp(g)$.

3. Si, au moins, deux des trois fonctions f, g, h sont à support compact, alors

$$(f * g) * h \equiv f * (g * h) \tag{1.3.3}$$

Par ailleurs, le produit de convolution est particulièrement interessant pour ses propriétés régularisantes. En effet, si f et g sont à support compact alors :

1. $f * g$ est aussi à support compact.

2. Si de plus f (ou g) est continue alors $f * g$ le sera aussi.

3. Et si de plus encore, $f^{(n)}$ existe et continue (i.e f est de classe C^n) alors $(f * g)^{(n)}$ existe et continue encore (i.e la fonction $t \mapsto (f * g)(t)$ est de classe C^n) et que l'on a

$$(f * g)^{(n)} \equiv \left(f^{(n)} * g\right) \tag{1.3.4}$$

(respectivement $(f * g)^{(n)} \equiv \left(g^{(n)} * f\right)$ puisque $(f * g) \equiv (g * f)$).

4. Une dernière propriété dans laquelle intervient l'opérateur "transformation de Laplace $\mathcal{L}$" qui sera étudiée ultérieurement est :

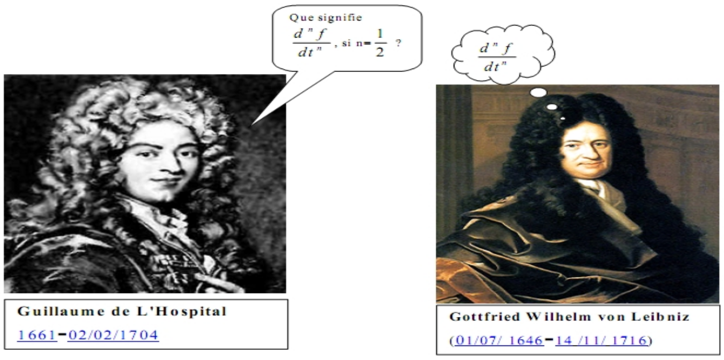
$$\mathcal{L}(f * g) \equiv \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g) \tag{1.3.5}$$

CHAPITRE 2 Dérivations non entière

2.1 Historique et motivation

La définition de la dérivée peut s'appliquer à la fonction dérivée elle même. En réitérant la procédure plusieurs fois, nous obtenons les dérivées successives d'ordre entier. De plus, si nous considérons l'opérateur intégration comme étant une dérivée d'ordre "moins un", alors la dérivation et l'intégration seront les opérateurs "eventuellement" inverses l'un de l'autre. Depuis des decennies, la question posée concerne la généralisation du concept de dérivationd'ordre non entier. Plus précisément, cette question sur la dérivée non entière remonte à la fin du 17ème siècle. L'histoire fait référence à une lettre écrite en 1695 par M. l'Hopital à M. Leibniz, dans laquelle il le sollicitait sur la signification de la dérivée d'ordre "un demi". A cette époque, cette question était une sorte d'enigme pour des mathématiciens de grand talent, parmi lequels nous citerons Messieurs Riemann, Abel, Liouville...

Par ailleurs, nous pourrions penser, à priori, que le concept de dérivation non entière n'est qu'une question de mathématiques pures, sans grand intérêt en terme d'application. Ce n'est pas le cas! en effet, un exemple typique en mécanique des fluides montre comment l'intégrale d'ordre un demi intervient, tout naturellement, lorsqu'on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne! ce qui fait une utilité pour l'ingénieur.



De plus il existe diverses approches de la dérivation non entière, quelques unes ont un intérêt numérique, et d'autres sont utiles si on cherche une solution théorique.

Dans ce travail, on fait une synthèse sur l'application de la dérivation non entière en structure des matériaux "Rhéologie" dans le cas linéaire. On donnera plus de détails au dernier chapitre, à titre de perspectives...

2.2 Approche de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **causale** si elle vérifie*

$$\forall x \in \left]-\infty, 0\right[, f(x) = 0 \tag{2.2.1}$$

Définition 2.2.2 *On définit l'opérateur d'intégration $I^{(1)} f(t) = \int\limits_0^t f(x)\, dx$ où f est une fonction continue.*

Proposition 2.2.1 *Pour les fonctions causales nulles à l'origine, l'inverse de l'opérateur de dérivation $D^{(1)} = \dfrac{d}{dt}$ est l'opérateur d'intégration $I^{(1)}$.*

$\forall t \geq 0, \left(D^{(1)} \circ I^{(1)}\right) f(t) = \left(I^{(1)} \circ D^{(1)}\right) f(t) = f(t) \Longleftrightarrow f(0) = 0.$

Preuve. On a $\forall t \geq 0, \dfrac{d}{dt} \int\limits_0^t f(x)\, dx = \dfrac{d}{dt}(F(t) - F(0)) = f(t)$.

Mais $\int\limits_0^t f'(x)\, dx = f(t) - f(0)$.

Ce qui signifie que les deux oprérateurs commutent **ssi** f est nulle à l'origine. ■

On définit d'une façon analogue l'opérateur d'intégration d'ordre supérieur par :

$I^{(2)}f(t) = \int_0^t I^{(1)}f(x)\,dx = \int_0^t f(x)(t-x)dx$, en effet, par une intégration par parties, en posant

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \text{ on a } u(x) = x \\ v(x) = I^{(1)}f(x) \text{ alors } v'(x) = f(x) \end{cases}$$

on aura $I^{(2)}f(t) = \left[\, xI^{(\ 1)}\ f\ \ (x)\right]_{x=0}^{x=t} - \int_0^t xf(x)\,dx = \int_0^t f(x)(t-x)dx.$

Ainsi, on obtient la formule généralisée dite **formule intégrale de Liouville**. que nous allons citer comme définition.

Définition 2.2.3

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : I^{(n)}f(t) = \int_0^t f(x)\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \tag{2.2.2}$$

Remarque 2.2.1 *Par construction,le calcul de $I^{(n)}f(t)$ s'effectue à partir du calcul de n primitives. Cette proposition affirme que cela se réduit au calcul d'une seule primitive.*

La formule précédente peut être interprétée comme le produit de convolution des fonctions causales f et $Y_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, en particulier Y_1 n'est autre que la fonction de Heaviside. On écrit aussi $Y_n(x) = \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)}$. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I^{(n)}f = Y_n * f$. La fonction Gamma permet d'étendre cette définition pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, alors, à priori, il serait naturel de définir une intégrale d'ordre α de f. Cependant, la fonction $Y_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, pour $\alpha \leq 0$ n'est pas intégrable au voisinage de la singularité $x = 0$, par conséquent le cas Y_α pour $\alpha \leq 0$ est exclu de la définition.

Définition 2.2.4 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction causale, on définit l'intégrale d'ordre $\alpha > 0$ de f comme étant la fonction causale définie par*

$$I^{(\alpha)}f(t) = (Y_\alpha * f)(t), t \geq 0 \tag{2.2.3}$$

Remarque 2.2.2 *Par construction, l'intégrale d'ordre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$(remarquer que le cas $\alpha = 0$ est exclu) vérifie la propriété du semi-groupe (2.2.4). On le doit aux propriètés de la convolution via le théorème de Fubbini et la fonction Gamma.*

i.e

$$I^{(\alpha)}\left(I^{(\beta)}f\right) \equiv I^{(\alpha+\beta)}f \tag{2.2.4}$$

car

$$Y_\alpha * Y_\beta \equiv Y_{\alpha+\beta} \tag{2.2.5}$$

Définition 2.2.5 *On définit la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction causale f continûment dérivable jusqu'à l'ordre $n-1$, avec $n-1 \leq \alpha < n$, comme suit*

$$D_{RL}^{(\alpha)}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\int_0^t \frac{(t-x)^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}f(x)\,dx \tag{2.2.6}$$

où $n = E(\alpha)+1$, avec $E(\alpha)$ désigne la partie entière de α

En faisant appel au produit de convolution cette définition peut être énoncée ainsi,

$$D_{RL}^{(\alpha)}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(Y_{n-\alpha} * f\right)(t), \forall t \geq 0 \tag{2.2.7}$$

Remarque 2.2.3 *La dérivée au sens de Riemann-Liouville peut être écrite uniquement en fonction de α sous la forme suivante*

$$D_{RL}^{(\alpha)}f(t) = \frac{d^{E(\alpha)+1}}{dt^{E(\alpha)+1}}\left(Y_{E(\alpha)-\alpha+1} * f\right)(t), \forall t \geq 0 \tag{2.2.8}$$

Plus précisément

$$D_{RL}^{(\alpha)}f(t) = \frac{d^{E(\alpha)+1}}{dt^{E(\alpha)+1}}\int_0^t \frac{(t-x)^{E(\alpha)-\alpha}}{\Gamma(E(\alpha)-\alpha+1)}f(x)\,dx \tag{2.2.9}$$

Remarque 2.2.4 *L'opérateur $D_{RL}^{(\alpha)}$ est linéaire.*

Dans le prochain chapitre, nous nous interessons particulièrement au cas $0 < \alpha < 1$. Pour cela on obtient la formule de dérivée suivante pour toute fonction continue f.

$$D_{RL}^{(\alpha)}f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f(x)\,dx \tag{2.2.10}$$

Ainsi, en utilisant la commutativité du produit de convolution et si nous que f est de classe C^1 sur $[0,\infty[$, nous obtenons

$$D_{RL}^{(\alpha)} f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(x)\,dx = \int_0^t \frac{d}{dt} \left[\frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] f(x)\,dx$$

Mais, par un calcul évident, nous remarquons que $\frac{d}{dt} \left[\frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] = -\frac{d}{dx} \left[\frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right]$ que l'on injecte dans l'intégrale, puis une intègration par parties(puisque f est supposée de classe C^1 sur $[0,\infty[$) donnera

$$D_{RL}^{(\alpha)} f(t) = \int_0^t \frac{d}{dx} \left[-\frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] f(x)\,dx = \int_0^t \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f'(x)\,dx + Y_{1-\alpha}(t)\, f(0)$$

Cela étant valable $\forall \alpha \in]0,1[$. Que l'on écrit aussi sous la forme suivante

$$D_{RL}^{(\alpha)} f(t) = (Y_{1-\alpha} * f')(t) + Y_{1-\alpha}(t)\, f(0)\, \forall \alpha \in]0,1[\tag{2.2.11}$$

Cette formule sera utile ultérieurement !

Remarque 2.2.5 *Si f n'est pas supposée de classe C^1 sur $[0,\infty[$ alors cette expression n'est pas toujours valable. puisqu'elle est obtenue en intégrant sous le signe intégrale et par une intégration par parties.*

Exemple 2.2.1 *Pour une fonction causale constante $f(t) = c\chi_{[0,\infty[}$ on aura, pour $0 < \alpha < 1$*

$$D_{RL}^{(\alpha)}(c) = c\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} dx = c\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Ainsi $D_{RL}^{(\alpha)}(c) = cY_{1-\alpha}(t)$

Remarque 2.2.6 *On constate que $\forall \alpha \in]0,1[$ la dérivée d'ordre α d'une constante, au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle!*

Exemple 2.2.2 *pour un monôme $P_m(t) = t^m \chi_{]0,\infty[}$ avec $m \in \mathbb{N}$ on aura, toujours, pour $0 < \alpha < 1$*

$$D_{RL}^{(\alpha)}(t^m) = (Y_{1-\alpha} * mP_{m-1})(t) = \frac{m}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{-\alpha} x^{m-1} dx$$

qu'on évalue en intègrant par parties $m-1$ fois, et en utilisant la fonction Gamma, on trouve

$$\forall m \in \mathbb{N}, D_{RL}^{(\alpha)}(t^m) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^{m-\alpha} \chi_{]0,\infty[} \tag{2.2.12}$$

Par suite, nous obtenons

$$\lim_{\alpha \to 1^-} D_{RL}^{(\alpha)}(t^m) = mx^{m-1} \chi_{]0,\infty[} \tag{2.2.13}$$

et nous aboutissons à la dérivée usuelle d'un monôme!

Par ailleurs, on sait que, dans le cas de la dérivation usuelle, les dérivées commutent entre elles (On dit qu'elles vérifient la propriété du semi-groupe) c'est à dire

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{d^m}{dt^m}\right) \equiv \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^n}{dt^n}\right) \tag{2.2.14}$$

Mais ceci n'est pas toujours le cas, pour les dérivées non entières. En effet ce théorème établit la composition des opérateurs de dérivation pour un ordre non entier.

Théorème 2.2.1 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction causale p fois continûment dérivable et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta < m$, où $m, n \in \mathbb{N}, p = E(\alpha+\beta)$ et $r = \max(n,m)$, alors*

$$D_{RL}^{(\alpha)}\left[D_{RL}^{(\beta)} f(t)\right] = D_{RL}^{(\alpha+\beta)} f(t) - \sum_{j=1}^{m-1} \left(D_{RL}^{(\beta-j)} f\right)(0)\, Y_{-\alpha-j+1}(t) \tag{2.2.15}$$

D'une part

$$D_{RL}^{(\beta)}\left[D_{RL}^{(\alpha)} f(t)\right] = D_{RL}^{(\alpha+\beta)} f(t) - \sum_{j=1}^{n-1} \left(D_{RL}^{(\alpha-j)} f\right)(0)\, Y_{-\beta-j+1}(t) \tag{2.2.16}$$

D'une autre part

$$D_{RL}^{(\alpha)}\left[D_{RL}^{(\beta)} f(t)\right] = D_{RL}^{(\beta)}\left[D_{RL}^{(\alpha)} f(t)\right] = D_{RL}^{(\alpha+\beta)} f(t)$$

si et seulement si

$$f^{(k)}(0) = 0 \forall k \in \{0, r-1\}$$

Preuve. Consulter [**3**]. ∎

Remarque 2.2.7 *On remarque que, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ le résultat est trivial et correspond exactement au cas de la dérivation classique. On démontrera à la fin de ce chapitre un résultat plus général reliant les différentes dérivées.*

2.3 Approche de Caputo

Nous signalons que, concernant la dérivée au sens de Riemann-Liouville la dérivée d'ordre α, pour $0 < \alpha < 1$ d'une constante n'est pas nulle. Cependant, la dérivée au sens de Caputo est définie pour récupérer cette propriété. Il faut surtout remarquer la différence entre les deux approches et appliquer eventuellement le théorème de la dérivation sous le signe intégrale. La définition de la dérivée au sens de Caputo est la suivante :

Définition 2.3.1 *Soient $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n-1 \leq \alpha < n \, (n = E(\alpha) + 1)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction causale $n-1$fois continûment dérivable sur $[0, \infty[$, alors on définit sa dérivée au sens de* ***Caputo*** *d'ordre α comme suit*

$$D_C^{(\alpha)} f(t) = D_{RL}^{\alpha} \left(f(t) - T_{n-1}[f, 0] \right) \tag{2.3.1}$$

où $T_{n-1}[f, 0] = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} t^t$ qui est le développement de Taylor de f en $t_0 = 0$ à l'ordre $n-1$.

Définition 2.3.2 (bis) *En particulier si f est n fois continûment dérivable alors cette définition peut être énoncée comme suit*

$$D_C^{(\alpha)} f(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f^{(n)}(x) \, dx \tag{2.3.2}$$

Dans ce cas, en terme de produit de convolution on a

$$D_C^{(\alpha)} f(t) = \left(Y_{n-\alpha} * f^{(n)} \right)(t), \forall t \geq 0 \tag{2.3.3}$$

Remarque 2.3.1 *La deuxième expression de la dérivée au sens de Riemann Liouville est dû à l'application du théorème de la dérivée sous le signe intégrale et d'application de l'intégration par parties n fois.*

Remarque 2.3.2 *La fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *comme suit*

$$g : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^t$$

possède la propriété suivante :

$$\forall k \in \{0, 1...n-1\}, g^{(k)}(0) = 0$$

Remarque 2.3.3 *On peut écrire la définition-bis uniquemet en fonction de* α*, ainsi*

$$D_C^{(\alpha)} f(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{E(\alpha)-\alpha}}{\Gamma(E(\alpha)-\alpha+1)} f^{(E(\alpha)+1)}(x)\, dx \tag{2.3.4}$$

ou encore, en utilisant la convolution :

$$D_C^{(\alpha)} f(t) = \left(Y_{E(\alpha)-\alpha+1} * f^{(E(\alpha)+1)}\right)(t), \forall t \geq 0 \tag{2.3.5}$$

En particulier pour $0 < \alpha < 1$ la dérivée au sens de Caputo se réduit à

$$D_C^{(\alpha)} f(t) = (Y_{1-\alpha} * f')(t), \forall t \geq 0 \tag{2.3.6}$$

ou encore

$$D_C^{(\alpha)} f(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f'(x)\, dx, \forall \alpha \in]0,1[\tag{2.3.7}$$

Comme pour la dérivée au sens de Riemann-Liouville, il faut noter que la dérivée d'ordre α à l'instant t dépend du comportement de la fonction sur l'intervalle $[0, t]$. on parle pour cette raison d'**effet mémoire**.

Exemple 2.3.1 *La dérivée au sens Riemann, d'ordre* $0 < \alpha < 1$*, d'une fonction causale constante est identiquement nulle, en effet*

$$D_C^{(\alpha)}(c) = \int_0^t \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx}(c)\, dx = 0 \tag{2.3.8}$$

D'autres exemples seront traités, mais dans un contexte plus significatif, à savoir, les équations différentielles d'ordre fractionnaires. Il est à signaler que le terme "fractionnaire" est à ce jour encore utilisé, tout simplement, pour des raisons historiques.

2.4 Propriétés et analyse comparative

On rappelle la formule suivante, établit précédemment, dans le cas où $f \in C^1([0,\infty[)$

$$D_{RL}^{(\alpha)} f(t) = (Y_{1-\alpha} * f')(t) + Y_{1-\alpha}(t) f(0) \;\; \forall \alpha \in]0,1[\tag{2.4.1}$$

Celle-ci qui s'exprime aussi sous la forme

$$D_{RL}^{(\alpha)} f(t) = D_{C}^{(\alpha)} f(t) + Y_{1-\alpha}(t) f(0) \;\; \forall \alpha \in]0,1[\tag{2.4.2}$$

Cette relation conduit au résultat suivant

Proposition 2.4.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction causale et continue sur* $]0,\infty[$ *et soit* $\alpha \in]0,1[$, *alors*

$$D_{RL}^{(\alpha)} f(t) = D_{C}^{(\alpha)} f(t) \iff f(0) = 0 \tag{2.4.3}$$

Preuve. Evidente, d'aprés (2.4.2) ■

Par ailleurs, dans le but d'établir un résultat similaire pour $\alpha > 0$ quelconque, on applique le résultat de la dérivation sous le signe intégral $E(\alpha)+1$ fois. Plus généralement nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.4.1 *Soit* f *est une fonction causale et* $n-1$ *fois continûment dérivable sur* $[0,\infty[$ *et soit* $\alpha > 0$ *tel que* $n-1 \leq \alpha < n$, *on a*

$$D_{RL}^{(\alpha)} f(t) = D_{C}^{(\alpha)} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} Y_{k+1-\alpha}(t) f^{(k)}(0) \tag{2.4.4}$$

Preuve. En effet, on a

$D_{C}^{(\alpha)} f(t) = D_{RL}^{(\alpha)} [f(t) - T_{n-1}[y,0]]$

$D_{C}^{(\alpha)} f(t) = D_{RL}^{(\alpha)} f(t) - D_{RL}^{(\alpha)} T_{n-1}[y,0]$

On a $D_{RL}^{(\alpha)} T_{n-1}[y,0] = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{y^{(k)}(0)}{k!} D_{RL}^{(\alpha)}\left(t^k\right) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{y^{(k)}(0)}{k!} \dfrac{k!}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}$

Donc $D_{C}^{(\alpha)} f(t) = D_{RL}^{(\alpha)} f(t) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}$

Que l'on écrit encore $D_{C}^{(\alpha)} f(t) = D_{RL}^{(\alpha)} f(t) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0) Y_{k-\alpha+1}(t)$. ■

Proposition 2.4.2 *Si f est une fonction causale n fois dérivable alors, sa dérivée au sens de Riemann-Liouville,d'ordre n, coïncide avec sa dérivée classique, du même ordre. i.e*

$$D_{RL}^{(n)} f(t) = f^{(n)}(t) \tag{2.4.5}$$

Preuve. Il suffit de remplacer dans l'expression de dérivée au sens de Riemann-Liouville, en effet

$D_{RL}^{(n)} f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \int_0^t \frac{(t-x)^{n-n}}{\Gamma(n+1-n)} f(x)\, dx = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \int_0^t f(x)\, dx = f^{(n)}(t)$ ■

Remarque 2.4.1 *A priori, on peut penser que la dérivation au sens de Riemann-Liouville est la généralisation de la dérivation usuelle "des fonctions". Et il existe un résultat similaire pour a dérivation au sens de Caputo.*

Lemme 2.4.2 *Pour toute fonction causale f étant k fois dérivable, on a*

$$D_C^{(\alpha)} \left(I^{(\alpha)} f \right) \equiv f, \forall \alpha \in \left]0, k\right] \tag{2.4.6}$$

Preuve. En effet, remarquons tout d'abord que

$\forall t \geq 0, \forall j \in \{0, .., E(\alpha)\}$ on a $\frac{d^j}{dt^j} \left(I^{(n)} f \right)(t) = \frac{d^j}{dt^j} \left(I^{(j)} \circ I^{(\alpha-j)} \right) f(t) = \left(I^{(\alpha-j)} f \right)(t)$

et $\left(I^{(\alpha-j)} f \right)(0) = 0$. Donc $T_{n-1}\left[I^{(n-j)} f, 0 \right] \equiv 0$

Ainsi $D_C^{(\alpha)} \left(I^{(\alpha)} f \right)(t) = D_{RL}^{(\alpha)} \left(I^{(\alpha)} f \right)(t) = \frac{d^{E(\alpha)+1}}{dt^{E(\alpha)+1}} I^{(E(\alpha)+1-\alpha)} \left(I^{(\alpha)} f \right)(t) = f(t)$ ■

2.5 Approche de Grünwald-Letnikov

L'utilisation de la définition de la dérivée d'ordre quelconque d'une fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

suppose cette dernière assez régulière. Nous rappelons que la dérivée de la fonction f en t comme étant la limite d'un quotient différentiel :

$$D_t^{(1)} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{2.5.1}$$

Réitérer la définition conduit à :

$$D_t^{(2)} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \left[f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h) \right] \tag{2.5.2}$$

$$D_t^{(3)} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^3} \left[f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h) \right] \tag{2.5.3}$$

Ainsi, en établit facilement par récurrence, la formule générale suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$D_t^{(n)} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f(t - jh) \right) \tag{2.5.4}$$

où $C_n^j = \dfrac{n!}{j!\,(n-j)!}$ désigne la combinaison.

En utilisant la fonction Gamma, on aura :

$$D_t^{(n)} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(n-j+1)} f(t - jh) \right) \tag{2.5.5}$$

Or la fonction Gamma, définie pour $t > 0$ par l'intégrale généralisée $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$, peut être prolongée de façon unique sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$ tout en vérifiant la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.5.6}$$

Plus généralement on démontre aisément(par récurrence) que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*, \forall m \in \mathbb{N} : \Gamma(x+m) = \Gamma(x) \prod_{k=0}^{m-1} (x+k) \tag{2.5.7}$$

Il est évident que la somme dans l'expression de $D_t^{(n)} f(t)$ peut être étendue à tous les j entiers non négatifs, puisque les termes sont nuls pour $k \geq n$.Ainsi, une généralisation naturelle permet de définir la dérivée d'ordre α, pour $\alpha > 0$, au sens de **Grünwald-Letnikov** notée $D_{GL}^{(\alpha)}$ par

$$D_{GL}^{(\alpha)} f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^\alpha} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(\alpha-j+1)} f(t - jh) \right) \tag{2.5.8}$$

Remarque 2.5.1 *L'opérateur $D_{GL}^{(\alpha)}$ est linéaire.*

La dérivée fractionnaire d'ordre $0 < \alpha < 1$ dépend de tout le passé, contrairement à la dérivée usuelle (d'ordre $\alpha = 1$) qui ne dépend que de ce qui passe au voisinage immédiat du point en question.

L'approche de Grünwald-Letnikov est trés utilisée pour calculer numériquement une dérivée fractionnaire connaissant f au voisinage de x.

Remarque 2.5.2 *On observe que la dérivée, au sens de Grünwald-Letnikov, d'ordre entier n d'une fonction, est exactement la dérivée usuelle, d'ordre n de cette fonction. En effet*

$$\begin{aligned} D_{GL}^{(n)} f(t) = & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)} f(t-jh) \right) \\ = & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)} f(t-jh) \right) = f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

car $\forall j \geq n+1, n-j+1 \in \mathbb{Z}_-$ et puisque $\Gamma(x) \longrightarrow \infty$ pour $x \in \mathbb{Z}_-$, alors les termes de cette somme s'annulent à partir de $j \geq n+1$.

Par suite $\forall n \in \mathbb{N}, D_{GL}^{(n)} f(t) = D_t^{(n)} f(t)$.

<u>Résumé:</u>

Nous cloturons cette étude sur la dérivation non entière,en résumant les cas remarquables. Etant donné f une fonction causale $n-1$ fois continûment dérivable sur $]0, \infty[$ et soit $\alpha > 0$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$ et $k-1 \leq \beta < k$ pour tout $\beta \leq \alpha$ on a :

1. Si $\forall j \in \{0, ..., k-1\}, f^{(j)}(0) = 0$ alors $D_{RL}^{\beta} f(t) = D_C^{\beta} f(t)$ où $k-1 < \beta < k$.

2. Si de plus $\beta \in \mathbb{N}$ alors $D_{RL}^{\beta} f(t) = D_C^{\beta} f(t) = D_{GL}^{\beta} f(t) = f^{(\beta)}(t)$.

3. Si $\beta \in \mathbb{N}$ avec $f^{(\beta)}(0) \neq 0$ alors $D_C^{\beta} f(t) = D_{GL}^{\beta} f(t) - f^{(\beta)}(0) = f^{(\beta)}(t) - f^{(\beta)}(0)$

En particulier pour $0 < \alpha < 1$ et pour tout $\beta \leq \alpha$ si f est causale et continue sur $]0, \infty[$ alors les assertions précédentes se réduisent aux suivantes :

1. Si $f(0) = 0$ alors $D_{RL}^{\beta} f(t) = D_C^{\beta} f(t)$.

2. Sinon $D_{RL}^{\beta} f(t) = D_C^{\beta} f(t) + f(0) Y_{1-\beta}(t)$.

Une autre différence, à signaler, entre les deux sens de dérivation est que, si f est supposée assez régulière alors on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n_{RL} f(t) = f^{(n)}(t)$ toutefois, concernant la dérivée au sens de Caputo on a $D^\alpha_C f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)$. Et enfin la propriété la plus remarquable est le cas d'une fonction causale constante

1. $D^\alpha_{RL}(c) = 0 \ \forall \alpha > 0$.

2. $D^\alpha_C(c) = cY_{1-\alpha}(t) \neq 0 \ \forall \alpha > 0$.

CHAPITRE 3

Les équations différentielles fractionnaires (EDF)

La généralisation du concept de dérivation ususelle a été abordée dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous étendons le concept d'EDO en EDF dans le cas linéaire. Quelques cas particuliers seront abordés

3.1 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. La définition l'assimilant à une série de polynômes (s'il on consière que la variable est réelle) généralise la fonction Exponentielle. De plus, les fonctions élémentaires peuvent être éventuellement exprimées en fonction de Mittag-Leffler, moyennant quelques paramètres. La fonction de Mittag-Leffler est définie comme suit [8] :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha, \beta > 0, |z| < \infty \tag{3.1.1}$$

On constate en particulier que $E_{1,1}(z) = e^z$.

La table ci-dessous donne quelques exemples de fonctions élémentaires(usuelles) exprimées en fonction de Mittag-Leffler, via sa série entière correspondante. Cette série est normalement convergente ainsi que toute ses dérivées, ce qui la rend d'autant plus intéressante que cela permet d'affirmer(théorème sur les séries entières) que sa dérivée correspond exactement à la série des dérivées. Ce résultat étant encore valable pour les dérivées successives.

$$\begin{array}{|l|} \hline E_{1,1}(t) = e^t \\ \hline E_{1,2}(t) = \dfrac{e^t - 1}{t} \\ \hline E_{2,1}(t) = \cosh(t) \\ \hline E_{2,2}(t) = \dfrac{\sinh(t)}{t} \\ \hline \end{array} \tag{3.1.2}$$

Par ailleurs, dans la théorie des équations différentielles fractionnaires EDF la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que celui de la fonction Exponentielle dans la théorie des équations différentielles ordinaires EDO. On peut le constater à travers les deux exemples suivants.

Soit le problème de Cauchy suivant $\begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ Sa solution est $y(t) = y_0 e^{-at}$ sa solution peut être obtenue en passant à $\mathcal{L}$, En terme de la fonction de Mittag-Leffler, on a $y(t) = y_0 E_{1,1}(-at)$	Soit le problème aux limites suivant $\begin{cases} D^\alpha y + ay = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}, 0 < \alpha < 1$ On admet, pour le moment que ce problème admet une unique solution. Si on applique $\mathcal{L}$ des deux côtés dans l'EDF et on tennant compte de la condition initiale, on aura $y(t) = y_0 E_{\alpha,1}(-at^\alpha)$

D'où la similitude remarquable des deux fonctions!

3.2 L'existence et l'unicité des solutions d'une EDF

Nous débuterons cette partie en montrant l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires, pour lesquelles les dérivées figurant sont au sens de Caputo. Dans la majorité des cas qu'on rencontrera, on se ramènera à la dérivation au sens de Riemann Liouville, via le développement de Taylor, sinon les deux définitions coïncident, moyennant certains conditions. Sans restreindre la généralité on considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} D_C^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), t > 0 \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, k = 0, 1, .., n-1 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où $n - 1 \leq \alpha < n$

Lemme 3.2.1 *Si la fonction f est continue, alors le problème aux limites ci-dessus est équivalent à l'équation intégrale, non linéaire, de Volterra suivante*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x))\, dx \tag{3.2.2}$$

*i.e toute solution du problème non linéaire de Volterra est auusi solution de problème aux limites ci-dessus et réciproquement[**5**].*

Preuve. Supposons que y est solution du problème de Volterra, en effet
on a $y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + I^{(\alpha)} f(t, y(t))$.
On rappelle que $D_{RL}^{\alpha} y(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{(n-\alpha)} y\right)(t)$ et $D_{RL}^{\alpha}\left(t^k\right) = \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha}$.
Appliquons D_{RL}^{α} de part et d'autre dans l'expression de l'equation de Volterra
$D_{RL}^{\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} D_{RL}^{\alpha}\left(t^k\right) + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[I^{(n-\alpha)}\left(I^{(\alpha)} f(t, y(t))\right)\right]$
NB: L'opérateur $I^{(\alpha)}$, par construction, vérifie la propriété du semi-groupe
c.à.d $I^{(\alpha)} \circ I^{(\beta)} \equiv I^{(\alpha+\beta)}$(avec $I^{(0)} \equiv Id$)
qui est équivaut, en tenant compte de ce qu'on a rappelé, à :
$D_{RL}^{\alpha} y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha} = f(t, y(t))$
Que l'on peut aussi écrire sous la forme :
$D_{RL}^{\alpha} y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} Y_{k-\alpha+1} = f(t, y(t))$
Si on identifie avec la dérivée au sens de Caputo on aura
$y_0^{(k)} = y^{(k)}(0), k \in \{0, .., n-1\}$ et par suite $D_C^{\alpha} y(t) = f(t, y(t))$.

Par suite, la solution du problème de Volterra est aussi solution du problème aux limites.

La réciproque est presque similaire, en effet, supposons que y est une fonction causale solution du problème aux limites, alors

$$f(t, y(t)) = D_C^\alpha y(t) = D_{RL}^\alpha (y(t) - T_{n-1}[y; 0]) \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{d^n}{dt^n} \circ I^{(n-\alpha)} \right) (y(t) - T_{n-1}[y; 0]) \tag{3.2.3}$$

où $T_{n-1}[y; 0]$ désigne le développement de Taylor de y à l'origine jusqu'à l'ordre $n-1$.

De plus la fonction $g : t \mapsto y(t) - T_{n-1}[y; 0]$ vérifie $g^{(k)}(0) = 0, \forall k \in \{1, .., n-1\}$ alors

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} \circ I^{(n)} \right) g(t) = \left(I^{(n)} \circ \frac{d^n}{dt^n} \right) g(t) = t$$

Donc (3.2.3) se réduit à

$$f(t, y(t)) = I^{(-\alpha)} (y(t) - T_{n-1}[y; 0])$$

Puisque l'opérateur $I^{(-\alpha)}$ vérifie la proriété du semi groupe, alors on pplique $I^{(\alpha)}$ de part et d'autre

$$I^{(\alpha)} f(t, y(t)) = (y(t) - T_{n-1}[y; 0])$$

et on tennant compte des conditions initiales, an aura

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + I^{(\alpha)} f(t, y(t))$$

qui est exactement la solution de l'équation intégrale, nin liéaire, de Volterra. D'où l'équivalence des deux problèmes. ■

Ensuite, nous démontrerons l'existence et l'unicité de ce type de problèmes aux limites. On n'étudie que le cas de $0 < \alpha < 1$, puisque la démonstration pour $\alpha > 1$ est analogue, sachant que, dans tous les cas on fait appel au problème de Volterra. Dans les problèmes issus de la Rhéologie qu'on traitera, seul le cas $0 < \alpha < 1$ sera abordé.

Théorème 3.2.1 (Existence) *Soient* $D = [0, T^*] \times \left[y_0^{(0)} - \theta, y_0^{(0)} + \theta \right]$, *avec* $T^* > 0$, $\theta > 0$ *et* $f : D \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* D. *On définit* $T = \min \left\{ T^*, \left(\frac{\theta \Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_\infty} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$. *Alors il existe une fonction* $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ *solution du problème (3.2.1)* ***[5]****.*

Théorème 3.2.2 (Unicité) *Avec les mêmes notations du théorème d'existence, on suppose de plus que la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, i.e*

$$|f(t,X) - f(t,Y)| \leq L|X - Y|$$

pour certain constante $L > 0$ indépendante de t, X et Y. Alors il existe, au plus, une fonction $y : [0,T] \to \mathbb{R}$ solution du problème (3.2.1).

Les démonstrations des deux théorèmes sont similaires. Elles reposent exclusivement sur les propriétés de l'équation intégrale, non linéaire, de Volterra. Par ailleurs nous rappellons l'un des théorème du point fixe d'analyse fonctionnelle **[6]**.

Théorème 3.2.3 (Point fixe) *Soient U un sous ensemble fermé et non vide d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$. $(k_n)_n$ une suite numérique à termes positifs telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ est convergente. De plus, soit l'application $A : U \to U$ satisfaisant l'inégalité*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u, v \in U : \|A^n u - A^n v\| \leq k_n \|u - v\| \tag{3.2.4}$$

*alors A possède **un unique point fixe** $u^* \in U$. De plus pour tout $u_0 \in U$ la suite $(A^n u)_n$ converge vers u^*.*

Preuve du théorème d'unicité. On ne s'interesse qu'au cas $0 < \alpha < 1$.

Pour cela le problème se réduit à

$$\begin{cases} D_C^{\alpha} y(t) = f(t,y), t > 0 \\ y(0) = y_0^{(0)} \end{cases}, 0 < \alpha < 1 \tag{3.2.5}$$

et l'équation de Volterra se réduit ainsi à

$$y(t) = y_0^{(0)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x))\, dx \tag{3.2.6}$$

On introduit l'ensemble suivant

$U = \left\{ y \in C[0,T] : \left\| y - y_0^{(0)} \right\|_{\infty} \leq \theta \right\}$ qui est un sous ensemble fermé en non vide de $E = C[0,T]$ muni de la norme de la convergence uniforme. En effet U est non vide car

$h : t \to y(t) = y_0^{(0)} \in U$ et il est fermé puisque U est en fait la boule fermé de centre h et de rayon θ relativement à $(C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$. On définit l'application suivante

$$\begin{array}{llll} A : & U \to U & \text{telle que} \quad Ay : & [0,T] \to \mathbb{R} \\ & y \mapsto Ay & & t \mapsto Ay(t) = y_0^{(0)} + \int_0^t \frac{(t-z)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(z, y(z))\, dz \end{array}$$

Vérifions que les hypothèses du théorème du point fixe sont réunies pour l'application A.

Soient $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ alors

$$\begin{aligned} |Ay(t_1) - Ay(t_2)| &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} (t_1 - z)^{\alpha-1} f(z, y(z))\, dz - \int_0^{t_2} (t_2 - z)^{\alpha-1} f(z, y(z))\, dz \right| \\ &= \left| \int_0^{t_1} \tfrac{(t_1-z)^{\alpha-1} - (t_2-z)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(z, y(z))\, dz - \int_{t_1}^{t_2} \tfrac{(t_2-z)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(z, y(z))\, dz \right| \\ &\le \tfrac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} \left((t_1 - z)^{\alpha-1} - (t_2 - z)^{\alpha-1} \right) dz - \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - z)^{\alpha-1} dz \right| \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left[2(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha \right] \le \frac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

D'où la continuité de Ay sur $[0,T]$. Par ailleurs, pour $y \in U$ et $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned} \left| Ay(t) - y_0^{(0)} \right| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t (t - z)^{\alpha-1} f(z, y(z))\, dz \right| \le \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \\ &\le \tfrac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} T^\alpha \overset{\blacktriangledown}{\le} \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\theta\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_\infty} = \theta \end{aligned}$$

▼ Ceci découle de $T = \min \left\{ T^*, \left(\frac{\theta\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_\infty} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$ donc $T \le \left(\frac{\theta\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_\infty} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ et par suite $T^\alpha \le \dfrac{\theta\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_\infty}$.

On a montré que $\forall t \in [0,T] : \left| Ay(t) - y_0^{(0)} \right| \le \theta$, et par passage au $\sup\limits_{t\in[0,T]}$ on obtient $\left\| Ay - y_0^{(0)} \right\|_\infty \le \theta$ et cela pour tout $y \in U$. Par suite A est stable dans U.

On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y, \tilde{y} \in U : \|A^n y - A^n \tilde{y}\|_\infty \le \frac{(LT^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)} \|y - \tilde{y}\|_\infty \tag{3.2.7}$$

Pour $n = 0$ (3.2.7) est triviale.

Supposons que cela soit vrai à l'ordre $n-1$ et montrons que cela l'est encore pour n. En effet

$$\begin{aligned}
\|A^n y - A^n \tilde{y}\|_\infty &= \|A(A^{n-1}y) - A(A^{n-1}\tilde{y})\|_\infty \\
&\le \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0\le w\le x} \left| \int_0^w (w-z)^{\alpha-1} \left[f(z, A^{n-1}y(z)) - f(z, A^{n-1}\tilde{y}(z)) \right] dz \right| \\
\|A^n y - A^n \tilde{y}\|_\infty &\le \tfrac{L}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0\le w\le x} \left| \int_0^w (w-z)^{\alpha-1} \left| A^{n-1}y(z) - A^{n-1}\tilde{y}(z) \right| dz \right| \\
&\le \tfrac{L}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^x (x-z)^{\alpha-1} \sup_{0\le w\le z} \left| A^{n-1}y(z) - A^{n-1}\tilde{y}(z) \right| dz \right| \\
&\le \tfrac{L^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(n-1))} \int_0^x (x-z)^{\alpha-1} z^{\alpha(n-1)} \sup_{0\le w\le z} |y(w) - \tilde{y}(w)| \, dz \\
&\le \tfrac{L^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(n-1))} \sup_{0\le w\le x} |y(w) - \tilde{y}(w)| \int_0^x (x-z)^{\alpha-1} z^{\alpha(n-1)} dz \\
&\le \tfrac{L^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(n-1))} \|y-\tilde{y}\|_\infty \tfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(n-1))}{\Gamma(1+\alpha n)} T^{\alpha n}
\end{aligned}$$

Ce qui est bien l'assertion(3.2.7) écrite d'ordre n.

Donc $k_n = \dfrac{(LT^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)}$(qui est évidemment à termes positifs) et

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(LT^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)} = E_{1,\alpha}(LT^\alpha)$$

Nous avons ainsi vérifié toutes les hypothèses du théorème du point fixe. Ainsi, A possède donc un unique point fixe. Par conséquent

$$y(t) = y_0^{(0)} + \int_0^t \frac{(t-z)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(z, y(z)) \, dz$$

qui n'est rien d'autre la solution du problème (3.2.6). Par suite il est solution du problème (Pb DF-bis). D'où le problème aux limites (Pb DF-bis) admet au plus une solution dans U. ∎

Preuve du théorème d'Existence. Nous utilisons des arguments similaires à ceux de la preuve précédente. On considère les mêmes notations A, U. Retenons que A est stable dans U.

On a montré, dans le théorème précédent, que A est continue. Du fait que f était lipschitzienne. Dans ce 2nd théorème ce n'est pas le cas, puisque on suppose que f est continue sur D. f étant continue sur le compact D alors elle est y uniformément continue(Théorème de Haine). En particulier, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |y - z| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x,z)| < \frac{\varepsilon}{T^\alpha} \Gamma(1+\alpha) \tag{3.2.8}$$

Ceci étant possible puisque ε est arbitraire. Par ailleurs, soient $y, \tilde{y} \in U$ tels que

$\|y-\tilde{y}\|_\infty < \delta$ alors, d'aprés(3.2.8) on a $|f(x,y(x)) - f(x,\tilde{y}(x))| < \dfrac{\varepsilon\Gamma(1+\alpha)}{T^\alpha}$ et cela pour tout $x \in [0,T]$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
|Ay(t) - A\tilde{y}(t)| &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} \left[f(z,y(z)) - f(z,\tilde{y}(z)) \right] dz \right| \\
&\leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\varepsilon\Gamma(1+\alpha)}{T^\alpha} \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} dz \right) = \frac{\varepsilon t^\alpha}{T^\alpha} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi par passage au $\sup\limits_{t\in[0,T]}$ on aura la continuité de A. En effet $\|Ay - A\tilde{y}\| \leq \varepsilon$ dés que $\|y-\tilde{y}\|_\infty < \delta$.

On considère l'ensemble suivant $A(U) = \{Ay, y \in U\}$.

Pour $z \in A(U), \exists y \in U : z = Ay$ alors, pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|z(t)| &= |Ay(t)| \leq \left| y_0^{(0)} \right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} |f(z,y(z))| \, dz \\
&\leq \left| y_0^{(0)} \right| + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty T^\alpha < +\infty
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $A(U)$ est borné. Or, on a établit dans la démonstration précédente que, $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$:

$$\begin{aligned}
|Ay(t_1) - Ay(t_2)| &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left(t_1^\alpha - t_2^\alpha + 2(t_2-t_1)^\alpha \right) \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha
\end{aligned}$$

Et si $|t_2 - t_1| < \delta$, alors $|Ay(t_1) - Ay(t_2)| \leq \dfrac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \delta^\alpha$.

Cette dernière relation signifie que $A(U)$ est **équicontinu**. Alors, d'aprés le théorème d'Ascoli-Arzéla; toute suite de $A(U)$ possède une sous-suite convergente, ainsi l'ensemble $A(U)$ est relativement compact. Par conséquent, le théorème du point fixe de Schauder permet d'affirmer que A possède un point fixe, lequel est une solution du problème aux limites en question. Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 3.2.1 *De cette démonstration, nous déduirons une expression de la solution explicite. En effet la résolution d'un problème aux limites est ramené à la recherche du point fixe(unique) d'un opérateur, défini par une intégrale. De plus, on a plus généralement la solution de (3.2.1) donnée par*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x,y(x)) \, dx \tag{3.2.9}$$

En fait le terme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} t^k$ *correspond à une solution de l'équation homogène associée,*

$$D_C^\alpha y(t) = 0$$

sachant qu'elle est donnée à $n-1$ *scalaires prêts. Et le terme*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x))\, dx$$

est la solution particulière de l'équation

$$D_C^\alpha y(t) = f(t, y(t))$$

En tenant compte des conditions initiales $y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, k = 1, .., n-1$ *on aura déterminé les constantes d'intégration. A priori, le principe de résolution d'un problème aux limites, dont l'équation différentielle est à dérivée non entière, est le même que pour un problème de Cauchy ordinaire.*

Proposition 3.2.1 *L'opérateur* $D_C^\alpha : C^{n-1}([0,\infty[) \to C([0,\infty[)$ *avec* $n-1 \leq \alpha < n$ *possède la proprité suivante :*

$$Ker(D_C^\alpha) = vect\left\langle 1, x, ..., x^{n-1} \right\rangle$$

Preuve. Conséquence directe de la résolution de l'équation homogène associée ■

3.3 Résolution analytique d'un problème aux limites

Il existe diverses méthodes analytiques pour la résolution analytique d'un problème aux limites. Dans ce chapitre, nous ferons une synthèse de deux méthodes, qui sont plus au moins exploitable en pratique. La première donne eventuellement la forme explicite de la solution, sinon elle a un intérêt numérique. Comme alternative à cette méthode, on propose la méthode de La transformée de Laplace qui se classe parmi les méthodes de résolution dites "opérationnelle". Pour la commodité des calculs, nous ne traitons que le cas $0 < \alpha < 1$ dans les problèmes aux limites du type

$$\begin{cases} D_C^\alpha y(t) = f(t, y(t)), t \in]0, T] \\ y(0) = b_0 \end{cases} \qquad ((\text{PL}))$$

où $f : D = [0, T] \times [b_0 - \theta, b_0 + \theta]$ pour certain $T, \theta > 0$ est supposée continue sur D et lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

3.3.1 Par transformation aux équations intégrales de Volterra[6]

Comme son nom l'indique, cette méthode repose exclusivement sur l'équation intégrale, non linéaire de Volterra. Les équations intégrales linéaires de Fredholm est un cas particulier de l'équation intégrale, non linéaire, de Volterra.

Par ailleurs, Nous avons démontré que, sous les conditions ci-dessus, que le problème (PL) est équivalent à l'équaion intégrale non linéaire de Volterra suivante

$$y(t) = b_0 + \int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x, y(x))\, dz \qquad (3.3.1)$$

De plus, d'aprés la démonstration du théorème d'unicité nous avons

$\forall y_0 \in U = \{y \in C[0, T] : \|y - b_0\| \leq \theta\}$ la suite

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{n+1} = Ay_n \end{cases} \qquad (3.3.2)$$

est convergente, et converge vers la solution analytique du problème (où A est l'application définie dans la démonstration du théorème 3.2.2). On verra que cette formule n'est pas toujours commode. Dans un cadre pratique, nous appliquons le procédé des itérations successives.

Application

Si $f(t, y) = \lambda y + h(t)$ où h est une fonction continue et $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, les conditions d'existence et d'unicité sont vérifiées. En fait f est affine par rapport à y.

Si on choisit $y_0 : [0, T] \to \mathbb{R}$ qui $t \mapsto y_0(t) = b_0$ alors, évidement $y_0 \in U$. Calculons quelques itérés, puis concluons. Mais d'abord rappelons que pour cette application

$Ay(t) = b_0 + \int\limits_0^t \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\lambda y(x) + h(x))\, dx$ ou encore

$$Ay(t) = b_0 + \lambda I^{(\alpha)} y(t) + I^{(\alpha)} h(t), t \in [0, T] \tag{3.3.3}$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) = &\quad b_0 + \lambda I^{(\alpha)} b_0 + I^{(\alpha)} h(t) = \sum_{k=0}^{1} \lambda^k I^{(k\alpha)} b_0 + \sum_{k=1}^{1} \lambda^{k-1} I^{(k\alpha)} h(t) \\
y_2(t) = &\quad b_0 + \lambda I^{(\alpha)} \left[b_0 + \lambda I^{(\alpha)} b_0 + I^{(\alpha)} h(t)\right] + I^{(\alpha)} h(t) \\
= &\quad \left(b_0 + \lambda I^{(\alpha)} b_0 + \lambda^2 I^{(2\alpha)} b_0\right) + \left(I^{(\alpha)} h(t) + \lambda I^{(2\alpha)} h(t)\right) \\
= &\quad \sum_{k=0}^{2} \lambda^k I^{(k\alpha)} b_0 + \sum_{k=1}^{2} \lambda^{k-1} I^{(k\alpha)} h(t)
\end{aligned}$$

Nous montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n(t) \;= \sum_{k=0}^{n} \lambda^k I^{(k\alpha)} b_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} I^{(k\alpha)} h(t), t \in [0, T] \tag{3.3.4}$$

D'une part, soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^k I^{(k\alpha)} b_0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k b_0 \int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)} dx = b_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} I^{(k\alpha)} h(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} \int_0^t \frac{(t-x)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)} h(x)\, dx = \int_0^t h(x) \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} \frac{(t-x)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}\right) dx$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} I^{(k\alpha)} h(t) = \int_0^t h(x) \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} \frac{(t-x)^{\alpha(k-1)+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha(k-1)+\alpha)}\right) dx$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} I^{(k\alpha)} h(t) = \int_0^t h(x) (t-x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k \frac{(t-x)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right) dx$$

nous remplaçons ces deux sommes par leurs expressions dans $y_n(t)$ ci-dessus, nous obtenons ceci

$$y_n(t) \;= b_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} + \int_0^t h(x)(t-x)^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k \frac{(t-x)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right) dx$$

Et quand on fait tendre n à l'infini, on aura

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) \;= \lim_{n\to\infty} \left[b_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} + \int_0^t h(x)(t-x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda(t-x)^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right) dx\right]$$

Rappelons que, la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ est trés régulière en terme de convergence. Plus précisément, elle est normalement convegente $\forall \alpha, \beta > 0$ et $\forall t, |t| < \infty$ ainsi que ses dérivées successives. Cela permet de faire commuter les deux opérateurs $\sum_{k=0}^{\infty}$ et $\int_0^t$

donc $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = b_0 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)} + \int_0^t h(x)(t-x)^{\alpha-1} \left[\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda(t-x)^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right)\right] dx$

Or, la suite $y_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} y$ où y est la solution recherché. De plus on déduit la fonction de Mittag-Leffler comme étant la limite de sa somme partielle, alors

$$y(t) = b_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} + \int_0^t h(x)(t-x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda (t-x)^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \right) dx$$

ou encore

$$y(t) = b_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t h(x)(t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda (t-x)^\alpha) \, dx, t \in [0,T] \tag{3.3.5}$$

Remarque 3.3.1 *Comme dans la théorie des EDO,le problème auquel nous sommes confrontés, est celui de la détermination d'une expression explicite de la solution pareticulière.*

Remarque 3.3.2 *Si en particulier le problème est autonome i.e* $h \equiv 0$ *alors le prblème se réduit à*

$$\begin{cases} D_C^\alpha y(t) = y(t), t \in]0,T] \\ y(0) = b_0 \end{cases}$$

qui a pour solution $y(t) = b_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$*. Et cela signifie que cette solution engendre le sous espace vectoriel propre de la valeur* 1 *relativement à l'pérateur* D_C^α*. De plus si l'on fait tendre* α *vers* 1 *on retrouve un simple problème de Cauchy puisque*

$$\lim_{\alpha \to 1} D_C^\alpha y(t) = y'(t) \quad et \lim_{\alpha \to 1} b_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) = b_0 E_{1,1}(\lambda t^\alpha) = b_0 e^{\lambda t}$$

Remarque 3.3.3 $\lim_{\alpha \to 1} D_C^\alpha y(t) = y'(t)$ *[8].*

Remarque 3.3.4 *Pour* $\alpha > 1$ *le procédé est le même et on retrouve une expression similaire lorsque* $0 < \alpha < 1$*.*

3.3.2 Transformation de Laplace[11]

La théorie des transformées de Laplace(ou transformation de Laplace) que l'on désigne aussi sous le nom de calcul operationnel, est devenue un outil puissant pour les mathématiques théoriques ainsi que pour l'ingénieurs. Son intérêt théorique permet de résoudre divers problèmes de la physique. Plus précisément, elle permet de résoudre, analytiquement, quelques équations différentielles linéaires. Dans cette partie, nous allons l'employer pour résoudre des équations différentielle fractionnaires, accompagnées de conditions initiales.

Définition 3.3.1 *Soit f une fonction définie pour $t > 0$; la transformée de Laplace de f notée $\mathcal{L}(f)$ ou encore F est définie par*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, s > 0 \tag{3.3.6}$$

où nous supposons, que la variable s est réelle. Mais en général, on considère s complexe.

Notation 3.3.1 *Si nous notons une fonction de t par une lettre miniscule, $f(t), g(t), y(t)$.. alors sa transformée de Laplace sera une fonction de s notée par la lettre majuscule correspondante $F(s), G(s), Y(s)$. On trouve parfois dans certains ouvrages, une autre notation exprimée comme suit*

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{3.3.7}$$

Dans ce travail, nous adoptons les notations majuscules.

Définition 3.3.2 *Une fonction f est dite Exponentiel d'ordre γ s'il existe des constantes réelles $M > 0$ et $N \in \mathbb{R}$, telles que*

$\forall t > N, |e^{-\gamma t} f(t)| < M$ *ou encore* $|f(t)| < Me^{\gamma t}$.

Exemple 3.3.1 *les polynômes sont des fonctions d'ordre Exponentiel. En effet pour la fonction $t \mapsto t^n$ on a: $|t^n| < 1e^{nt}, \forall t > 0$ est Exponentielle d'ordre n.*

Exemple 3.3.2 *Plus généralement pour les fonctions $t \mapsto t^n$ où n n'est pas nécessairement entier, sont aussi d'ordre Exponentiel n.*

Exemple 3.3.3 *Les fonctions bornée sont également d'ordre Exponentiel.*

Exemple 3.3.4 *La fonction* $t \mapsto e^{t^2}$ *n'est pas d'ordre Exponentielle puisque*

$$\left|e^{-\gamma t}e^{t^2}\right| = \left|e^{-\gamma t+t^2}\right| \longrightarrow \infty \text{ quand } t \to \infty.$$

Autrement dit, les fonctions d'ordre Exponentiel sont des fonctions à croissance au plus Exponentielle!

Théorème 3.3.1 (condition suffisante d'existence des transformées de Laplace) *Si* $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction continue par morceaux sur tout intervalle* $[0, N[$ *fini, et si elle est d'ordre Exponentielle* γ *pour* $t > N$, *alors sa transformée de Laplace existe pour tout* $s > \gamma$.

Preuve. Nous avons pour tout $N > 0$

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^N e^{-st}f(t)\,dt + \int_N^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

Puisque f est continue par morceaux sur tout intervalla fini $[0, N[$ alors la prmière intégrale existe. Et puisque f est Exponentielle d'ordre γ pour $t > N$, alors on a

$$\begin{aligned}\left|\int_N^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right| &\leq \int_N^\infty \left|e^{-st}f(t)\right| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-st}\left|f(t)\right| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-st}Me^{\gamma t}dt = \frac{M}{s-\gamma}\end{aligned}$$

Et par conséquent, la transformée de Laplace existe dés que $s > \gamma$. ∎

3.3.3 Quelques propriétés de la transformée de Laplace

Dans ce qui suit, nous supposerons, à moins que nous ne l'indiquions explicitement, que toutes les fonctions satisfont aux conditions du théorème(condition suffisante d'existence de la transformée de Laplace).

1. **Linéarité**

   Si c_1 et c_2 sont deux constantes réelles quelconque et f, g sont deux fonctions dont les transformées de Laplace existent, alors

   $$\mathcal{L}(c_1 f + c_2 g) \equiv c_1\mathcal{L}(f) + c_2\mathcal{L}(g) \tag{3.3.8}$$

   Cette linéarité est dûe, tout simplement, à la linéarité de l'opérateur intégrale.

2. **Translation**

Si on pose $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathcal{L}\left(e^{at} f(t)\right)(s) = F(s-a) \tag{3.3.9}$$

En effet $\mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a)$.

3. $2^{\text{ème}}$ **propriété de linéarité**

Si on pose $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ et $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t > a \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$ où $a > 0$.

Alors on a

$$\mathcal{L}(g)(s) = e^{-as} F(s) \tag{3.3.10}$$

En effet $\mathcal{L}(g)(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = \int\limits_a^\infty e^{-st} f(t-a)\, dt$

Posons $u = t - a$ alors cette intégrale devient

$\mathcal{L}(g)(s) = \int\limits_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u)\, du = e^{-as} \int\limits_0^\infty e^{-su} f(u)\, du = e^{-as} F(s)$

4. **Transformée de Laplace d'un produit de convolution**

Soient f, g deux fonctions causales et convolable en tout point $t \geq 0$ telles que $\mathcal{L}(f)$, $\mathcal{L}(g)$ et $\mathcal{L}(f * g)$ existent. Alors

$$\mathcal{L}(f * g) \equiv \mathcal{L}(f)\, \mathcal{L}(g) \tag{3.3.11}$$

En effet

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} (f * g)(t)\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-st} \left[\int\limits_0^\infty f(t-x)\, g(x)\, dx \right] dt$$

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = \iint\limits_{[0,\infty[^2} e^{-st} e^{sx} e^{-sx} f(t-x)\, g(x)\, dx dt = \iint\limits_{[0,\infty[^2} e^{-s(t-x)} f(t-x)\, e^{-sx} g(x)\, dx dt$$

Posons $\begin{cases} \alpha = t - x \\ \beta = x \end{cases}$ Ainsi $\left| Jac_{(\alpha,\beta)}(t, x) \right| = 1$

De plus $\left\{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2\right\}$ devient $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$, donc

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{(f*g)(t)\right\}(s) &= \iint\limits_{[0,\infty[^2} e^{-s(t-x)} f(t-x)\, e^{-sx} g(x)\, dx dt \\
&= \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} e^{-s\alpha} f(\alpha)\, e^{-s\beta} g(\beta)\, d\alpha d\beta \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-s\alpha} f(\alpha)\, d\alpha\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-s\beta} g(\beta)\, d\beta\right) \\
&\overset{f|_{\mathbb{R}_-}\equiv 0}{=} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-s\alpha} f(\alpha)\, d\alpha\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-s\beta} g(\beta)\, d\beta\right) \\
&= F(s)\, G(s)
\end{aligned}
$$

5. **Transformée de Laplace d'une intégrale**

Une telle intégrale n'est qu'un cas particulier de convolution.

Rappelons que $I^{(1)} f(t) = \int\limits_0^t f(x)\, dx$.

Alors $\mathcal{L}\left\{I^{(1)} f(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{(H*f)(t)\right\}(s) = \mathcal{L}(H)(s)\, F(s)$

où H est la fonction de Heaviside, dont la transformée de Laplace est

$\mathcal{L}(H)(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}$. Donc

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t f(x)\, dx\right\}(s) = \frac{F(s)}{s},\, s > 0 \tag{3.3.12}$$

plus généralement $I^{(n)} f(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-x)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(x)\, dx$. et pour $n \geq 0$ quelconque, *pas nécessairement entier*

$$\mathcal{L}\left\{I^{(n)} f(t)\right\}(s) = \frac{F(s)}{s^{n-1}},\, s > 0 \tag{3.3.13}$$

Cette formule sera utilisée pour determiner la transformée de Laplace des dérivée fractionnaires des fonctions.

6. **Transformée de Laplace d'une dérivée**

Si f est de classe C^1 par morceaux sur $[0, \infty[$ et telles que f et f' soient d'ordre Exponentiel, alors

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0)\,,\, s > 0 \tag{3.3.14}$$

En effet, cette formule s'obtient par une simple intégration par parties. Même si la démonstration de cette propriété est simple, ce résultat particulièrement, est d'une "immense" importance en théorie des EDO.

Plus généralement, on a la formule suivante, si l'on suppose que f est continûment dérivable jusqu'à l'ordre n.

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n} s^{n-k} f^{(k)}(0), s > 0 \tag{3.3.15}$$

Cette formule s'obtient en faisant n intégrations par parties via un raisonnement par récurrence.

7. **La transformée de Laplace de quelques fonctions usuelle**

$f(t), t > 0$	$t^\alpha, \alpha > 0$	$\sin(at)$	$\cos(at)$	e^{at}	$t^n f(t)$	$\frac{f(t)}{t}$
$F(s), s > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha-1)}{s^{\alpha+1}}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{s-a}, s > a$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	$\int_s^\infty f(u)\,du$

Remarque 3.3.5 *Si f n'est pas continue en $t_0 = 0$ alors on remplace $f(0)$ par $f(0^+)$ surtout lorsqu'on utilise une intégration par parties dans une démonstration.*

8. **La transformée de Laplace inverse**

L'intérêt le plus important venant de l'utilisation de la transformation de Laplace, est qu'elle transforme une équation différentielle, accompagnée des conditions aux limites, en équation algébrique, dont l'iconnue est la transformée de Laplace de la fonction, en incluant les conditions aux limites. Pour revenir à la fonction recherchée, on fait appel à la transformation de Laplace inverse, dont la définition est rappelée ci-dessous :

Définition 3.3.3 ([8]) *Pour une fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ dont sa transformée de Laplace existe et est notée F alors, on définie la transformée de Laplace inverse si l'on considère uniquement les variables sont réelles, ainsi*

$$f(t) = \int_0^\infty e^{st} F(s)\,ds, t > 0 \tag{3.3.16}$$

On trouve aussi parfois

$$\left(\mathcal{L}^{-1}F\right)(t)=\int_0^\infty e^{st}\left(\mathcal{L}f\right)(s)\,ds, t>0 \tag{3.3.17}$$

Remarque 3.3.6 *L'opérateur $\mathcal{L}^{-1}$ vérifie des propriétés similaires à celles vérifiées par son opérateur inverse $\mathcal{L}$. Le calcul explicite des transformées de Laplace inverse se fait en général par le théorème des résidus d'analyse complexe.*

Ce bref résumé sur la transformée de Laplace, nous permet d'avoir un aperçu sur son utilité dans le contexte des équations différentielles fractionnaires. Nous supposerons dans cette partie que les fonction y et f sont d'ordre exponentiel. Il est à signaler que c'est le cas pour une classe importante d'équations différentielles fractionnaires que l'on rencontre.

Considérons à nouveau le problème (PL), on suppose aussi que les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité sont vérifiées.

On a $D_C^\alpha y(t)=D_{RL}^\alpha\left[y(t)-y(0)\right]=\dfrac{d}{dt}\left[I^{(1-\alpha)}y(t)\right]-b_0\dfrac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$

Si on passe à la transformée de Laplace, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{D_C^\alpha y(t)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}I^{(1-\alpha)}y(t)\right\}(s)-b_0\mathcal{L}\left(\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right)(s)\\ &= s\mathcal{L}\left\{I^{(1-\alpha)}y(t)\right\}(s)-\left(I^{(1-\alpha)}y\right)(0)-\frac{b_0}{s^{1-\alpha}}\\ &= s\frac{Y(s)}{s^{1-\alpha}}-\frac{b_0}{s^{1-\alpha}}\\ &= \frac{Y(s)}{s^{-\alpha}}-\frac{b_0}{s^{1-\alpha}}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left\{D_C^\alpha y(t)\right\}(s)=\frac{Y(s)}{s^{-\alpha}}-\frac{y(0)}{s^{1-\alpha}}, 0<\alpha<1 \tag{3.3.18}$$

on a $\mathcal{L}\left\{D_C^\alpha y(t)\right\}(s)=\mathcal{L}\left\{f(t,y(t))\right\}(s)$

Ainsi $\dfrac{Y(s)}{s^{-\alpha}}-\dfrac{b_0}{s^{1-\alpha}}=F(s)$ alors $Y(s)=\dfrac{b_0}{s}+\dfrac{F(s)}{s^\alpha}$

Pour retouver $y(t)$ on passe à la transformée de Laplace inverse :

$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}(t)=b_0\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{F(s)}{s^\alpha}\right)$

Par suite $y(t)=b_0+\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{F(s)}{s^\alpha}\right)=b_0+I^{(\alpha)}f(t,y(t))$

$$y(t)=b_0+\int_0^t\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(x,y(x))\,dx$$

Remarque 3.3.7 *On retrouve ainsi, l'équation intégrale non linéaire de Volterra ci-dessus. qui correspond à la solution explicite du problème.*

Pour mettre en évidence les particularités de la résolution d'un problème aux limites par la méthode de la transformée de Laplace par rapport à la méthode des approximations successives, reprenons la même application avec les mêmes hypothèses.

Théorème 3.3.2 ([6]) *Soient $m, k \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta > 0$ alors on a les égalités suivantes*

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(t^{\alpha}\right)\right) = t^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}\left(t^{\alpha}\right) \qquad (i)$$

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha k+\beta-1}\left[E_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(\pm a t^{\alpha}\right)\right]\right\}(s) = \frac{k!s^{\alpha-\beta}}{\left(s^{\alpha}\mp a\right)^{k+1}} \qquad (ii)$$

où $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!}{j!\Gamma(\alpha j+\alpha k+\beta)}t^{j}$ *[7]*

Preuve. Pour démontrer l'égalité (i) il suffit de rappeler que la série, qui définit la fonction de Mittag-Leffler, est normalement convergente ainsi que ses dérivées. Donc

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(t^{\alpha}\right)\right) = \frac{d^m}{dt^m}\left(t^{\beta-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(t^{\alpha}\right)^j}{\Gamma(\alpha j+\beta)}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha j+\beta)}\frac{d^m}{dt^m}\left(t^{\alpha j+\beta-1}\right)$$

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(t^{\alpha}\right)\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha j+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha j+\beta)}{\Gamma(\alpha j+\beta-m)}t^{\alpha j+\beta-1-m}$$

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(t^{\alpha}\right)\right) = t^{\beta-1-m}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(t^{\alpha}\right)^j}{\Gamma(\alpha j+\beta-m)} = t^{\beta-1-m}E_{\alpha,\beta-m}\left(t^{\alpha}\right)$$

Ce qui établit l'identité (i).

Par ailleur, pour l'identité (ii) nous avons, tout d'abord

$$\begin{aligned} t^{\alpha k+\beta-1}\left[E_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(\pm a t^{\alpha}\right)\right] &= t^{\alpha k+\beta-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!}{j!\Gamma(\alpha j+\alpha k+\beta)}\left(\pm a t^{\alpha}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(\pm a)^j\frac{(j+k)!}{j!}\frac{t^{\alpha k+\alpha j+\beta-1}}{\Gamma(\alpha j+\alpha k+\beta)} \end{aligned}$$

Rappelons que cette dernière série est normalement convergente ainsi que ses dérivées successives. Elle est donc uniformément convergente ainsi que ses dérivées alors, dans ce cas, les deux opéréteurs $\mathcal{L}$ et $\sum_{j=0}^{\infty}$ commutent

Donc $\mathcal{L}\left(t^{\alpha k+\beta-1}\left[E_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(\pm at^{\alpha}\right)\right]\right)(s)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\pm a\right)^{j}\frac{(j+k)!}{j!}\mathcal{L}\left(\frac{t^{\alpha k+\alpha j+\beta-1}}{\Gamma\left(\alpha j+\alpha k+\beta\right)}\right)(s)\ldots(*)$

En utilisant la table ci-dessus pour affirmer que $\mathcal{L}\left(\frac{t^{\alpha k+\alpha j+\beta-1}}{\Gamma\left(\alpha j+\alpha k+\beta\right)}\right)(s)=\frac{1}{s^{\alpha j+\alpha k+\beta}}$ que l'on remplace dans $(*)$ nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(t^{\alpha k+\beta-1}\left[E_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(\pm at^{\alpha}\right)\right]\right)(s) &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\pm a\right)^{j}\frac{(j+k)!}{j!}\frac{1}{s^{\alpha j+\alpha k+\beta}}\\ &= s^{-\beta}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!}{j!}\left(\pm as^{-\alpha}\right)^{j+k}\end{aligned}$$

Et cette série correspond au développement de Taylor de la fonction $\frac{k!s^{\alpha}}{\left(s^{\alpha}\mp a\right)^{k+1}}$. D'où l'identité (ii). ■

Application

$$\begin{cases} D_{C}^{\alpha}y(t)=\lambda y(t)+g(t)\\ y(0)=b_{0}\end{cases}$$

Pour trouver la solution explicite de ce problème, nous procédons en deux étapes :

1ère étape Résoudre l'équation différencielle fractionnaire homogène associée :

$$D_{C}^{\alpha}y(t)-\lambda y(t)=0 \tag{3.3.19}$$

Nous passons à la transformée de Laplace , nous obtenons

$$\mathcal{L}\left\{D_{C}^{\alpha}y(t)\right\}(s)=\mathcal{L}\left\{\lambda y(t)\right\}(s) \tag{3.3.20}$$

Et en tenant compte des propriétés de l'opérateur $\mathcal{L}$ cette écriture devient

$\frac{Y(s)}{s^{-\alpha}}-\frac{y(0)}{s^{1-\alpha}}=\lambda Y(s)$ donc $Y(s)=b_{0}\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-\lambda}$

Si on identifie cette expression avec le résultat (ii) du théorème précédent nous aurons $k=0,\beta=1$ et $a=\lambda$ donc

$$y_{0}(t)=b_{0}E_{\alpha,1}\left(\lambda t^{\alpha}\right) \tag{3.3.21}$$

est la solution de l'équation homogène

2ème étape Trouver la solution particulière associée.

Théorème 3.3.3 ([4]) *La solution particulière de l'EDF $D_{C}^{\alpha}y(t)=\lambda y(t)+g(t)$ est sous forme intégrale suivante*

$$y_{p}(t)=\int_{0}^{t}\left(t-x\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(t-x\right)^{\alpha}\right)g(x)\,dx,t\geq 0 \tag{3.3.22}$$

Preuve. Montrons que $D_C^\alpha y_p(t) - \lambda y_p(t) = g(t)$. Remarquons que

$y_p(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) * g(t)$ que l'on applique l'opérateur $\mathcal{L}$ de part et d'autre on aura

$Y_p(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)\}(s)\, G(s)$

Or, d'aprés (ii) si on identifie les paramètres comme suit $\alpha = \beta, a = \lambda$ et $k = 0$ alors

$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)\}(s) = \dfrac{1}{s^\alpha - \lambda}$ donc $Y_p(s) = \dfrac{G(s)}{s^\alpha - \lambda}$

Par suite $s^\alpha Y_p(s) - \lambda Y_p(s) = G(s)$

De plus, il est clair que $y_p(0) = 0$

alors, on peut écrire $\left(s^\alpha Y_p(s) + \dfrac{y_p(0)}{s^{1-\alpha}}\right) - \lambda Y_p(s) = G(s)$

Or $\left(s^\alpha Y_p(s) + \dfrac{y_p(0)}{s^{1-\alpha}}\right) = \mathcal{L}\{D_C^\alpha y_p(t)\}(s)$

ainsi $\mathcal{L}\{D_C^\alpha y_p(t) - \lambda y_p(s)\}(s) = \mathcal{L}(G(t))(s)$. Il suffit alors, de composer avec $\mathcal{L}^{-1}$ et l'EFD apparait. Par conséquent l'équation intégrale est bien solution particulière du problème. ■

La solution générale de l'EDF qui vérifie une condition initiale est donc la somme de la solution homogène(3.3.21) et la solution particulière(3.3.22).

$$y(t) = b_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda (t-x)^\alpha)\, g(x)\, dx, t \geq 0 \tag{3.3.23}$$

CHAPITRE 4

Application en Rhéologie linéaire

La Rhéologie concerne la modélisation de l'écoulement de la matière ou encore la science du comportement des matériaux. La viscoélasticité linéaire rentre dans ce cadre de Rhéologie. Le mot viscoélasticité est composé de deux termes, visco et élasticité. Le premier est relatif aux effets visqueux de la matière et le second exprime la réponse instantanée de la matière.

D'un point de vu de la modélisation unidimensionnelle, le comportement visqueux linéaire est exprimé par une relation linéaire liant la contrainte de Cauchy et la vitesse de déformation $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$. En revanche, en élasticité linéaire, la contrainte est liée linéairement à la déformation, via le module d'Young $\sigma = E\varepsilon$.

En viscoélasticité linéaire, la réponse se trouve entre les deux réponses. Dans ce chapitre on considère le comportement unidimensionnel et linéaire.

4.1 Définition de la viscoélasticité linéaire et position du problème

Pour un système mécanique linéaire constitué d'une masse liée à un ressort, la force appliquée (la contrainte dans le cadre d'une description via un milieu continu) est proportionnelle au déplacement. De plus, la dissipation visqueuse classique (fluide newtonien) est proportionnelle à la dérivée temporelle de la déformation **[3]**.

L'hypothèse de base faite pour les matériaux viscoélastiques linéaires est que la contrainte à l'instant actuel est une fonction linéaire de toute l'histoire des déformations **[2]**. Deux essais fondamentaux sont les plus souvent employés pour définir les fonctions de relaxation et de fluage. **L'essai de fluage** consiste à imposer de façon instantanée une contrainte constante à une éprouvette et à suivre ses déformations en fonction du temps. Quant à **l'essai de relaxation**, on impose une déformation instantanée, on la maintient constante et on mesure les variations de la contrainte en fonction du temps.

Dans tout ce qui suit nous adoptons les notations suivantes :

σ : désigne la contrainte ;

ε : désigne la déformation ;

η : la constante de viscosité (amortisseur) ;

E : le module/constante d'élasticité (ressort) ;

M : module d'un élément rhéologique, qui est définit par

$$M(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)}, \omega \in \mathbb{C} \tag{4.1.1}$$

H : désigne la fonction de Heaviside, $H(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$;

$R(t)$: la fonction de relaxation ;

$J(t)$: la fonction du fluage.

Les éléments élémentaires rhéologiques sont le ressort et l'amortisseur; ils sont représentés comme suit :

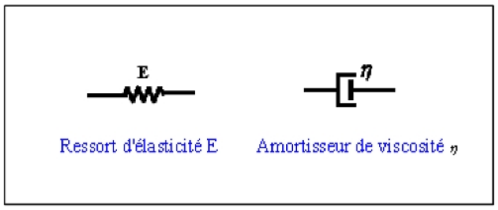


Figure 4.1.1 : élément rhéologiques élémentaires

1. L'élasticité pour un solide est définie par la loi de Hooke

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) \tag{4.1.2}$$

Le ressort représente un élément élastique idéal, où la contraite σ est proportionnelle à la déformation ε via le module d'élasticité du ressort E.

2. La loi d'un fluide visqueux de Newton

$$\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t) \tag{4.1.3}$$

L'amortisseur représente un élément visqueux idéal, mais dans ce cas la contrainte σ est proportionnelle à la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ via la constante de viscosité η.

Définition 4.1.1 *D'une façon générale, la loi du comportement d'un matériau exprime la correspondance fonctionnelle existant entre l'histoire des contraintes et l'histoire des déformations. Dans le cas uniaxial, il s'agit de la correspondance fonctionnelle entre l'histoire de σ et l'histoire de ε.*

A chaque instant t ,la déformation $\varepsilon(t)$ dépend de l'histoire de la contrainte jusqu'à cet instant

$$\varepsilon(t) = \digamma(\sigma(\theta))_{\theta\in]-\infty,t]} \tag{4.1.4}$$

*où $\digamma$ est une fonctionnelle linéaire **[10,2]** .*

Admettons que les transformées de Fourier des fonctions σ et ε existent alors :

1. D'aprés (4.1.2) on a $\hat{\sigma}(\omega) = E\hat{\varepsilon}(\omega)$. Par suite $\dfrac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = E$. Donc un élément élastique pur possède un module constant.

$$M_e \equiv E \tag{4.1.5}$$

2. D'aprés (4.1.3) on a $\hat{\sigma}(t) = \eta i\omega\hat{\varepsilon}(\omega)$:

$$M_v(\omega) = \eta i\omega \tag{4.1.6}$$

Nous combinons ces élément purement élastiques et purement visqueux nous obtenons des modèles rhéologiques linéaires de base, ils sont au nombre de trois :

- Maxwell ;
- Kelvin-Voigt ;
- Zener .

L'objectif est de choisir un modèle cohérent qui décrit un comportement viscoélastique solide, c'est-à-dire, capable de décrire le fluage et la relaxation.

4.2 Modèles rhéologiques simples

En général, les modèles rhéologiques simples conduisent à des lois de comportement qui s'expriment sous forme d'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0\varepsilon(t) + a\dot{\varepsilon}(t) = \sigma(t) + b\dot{\sigma}(t) \tag{4.2.1}$$

où a_0, a_1 et b sont des paramètres liés au matériau **[11]**.

Principe de superposition de Boltzmann [10] :

La linéarité du comportement permet alors d'écrire la réponse à toute histoire de contrainte ou de déformation, à partir de la connaissance des fonctions de fluage ou de relaxtion. Le principe est simple, on impose au modèle une déformation (ou une contrainte) puis on résoud l'équation différentielle correspondante au comportement pour trouver la contrainte (ou on la déformation). Ensuite, on applique le formule de Boltzmann pour avoir la réponse pour un chargement quelconque. Sans restreindre la généralité on suppose que le système est initialement en repos pour $t < 0$ alors, on a d'une part

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t R(t-s)\,\varepsilon(s)\,ds \tag{4.2.2}$$

Et d'autre part

$$\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t J(t-s)\,\sigma(s)\,ds \tag{4.2.3}$$

Remarque 4.2.1 *L'invariance par translation des fonctions de fluage et de relaxation se traduit à travers $t - s$. En d'autres termes, le matériau est supposé non vieillissant; dans le cas contraire, les fonctions de fluage et de relaxation s'expriment de la manière suivante :*

$R(t,s)$ *et* $J(t,s)$.

Remarque 4.2.2 *Ces fonctions sont inverses l'une de l'autre.*

4.2.1 Modèle de Kelven Voight

Ce modèle est formé de l'association *en parallèle* d'un ressort, de module d'élasticité E_1 et d'un amortisseur de viscosité η.

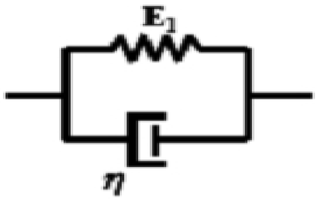


Figure 4.2.1 : Modèle de Kelvin-Voigt

La contrainte imposée à l'ensemble est la somme des contrainte de chaque élément

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v \tag{4.2.4}$$

Par contre, la déformation totale que subit le modèle est identique à la déformation que subie chaque élément

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \tag{4.2.5}$$

D'aprés (4.1.2) on a $\sigma_e(t) = E_1\varepsilon_e(t)$. Et d'aprés (4.1.3) on a $\sigma_v(t) = \eta\dot{\varepsilon}_v(t)$

Par suite

$$\sigma(t) = E_1\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \tag{4.2.6}$$

Ainsi en passant à la transformée de Fourier on trouve son module complexe

$$M_{KV}(\omega) = E_1(1 + \tau_C\omega) \tag{4.2.7}$$

où $\tau_C = \frac{\eta}{E_1}$ désigne le temps de fluage du modèle.

On applique le principe de superposition de Boltzmann (4.2.3), on trouve aisément, la fonction de fluage du modèle de Kelvin-Voigt, en effet

$$\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t J(t-x)\,\sigma(x)\,dx \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \tilde{J}(s) = \frac{\tilde{\varepsilon}(s)}{\sigma(s)\,s} \tag{4.2.8}$$

Ainsi, nous appliquons l'opérateur $\mathcal{L}$ pour l'équation (4.2.6), nous obtenons

$$\tilde{\sigma}(s) = E_1\tilde{\varepsilon}(s) + \eta s\tilde{\varepsilon}(s) - \eta\varepsilon(0)$$

Ainsi $\dfrac{\tilde{\varepsilon}(s)}{\sigma(s)\,s} = \dfrac{H(s)}{s(E_1+\eta s)}$ avec $\varepsilon(0) = 0$.

Par suite, par passage à $\mathcal{L}^{-1}$ on aura

$$J_{KV}(t) = \frac{1}{E_1}\left(1-\exp\left(-\frac{E_1}{\eta}t\right)\right)H(t) \tag{4.2.9}$$

Ce qui signifie que si on impose, par exemple, au modèle de Kelvin Voigt une contrainte du type

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \tag{4.2.10}$$

alors il suffit de remplacer dans la formule de Boltzmann, pour déduire que la déformation subie par le modèle est donnée par :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0\frac{d}{dt}(J_{KV} * H)(t) = \sigma_0 J_{KV}(t) \tag{4.2.11}$$

Ainsi

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1}\left(1-\exp\left(-\frac{E_1}{\eta}t\right)\right)H(t) \tag{4.2.12}$$

Qui, en fait est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} E_1\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) = \sigma_0 H(t) \\ \varepsilon(0) = 0 \end{cases} \tag{4.2.13}$$

Remarque 4.2.3 *Il est clair que* $\varepsilon(t) = \dfrac{\sigma_0}{E_1}\left(1-\exp\left(-\dfrac{E_1}{\eta}t\right)\right)H(t)$ *est solution du problème donné au sens des distributions.*

Conclusion 4.2.1 *Ce modèle peut représenter un comportement en fluage, toutefois il ne prédit pas la relaxation des contraintes.*

4.2.2 Modèle de Maxwell

Ce modèle est formé de l'association *en série* d'un ressort, de module d'élasticité E_0 et d'un amortisseur de viscosité η.

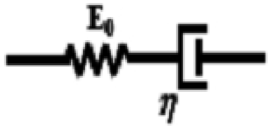


Figure 4.2.2 : Modèle de Maxwell

Pour ce modèle, la contrainte imposée sur toute le système est égale à la contrainte imposée sur chaque élémént

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v \tag{4.2.14}$$

Par contre, la déformation que subit le système est la somme des déformations que subit chaque élément

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \tag{4.2.15}$$

Idem, d'aprés (4.1.2) on a $\sigma(t) = E_0 \varepsilon_e(t)$ Alors

$$\frac{1}{E_0} \dot{\sigma}(t) = \dot{\varepsilon}_e(t) \tag{i}$$

Et d'aprés (4.1.3) on a

$$\frac{1}{\eta} \sigma(t) = \dot{\varepsilon}_v(t) \tag{ii}$$

En sommant (i) et (ii) on trouve l'équation différentielle du comportement du modèle de Maxwell

$$\frac{1}{E_0} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t) = \dot{\varepsilon}(t) \tag{4.2.16}$$

On passe à la transformée de Fourier dans (4.2.16) pour obtenir le module complexe du modèle de Maxwell, suivant :

$$M(\omega) = \frac{E_0 (\omega \tau_R)^2}{1 + (\omega \tau_R)^2} + i \frac{\eta \omega}{1 + (\omega \tau_R)^2} \tag{4.2.17}$$

où $\tau_R = \dfrac{\eta}{E_0}$ est le temps de relaxation du modèle.

Ainsi L'équation (4.2.16) devient

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\tau_R}\sigma(t) = E_0\dot{\varepsilon}(t) \tag{4.2.18}$$

En appliquant le principe de superposition (4.2.2), on trouve aisément, la fonction de relaxation du modèle de Maxwell, en effet :

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt}(R * \varepsilon)(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \tilde{R}(s) = \frac{\tilde{\sigma}(s)}{s\tilde{\varepsilon}(s)} \tag{4.2.19}$$

Alors, nous appliquons l'opérateur $\mathcal{L}$ à l'équation (4.2.18) nous obtenons

$$s\tilde{\sigma}(s) - \sigma(0) + \frac{1}{\tau_R}\tilde{\sigma}(s) = E_0\left(s\tilde{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0)\right)$$

Ainsi $\dfrac{\tilde{\sigma}(s)}{s\tilde{\varepsilon}(s)} = \dfrac{E_0}{s + \dfrac{1}{\tau_R}} H(s)$ avec

$$\sigma(0) - E_0\varepsilon(0) = 0 \text{ et } \sigma(0), \varepsilon(0) \geq 0 \tag{4.2.20}$$

Par passage à $\mathcal{L}^{-1}$ on obtient $R(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{E_0}{s + \dfrac{1}{\tau_R}}\right) = E_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau_R}\right) H(t)$

$$R_M(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_R}\right) H(t) \tag{4.2.21}$$

Ce qui signifie que si on impose une déformation du type $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ alors la contrainte qui en découle est la suivante :

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(R * H)(t) = \varepsilon_0 E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_R}\right) H(t) \tag{4.2.22}$$

De plus, on a $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $\sigma(0) = \varepsilon_0 E_0$ qui vérifie bien la condition (4.2.20). Par suite la solution du problème

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) + \dfrac{1}{\tau_R}\sigma(t) = E_0\varepsilon_0\delta(t) \\ \sigma(0) = \varepsilon_0 E_0 \end{cases} \tag{4.2.23}$$

qui a pour solution (au sens des distribution, évidemment) la contrainte donnée par

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_R}\right) H(t) \tag{4.2.24}$$

Conclusion 4.2.2 *Ce modèle peut représenter un comportement pour un fluide visqueux*

$$\lim_{t \to \infty} R_M(t) = 0$$

en relaxation. Cependant, il ne manifeste aucun fluage.

4.2.3 Modèle de Zener

Le modèle de Zener est issu de la superposition d'un modèle de Kelvin Voigt de paramètres(E_1, η) et un ressort de module d'élasticité E_0 en série (ou en parallèle).

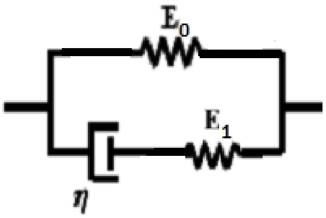


Figure 4.2.3 : Modèle de Zener

Ainsi,

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \text{ et } \varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 \tag{4.2.25}$$

Où σ_0, ε_0 sont la contrainte et la déformation imposée sur le ressort et σ_1, ε_1 sont encore la contrainte et la déformation du modèle de Maxwell respectivement. Par suite ε et σest la déformation et la contrainte totales imposées au modèle de Zener.

On a alors $\begin{cases} \sigma_0(t) = E_0 \varepsilon_0(t) \\ \dfrac{1}{E_1} \dot{\sigma}_1(t) + \dfrac{1}{\eta} \sigma_1(t) = \dot{\varepsilon}_1(t) \end{cases}$

En combinant ces deux équations et en tenant compte de (4.2.25) on aura l'équation différentielle du comportement du modèle de Zener

$$\sigma(t) + \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}(t) = E_0 \varepsilon(t) + \eta \frac{E_0 + E_1}{E_1} \dot{\varepsilon}(t) \tag{4.2.26}$$

D'une part, le module complexe $M_Z(\omega) = \dfrac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)}$ du modèle sera donnée par l'expression suivante :

$$M_Z(\omega) = \frac{E_0 + \frac{E_0 + E_1}{E_1^2} (\eta\omega)^2}{1 + (\tau_R \omega)^2} + i \frac{\omega\eta}{1 + (\tau_R \omega)^2} \tag{4.2.27}$$

Et en posant

$$\begin{cases} \tau_R = \dfrac{\eta}{E_1} \text{ temps de relaxation;} \\ \tau_C = \dfrac{\eta\left(E_0 + E_1\right)}{E_0 E_1} \text{ temps de fluage.} \end{cases}$$

D'autre part, on peut écrire l'équation (4.2.26) moyennant les nouveaux paramètres. on divise sur $E_0 + E_1$ et elle devient :

$$\sigma(t) + \tau_R \dot{\sigma}(t) = E_0 \varepsilon(t) + \tau_C E_0 \dot{\varepsilon}(t) \tag{4.2.28}$$

On a

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt}(R * \varepsilon)(t) \tag{4.2.29}$$

Alors, par passage à $\mathcal{L}$ on obtient

$$\tilde{\sigma}(s) = s\tilde{R}(s)\tilde{\varepsilon}(s)$$

Donc

$$\tilde{R}(s) = \frac{\tilde{\sigma}(s)}{s\tilde{\varepsilon}(s)} \tag{4.2.30}$$

D'aprés (4.2.28) on a

$$\tilde{\sigma}(s) + \tau_R\left(s\tilde{\sigma}(s) - \sigma(0)\right) = E_0\tilde{\varepsilon}(s) + \tau_C E_0\left(s\tilde{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0)\right)$$

Par suite $\tilde{\sigma}(s)(1 + \tau_R s) = s\tilde{\varepsilon}(s)\left(\tau_C E_0 + \frac{E_0}{s}\right) + \tau_R \sigma(0) - \tau_C E_0 \varepsilon(0)$

Nous supposons à priori que $\tau_R \sigma(0) - \tau_C E_0 \varepsilon(0) = 0$ (avec $\sigma(0) \neq 0$ et $\varepsilon(0) \neq 0$) on obtient

$$\frac{\tilde{\sigma}(s)}{s\tilde{\varepsilon}(s)} = \frac{\tau_C E_0 + \frac{E_0}{s}}{1 + \tau_R s}$$

Par passage à la transformée de Laplace inverse, nous obtenons

$$R(t) = \left(E_0 + E_1 \exp\left(\frac{-t}{\tau_R}\right)\right) H(t)$$

On obtient de la même manière la fonction du fluage si nous appliquons le second principe de Boltzmann :

$$J(t) = \frac{1}{E_0}\left(1 - \frac{E_1}{E_0 + E_1}\exp\left(\frac{-t}{\tau_C}\right)\right) H(t)$$

Remarque 4.2.4 *Les modèles de Kelvin-Voigt et de Maxwell sont des cas particuliers (des cas limites) du modèle de Zener. En effet*

· *Si $E_1 \to \infty$ alors $\tau_R = 0$, $\tau_C = 0$ et $E = E_0$. Par coséquent l'expressions du module complexe de Zener se réduit à*

$$M_Z(\omega) = E_0$$

Ce qui correspond exactement au module du modèle de Kelvin-Voigt

· *Si $E_1 \to 0$ alors, on le remplace directement dans l'équation différentielle M.Z et cette dernière se réduit à*

$$E_0\sigma(t) + \eta\dot{\sigma}(t) = E_0\eta\dot{\varepsilon}(t)$$

Et cette équation correspond à l'équation différentielle qui décrit le comportement du modèle de Maxwell. Par suite, le module complexe de Zener dans ce cas se réduit ainsi

$$M_Z(\omega) = \frac{E_0(\omega\tau_R)^2}{1+(\omega\tau_R)^2} + i\frac{\eta\omega}{1+(\omega\tau_R)^2}$$

Conclusion 4.2.3 *Le modèle de Zener simple a trois paramètres à identifier (E_0, E_1, η). Qualitativement, ce modèle manifeste simultanément la relaxation et le fluage,c'est-à-dire, présente une élasticité instantanée. Par conséquent, il peut reproduire le comportement réel d'un solide viscoélastique linéaire. Cependant, il est caractérisé par un temps de relaxation unique. En d'autres termes, il ne peut rendre compte du comportement sur un large domaine de temps. Ainsi, sa généralisation s'impose.*

4.3 Modèle rhéologique composé de Zener

Les trois modèles cités précédemment ne reflètent pas une réalité physique du comportement viscoélastique de solides viscoélastiques. En effet, le modèle de Maxwell relaxe mais ne manifeste aucun fluage, en revanche, le modèle de Kelvin-Voigt induit du fluage, mais ne relaxe pas. Par contre, le modèle de Zener à trois paramètres (τ_R, τ_C, E) relaxe et génère du fluage, toutefois il ne représente pas une réalité physique observée. Plus précisément, les trois paramètres ne suffisent pas pour décrire réellement le comportement d'un matériau viscoélastique. Pour cela la généralisation du modèle de Zener s'impose **[12]**.

Dans le cas linéaire et unidimonsionnel, un regroupement quelconque d'élément rhéologiques éléméntaires conduit à l'équation différentielle de la forme

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^{N} a_k \sigma^{(k)}(t) = E\varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{M} b_k \varepsilon^{(k)}(t) \tag{4.3.1}$$

Où $M, N \in \mathbb{N}$ et les a_k, b_k et E sont des coefficient caractéristiques des éléments élémentaires qui forment le modèle.

Le modèle de Zener généralisé est constitué de plusieurs modèles de maxwell liés en parallèle, qui sont eux même liés avec un ressort en parallèle.

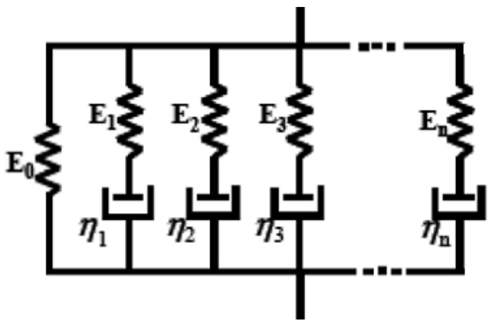


Figure 4.3.1 : Modèle de Zener généralisé

Il est immédiat que le défaut de ces modèles composés, est le nombre élevé de paramètres. On doit ainsi surmonter ce problème d'identification. La dérivée non entière présente un moyen convenable pour décrire un comportement viscoélastique linéaire pour un milieu solide. Pour ce faire, nous allons introduire un nouvel élément rhéologique : le "spring-pot".

4.3.1 Le "spring-pot"

Le "spring- pot" est un élément rhéologique, à trois paramètres (E, τ, α) supposé avoir un module complexe de la forme

$$M(\omega) = E(i\omega\tau)^{\alpha}, \omega \in \mathbb{C} \tag{4.3.2}$$

dont le symbole rhéologique est

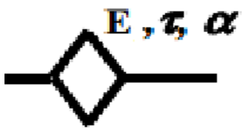


Figure 4.3.2 : Spring-pot

(i) Le paramètre adimensionnel α permet une transition continue entre le modèle rhéologique solide idéal (ressort) et le modèle fluide idéal (amortisseur visqueux); cela ne coûte que trois paramètres à identifier.

(ii) L'intérêt des dérivées non entières dans la modélisation du comportement viscoélastique est qu'il permet de réduire le nombre de paramètres à détérminer. Le problème d'optimisation devient ainsi bien conditionné d'une part. Et d'autre part, la dérivée non entière permet d'intégrer l'effet mémoire dans sa définition.

Remarque 4.3.1 *Pour $\alpha = 0$, on a $M(\omega) = E$, on retrouve ainsi la réponse d'un ressort. Si $\alpha = 1$, alors on retrouve $M(\omega) = Ei\omega\tau$ qui représente la réponse d'un amortisseur.*

Remarque 4.3.2 *On peut remarquer physiquement que le paramètre α vérifie $0 \leq \alpha \leq 1$.*

Par conséquent, la relation contrainte-déformation pour un "spring-pot" est

$$\hat{\sigma}(\omega) = E(i\omega\tau)^{\alpha} \hat{\varepsilon}(\omega) \tag{4.3.3}$$

Corollaire 4.3.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction causale telle que $\mathcal{F}[D_C^{\alpha} f(t)]$ existe* (i.e $D_C^\alpha f \in L^1(\mathbb{R})$) alors,

$$\mathcal{F}\left[D_C^\alpha f(t)\right](\omega) = (i\omega)^\alpha \mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega) \tag{4.3.4}$$

Preuve. Consulter [**8**]. ■

La relation (4.3.2) peut être écrite ainsi

$$\hat{\sigma}(\omega) = E\tau^\alpha (i\omega)^\alpha \hat{\varepsilon}(\omega)$$

D'aprés le corollaire, cela entraine

$$\hat{\sigma}(\omega) = E\tau^\alpha \mathcal{F}\left[D_C^\alpha \varepsilon(t)\right](\omega) \tag{4.3.5}$$

Par suite si on applique $\mathcal{F}^{-1}$ alors, nous aurons

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha D_C^\alpha \varepsilon(t) \tag{4.3.6}$$

La dérivée non entière permet ainsi de décrire de manière continue le passage d'un ressort à un amortisseur.

4.3.2 Modèle de Zener fractionnaire

On construit ainsi le modèle de Zener fractionnaire en remplaçant dans le modèle de Zener classique, l'amortisseur par un "spring-pot" :

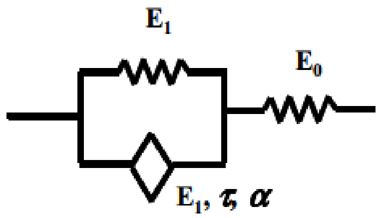


Figure 4.3.3 : Modèle de Zener fractionnaire

C'est un modèle rhéologique à quatre paramètres seulement.

On a $\begin{cases} \sigma = \sigma_0 = \sigma_1 \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \end{cases}$ Avec $\begin{cases} \sigma(t) = \sigma_0(t) = E_0\varepsilon_0(t) \\ \sigma(t) = \sigma_1(t) = E_1\varepsilon_1(t) + E_1\tau^\alpha D_C^\alpha \varepsilon_1(t) \end{cases}$

En combinant ses équations, nous aboutissons à l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\sigma(t) + \frac{E}{E_0}\tau^\alpha D_C^\alpha \sigma(t) = E\varepsilon(t) + E\tau^\alpha D_C^\alpha \varepsilon(t) \tag{4.3.7}$$

où $E = \dfrac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$.

Idem, nous admettons que les transformées de Fourier des fonctions de contrainte et de déformation existent alors, nous appliquons $\mathcal{F}$ à (4.3.7) et nous obtenons

$$\hat{\sigma}(\omega) + \frac{E}{E_0}\tau^\alpha (i\omega)^\alpha \hat{\sigma}(\omega) = E\hat{\varepsilon}(\omega) + E\tau^\alpha (i\omega)^\alpha \hat{\varepsilon}(\omega)$$

Par conséquent, le module d'Young complexe associé au modèle fractionnaire de Zener est donné par :

$$M_{Z_F}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{1 + \frac{E}{E_0}\tau^\alpha (i\omega)^\alpha}{E + E\tau^\alpha (i\omega)^\alpha} \tag{4.3.8}$$

Remarque 4.3.3 *Si on veut écrire explicitement $M_{Z_F}(\omega) = E'(\omega) + E''(\omega)$ alors il suffit de remarquer que $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et donc $i^\alpha = \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)$.*

Par ailleurs, rappelons le premier principe de superposition de Boltzmann

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt}(R * \varepsilon)(t) \tag{4.3.9}$$

Alors $\tilde{\sigma}(s) = s\tilde{R}(s)\tilde{\varepsilon}(s)$ et donc

$$\tilde{R}(s) = \frac{\tilde{\sigma}(s)}{s\tilde{\varepsilon}(s)}$$

Ainsi, par passage à $\mathcal{L}$ dans l'équation (4.3.7) nous obtenons

$$\tilde{\sigma}(s) + \frac{E}{E_0}\tau^\alpha \left[s^\alpha \tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{s}\sigma(0)\right] = E\tilde{\varepsilon}(s) + E\tau^\alpha \left[s^\alpha \tilde{\varepsilon}(s) - \frac{1}{s}\varepsilon(0)\right]$$

Donc $\tilde{\sigma}(s)\left(1 + \dfrac{E}{E_0}\tau^\alpha s^\alpha\right) = s\tilde{\varepsilon}(s)\left(\dfrac{E}{s} + E\tau^\alpha s^{\alpha-1}\right) + \dfrac{1}{s}\left[\dfrac{E}{E_0}\tau^\alpha \sigma(0) - E\tau^\alpha \varepsilon(0)\right]$

Nous supposons que $\dfrac{E}{E_0}\tau^\alpha \sigma(0) - E\tau^\alpha \varepsilon(0) = 0$ (Cela étant possible lorsqu'on impose une déformation ou une contrainte), alors nous obtenons

$$\tilde{R}(s) = \frac{\frac{E}{s} + E\tau^\alpha s^{\alpha-1}}{1 + \frac{E}{E_0}\tau^\alpha s^\alpha}$$

ou encore

$$\tilde{R}(s) = E\left(\frac{s^{\alpha-(\alpha+1)}}{1+\dfrac{E}{E_0}\tau^\alpha s^\alpha}\right) + E\tau^\alpha\left(\frac{s^{\alpha-1}}{1+\dfrac{E}{E_0}\tau^\alpha s^\alpha}\right)$$

Pour obtenir $R(t)$ nous identifions les paramètres avec le résultat du théorème 3.3.2, à savoir

$$\forall\alpha,\beta>0, \mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}\left[E_{\alpha,\beta}\left(\pm at^\alpha\right)\right]\right\}(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a} \tag{4.3.10}$$

Nous obtenons

$$R(t) = \left[\frac{E_0}{\tau^\alpha}t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\frac{E}{E_0\tau^\alpha}t^\alpha\right) + E_0 E_{\alpha,1}\left(-\frac{E}{E_0\tau^\alpha}t^\alpha\right)\right] H(t) \tag{4.3.11}$$

De plus nous adoptons le même procédé pour obtenir la fonction du fluage associé au modèle de Zener fractionnaire.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons introduit quelques notions sur la théorie de la dérivation non entière. Nous avons ainsi, traité un type particulier d'équation différentielle fractionnaire avec des conditions initiales. Nous avons démontré un théorème d'existence et d'unicité de solutions[**5**]. Nous avons introduit la fonction de Mittag-Leffler (qui est une généralisation de la fonction Exponentielle) qui joue un rôle fondamental dans la théorie des EDF. Par la suite, nous avons découvert à travers ce travail que les solutions des EDF ne sont pas necessairement les fonctions usuelles, mais plutôt des séries de fonctions. Les perspectives à ce travail, peuvent être orientées dans les directions suivantes :

1. **Approche théorique** : Rappelons que sous certaines conditions, les dérivées au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo peuvent être exprimées moyennant un produit de convolution au sens classique; ce concept peut être étendu au sens des distribution. Plus précisément nous avons constaté que la fonction causale $Y_\alpha(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ qu'on retrouve lorsqu'on a défini la dérivée non entière, n'est pas sommable au voisinage de l'origine. Par conséquent, le produit de convolution n'est plus défini au sens des fonctions[**3**]. Ainsi, dans un cadre plus général on pourrait surmonter cette difficulté en introduisant le produit de convolution au sens des distributions [**8**]. Ce point mérite des éclaircissements.

2. **Analyse numérique** : pour résoudre un problème d'EDF accompagné de conditions initiales , on utilise le "calcul opérationnel". Dans le cadre de ce travail, nous

avons choisi la méthode de la transformation de Laplace. Elle consiste à transformer l'EDF dont l'inconnue est la fonction f en une équation algébrique dont l'inconnue est $\mathcal{L}f$. Afin de retrouver la fonction originale, nous sommes amené à inverser $\mathcal{L}f$. Cependant, généralement cette étape nécessite une inversion numérique. Cette approche est aussi valable dans le cas des **S**ystèmes d'**E**quations **D**ifférentielles **F**ractionnaires. Evidemment cela conduit à une autre branche de le théorie des EDF[**4**].

3. **Applications** :

- La théorie des EDF trouve des applications en Rhéologie; par exemple, les lois de la viscoélasticité sont définies à partir d'un produit de convolution au sens de Riemann(qui possède la masse de Dirac δ comme élément neutre) ou au sens de Stieltjes(qui possède la fonction de Heaviside H comme élément neutre)[**10**]. On cite à titre d'exemple la loi de Boltzmann qui est définie à partir d'une convolution.

- Cet outil mathématique trouve aussi un champ d'application pour les problèmes de diffusion[**9**].

Bibliographie

[1] R.M. CHRISTENSEN. Theory of viscoelasticity. Dover Publications, 1982.

[2] B. D Cleman, W. Mol; Theory foundation of linear viscoelasticity. Review of modern physics, vol 33, N 2,1961, pp 239-249.

[3] F. Dubois, A. C. Galucio et N. Point. Introduction à la dérivation fractionnaire. Théorie et application. Paris, France, 16 mars 2009.

[4] V. S. Ertürk, S. Momani. Solving Systems of Fractionnal Differential Equations using diffential transform method, Journal of Computation and Applied Mathematics. ELSEVIER. 30 march 2007.

[5] D. Kai and J. F. Neville. Analysis of Fractional Differential Equations. July 1st,1999.

[6] D. Kai and J. F. Neville. Multi-order fractional differential equations and their numerical solution, Applied Mathematics and Computation 154 (2004) 621–640. ELSEVIER.

[7] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo. Theory and application of Fractional Differential Equations, Editor: Jean van Mill, North Holland .September 2005.

[8] I. Podlubny. Fractional differential equation, London Academic Press. 1999.

[9] J. O. Sabatier,P. Agrawal and J. A. Tenreiro Machado. Advances in Fractional Calculus_Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, SPRINGER, 2007.

[10] J. Salençon. Viscoélasticité, cours de calcul des structures anélastiques, de l'école nationale des Ponts et chaussées. Février 1983.

[11] M. R. Spiegel. Transformées de Laplace, série SCHAUM. 28 Janvier 1983.

[12] N.W Tschogl. The phenomenological theory of linear viscoelasticity behavior. Springer_Verlag, Heildelberg. 1989.