Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse et probabilités

Par

ZAIDI Boualem
TAMITI Nabil

THÈME

Les points extrêmes et fortement extrêmes des espaces d'Orlicz munis de la norme d'Orlicz et applications

Soutenu devant le jury composé de :

Mr.	A. BERBOUCHA	M. C. A	Université A-Mira de Béjaia.	Président.
Mme.	F. TALBI	M. C. B	Université A-Mira de Béjaia.	Rapporteur.
Mr.	R. BENMEZIANE	M. A. A	Université A-Mira de Béjaia.	Examinateur.

Année 2012−2013

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier notre promotrice, Madame **F. TALBI** *pour son aide très précieuse, ses conseils et sa disponibilité qui ont contribués à faire de ce mémoire ce qu'il est aujourd'hui.*

Nos remerciements sont aussi adressés à Monsieur ***A. BERBOUCHA*** et *Monsieur* ***R. BENMEZIANE*** *qui nous font l'honneur de juger notre travail. Nous remercions aussi tous les enseignants du département de Mathématiques qui nous ont permis d'améliorer notre formation.*

Nos derniers et profonds remerciements vont à nos chers parents, frères et sœurs, pour leur soutien et leur confiance en nous, sans oublier nos amis et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à notre formation.

Dédicaces

ZAIDI Boualem

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes frères et mes sœurs.

Toute ma famille chacun par son nom.

Mon cher binôme Nabil.

Tous mes camarades de promo et tous mes amis.

Dédicaces

TAMITI Nabil

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents, mes frères et mes sœurs.

Mes grands-parents, mes oncles, mes tantes ainsi que toute ma famille.

Mon cher binôme Boualem.

Tous mes amis et camarades.

Table des matières

Notations

$(\Omega,\,\Sigma,\,\mu)$	*Espace mesuré de mesure* μ
$M(\Omega)$	*L'ensemble des fonctions* $\mu-$*mesurables sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *modulo la relation d'équivalence* « $=\mu-p.p$ »
$p.p$	*Presque partout*
χ_A	*Indicatrice de* A, $\chi_A(t)=\begin{cases}1 & t\in A\\ 0 & sinon\end{cases}$
$L^p(\Omega)$	$\{f\in M(\Omega):\int\limits_{\Omega}\|f(t)\|^p\,d\mu<\infty\}$
$L^\infty(\Omega)$	$\{f\in M(\Omega):\exists\alpha>0,\,\|f(t)\|\leq\alpha\ \ \mu-p.p.\ t\in\Omega\}$
ϕ	*Fonction d'Orlicz*
ϕ^*	*La fonction complémentaire de* ϕ
p	*La dérivée à droite de* ϕ
$SC(\phi)$	*L'ensemble des points de stricte convexité de* ϕ
$a(\phi)$	$\sup\{x\geq 0:\phi(x)=0\}$
$b(\phi)$	$\sup\{x>0:\phi(x)<\infty\}$
$d(\phi)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\phi(x)}{x}$
ρ_ϕ	*Modulaire d'Orlicz*, $\rho_\phi(f)=\int\limits_{\Omega}\phi(f(t))\,d\mu$
$\theta(f)$	$\sup\left\{\lambda>0:\rho_\phi(\lambda f)<\infty\right\}$
La condition$-\triangle_2$	*Condition de croissance sur* ϕ
La condition$-\ \triangle_2(\infty)$	*Condition de croissance sur* ϕ dans le voisinage de ∞
La condition$-\ \triangle_2(0)$	*Condition de croissance sur* ϕ dans le voisinage de 0
$L_\phi(\Omega)$	*Espace d'Orlicz*

$B(L_\phi)$	*La boule unité fermée de* L_ϕ
$S(L_\phi)$	*La sphère unité de* L_ϕ
$Ext(B(L_\phi))$	*L'ensemble des points extrêmes de* $B(L_\phi)$
$Fext(B(L_\phi))$	*L'ensemble des points fortement extrêmes de* $B(L_\phi)$
$\Vert . \Vert_\phi^o$	*Norme d'Orlicz*
$\Vert . \Vert_\phi$	*Norme de Luxemburg*
$\Vert . \Vert_\phi^A$	*Norme d'Amemiya*
$L_\phi^o(\Omega)$	*Espace d'Orlicz muni de la norme d'Orlicz*
$K(f)$	$k \in K(f) \Leftrightarrow \Vert f \Vert_\phi^o = \frac{1}{k}\left(1+\rho_\phi(kf)\right)$
$conv(A)$	*L'enveloppe convexe de* A
$\overline{C}$	*Désigne la fermeture de* C
$\mathring{C}$	*Désigne l'intérieur de* C
$Supp(f)$	$\overline{\{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}}$

Introduction générale

En analyse fonctionnelle, les espaces d'Orlicz L_ϕ sont des espaces fonctionnels qui généralisent les espaces de Lebesgue L^P $(1 \leq p \leq \infty)$, les espaces $L^p \cap L^\infty$ $(1 < p < \infty)$ et les espaces d'interpolation $L^1 + L^\infty$, $L^1 \cap L^\infty$. Ces espaces ont été définis par W.Orlicz au début des années trente en considérant des fonctions convexes, ayant des propriétés semblables à celles de la fonction puissance. Dans la théorie des espaces d'Orlicz, trois normes sont apparues : dans les années trente *Orlicz* a introduit la norme,

$$\|f\|_\phi^o = \sup \left\{ \int_\Omega |f(t)\, g(t)|\, d\mu : g \in L_{\phi^*}(\Omega),\ \rho_{\phi*}(g)) \leq 1 \right\}$$

dite d'Orlicz, puis *Nakano* (1950), *Morse-Transue* (1950) et *Luxemburg* (1955) ont considéré une autre norme, qui est parfois appelée la norme de Luxemburg-Nakano mais généralement dans la littérature, elle est appelée la norme de Luxemburg. Cette norme est la fonction de Minkowski de la boule convexe $\{x : \rho_\phi(x) \leq 1\}$ où ρ_ϕ désigne une modulaire convexe. C'est-à-dire,

$$\|f\|_\phi = \inf\{\lambda > 0 : \rho_\phi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}.$$

Approximativement à la même époque, *I. Amemiya* a considéré la norme,

$$\|f\|_\phi^A = \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1 + \rho_\phi(kf)]$$

dite d'Amemiya. Les inégalités suivantes $\|.\|_\phi \leq \|.\|_\phi^A \leq 2\|.\|_\phi$ et l'équivalence de la norme de Luxemburg et la norme d'Orlicz $\|.\|_\phi \leq \|.\|_\phi^o \leq 2\|.\|_\phi$ ont suggéré que peut-être la norme Orlicz et la norme d'Amemiya sont égales. Effectivement, l'égalité $\|f\|_\phi^A = \|f\|_\phi^o$ a lieu pour tout $f \in L_\phi$ quand ϕ est une N-fonction c'est-à-dire une fonction paire, convexe, continue, s'annule seulement en zéro et est finie vérifiant $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$ (voir [19]). Mais le problème d'égalité de ces deux normes dans le cas général d'une fonction d'Orlicz (qui est continue à gauche et peut prendre des valeurs infinies et ne vérifie pas nécessairement $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$) est resté longtemps ouvert jusqu'à l'an 2000, problème résolu par *H.Hudzik* et *L.Maligranda* (voir [15]). Cette égalité est très importante, car il est plus facile de manipuler la formule d'Amemiya qui utilise seulement la fonction d'Orlicz, que la norme d'Orlicz qui fait appel à la fonction d'Orlicz ϕ et sa complémentaire ϕ^*.

La notion de points extrêmes est une notion clé très utilisée quand on étudie la géométrie des espaces de Banach. Elle joue un rôle très important dans certaines branches des mathématiques par exemple en optimisation. Pour justifier cette importance, on peut citer :

1. Le principe du maximum de *Bauer* : si K est un sous-ensemble convexe et compact d'un espace vectoriel normé E et f une fonction convexe et semi-continue supérieurement de K dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$\sup_{y\in K} f(y) = f(x) \text{ avec } x \in Extr(K).$$

2. La propriété de *Krein-Milman* : un espace de Banach X a la propriété *Krein-Milman*, si tout sous-ensemble convexe, fermé et borné non vide de X possède au moins un point extrême, et si un espace de Banach X n'a pas cette propriété alors il n'est le dual d'aucun espace.

3. Caractérisation de la stricte convexité, la convexité uniforme locale, etc.

L'importance des points fortement extrêmes résulte du fait que tout point de $S(X)$ qui est un point fortement extrême de $B(X)$ est un point extrême de $B(X^{**})$.

En 1993 *H. Hudzik* et *M. Wisla* [16] ont donné des conditions nécessaires pour qu'un point de $S(L^o_\phi)$ soit un point extrême de $B(L^o_\phi)$. En 2003 *Y. Cui*, *H. Hudzik* et *R. Pluciennik* [8] ont montré que les conditions présentées dans [16] sont également suffisantes et ils ont appliqués ces résultats à la caractérisation des points extrêmes et fortement extrêmes de la boule unité des espaces : L^∞, $L^1 + L^\infty$ et $L^p \cap L^\infty$ $(1 \leq p < \infty)$.

L'objectif de ce travail est d'exposer les résultats de *Y. Cui*, *H. Hudzik* et *R. Pluciennik* obtenus dans [8]

Ce travail contient quatre chapitres.

Dans le *premier chapitre,* nous étudions la notion de points extrêmes des espaces normés avec quelques résultats importants.

Dans le *deuxième chapitre,* nous présentons les espaces d'Orlicz ainsi que leurs propriétés fondamentales, une attention particulière est accordée à la norme d'Orlicz particulièrement à la formulation d'Amemiya.

Dans le *troisième chapitre,* on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point de $S\left(L_\phi^o\right)$ soit un point extrême et celles pour lesquelles il soit fortement extrême, et on donne aussi des conditions suffisantes sous lesquelles $Ext\left(B(L_\phi^o)\right) = \emptyset$.

Enfin dans le *quatrième chapitre,* nous appliquons les résultats du chapitre 3 pour caractériser les points extrêmes et fortement extrêmes de la boule unité des espaces L^∞, $L^1 + L^\infty$ et $L^p \cap L^\infty$ $(1 \leq p < \infty)$.

CHAPITRE 1 Les points extrêmes des espaces de Banach

1.1 Introduction

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach. On note par $B(X)$ et $S(X)$ la boule unité fermée et la sphère unité respectivement de X, à savoir :

$$B(X) = \{x \in X,\ \|x\| \leq 1\} \text{ et } S(X) = \{x \in X,\ \|x\| = 1\}.$$

Les points extrêmes et fortement extrêmes sont des concepts élémentaires pour l'étude de la géométrie des espaces de Banach. Un espace de Banach X est dit *strictement convexe* si tout point de $S(X)$ est un point extrême de $B(X)$, et si l'ensemble de points fortement extrêmes de $B(X)$ est égal à $S(X)$ alors X est dit *midpoint locally uniformly rotund.* Pour motiver l'étude de points extrêmes, il y a une variété d'applications que nous pouvons citer, par exemple : le principe du maximum de Bauer, le théorème de Krein-Milman et le théorème de représentation intégrale de Choquet.

1.2 Définitions et généralités

Définition 1.2.1 *Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel E est dit* ***convexe*** *si,*

$$\forall x,\ y \in C,\ \forall \lambda \in [0,\ 1] : \lambda x + (1 - \lambda)\, y \in C.$$

Géométriquement, un ensemble C est convexe si tout segment reliant deux de ses points est inclu dans C.

Définition 1.2.2 *Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E.*
*L'**enveloppe convexe** de A notée $conv\,(A)$ est le plus petit ensemble convexe contenant A.*
De manière équivalente, l'enveloppe convexe de A est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes finies d'éléments de A,

$$conv\,(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : k \geq 1,\ x_i \in A,\ \lambda_i \in [0,\ 1]\,,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.2.3 *Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace de Banach X.*
*On dit que $x \in C$ est un **point extrême** de C si,*

$$\forall y,\ z \in C : x = \frac{1}{2}(y+z) \implies x = y = z.$$

Cette définition peut être donnée comme suit,

$$\forall y,\ z \in C,\ \forall \lambda \in [0,\ 1] : x = \lambda y + (1-\lambda)\,z \Longrightarrow x = y = z.$$

Géométriquement, un point $x \in C$ est extrême s'il n'est le milieu d'aucun segment entièrement contenu dans C.

Définition 1.2.4 *Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace de Banach X.*
*On dit que $x \in C$ est un **point fortement extrême** de C si,*

$$\forall\,(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : x = \frac{1}{2}(y_n + z_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

alors,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|y_n - z_n\| = 0.$$

Notation 1.2.1 *On note par $Ext\,(C)$ et $Fext\,(C)$ l'ensemble des points extrêmes et fortement extrêmes respectivement de C.*

Exemple 1.2.1 .

Si $\mathbb{R}^2$ *est muni de la norme Euclidienne* $\|.\|_2$ *alors,*

$$Ext\left(B\left(\mathbb{R}^2\right)\right) = S\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Si $\mathbb{R}^2$ *est muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *alors,*

$$Ext\left(B\left(\mathbb{R}^2\right)\right) = \{(1,1)\,,\ (-1,1)\,,\ (1,-1)\,,\ (-1,-1)\}\,.$$

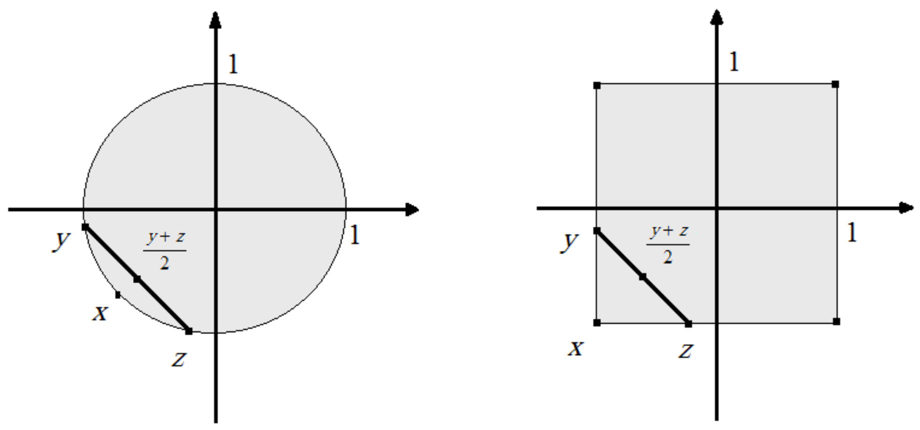

Figure (1) : *Les points extrêmes de la boule unité de* $\mathbb{R}^2$ *pour* $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$.

Remarques 1.2.1 .

1) *Tout point fortement extrême est un point extrême.*

2) *Si* C *est un compact alors, tout point extrême de* C *est fortement extrême* (*voir* [*21*]).

3) *Un espace de Banach* X *a* ***la propriété Krein-Milman*** (KMP), *si tout sous-ensemble convexe, fermé et borné non vide de* X *possède au moins un point extrême* (*voir la section, Théorème de Krein-Milman*).

4) *Un espace de Banach* X *a* ***la propriété Radon-Nikodym*** (RNP), *si pour n'importe quelle norme équivalente sur* X, $B(X)$ *possède au moins un point fortement extrême* (*voir* [*17*]).

1.3 Caractérisation des points extrêmes

Proposition 1.3.1 [20]

Soient C un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel E et x un élément de C. x est un point extrême de C si et seulement si $C\setminus\{x\}$ est convexe.

Démonstration.

La nécessité :

On raisonne par l'absurde. Supposons que $x \in Ext\,(C)$ et que l'ensemble $C\setminus\{x\}$ ne soit pas convexe.

Donc il existe $y,\, z \in C\setminus\{x\}$ (avec $y \neq z$) tels que,

$$\frac{1}{2}(y+z) \notin C\setminus\{x\} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{2}(y+z) = x.$$

Comme x est un point extrême de C, alors $x = y = z$. Contradiction avec le fait que $y \neq z$.

La suffisance :

Supposons que $C\setminus\{x\}$ soit convexe et considérons $y,\, z \in C$ tels que, $\frac{1}{2}(y+z) = x$.

Comme le point x n'appartient pas à $C\setminus\{x\}$ alors, y ou z n'appartient pas à $C\setminus\{x\}$. Donc,

$$x = y \quad \text{ou} \quad x = z.$$

Sans perte de généralité, supposons que $x = y$. Comme $\frac{1}{2}(y+z) = x$, alors $x = y = z$. D'où, x est un point extrême de C. ■

Proposition 1.3.2 [20]

Aucun point de l'intérieur d'un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel normé E n'est extrême.

Démonstration.

Soient C un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel normé E et $x \in \mathring{C}$ (où $\mathring{C}$ désigne l'intérieur de C). Montrons que,

$$\exists y,\, z \in C : x = \frac{1}{2}(y+z) \text{ avec } x \neq y \neq z.$$

Comme $x \in \overset{\circ}{C}$ alors, il existe $r > 0$ tel que la boule fermée de centre x et de rayon r, notée $B(x, r)$, est incluse dans C. Prenons,

$$y = (1 - \frac{r}{\|x\|})x \text{ et } z = (1 + \frac{r}{\|x\|})x.$$

Alors, les points y et z appartiennent à $B(x, r)$ et,

$$\begin{aligned} y + z &= (1 - \frac{r}{\|x\|})x + (1 + \frac{r}{\|x\|})x \\ &= x - \frac{rx}{\|x\|} + \frac{rx}{\|x\|} + x \\ &= 2x. \end{aligned}$$

D'où, x n'est pas un point extrême de C. ■

D'après la proposition précédente, on donne la définition d'un point extrême et fortement extrême de la boule unité d'un espace de Banach X comme suit :

Définition 1.3.1 *On dit que $x \in S(X)$ est un point extrême de $B(X)$ si,*

$$\forall y,\ z \in S(X) : x = \frac{1}{2}(y + z) \implies x = y = z.$$

Définition 1.3.2 *On dit que $x \in S(X)$ est un point fortement extrême de $B(X)$ si,*

$$\forall (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \lim_{n\longrightarrow\infty} \|y_n\| = 1,\ \lim_{n\longrightarrow\infty} \|z_n\| = 1 \text{ et } x = \frac{1}{2}(y_n + z_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

alors,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|y_n - z_n\| = 0.$$

1.4 Théorème de Krein-Milman

Dans ce paragraphe, nous commençons par étudier un résultat de *M.G. Krein* et *D. Milman*. En 1940, ils ont caractérisé les ensembles convexes et compacts en fonction de leurs points extrêmes. Ce résultat est une conséquence du principe du maximum de Bauer.

Théorème 1.4.1 (***Principe du maximum de Bauer***) [*20*]
Soient K un sous-ensemble convexe et compact d'un espace vectoriel normé E et f une fonction convexe et semi-continue supérieurement de K dans $\mathbb{R}$. Alors, f atteint son supremum (sa borne supérieure) en, au moins,un point extrême de K, c'est-à-dire $\exists x \in Extr(K)$ tel que,

$$\sup_{y \in K} f(y) = f(x). \tag{1.4.1}$$

Théorème 1.4.2 (***Krein-Milman***) [*20*]
Tout sous-ensemble convexe et compact K d'un espace vectoriel normé E est la fermeture de l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrêmes :

$$\overline{conv}(Extr(K)) = K. \tag{1.4.2}$$

En particulier, tout ensemble convexe compact non vide possède au moins un point extrême.

Démonstration.
Soit K un sous-ensemble compact et convexe inclus dans E.
Puisque, $conv(Extr(K)) \subset K$ et K est fermé et convexe alors, $\overline{conv}(Extr(K)) \subset K$.
Pour montrer que $K \subset \overline{conv}(Extr(K))$ on raisonne comme suit :
Soit $x_0 \notin \overline{conv}(Extr(K))$ on va montrer que $x_0 \notin K$. D'après le théorème de Hahn-Banach (*deuxième forme géométrique*), il existe un hyperplan fermé d'équation $[f = \alpha]$ (où f est une forme linéaire continue sur E, non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$) qui sépare au sens strict $\overline{conv}(Extr(K))$ et $K \backslash \overline{conv}(Extr(K))$. C'est-à-dire :

$$\forall y \in \overline{conv}(Extr(K)) : f(y) < \alpha < f(x_0).$$

On pose,

$$G = \left\{ z \in K : f(z) = \sup_{x \in K} f(x) \right\}.$$

Donc, G contient au moins un point $p \in Extr(K)$ (d'après le *principe du maximum de Bauer*).
Ainsi, $p \in \overline{conv}(Extr(K))$, ce qui implique que $f(p) < \alpha$, mais :

$$f(p) = \sup_{x \in K} f(x),$$

alors,

$$\forall x \in K,\ f(x) \leq f(p) < \alpha.$$

Comme $\alpha < f(x_0)$, d'où :

$$x_0 \notin K.$$

■

Théorème 1.4.3 [*11*]
Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ une isométrie linéaire. Alors, T conserve les points extrêmes de la boule unité, à savoir $T(x)$ est un point extrême de $B(Y)$ si et seulement si x est un point extrême de $B(X)$.

Une question se pose alors naturellement : *Est ce que les points extrêmes existent toujours* ?. Si K est un ensemble ouvert, clairement il n'a aucun point extrême, et nous avons vu que si K est un ensemble convexe et compact d'un espace normé, alors par le *Théorème de Krein-Milman* il possède toujours des points extrêmes. Dans le cas général d'un espace de Banach, un ensemble convexe fermé et borné peut n'avoir pas de points extrêmes comme on peut le voir sur l'exemple suivant : si

$$K = \left\{f \in L^1([0,\,1]) : \|f\|_{L^1} \leq 1\right\} = B\left(L^1\right),$$

alors, $Extr\,(K) = \emptyset$. En effet,
Soit $f \in L^1([0,\,1])$ avec $\|f\|_{L^1} = 1$. On choisit x dans $[0,\,1]$ tel que,

$$\int_0^x |f(t)|\,dt = \frac{1}{2}.$$

On pose,

$$h(t) = \begin{cases} 2f(t) & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et,

$$g(t) = \begin{cases} 2f(t) & \text{si } t \geq x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,

$$\|h\|_{L^1} = \|g\|_{L^1} = 1 \text{ et } f = \frac{1}{2}(h+g) \text{ avec } f \neq g \neq h.$$

D'où, la boule unité fermée de $L^1([0,\,1])$ n'a aucun point extrême.

Théorème 1.4.4 [*11*]

Soit X un espace de Banach. Si $B(X)$ n'a aucun point extrême alors X n'est le dual d'aucun espace.

1.5 Lien entre les points extrêmes et la stricte convexité

Définition 1.5.1 *Soit E un espace vectoriel normé. E est dit* ***strictement convexe*** *si,*

$$\forall x,\, y \in S(E) \text{ tels que } x \neq y \text{ on a} : \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1. \tag{1.5.1}$$

Proposition 1.5.1 [*3*]

Soit E un espace vectoriel normé. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) *E est strictement convexe.*

2) *Tout point de $S(E)$ est un point extrême de $B(E)$: $Extr(B(E)) = S(E)$.*

3) *Si $x,\, y \in E$ satisfont, $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 = 0$ alors,*

$$x = y.$$

4) *Si $x,\, y \in E\setminus\{0\}$ satisfont, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ alors,*

$$x = \lambda y \text{ pour un certain } \lambda > 0.$$

Démonstration.

(**1**) $\Longrightarrow$ (**2**) : Supposons que E est strictement convexe alors,

$$\forall y, z \in S(E) \text{ si } \left\| \frac{y+z}{2} \right\| = 1 \text{ alors } y = z.$$

On pose $x = \frac{y+z}{2}$ alors,

$$x \in S(E) \text{ et } x = y = z.$$

D'où, tout point de $S(E)$ est un point extrême de $B(E)$.

(**2**) $\Longrightarrow$ (**1**) : Supposons que tout point de $S(E)$ est un point extrême de $B(E)$ alors,

$$\forall x,\, y,\, z \in S(E) : x = \frac{y+z}{2} \implies x = y = z.$$

Si $x \neq y \neq z$ alors,

$$x \neq \frac{y+z}{2} \text{ c'est-à-dire } \left\| \frac{y+z}{2} \right\| < 1.$$

D'où, E est strictement convexe.

(1) $\Longrightarrow$ **(4)** : Supposons que E est strictement convexe et,

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|,$$

pour certains x, $y \in E \backslash \{0\}$.

On peut supposer sans perte de généralité que,

$$0 < \|x\| \leq \|y\|.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2,$$

et,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| + \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

De plus, d'après (1.5.2) on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| &\geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \left(\frac{1}{\|x\|} \right) \|x+y\| - \|y\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) \quad (\text{car } \|x\| \leq \|y\|) \\ &= \left(\frac{1}{\|x\|} \right) (\|x\| + \|y\|) - \|y\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) \\ &= 1 + \frac{\|y\|}{\|x\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|} + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2.$$

Et comme E est strictement convexe alors :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2 \Longrightarrow \frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|},$$

par suite,

$$x = \lambda y \text{ avec } \lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|}.$$

$(\mathbf{4}) \Longrightarrow (\mathbf{3})$: Supposons que $(\mathbf{4})$ est satisfaite et,

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 = 0.$$

Si $x = 0$, il est clair que $y = 0$ et vice versa. Nous pouvons donc maintenant supposer que x, $y \in E\backslash\{0\}$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \\ &\geq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| - \|y\|^2 \\ &= (\|x\| - \|y\|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\|x\| = \|y\|$ et comme,

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|,$$

alors,

$$x = y.$$

$(\mathbf{3}) \Longrightarrow (\mathbf{1})$: Supposons que $(\mathbf{3})$ est satisfaite et x, $y \in S(E)$, alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{4}\|x+y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

d'ou,

$$\forall x,\, y \in S(E) \text{ si } \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1 \text{ alors } x = y.$$

■

Exemple 1.5.1 *L'espace* $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ *est un espace strictement convexe, mais* $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ *n'est pas strictement convexe.*

Définition 1.5.2 *Si l'ensemble de points fortement extrêmes de* $B(X)$ *est égal à* $S(X)$ *alors,* X *est dit midpoint locally uniformly rotund.*

CHAPITRE 2

Les espaces d'Orlicz

2.1 Introduction

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré de mesure μ. On note par $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\mu-$mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ modulo la relation d'équivalence « $= \mu - p.p$ ». Les espaces $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ sont définis par,

$$L^p(\Omega) = \{f \in M(\Omega) : \int_\Omega |f(t)|^p \, d\mu < \infty\}.$$

Ils sont munis de la norme,

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les espaces $(L^p(\Omega), \; \|.\|_{L^p})$ sont des espaces de Banach. Dans leurs définition même, elle apparaît la fonction convexe $\phi(x) = |x|^p$. En considérant des fonctions convexes ayant des propriétés semblables à cette fonction, W. Orlicz a défini en 1930 une classe d'espaces fonctionnels qui généralise les espaces L^p et qui porte son nom « *Espace d'Orlicz* ». L'objectif de ce chapitre est de présenter les éléments de base de la théorie des espaces d'Orlicz utiles pour les chapitres 3 et 4.

2.2 Les fonctions convexes

Définition 2.2.1 *Une fonction réelle d'une variable réelle est dite* ***convexe*** *si son graphe est « tourné vers le haut ». Autrement dit, pour tous points a et b de son graphe, le segment $[a,\, b]$ est entièrement situé au-dessus du graphe. Donc, une fonction ϕ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite convexe si :*

$$\forall x,\, y \in I,\, \forall \lambda \in [0,\, 1] : \phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y). \tag{2.2.1}$$

Lorsque l'inégalité (2.2.1) *est stricte (avec $x \neq y$ et $\lambda \in \,]0,\, 1[\,$), la fonction ϕ est dite* ***strictement convexe****. Les fonctions dérivables strictement convexes sont celles qui ont une dérivée strictement croissante.*

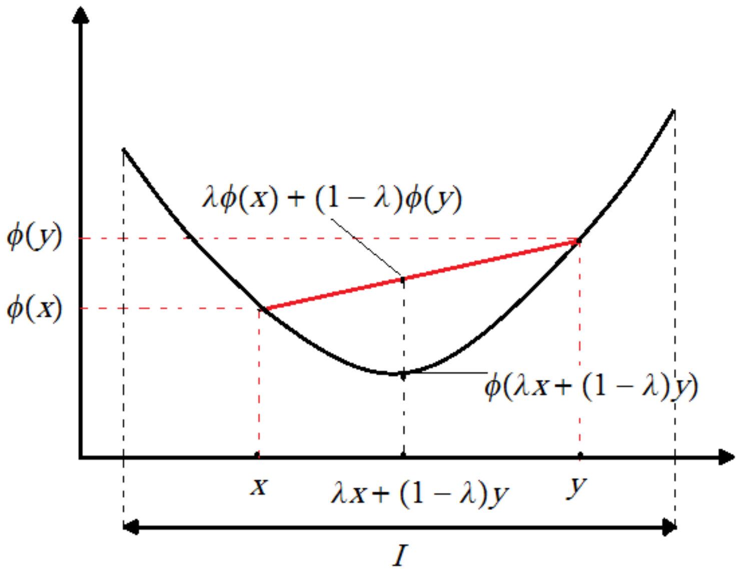

Figure (2) : *Illustration de la définition d'une fonction convexe.*

Définition 2.2.2 *Soit ϕ une fonction convexe, un intervalle $[a,\, b]$ de $\mathbb{R}$ est dit* ***intervalle de structure affine*** *de ϕ si ϕ est affine sur $[a,\, b]$ et elle ne l'est pas sur tout intervalle $[a-\varepsilon,\, b]$ ou $[a,\, b+\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$. On note par, $\{[a_i,\, b_i]\}_i$ la famille de tous les intervalles de structure affine de ϕ.*

Définition 2.2.3 *Soit ϕ une fonction convexe, on dit que z est un* ***point de stricte convexité*** *de ϕ si,*

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R} \text{ avec } x \neq y \text{ et } \lambda \in \left]0,\ 1\right[: z = \lambda x + (1-\lambda)\, y,$$

alors,

$$\phi\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) < \lambda \phi(x) + (1-\lambda)\, \phi(y)\,.$$

Notation 2.2.1 *L'ensemble des points de stricte convexité de ϕ est noté par :*

$$SC(\phi) = \mathbb{R} \backslash \left\{ \underset{i}{\cup} [a_i, b_i] \right\}. \tag{2.2.2}$$

Remarque 2.2.1 *Si ϕ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ alors $\underset{i}{\cup} [a_i, b_i] = \emptyset$.*

2.3 Les fonctions d'Orlicz

2.3.1 Définitions et exemples

Définition 2.3.1 *Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\ \infty]$ telle que,*

a) *ϕ est paire, convexe et continue à gauche sur $[0,\ \infty[$*

b) *$\phi(0) = 0$ et ϕ n'est pas identiquement nulle.*

Une telle fonction ϕ est appelée une ***fonction d'Orlicz****.*

Remarques 2.3.1 .

1) *Les espaces d'Orlicz et leurs propriétés ont été initialement étudiées dans le cas d'une* ***N-fonction*** *(voir [5], [23], [22] et [19]) c'est-à-dire, $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\ \infty[$ telle que :*

a) ϕ est paire, convexe, continue et $\phi(0) = 0$

b) $\phi(x) > 0$ pour tout $x > 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\phi(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$.

2) *Toute N-fonction est une fonction d'Orlicz.*

Dans toute la suite de ce travail, on s'intéresse au cas des fonctions d'Orlicz. C'est-à-dire, les cas des fonctions qui peuvent prendre des valeurs infinies.

Définition 2.3.2 *Pour toute fonction d'Orlicz ϕ on pose,*

$$\begin{aligned} a(\phi) &= \sup\{x \geq 0 : \phi(x) = 0\} \\ b(\phi) &= \sup\{x > 0 : \phi(x) < \infty\} \\ c(\phi) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\phi(x)}{x} \\ d(\phi) &= \lim_{x \to \infty} \frac{\phi(x)}{x}. \end{aligned}$$

Exemple 2.3.1 *Les fonctions suivantes,*

$$\phi_{\infty,1}(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \in [-1,\, 1] \\ |x| - 1 & sinon. \end{cases} \qquad et \;\; \phi_p(x) = |x|^p \;\; (1 < p < +\infty)\,,$$

sont des fonctions d'Orlicz. De plus, ϕ_p est une N-fonction et,

$$\begin{aligned} a(\phi_{\infty,1}) &= 1,\, b(\phi_{\infty,1}) = +\infty \;\; et \;\; d\left(\phi_{\infty,1}\right) = 1 \\ a(\phi_p) &= 0,\, b(\phi_p) = +\infty \;\; et \;\; d\left(\phi_p\right) = +\infty. \end{aligned}$$

Remarques 2.3.2 .

1) *De la définition de la fonction d'Orlicz nous avons,*

$$a(\phi) \leq b(\phi),\; a(\phi) < \infty \;\; et \; b(\phi) > 0.$$

2) *La continuité à gauche de ϕ sur $[0, +\infty[$ est équivalente à,*

$$\lim_{x \to b(\phi)-} \phi(x) = \phi(b(\phi))\,.$$

3) *Si ϕ est une N-fonction alors, $a(\phi) = 0$, $b(\phi) = +\infty$.*

4) *Toute fonction d'Orlicz ϕ est croissante sur $[0, +\infty[$.*

En effet, si on prend $0 \leq x_1 < x_2$ alors,

$$\begin{aligned} \phi(x_1) &= \phi\left(\frac{x_2 - x_1}{x_2} \times 0 + \frac{x_1}{x_2} x_2\right) \\ &\leq \frac{x_2 - x_1}{x_2} \phi(0) + \frac{x_1}{x_2} \phi(x_2) \\ &\leq \phi(x_2)\,. \end{aligned}$$

5) *Si* $b(\phi) = +\infty$ (*resp.* $\phi(b(\phi)) < +\infty$) *alors,* ϕ *est strictement croissante sur* $[a(\phi),\, b(\phi)[$ (*resp. sur* $[a(\phi),\, b(\phi)]$).

En effet, si on prend $a(\phi) \leq x_1 < x_2$ *alors,*

$$x_1 = \lambda x_2 + (1-\lambda)a(\phi),\ 0 \leq \lambda < 1.$$

Donc,

$$\phi(x_1) \leq \lambda\phi(x_2) + (1-\lambda)\phi(a(\phi)) < \phi(x_2).$$

2.3.2 Fonction complémentaire d'une fonction d'Orlicz

Définition 2.3.3 *Soit* ϕ *une fonction d'Orlicz. La fonction* $\phi^* : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\, \infty]$*, définie par :*

$$\phi^*(y) = \sup_{x\geq 0}\{x\,|y| - \phi(x)\} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{2.3.1}$$

s'appelle la ***fonction complémentaire*** *ou la* ***fonction conjuguée*** *de* ϕ *au sens de Young.*

Exemple 2.3.2 *La fonction complémentaire de,*

$$\phi_{\infty,1}(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x \in [-1,\, 1] \\ |x| - 1 & sinon, \end{cases}$$

est,

$$\phi^*_{\infty,1}(y) = \phi_{1,\infty}(y) = \begin{cases} |y| & si\ \ y \in [-1,\, 1] \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

Remarque 2.3.3 *Si* ϕ *est une fonction d'Orlicz* (*resp. N-fonction*) *alors* ϕ^* *est aussi une fonction d'Orlicz* (*resp. N-fonction*).

Définition 2.3.4 *Le couple* $(\phi,\, \phi^*)$ *satisfait à l'****inégalité*** *suivante dite* ***de Young****,*

$$xy \leq \phi(x) + \phi^*(y) \quad \forall x,\, y \geq 0. \tag{2.3.2}$$

Remarque 2.3.4 *Si* $y = p(x)$ (*où* p *est la* ***dérivée à droite*** *de* ϕ) *alors, l'****égalité*** *dans* (2.3.2) *à lieu* (*voir* [*18*]) *:*

$$xp(x) = \phi(x) + \phi^*(p(x)). \tag{2.3.3}$$

2.3.3 La condition$-\triangle_2$

La condition$-\triangle_2$ est une condition de croissance sur les fonctions d'Orlicz. Elle joue un rôle très important dans l'étude de la géométrie des espaces d'Orlicz.

Définition 2.3.5 *Une fonction d'Orlicz ϕ satisfait :*
1) *La condition$-\triangle_2$ globalement ($\phi \in \triangle_2$), s'il existe $k > 2$ tel que,*

$$\phi(2x) \leq k\phi(x) \ \ \forall x > 0.$$

2) *La condition$-\triangle_2$ à l'infini ($\phi \in \triangle_2(\infty)$), s'il existe $k > 2$ et $x_0 > 0$ avec $0 < \phi(x_0) < +\infty$ tel que,*

$$\phi(2x) \leq k\phi(x) \ \ \forall x \geq x_0.$$

3) *La condition$-\triangle_2$ à zéro ($\phi \in \triangle_2(0)$), s'il existe $k > 2$ et $x_0 > 0$ avec $0 < \phi(x_0) < +\infty$ tel que,*

$$\phi(2x) \leq k\phi(x) \ \ \forall x \leq x_0.$$

Évidemment, $\phi \in \triangle_2$ si et seulement si :

$$\phi \in \triangle_2(\infty) \ \ et\ \phi \in \triangle_2(0).$$

Exemple 2.3.3 *La fonction suivante,*

$$\phi_{\infty,1}(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ x \in [-1,\, 1] \\ |x| - 1 & sinon, \end{cases}$$

satisfait la condition$-\triangle_2$ à l'infini $\left(\phi_{\infty,1} \in \triangle_2(\infty)\right)$, car il existe $k = 3$ et $x_0 = 2$ tel que,

$$\phi_{\infty,1}(2x) \leq 3\phi_{\infty,1}(x),\ \forall x \geq 2.$$

Remarque 2.3.5 *Si $\phi \notin \triangle_2(\infty)$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs croissante vers l'infini tel que :*

$$\phi(2x_n) > 2^n\phi(x_n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.4 Espace d'Orlicz $L_\phi(\Omega)$

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré de mesure μ ($\sigma-$finie, non atomique et complète). On note par $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\mu-$mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ modulo la relation d'équivalence « $= \mu - p.p$ ».

Dans toute al suite, (ϕ, ϕ^*) désignera un couple complémentaire de fonctions d'Orlicz.

Définition 2.4.1 *Soit ϕ une fonction d'Orlicz. La fonctionnelle,*

$$\begin{aligned} \rho_\phi : M(\Omega) &\longrightarrow [0, \infty] \\ f \quad &\longmapsto \rho_\phi(f) = \int_\Omega \phi(f(t))\, d\mu, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

est une modulaire convexe sur $M(\Omega)$ dite ***modulaire d'Orlicz*** *c'est-a-dire ρ_ϕ vérifie,*

1) $\rho_\phi(f) = 0 \Longleftrightarrow f \in [0, a(\phi)]$

2) $\rho_\phi(-f) = \rho_\phi(f)$

3) $\rho_\phi(\alpha f + \beta g) \leq \alpha \rho_\phi(f) + \beta \rho_\phi(g)$ *où $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $\alpha + \beta = 1$.*

Définition 2.4.2 *On définit l'**espace d'Orlicz** $L_\phi(\Omega)$ par :*

$$L_\phi(\Omega) = \left\{ f \in M(\Omega) : \rho_\phi(\lambda f) < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}. \tag{2.4.2}$$

Définition 2.4.3 *On définit l'espace d'Orlicz $E_\phi(\Omega)$ comme suit :*

$$E_\phi(\Omega) = \left\{ f \in M(\Omega) : \rho_\phi(\lambda f) < \infty \text{ pour chaque } \lambda > 0 \right\}.$$

On a,

$$E_\phi(\Omega) \subset L_\phi(\Omega).$$

Si $\mu(\Omega) < \infty$, on a : $E_\phi(\Omega) = L_\phi(\Omega)$ si et seulement si $\phi \in \triangle_2(\infty)$.

2.5 Normes sur $L_\phi(\Omega)$

Dans les espaces d'Orlicz $L_\phi(\Omega)$, ondéfinie trois normes, qui sont appelées la norme d'Orlicz, norme de Luxembourg et norme d'Amemiya. Ces normes sont définies comme suit :

Définition 2.5.1 *Soit $f \in L_\phi(\Omega)$ alors,*

1)

$$\|f\|_\phi^o = \sup\left\{\int_\Omega |f(t)\, g(t)|\, d\mu : g \in L_{\phi^*}(\Omega)\,,\ \rho_{\phi*}(g)) \leq 1\right\}, \tag{2.5.1}$$

*est une norme sur l'espace $L_\phi(\Omega)$ dite **norme d'Orlicz**.*

2)

$$\|f\|_\phi = \inf\{\lambda > 0 : \rho_\phi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\}, \tag{2.5.2}$$

*est une norme sur l'espace $L_\phi(\Omega)$ dite **norme de Luxemburg**.*

3)

$$\|f\|_\phi^A = \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1 + \rho_\phi(kf)], \tag{2.5.3}$$

*est une norme sur $L_\phi(\Omega)$ dite **norme d'Amemiya**.*

Proposition 2.5.1 [*5*]

L'espace d'Orlicz $L_\phi(\Omega)$ muni de l'une de ces normes est un espace de Banach.

Théorème 2.5.1 [*18*]

La norme de Luxemburg et la norme d'Orlicz sont équivalentes plus précisément, on a :

$$\|f\|_\phi \leq \|f\|_\phi^o \leq 2\|f\|_\phi.$$

Notation 2.5.1 *Dans toute la suite on notera par :*

$$L_\phi^o = \left(L_\phi, \|.\|_\phi^o\right) \ \text{et}\ L_\phi = \left(L_\phi, \|.\|_\phi\right).$$

2.6 Quelques résultats concernant la norme d'Orlicz

2.6.1 Egalité de la norme d'Orlicz et la norme d'Amemiya

Il est bien connu que dans le cas des N-fonctions la norme Orlicz et la norme Amemiya sont égales (voir [10] et [12]). Récemment, *Hudzik* et *Maligranda* [4] ont montré que l'égalité est également vraie lorsque ϕ est une fonction d'Orlicz.

Théorème 2.6.1 [*15*]

Soit ϕ une fonction d'Orlicz. Alors,

$$\|f\|_\phi^o = \|f\|_\phi^A\,,\ \forall f \in L_\phi^o(\Omega)\,. \tag{2.6.1}$$

2.6.2 L'ensemble $K(f)$

Définition 2.6.1 *L'ensemble des $k > 0$ pour lesquels l'inf dans* (2.5.3) *est atteint, est noté par $K(f)$, c'est à dire :*

$$k \in K(f) \Leftrightarrow \|f\|_{\phi}^{A} = \frac{1}{k}\left[1 + \rho_{\phi}(kf)\right]. \tag{2.6.2}$$

Une question importante se pose « *est-ce que l'inf dans* (2.5.3) *est toujours atteint c'est-à-dire : est-ce que $K(f)$ est toujours non vide ?* ». Si ϕ est une N-fonction la réponse est toujours positive (voir [5]), mais dans le cas général c'est-a-dire ϕ est une fonction d'Orlicz, la réponse est négative.

Dans toute la suite ϕ désignera une fonction d'Orlicz.

Définition 2.6.2 $\forall f \in L_{\phi}^{o}(\Omega) \setminus \{0\}$ *on définit,*

$$k^* = k^*(f) = \inf\left\{k > 0 : \rho_{\phi^*}(p(k|f|)) \geq 1\right\} \tag{2.6.3}$$

$$k^{**} = k^{**}(f) = \sup\left\{k > 0 : \rho_{\phi^*}(p(k|f|)) \leq 1\right\}. \tag{2.6.4}$$

Evidemment, on a $k^*(f) \leq k^{**}(f)$ $\forall f \in L_{\phi}^{o}(\Omega) \setminus \{0\}$, où p est la dérivée à droite de ϕ.

Théorème 2.6.2 *[12]*
$\forall f \in L_{\phi}^{o}(\Omega) \setminus \{0\}$ nous avons,

$$K(f) = \begin{cases} \emptyset & si \ \ k^* = \infty \\ [k^*, k^{**}] & si \ \ k^{**} < \infty \\ [k^*, \infty[& si \ \ k^* < \infty \ \ et \ k^{**} = \infty \\ \{k\} & si \ \ k^* = k^{**} < \infty. \end{cases} \tag{2.6.5}$$

2.6.3 Lien entre la norme d'Orlicz et l'ensemble $K(f)$

Dans cette section, on va donner quelques caractérisations de la norme d'Orlicz plus exactement la norme d'Amemiya en fonction de l'ensemble $K(f)$.

Proposition 2.6.1 *[10]*
Soit $f \in L_{\phi}^{o}(\Omega) \setminus \{0\}$. Si $K(f) = \emptyset$ alors,

$$\|f\|_{\phi}^{o} = \lim_{k \longrightarrow \theta(f)^-} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_{\phi}(kf)\right],$$

où,

$$\theta(f) = \sup\left\{k > 0 : \rho_\phi\left(kf\right) < \infty\right\}. \tag{2.6.6}$$

Démonstration.

En utilisant le Théorème 2.6.1 $\left(\text{Egalité } \|f\|^o_\phi = \|f\|^A_\phi\right)$. Alors, si $K\left(f\right) = \emptyset$ on a :

$$\|f\|^o_\phi = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_\phi\left(kf\right)\right] < \infty.$$

Comme la fonction,

$$g\left(k\right) = \frac{1}{k}\left[1 + \rho_\phi\left(kf\right)\right],$$

est continue sur l'intervalle $]0, \theta(f)[$ et $\lim\limits_{k\to0^+} g\left(k\right) = +\infty$ alors,

$$\lim_{k\longrightarrow\theta(f)^-} g\left(k\right) = \lim_{k\longrightarrow\theta(f)^-} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_\phi\left(kf\right)\right] = \|f\|^o_\phi.$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 2.6.1 [*10*]

Si $f \in L^o_\phi\left(\Omega\right)$ et $\theta(f) < \infty$, alors $K(f) \neq \emptyset$.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $\theta(f) < \infty$ et $K(f) = \emptyset$. Alors, par la Proposition 2.6.1 et le lemme de Fatou nous avons,

$$\frac{1}{\theta(f)}\left[1 + \rho_\phi\left(\theta(f)f\right)\right] \leq \lim_{k\longrightarrow\theta(f)^-} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_\phi\left(kf\right)\right] = \|f\|^o_\phi < \infty,$$

c'est-à-dire $K(f) \neq \emptyset$. Contradiction avec le fait que $K(f) = \emptyset$. ■

Proposition 2.6.2 [*13*]

Soit $f \in L^o_\phi\left(\Omega\right) \setminus \{0\}$. Si $d(\phi) = +\infty$ alors, $K(f) \neq \emptyset$ où $d\left(\phi\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x}$.

Remarque 2.6.1 *D'après la Proposition* 2.6.2 *si ϕ est une N-fonction alors $K(f) \neq \emptyset$ pour tout $f \in L^0_\phi \setminus \{0\}$.*

Lemme 2.6.1 [*24*]

Soit $f \in L_{\phi}^{o}(\Omega)$. *Si* $K(f) = \emptyset$ *alors,*

$$\|f\|_{\phi}^{o} = \int_{\Omega} d(\phi) |f(t)| \, d\mu.$$

Démonstration.

Si $K(f) = \emptyset$ alors, il existe une suite croissante $(k_n)_{n \geq 1}$ telle que,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \left[1 + \rho_{\phi}(k_n f)\right] = \|f\|_{\phi}^{o} \text{ avec } \lim_{n \longrightarrow \infty} k_n = \infty.$$

Par le théorème de la convergence monotone, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\phi}^{o} &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \left[1 + \int_{\Omega} \phi(k_n f(t)) \, d\mu\right] \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \left[1 + \int_{\{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}} \phi(k_n f(t)) \, d\mu\right] \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{\{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}} \frac{\phi(k_n f(t))}{k_n |f(t)|} |f(t)| \, d\mu \\
&= \int_{\{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\phi(k_n |f(t)|)}{k_n |f(t)|} |f(t)| \, d\mu \\
&= \int_{\Omega} d(\phi) |f(t)| \, d\mu.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.6.2 [*24*]

Si $K(f)$ *se compose d'un seul élément alors,*

$$\|f\|_{\phi}^{o} < \int_{\Omega} d(\phi) |f(t)| \, d\mu.$$

Démonstration.

Prenons $k_1 > k_2 > 0$ alors, nous avons

$$\rho_{\phi}(k_1 f \chi_{E_n}) \geq \int_{\Omega} k_1 \left|f(t) \chi_{E_n}\right| \; p\left(k_2 \left|f(t) \chi_{E_n}\right|\right) d\mu - \rho_{\phi^*}\left(p\left(k_2 \left|f \chi_{E_n}\right|\right)\right)$$

et,

$$\rho_\phi\left(k_2 f \chi_{E_n}\right) = \int_\Omega k_2 f \left|(t)\chi_{E_n}\right| \; p\left(k_2 \left|f(t)\chi_{E_n}\right|\right) d\mu - \rho_{\phi^*}\left(p\left(k_2 \left|f\chi_{E_n}\right|\right)\right),$$

d'après l'inégalité de Young et l'égalité dans l'inégalité de Young respectivement (voir l'inégalité (2.3.2) et l'égalité (2.3.3), où :

$$E_n = \{t \in \Omega : k_2 |f(t)| \leq n \text{ et } p(k_2 |f(t)|) \leq n\}.$$

Il suit que,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k_1}\left[1+\rho_\phi\left(k_1 f \chi_{E_n}\right)\right] - \frac{1}{k_2}\left[1+\rho_\phi\left(k_2 f \chi_{E_n}\right)\right] \\
= \; & \frac{k_1-k_2}{k_1 k_2}\left[\frac{k_2}{k_1-k_2}\left(\rho_\phi\left(k_1 f\chi_{E_n}\right) - \rho_\phi\left(k_2 f \chi_{E_n}\right)\right) - \rho_\phi\left(k_2 f\chi_{E_n}\right) - 1\right] \\
\geq \; & \frac{k_1-k_2}{k_1 k_2}\left[\frac{k_2}{k_1-k_2}\int_\Omega (k_1-k_2)\left|f(t)\chi_{E_n}\right| p\left(k_2\left|f(t)\chi_{E_n}\right|\right) d\mu - \rho_\phi\left(k_2 f\chi_{E_n}\right) - 1\right] \\
= \; & \frac{k_1-k_2}{k_1 k_2}\left[\rho_{\phi^*}\left(p\left(k_2\left|f\chi_{E_n}\right|\right)\right) - 1\right].
\end{aligned}$$

Si $n \longrightarrow \infty$, alors on obtient :

$$\frac{1}{k_1}\left[1+\rho_\phi(k_1 f\chi_E)\right] - \frac{1}{k_2}\left[1+\rho_\phi(k_2 f\chi_E)\right] \geq \frac{k_1-k_2}{k_1 k_2}\left[\rho_{\phi^*}\left(p\left(k_2\left|f\chi_E\right|\right)\right) - 1\right],$$

où,

$$E = \{t \in \Omega : p(k_2 |f(t)|) < \infty\}.$$

Si,

$$p(k_2 |f(t)|) = \infty \text{ alors } \phi(k_1 |f(t)|) \geq \phi(k_2 |f(t)|) = \infty.$$

Donc, nous avons :

$$\frac{1}{k_1}\left[1+\rho_\phi(k_1 f)\right] - \frac{1}{k_2}\left[1+\rho_\phi(k_2 f)\right] \geq \frac{k_1-k_2}{k_1 k_2}\left[\rho_{\phi^*}\left(p\left(k_2\left|f\right|\right)\right) - 1\right].$$

Par ailleurs, d'après la définition de k^* (voir 2.6.3) on a : $\forall k \geq k^*$, $\rho_{\phi^*}(p(k|f|)) \geq 1$. Cela signifié que la fonction,

$$g(k) = \frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi(kf)\right],$$

est croissante $\forall k \geq k^*$. Prenons une suite $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que,

$$0 < k_1 < k_2 < ...k_n < ....$$

Par le théorème de la convergence monotone, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} d(\phi) |f(t)| \, d\mu &= \int_{\Omega} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\phi(k_n |f(t)|)}{k_n |f(t)|} |f(t)| \, d\mu \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\phi(k_n |f(t)|)}{k_n |f(t)|} |f(t)| \, d\mu \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \int_{\Omega} \phi(k_n |f(t)|) \, d\mu \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \left[1 + \int_{\Omega} \phi(k_n f(t)) \, d\mu \right] \\
&> \frac{1}{k_0} \left[1 + \int_{\Omega} \phi(k_0 f(t)) \, d\mu \right] \\
&= \|f\|_{\phi}^{o},
\end{aligned}$$

où $K(f) = \{k_0\}$. D'où le résultat. ■

Théorème 2.6.3 [*6*]

Soit ϕ une fonction d'Orlicz. S'il existe $f \in L_{\phi}^{0} \backslash \{0\}$ tel que $K(f) = \emptyset$ alors la fonction,

$$R(x) = d(\phi) |x| - \phi(x), \tag{2.6.7}$$

est bornée sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $K(f) = \emptyset$ et $R(x)$ n'est pas bornée. On pose,

$$\begin{aligned}
g(k) &= \frac{1}{k}[1 + \int_{\Omega} \phi(kf(t)) \, d\mu] = \frac{1}{k} \left[1 + \int_{\Omega} (d(\phi) |kf(t)| - R(kf(t))) \, d\mu \right] \\
&= \int_{\Omega} d(\phi) |f(t)| \, d\mu + \frac{1}{k} \left[1 - \int_{\Omega} R(kf(t)) d\mu \right], \, k > 0.
\end{aligned}$$

D'après le *Lemme* 2.6.1 si $K(f) = \emptyset$ alors,

$$\|f\|^o_\phi = \int_\Omega d(\phi)\,|f(t)|\,d\mu.$$

Mais, comme on a supposé que $R(x)$ n'est pas bornée alors,

$$\frac{1}{k}\left[1 - \int_\Omega R(kf(t))d\mu\right] < 0, \text{ pour } k \text{ assez grand.} \tag{2.6.8}$$

Donc (2.6.8) implique,

$$\|f\|^o_\phi \le g(k) < \int_\Omega d(\phi)\,|f(t)|\,d\mu.$$

Contradiction avec le fait que,

$$\|f\|^o_\phi = \int_\Omega d(\phi)\,|f(t)|\,d\mu.$$

■

Remarque 2.6.2 *La réciproque du Théorème* 2.6.3 *est vraie (c'est-à-dire, si $R(x) = d(\phi)|x| - \phi(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ alors, il existe $f \in L^0_\phi \setminus \{0\}$ tel que $K(f) = \emptyset$) pour plus de détails voir* [6]*. De plus, si ϕ est une N-fonction alors, $R(x)$ n'est pas bornée.*

2.7 Exemples d'espaces d'Orlicz $L^o_\phi(\Omega)$

Dans cette section, on s'intéresse à des exemples d'espaces d'Orlicz munis de la norme d'Orlicz. Des résultats du même type sont obtenus dans le cas de la norme de Luxemburg *voir* [18].

Exemple 2.7.1 *Les espaces L^p $(1 < p < \infty)$ sont les espaces d'Orlicz $L^o_{\phi_p}$ avec,*

$$\phi_p(x) = |x|^p.$$

De plus,

$$\|f\|^o_{\phi_p} = \omega_p \|f\|_{L^p} \quad \textit{avec} \quad \omega_p = p(p-1)^{\left(\frac{1-p}{p}\right)}.$$

En effet,

Montrons que $L^o_{\phi_p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
L^o_{\phi_p}(\Omega) &= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0,\ \int_\Omega \phi_p(\lambda f(t))\, d\mu < \infty \right\} \\
&= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0,\ \lambda^p \int_\Omega |f(t)|^p\, d\mu < \infty \right\} \\
&= \left\{ f \in M(\Omega) : \int_\Omega |f(t)|^p\, d\mu < \infty \right\} \\
&= L^p(\Omega).
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la norme d'Orlicz de f,

$$\begin{aligned}
\|f\|^o_{\phi_p} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_{\phi_P}(kf)\right] \\
&= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1 + \int_\Omega |kf(t)|^p\, d\mu\right] \\
&= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1 + k^p \|f\|^p_{L^p(\Omega)}\right].
\end{aligned}$$

Considérons la fonction g *de variable* $k > 0$ *définie par,*

$$g(k) = \frac{1}{k}\left[1 + k^p \|f\|^p_{L^p(\Omega)}\right].$$

La fonction g *est dérivable sur* $]0, \infty[$ *et sa dérivée est de la forme,*

$$g'(k) = \frac{-1}{k^2} + (p-1)k^{p-2} \|f\|^p_{L^p(\Omega)},$$

de plus,

$$\begin{cases}
g'(k) < 0 & si \ \ k < \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}} \\
g'(k) = 0 & si \ \ k = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}} \\
g'(k) > 0 & si \ \ k > \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}}.
\end{cases}$$

Cela signifie que, $g(k)$ *est décroissante sur* $]0, \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}}[$, *et croissante sur* $]\frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}}, \infty[$.

Alors,

$$\begin{aligned}\|f\|^o_{\phi_p} &= \inf_{k>0} g(k)\\ &= g\left(\frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right)\\ &= p(p-1)^{\left(\frac{1-p}{p}\right)}\|f\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Exemple 2.7.2 *[15]*

L'espace de Banach $L^1(\Omega)$ des fonctions $\mu-$intégrables muni de la norme,

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(t)|\, d\mu,$$

n'est rien d'autres que l'espace d'Orlicz $L^o_{\phi_1}$ où,

$$\phi_1(x) = |x|.$$

De plus,

$$\|f\|^o_{\phi_1} = \|f\|_{L^1}.$$

***En effet**,*

Premièrement, montrons que $L^o_{\phi_1}(\Omega) = L^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}L^o_{\phi_1}(\Omega) &= \left\{f \in M(\Omega) : \exists\lambda > 0,\ \int_\Omega \phi_1(\lambda f(t))\, d\mu < \infty\right\}\\ &= \left\{f \in M(\Omega) : \exists\lambda > 0,\ \lambda\int_\Omega |f(t)|\, d\mu < \infty\right\}\\ &= \left\{f \in M(\Omega) : \int_\Omega |f(t)|\, d\mu < \infty\right\}\\ &= L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Deuxièmement, montrons maintenant l'égalité $\|f\|^o_{\phi_1} = \|f\|_{L^1}$.

$$\begin{aligned}
\|f\|^o_{\phi_1} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\int_\Omega \phi_1(kf(t))\,d\mu\right] \\
&= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\int_\Omega |kf(t)|\,d\mu\right] = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+k\int_\Omega |f(t)|\,d\mu\right] \\
&= \inf_{k>0} \frac{1}{k} + \|f\|_{L^1} \\
&= \|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.7.3 *L'espace* L^∞ *est l'espace d'Orlicz* $L^o_{\phi_\infty}$ *avec,* $\phi_\infty : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *définie par :*

$$\phi_\infty(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x \in [-1,\,1] \\ +\infty & sinon, \end{cases}$$

De plus,

$$\|f\|^o_{\phi_\infty} = \|f\|_{L^\infty}.$$

En effet,

On sait que L^∞ *est l'espace des fonctions mesurables (modulo la relation d'équivalence « $= \mu - p.p$ ») essentiellement bornées c'est-à-dire :*

$$L^\infty(\Omega) = \{f \in M(\Omega) : \exists \alpha > 0,\ |f(t)| \le \alpha\ \mu - p.p.\ t \in \Omega\}.$$

Il est muni de la norme,

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{\alpha > 0 : |f(t)| \le \alpha\ \mu - p.p.\ t \in \Omega\} = \sup_{t\in\Omega} ess\ |f(t)|.$$

Premièrement, montrons que $L^\infty(\Omega) = L^o_{\phi_\infty}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
L^o_{\phi_\infty}(\Omega) &= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0,\ \int_\Omega \phi_\infty(\lambda f(t))\,d\mu < \infty \right\} \\
&= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists \lambda > 0,\ \int_{\{t\in\Omega : |\lambda f(t)|\le 1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\,d\mu + \int_{\{t\in\Omega : |\lambda f(t)|> 1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\,d\mu < \infty \right\}.
\end{aligned}$$

Comme,

$$\exists\lambda > 0, \int_{\{t\in\Omega:|\lambda f(t)|\leq 1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu + \int_{\{t\in\Omega:|\lambda f(t)|>1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu < \infty,$$

alors, on a nécessairement

$$\mu(\{t \in \Omega : |\lambda f(t)| > 1\}) = 0.$$

Ce qui donne,

$$\begin{aligned} L^o_{\phi_\infty}(\Omega) &= \{f \in M(\Omega) : \exists\lambda > 0,\ |\lambda f(t)| \leq 1\ \mu - p.p.\ t \in \Omega\} \\ &= \left\{f \in M(\Omega) : \exists\lambda > 0,\ |f(t)| \leq \frac{1}{\lambda}\ \mu - p.p.\ t \in \Omega\right\} \\ &= L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Deuxièmement, montrons maintenant l'égalité $\|f\|^o_{\phi_\infty} = \|f\|_{L^\infty}$.

On sait que,

$$\|f\|^o_{\phi_\infty} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1 + \rho_{\phi_\infty}(kf)].$$

Comme,

$$|kf(t)| \leq 1\ \mu - p.p.\ t \in \Omega,$$

alors,

$$|f(t)| \leq \frac{1}{k}\ \mu - p.p.\ t \in \Omega \implies \|f\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \Longrightarrow 0 < k \leq \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}} = \theta(f).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \|f\|^o_{\phi_\infty} &= \inf_{0<k\leq\frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}} \frac{1}{k}\left[1 + \int_{\{t\in\Omega:|\lambda f(t)|\leq 1\}} \phi_\infty(kf(t))\, d\mu\right] \\ &= \inf_{0<k\leq\frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}} \frac{1}{k} \\ &= \|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Exemple 2.7.4 *Les espaces* $L^p \cap L^\infty$ $(1 \leq p < \infty)$ *sont les espaces d'Orlicz* $L^o_{\phi_{p,\infty}}$ *avec,*

$$\phi_{p,\infty}(x) = \begin{cases} |x|^p & si\ \ x \in [-1, 1] \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

De plus,

$$\|f\|^o_{\phi_{p,\infty}} = \|f\|_{L^p\cap L^\infty} = \begin{cases} \beta(f)^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^\infty} & si\ \beta(f) \leq (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}} \\ (p)^{\frac{1}{p}}(q)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p} & si\ \beta(f) > (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}, \end{cases}$$

où,

$$\beta(f) = \frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^\infty}}\ \forall f \neq 0 \quad et\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En particulier, si $p = 1$

$$\|f\|^o_{\phi_{1,\infty}} = \|f\|_{L^1\cap L^\infty} = \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty}.$$

En effet*,*

Premièrement, montrons que $L^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) = L^o_{\phi_{p,\infty}}(\Omega)$.

$$L^o_{\phi_{p,\infty}}(\Omega) = \left\{ f \in M(\Omega) : \exists\lambda > 0,\ \int_\Omega \phi_{p,\infty}(\lambda f)\, d\mu < \infty \right\}.$$

Comme,

$$\exists\lambda > 0,\ \int_\Omega \phi_{p,\infty}(\lambda f)\, d\mu = \int_{\{t\in\Omega:|\lambda f(t)|\leq 1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu + \int_{\{t\in\Omega:|\lambda f(t)|>1\}} \phi_\infty(\lambda f(t))\, d\mu < \infty,$$

alors, on a nécessairement

$$\mu(\{t \in \Omega : |\lambda f(t)| > 1\}) = 0.$$

Ce qui donne,

$$\begin{aligned} &= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists\lambda > 0,\ \lambda^p \int_\Omega |f(t)|^p\, d\mu < \infty\ et\ |\lambda f(t)| \leq 1\ \mu - p.p.\ t \in \Omega \right\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega) : \exists\lambda > 0,\ \int_\Omega |f(t)|^p\, d\mu < \infty\ et\ |f(t)| \leq \frac{1}{\lambda}\ \mu - p.p.\ t \in \Omega \right\} \\ &= L^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Deuxièmement, montrons maintenant l'égalité $\|f\|^o_{\phi_{p,\infty}} = \|f\|_{L^p \cap L^\infty}$.

$$\begin{aligned}
\|f\|^o_{\phi_{p,\infty}} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1 + \int_\Omega \phi_{p,\infty}(kf(t))\,d\mu\right] \\
&= \inf_{0<k\leq \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}} \frac{1}{k}\left[1 + k^p \int_\Omega |f(t)|^p\,d\mu\right] \\
&= \inf_{0<k\leq \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}} \frac{1}{k}\left[1 + k^p \|f\|^p_{L^p}\right].
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction g *de variable* $k > 0$ *définie par,*

$$g(k) = \frac{1}{k}\left[1 + ak^p\right] \ \ avec\ a > 0.$$

La fonction g *est dérivable sur* $]0, \infty[$ *et sa dérivée est de la forme,*

$$g'(k) = \frac{-1}{k^2} + a(p-1)k^{p-2},$$

de plus,

$$\begin{cases} g'(k) < 0 & si\ \ k < (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}} \\ g'(k) = 0 & si\ \ k = (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}} \\ g'(k) > 0 & si\ \ k > (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

Ceci signifie que $g(k)$ *est décroissante sur* $]0, (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}}[$ *et croissante sur* $](\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}}, \infty[$.

En prenant $a = \|f\|^p_{L^p}$, *on obtient :*

Si,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^\infty}} \leq \frac{1}{\|f\|_{L^p}}(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}} \implies \beta(f) \leq (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}} \ \ avec\ \ \beta(f) = \frac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^\infty}},$$

alors le seul nombre pour lequel l'inf est atteint est :

$$k_0 = \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}} = \theta(f),$$

et,

$$g(k_0) = \beta(f)^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^\infty}.$$

Si,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^\infty}} > \frac{1}{\|f\|_{L^p}}(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}} \implies \beta(f) > (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}},$$

alors le seul nombre pour lequel l'inf est atteint est :

$$k_0 = \frac{1}{\|f\|_{L^p}}(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}},$$

et,

$$g(k_0) = (p)^{\frac{1}{p}}(q)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p}.$$

Par conséquent,

$$\|f\|^o_{\phi_{p,\infty}} = \|f\|_{L^p\cap L^\infty} = \begin{cases} \beta(f)^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^\infty} & si\ \beta(f) \leq (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}} \\ (p)^{\frac{1}{p}}(q)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p} & si\ \beta(f) > (\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

Exemple 2.7.5 *[12]*

L'espace d'interpolation $L^1 + L^\infty$ est l'espace d'Orlicz $L^o_{\phi_{\infty,1}}$ avec,

$$\phi_{\infty,1}(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x \in [-1,\, 1] \\ |x| - 1 & sinon. \end{cases}$$

De plus,

$$\|f\|^o_{\phi_{\infty,1}} = \|f\|_{L^1+L^p} = \inf\{\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^\infty} : g + h = f,\ g \in L^1,\ h \in L^\infty\}.$$

CHAPITRE 3

Les points extrêmes et fortement extrêmes des espaces d'Orlicz

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner, des critères pour la caractérisation des points extrêmes et des points fortement extrêmes de la boule unité des espaces d'Orlicz munis de la norme d'Orlicz, et des conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles l'espace d'Orlicz L_{ϕ}^{o} est strictement convexe. Ainsi, nous allons donner des conditions suffisantes pour lesquelles, l'ensemble des points extrêmes de $B\left(L_{\phi}^{o}\right)$ est vide. C'est une observation importante, parce que si un espace manque de la propriété de *Krein-Milman*, il n'est le dual d'aucun espace.

Dans toute la suite ϕ désignera une fonction d'Orlicz.

3.2 Les points extrêmes des espaces d'Orlicz

3.2.1 Caractérisation des points extrêmes des espaces d'Orlicz

Le théorème qui suit donne des conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles $f \in S\left(L_{\phi}^{o}\right)$ est extrême.

Théorème 3.2.1 [*8*]
$f \in S\left(L_{\phi}^{o}\right)$ est un point extrême de la boule unité $B\left(L_{\phi}^{o}\right)$ si et seulement si :
a) *L'ensemble $K(f)$ se compose d'un seul élément ($K(f)=\{k\}$ où $k>0$).*
b) *$kf(t) \in SC(\phi)$ $\mu - p.p.$ $t \in \Omega$ c'est-à-dire,*

$$\mu\left\{t \in \Omega : kf(t) \in \mathbb{R} \backslash SC(\phi)\right\} = 0.$$

Démonstration.
La nécessité :
Premièrement, montrons tout d'abord que $K(f) \neq \emptyset$.
On raisonne par l'absurde. Supposons que $f \in S\left(L_{\phi}^{o}\right)$ est un point extrême de $B\left(L_{\phi}^{o}\right)$ et $K(f)=\emptyset$. Alors il existe $a>0$ tel que l'ensemble,

$$\Omega a = \{t \in \Omega : |f(t)| \geq a\},$$

est de mesure positive et finie.
On peut supposer sans perte de généralité que la mesure de l'ensemble,

$$\Omega_0 = \{t \in \Omega : f(t) \geq a\},$$

est aussi positive et finie.
Prenons Ω_1 et Ω_2 deux sous-ensembles de Ω_0 tels que $\mu(\Omega_1)=\mu(\Omega_2)>0$. On choisit $\varepsilon \in]0, a[$ et on pose,

$$f_1(t) = f(t)\,\chi_{\Omega\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)} + (f(t)+\varepsilon)\,\chi_{\Omega_1} + (f(t)-\varepsilon)\,\chi_{\Omega_2}$$

$$f_2(t) = f(t)\,\chi_{\Omega\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)} + (f(t)-\varepsilon)\,\chi_{\Omega_1} + (f(t)+\varepsilon)\,\chi_{\Omega_2},$$

donc,

$$f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2).$$

De plus, d'après le *Lemme* 2.6.1 nous avons :

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_\phi^o &\leq \int_\Omega d(\phi)\,|f_1(t)|\,d\mu \\
&= \int_\Omega d(\phi)\left|f(t)\,\chi_{\Omega\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)} + (f(t)+\varepsilon)\,\chi_{\Omega_1} + (f(t)-\varepsilon)\,\chi_{\Omega_2}\right| d\mu \\
&= \int_{\Omega\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)} d(\phi)\,|f(t)|\,d\mu + \int_{\Omega_1} d(\phi)\,|f(t)+\varepsilon|\,d\mu + \int_{\Omega_2} d(\phi)\,|f(t)-\varepsilon|\,d\mu \\
&= \int_{\Omega\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)} d(\phi)\,|f(t)|\,d\mu + \int_{\Omega_1} d(\phi)\,|f(t)|\,d\mu + \int_{\Omega_2} d(\phi)\,|f(t)|\,d\mu + \varepsilon d(\phi)\left[\mu(\Omega_2) - \mu(\Omega_1)\right] \\
&= \int_\Omega d(\phi)\,|f(t)|\,d\mu \\
&= \|f\|_\phi^o = 1.
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient $\|f_2\|_\phi^o \leq 1$. D'où,

$$f_1, f_2 \in B\left(L_\phi^o\right) \text{ avec } f_1 \neq f_2 \neq f \text{ et } f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2).$$

Contradiction avec le fait que f est un point extrême. Donc $K(f) \neq \emptyset$.

Deuxièmement, avant de montrer que $K(f)$ se compose d'un seul élément, on montre d'abord,

$$kf(t) \in SC(\phi) \;\; \mu - p.p. \; t \in \Omega.$$

On raisonne par l'absurde. Supposons que $f \in S\left(L_\phi^o\right)$ est un point extrême de $B\left(L_\phi^o\right)$ et,

$$\mu\{t \in \Omega : kf(t) \in \mathbb{R}\setminus SC(\phi)\} > 0 \text{ avec } k \in K(f).$$

Alors, il existe un intervalle $[a, b]$ tel que $\forall\varepsilon > 0$,

$$\mu(A) > 0, \text{ où } A = \{t \in \Omega : kf(t) \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]\},$$

c'est-à-dire,

$$\phi(kf(t)) = \alpha kf(t) + \beta \;\; \forall t \in A \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Soit B, C deux sous-ensembles disjoints de A avec,

$$0 < \mu(B) = \mu(C) < \infty.$$

On pose :

$$g(t) = (f(t) - \varepsilon)\chi_B + (f(t) + \varepsilon)\chi_C + f(t)\chi_{\Omega\setminus(B\cup C)}$$
$$h(t) = (f(t) + \varepsilon)\chi_B + (f(t) - \varepsilon)\chi_C + f(t)\chi_{\Omega\setminus(B\cup C)},$$

donc,

$$f = \frac{1}{2}(g + h).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\rho_\phi(kg) &= \int_B (\alpha k(f(t) - \varepsilon) + \beta)\, d\mu + \\
&\quad \int_C (\alpha k(f(t) + \varepsilon) + \beta)\, d\mu + \int_{\Omega\setminus(B\cup C)} \phi(kf(t))\, d\mu \\
&= \int_{B\cup C} (\alpha k f(t) + \beta)\, d\mu + \int_{\Omega\setminus(B\cup C)} \phi(kf(t))\, d\mu \\
&= \int_{B\cup C} \phi(kf(t))\, d\mu + \int_{\Omega\setminus(B\cup C)} \phi(kf(t))\, d\mu \\
&= \rho_\phi(kf).
\end{aligned}$$

Comme $k \in K(f)$ alors,

$$\|g\|_\phi^o \leq \frac{1}{k}\left[1 + \rho_\phi(kg)\right] = \frac{1}{k}\left[1 + \rho_\phi(kf)\right] = \|f\|_\phi^o = 1.$$

De même, on obtient $\|h\|_\phi^o \leq 1$. D'où,

$$g, h \in B\left(L_\phi^o\right) \text{ avec } g \neq h \neq f \text{ et } f = \frac{1}{2}(g + h).$$

Contradiction avec le fait que f est un point extrême. Donc,

$$kf(t) \in SC(\phi) \;\; \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

Troisièmement, démontrons maintenant que $K(f)$ se compose d'un seul élément.

On raisonne par l'absurde. Supposons $f \in S\left(L_\phi^o\right)$ est un point extrême et qu'il existe,

$$k_1,\, k_2 \in K(f) \text{ avec } k_1 \neq k_2.$$

Comme ρ_ϕ est une modulaire convexe,

$$\begin{aligned}\rho_\phi\left(\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}f\right) &= \rho_\phi\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}k_1f+\frac{k_1}{k_1+k_2}k_2f\right)\\ &\leq \frac{k_2}{k_1+k_2}\rho_\phi\left(k_1f\right)+\frac{k_1}{k_1+k_2}\rho_\phi\left(k_2f\right),\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}2 &= \|f\|_\phi^o+\|f\|_\phi^o=\frac{1}{k_1}\left[1+\rho_\phi\left(k_1f\right)\right]+\frac{1}{k_2}\left[1+\rho_\phi\left(k_2f\right)\right]\\ &= \frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\left[1+\frac{k_2}{k_1+k_2}\rho_\phi\left(k_1f\right)+\frac{k_1}{k_1+k_2}\rho_\phi\left(k_2f\right)\right].\end{aligned}$$

On pose $k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$,

$$\begin{aligned}2 &= \frac{1}{k}\left[1+\frac{k_2}{k_1+k_2}\int_\Omega\phi\left(k_1f\left(t\right)\right)d\mu+\frac{k_1}{k_1+k_2}\int_\Omega\phi\left(k_2f\left(t\right)\right)d\mu\right]\\ &\geq \frac{2}{2k}\left[1+\int_\Omega\phi\left(2kf\left(t\right)\right)d\mu\right]\geq 2\left\|f\right\|_\phi^o=2.\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient deux résultats,

i)

$$\|f\|_\phi^o=\frac{1}{2k}\left[1+\int_\Omega\phi\left(2kf\left(t\right)\right)d\mu\right]\ \text{c'est-à-dire } 2k\in K(f).$$

D'après la condition (b) on a,

$$2kf\left(t\right)\in SC\left(\phi\right)\ \ \mu-p.p.\ t\in\Omega. \tag{3.2.1}$$

ii)

$$\phi\left(2kf\left(t\right)\right)=\frac{k_2}{k_1+k_2}\phi\left(k_1f\left(t\right)\right)+\frac{k_1}{k_1+k_2}\phi\left(k_2f\left(t\right)\right)\ \ \mu-p.p.\ t\in\Omega. \tag{3.2.2}$$

D'après (3.2.1) et (3.2.2) on obtient,

$$2kf\left(t\right)=k_1f\left(t\right)=k_2f\left(t\right)\ \ \mu-p.p.\ t\in\Omega,$$

d'où,

$$k_1=k_2.$$

Contradiction avec le fait que $k_1 \neq k_2$. Donc $K(f)$ se compose d'un seul élément.

La suffisance :

Soient $f,\, f_1,\, f_2 \in S\left(L_\phi^o\right)$ avec $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ et montrons que sous les conditions (a) et (b) $f = f_1 = f_2$.

Premièrement,

1) Montrons d'abord que, $K(f_1) \neq \emptyset$ ou $K(f_2) \neq \emptyset$.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $K(f_1) = \emptyset$ et $K(f_2) = \emptyset$.

Alors d'après le *Lemme* 2.6.2 on a,

$$\begin{aligned} 1 &= \left\| \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \right\|_\phi^o \\ &< \int_\Omega d(\phi) \left| \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \right| d\mu \\ &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega d(\phi) \left| f_1(t) \right| d\mu + \frac{1}{2} \int_\Omega d(\phi) \left| f_2(t) \right| d\mu \\ &= \frac{1}{2} \left\| f_1 \right\|_\phi^o + \frac{1}{2} \left\| f_2 \right\|_\phi^o \\ &= 1. \end{aligned}$$

Cette contradiction montre que $K(f_1) \neq \emptyset$ ou $K(f_2) \neq \emptyset$.

2) Montrons maintenant que, $K(f_1) \neq \emptyset$ et $K(f_2) \neq \emptyset$.

On raisonne par l'absurde. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$K(f_1) \neq \emptyset \text{ et } K(f_2) = \emptyset.$$

2.i) Montrons d'abord que,

$$K(g) \neq \emptyset \ \forall g \in [f_1,\, f[\quad \text{et} \quad K(g) = \emptyset \ \forall g \in \,]f,\, f_2]\,,$$

où,

$$\begin{aligned} [f_1,\, f[&= \{(1-\lambda) f_1 + \lambda f : 0 \leq \lambda < 1\} \\ ]f,\, f_2] &= \{(1-\lambda) f + \lambda f_2 : 0 < \lambda \leq 1\}\,. \end{aligned}$$

Montrons que, $K(g) \neq \emptyset \ \forall g \in [f_1,\, f[$.

Supposons qu'il existe $f_3 \in [f_1,\, f[$ tel que $K(f_3) = \emptyset$. Alors il existe $\lambda_3 \in [0,\, 1[$ tel que,

$$f_3 = (1 - \lambda_3) f_1 + \lambda_3 f.$$

Puisque $f_1 = 2f - f_2$ alors,

$$f_3 = (1-\lambda_3)(2f - f_2) + \lambda_3 f = (2-\lambda_3) f - (1-\lambda_3) f_2,$$

d'où,

$$f = \frac{1}{2-\lambda_3} f_3 + \frac{1-\lambda_3}{2-\lambda_3} f_2.$$

D'après le *Lemme* 2.6.2 on a,

$$\begin{aligned}
1 &= \|f\|_\phi^o \\
&< \int_\Omega d(\phi)\,|f(t)|\,d\mu \\
&= \int_\Omega d(\phi)\left|\frac{1}{2-\lambda_3} f_3(t) + \frac{1-\lambda_3}{2-\lambda_3} f_2(t)\right| d\mu \\
&\leq \frac{1}{2-\lambda_3}\int_\Omega d(\phi)\,|f_3(t)|\,d\mu + \frac{1-\lambda_3}{2-\lambda_3}\int_\Omega d(\phi)\,|f_2(t)|\,d\mu \\
&= \frac{1}{2-\lambda_3}\|f_3\|_\phi^o + \frac{1-\lambda_3}{2-\lambda_3}\|f_2\|_\phi^o \\
&\leq \frac{1}{2-\lambda_3} + \frac{1-\lambda_3}{2-\lambda_3} = 1.
\end{aligned}$$

Cette contradiction montre que,

$$K(g) \neq \emptyset \ \forall g \in [f_1,\, f[\,.$$

Montrons que, $K(g) = \emptyset \ \forall g \in \,]f,\, f_2]$.

Supposons qu'il existe $f_4 \in \,]f,\, f_2]$ tel que $K(f_4) \neq \emptyset$. On peut trouver $f_5 \in [f_1,\, f[$ tel que,

$$f = \frac{1}{2}(f_4 + f_5) \ \text{ et } \ f_4 \neq f_5.$$

Donc, il existe $k_4 \in K(f_4)$ et $k_5 \in K(f_5)$ tel que,

$$\|f_4\|_\phi^o = \frac{1}{k_4}\left[1 + \rho_\phi(k_4 f_4)\right]$$

$$\|f_5\|_\phi^o = \frac{1}{k_5}\left[1 + \rho_\phi(k_5 f_5)\right].$$

Comme ρ_ϕ est une modulaire convexe alors,

$$\begin{aligned}
\rho_\phi\left(\frac{k_4k_5}{k_4+k_5}2f\right) &= \rho_\phi\left(\frac{k_4k_5}{k_4+k_5}\left(f_4+f_5\right)\right)\\
&= \rho_\phi\left(\frac{k_5}{k_4+k_5}k_4f_4+\frac{k_4}{k_4+k_5}k_5f_5\right)\\
&\leq \frac{k_5}{k_4+k_5}\rho_\phi\left(k_4f_4\right)+\frac{k_4}{k_4+k_5}\rho_\phi\left(k_5f_5\right),
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
2 &= 2\left\|f\right\|_\phi^o\\
&\leq \frac{k_4+k_5}{k_4k_5}\left[1+\rho_\phi\left(\frac{k_4k_5}{k_4+k_5}2f\right)\right]\\
&\leq \frac{k_4+k_5}{k_4k_5}\left[1+\frac{k_5}{k_4+k_5}\rho_\phi\left(k_4f_4\right)+\frac{k_4}{k_4+k_5}\rho_\phi\left(k_5f_5\right)\right]\\
&= \frac{1}{k_4}\left[1+\rho_\phi\left(k_4f_4\right)\right]+\frac{1}{k_5}\left[1+\rho_\phi\left(k_5f_5\right)\right]\\
&= \left\|f_4\right\|_\phi^o+\left\|f_4\right\|_\phi^o\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient deux résultats,

$$\left\|f\right\|_\phi^o=\frac{k_4+k_5}{2k_4k_5}\left[1+\rho_\phi\left(\frac{2k_4k_5}{k_4+k_5}f\right)\right],$$

et,

$$\phi\left(\frac{2k_4k_5}{k_4+k_5}f\left(t\right)\right)=\frac{k_5}{k_4+k_5}\phi\left(k_4f_4\left(t\right)\right)+\frac{k_4}{k_4+k_5}\phi\left(k_5f_5\left(t\right)\right)\ \ \mu-p.p.\ t\in\Omega. \tag{3.2.3}$$

Par hypothèse $K\left(f\right)=\{k\}$ Alors,

$$k=\frac{2k_4k_5}{k_4+k_5}.$$

Et aussi par hypothèse,

$$kf(t)\in SC\left(\phi\right)\ \ \mu-p.p.\ t\in\Omega,$$

donc d'après l'égalité (3.2.3) on a,

$$k_4f_4\left(t\right)=k_5f_5\left(t\right)=kf\left(t\right)\ \ \mu-p.p.\ t\in\Omega.$$

Puisque $f_4,\, f_5,\, f \in S\left(L^o_\phi\right)$, on obtient $k_4 = k_5 = k$ ce qui donne,

$$f_4 = f_5 = f.$$

Contradiction avec le fait que $f_4 \neq f_5$ donc,

$$K(g) = \emptyset \ \forall g \in \left]f,\, f_2\right].$$

2.ii) Prenons

$$f_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f + \frac{1}{n} f_2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n \in \left]f,\, f_2\right] \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(t) = f(t) \ \ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

D'où, $K(f_n) = \emptyset$ et par le *Lemme* 2.6.1,

$$\|f_n\|^o_\phi = \int\limits_\Omega d(\phi)\,|f_n(t)|\, d\mu.$$

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue nous avons,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n\|^o_\phi = \|f\|^o_\phi,$$

car :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(t) = f(t) \ \ \mu - p.p.\ t \in \Omega \ \text{ et } \ |f_n(t)| \leq |f(t)| \ \ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

De plus, par le lemme de Fatou on a :

$$\begin{aligned} \|f\|^o_\phi &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n\|^o_\phi = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int\limits_\Omega d(\phi)\,|f_n(t)|\, d\mu \\ &\geq \int\limits_\Omega d(\phi)\,|f(t)|\, d\mu \\ &> \|f\|^o_\phi \ \text{ car } \ K(f) = \{k\}. \end{aligned}$$

Cette contradiction montre que,

$$K(f_1) \neq \emptyset \text{ et } K(f_2) \neq \emptyset.$$

Ce qui termine la première étape.

Deuxièmement, montrons maintenant que f est un point extrême.

Dans (**2.i**), on remplace f_4 et f_5 par f_1 et f_2 respectivement, on obtient :

$$k_1 f_1(t) = k_2 f_2(t) = k f(t) \;\; \mu - p.p. \; t \in \Omega.$$

D'où, par le fait que f_1, f_2, $f \in S\left(L^o_\phi\right)$, on a $k_1 = k_2 = k$.

Et par conséquent,

$$f_1 = f_2 = f.$$

Donc f est un point extrême de $B\left(L^o_\phi\right)$. ■

Remarque 3.2.1 *Si ϕ est une N-fonction alors, la démonstration du Théorème* 3.2.1 *devient très facile, car* : $K(f)$, $K(f_1)$ *et* $K(f_2)$ *sont toujours non vide.*

Le corollaire qui suit donne des conditions suffisantes pour lesquelles $B(L^o_\phi)$ ne possède pas de points extrêmes.

Corollaire 3.2.1 [*8*]

Si l'une des conditions suivantes,

a) $\rho_{\phi^*}(p(x_0\chi_\Omega)) < 1$ *où* $x_0 = \sup\{x \geq a(\phi) : x \in SC(\phi)\}$

b) $CS(\phi)\backslash\{0\} = \emptyset$,

est satisfaite. Alors,

$$Extr(B(L^o_\phi)) = \emptyset.$$

Démonstration.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $Extr(B(L^o_\phi)) \neq \emptyset$.

Donc, d'après le *Théorème* 3.2.1, il existe $f_0 \in S(L^o_\phi)$ un point extrême de $B(L^o_\phi)$ et un unique $k_0 > 0$ tel que,

$$\| f_0 \|^o_\phi = \frac{1}{k_0}\left[1 + \rho_\phi(k_0 f_0)\right] \quad \text{et} \quad k_0 f_0(t) \in SC(\phi) \; \mu - p.p. \; t \in \Omega.$$

Puisque,

$$K(f_0) = [k^*, k^{**}] = \{k_0\},$$

où,

$$k^* = k^*(f) = \inf\left\{k > 0 : \rho_{\phi^*}\left(p(k\,|f|)\right) \geq 1\right\}$$

$$k^{**} = k^{**}(f) = \sup\left\{k > 0 : \rho_{\phi^*}\left(p(k\,|f|)\right) \leq 1\right\},$$

et p est la dérivée à droite de ϕ. Alors, $k_0 = k^* = k^{**}$.

Premièrement, si la condition (**a**) est satisfaite alors,

$$k_0\,|f_0(t)| \leq x_0 \quad \mu - p.p.\ t \in \Omega,$$

et,

$$\rho_{\phi^*}(p(k_0\,|f_0(t)|)) \leq \rho_{\phi^*}(p(x_0\chi_\Omega)) < 1.$$

Et par conséquent l'ensemble,

$$\{k > 0 : \rho_{\phi^*}(p(k\,|f_0(t)|)) \geq 1\} = \emptyset,$$

c'est à dire,

$$K(f_0) = \emptyset.$$

D'après le *Théorème* 3.2.1, f_0 ne peut pas être un point extrême de $B(L^o_\phi)$.

Contradiction avec le fait que $Extr(B(L^o_\phi)) \neq \emptyset$.

Deuxièmement, si la condition (**b**) est satisfaite alors, d'après le *Théorème* 3.2.1,

$$k_0 f_0(t) = 0,\ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

Par conséquent,

$$f_0(t) = 0\ \mu - p.p.\ t \in \Omega,$$

donc, $f_0 \notin S(L^o_\phi)$.

Contradiction avec le fait que $Extr(B(L^o_\phi)) \neq \emptyset$. Ceci montre que $Extr(B(L^o_\phi)) = \emptyset$, ce qui termine la démonstration. ■

Exemple 3.2.1 *Comme l'espace L^1 est l'espace d'Orlicz $L^o_{\phi_1}$ avec, $\phi_1(x) = |x|$. Alors,*

$$CS(\phi_1) = \{0\}.$$

Ce qui donne, $Extr(B(L^1)) = \emptyset$.

Par ailleurs on a,

$$x_0 = \sup\{x \geq a(\phi) : x \in SC(\phi)\} = 0, \;\; p\,(x) = 1 \;\forall x \geq 0,$$

et,

$$\phi_1^*(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [-1,\, 1] \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

Donc,

$$\rho_{\phi_1^*}(p(x_0\chi_\Omega)) = 0 < 1.$$

Ce qui donne aussi, $Extr(B(L^1)) = \emptyset$.

3.2.2 La stricte convexité des espaces d'Orlicz

Le corollaire qui suit donne des conditions suffisantes et nécessaires pour lesquelles l'espace d'Orlicz L_ϕ^o soit strictement convexe.

Corollaire 3.2.2 [*8*]

L'espace d'Orlicz L_ϕ^o *est strictement convexe si et seulement si,*

a) ϕ *est strictement convexe.*

b) $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = \infty$, *où* $R(x) = d\,(\phi)\,|x| - \phi(x)$.

Démonstration.

La suffisance :

Pour montrer que L_ϕ^o est strictement convexe il suffit de montrer que toute f de $S(L_\phi^o)$ est un point extrême de $B(L_\phi^o)$ (voir *Proposition* 1.5.1).

D'après la condition (**b**), et le *Théorème* 2.6.3 on a,

$$K(f) \neq \emptyset.$$

D'après la condition (**a**) on a,

$$kf(t) \in SC(\phi) \;\; \mu - p.p. \; t \in \Omega.$$

Par conséquent, en tenant compte du *Théorème* 3.2.1, f est un point extrême de $B(L^o_\phi)$.

La nécessité :

Premièrement, montrons d'abord que,

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \infty.$$

On raisonne par l'absurde. Supposons que, $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) < \infty$.

Soit $f \in S(L^o_\phi)$, un point extrême de $B(L^o_\phi)$. Alors, d'après la *Remarque* 2.6.2 $K(f) = \emptyset$.

Par conséquent, si

$$B \subset Supp(f) \cap \Sigma_1 \quad \text{et} \quad 0 < \mu(B) < \mu(Supp(f)) \quad \text{où} \quad \Sigma_1 \in \Sigma,$$

alors,

$$K(f\chi_B) = \emptyset \quad \text{et} \quad K(f\chi_{B'}) = \emptyset \quad \text{où} \quad B' = Supp(f) \setminus B.$$

D'après le *Lemme* 2.6.1 on a,

$$\| f \|^o_\phi = \int\limits_\Omega d(\phi) |f(t)| d\mu, \ \| f\chi_B \|^o_\phi = \int\limits_\Omega d(\phi) |f(t)| \chi_B d\mu,$$

et,

$$\| f\chi_{B'} \|^o_\phi = \int\limits_\Omega d(\phi) |f(t)| \chi_{B'} d\mu.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|f\|^o_\phi &= \int\limits_\Omega d(\phi) |f(t)| d\mu \\
&= \int\limits_\Omega d(\phi) |f(t)| \chi_B d\mu + \int\limits_\Omega d(\phi) |f(t)| \chi_{B'} d\mu \\
&= \| f\chi_B \|^o_\phi + \| f\chi_{B'} \|^o_\phi \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Pour,

$$\alpha = \| f\chi_B \|^o_\phi \quad \text{et} \quad \beta = \| f\chi_{B'} \|^o_\phi ,$$

nous avons,

$$\alpha, \beta \in]0,1[\quad \text{et} \quad \beta + \alpha = 1.$$

De plus, pour

$$g = \frac{f\chi_B}{\| f\chi_B \|_\phi^o} \ \text{ et } \ h = \frac{f\chi_{B'}}{\| f\chi_{B'} \|_\phi^o},$$

on a,

$$g,\, h \in S(L_\phi^o) \ \text{ et } \alpha g + \beta h = f\chi_B + f\chi_{B'} = f.$$

Cela signifie que,

$$f \notin Extr(B(L_\phi^o)).$$

Contradiction avec le fait que L_ϕ^o est strictement convexe.

Deuxièmement, montrons maintenant que ϕ est strictement convexe.

En utilisant la condition (**b**), dont la nécessité a été déjà démontrée alors,

$$K(f) \neq \emptyset, \text{ pour tout } f \in L_\phi^o \setminus \{0\}.$$

De plus si $f \in S\left(L_\phi^o\right)$ alors, $f \in Extr(B(L_\phi^o))$.

Par conséquent, d'après le *Théorème* 3.2.1, ϕ est strictement convexe. ■

Remarque 3.2.2 *Si ϕ est une N-fonction alors, L_ϕ^o est strictement convexe si et seulement si ϕ est strictement convexe, car : $R(x)$ est toujours non bornée.*

3.3 Les points fortement extrêmes des espaces d'Orlicz

3.3.1 Points fortement extrêmes avec $b\,(\phi) < \infty$

Lemme 3.3.1 [9]

Soit ϕ une fonction d'Orlicz avec $b\,(\phi) < \infty$ alors,

$$Fext(B(L_\phi^o)) \subset \left\{ f \in S(L_\phi^o) : k\,|f\,(t)| = b(\phi)\ \mu - p.p.\ t \in \Omega \ \text{ où } \ \{k\} = K(f) \right\}.$$

Démonstration.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $f \in S\left(L_\phi^o\right)$ est un point fortement extrême de $B\left(L_\phi^o\right)$ avec,

$$b\,(\phi) < \infty \text{ et } k\,|f\,(t)| \neq b(\phi)\ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

Par le fait que $\rho_\phi(kf) < \infty$, nous avons :

$$\mu\left(\{t \in \Omega : k\,|f(t)| > b(\phi)\}\right) = 0,$$

alors, on a nécessairement :

$$k\,|f(t)| < b(\phi)\ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

On définit,

$$A_n = \left\{ t \in \Omega : k\,|f(t)| < (1 - \frac{1}{n})b(\phi) \right\}\ n \in \mathbb{N}^*,$$

nous avons,

$$A_1 \subset A_2 \subset ...A_i \subset ...A_n \ \text{ et } \ \mu(\Omega \backslash \cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0.$$

Par conséquent, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(A_m) > 0$. On pose,

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{1}{m}},$$

alors, $k\,|f(t)| \leq \lambda^2 b(\phi)$ pour tout $t \in A_m$.

On choisit une suite (B_n) de sous-ensemble mesurables de A_m tels que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(B_n) = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit,

$$\begin{aligned} g_n &= f + \frac{(1-\lambda)b(\phi)}{2k} sign\,(f)\,\chi_{B_n} \\ h_n &= f - \frac{(1-\lambda)b(\phi)}{2k} sign\,(f)\,\chi_{B_n}. \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$g_n + h_n = 2f, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme, $|g_n| \geq |f|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \|g_n\|_\phi^o \geq \|f\|_\phi^o = 1.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_\phi^o &\leq \frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi(kg_n)\right] \\
&= \frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi(kf\chi_{\Omega\setminus B_n}+kf\chi_{B_n}+(1-\lambda)\frac{b(\phi)}{2}\chi_{B_n})\right] \\
&\leq \frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi(kf\chi_{\Omega\setminus B_n})\right]+\frac{1}{k}\left[\rho_\phi(\frac{\lambda kf}{\lambda}\chi_{B_n}+(1-\lambda)\frac{b(\phi)}{2}\chi_{B_n})\right] \\
&\leq \frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi(kf)\right]+\lambda\rho_\phi(\frac{k}{\lambda}f\chi_{B_n})+(1-\lambda)\phi\left(\frac{b(\phi)}{2}\right)\mu\left(B_n\right) \\
&\longrightarrow \frac{1}{k}(1+\rho_\phi(kf)) = \|f\|_\phi^o = 1 \text{ quand } n\longrightarrow\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sup\|g_n\|_\phi^o \leq 1,$$

d'où,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|g_n\|_\phi^o = 1.$$

D'autre part, comme $|h_n| \leq |f|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sup\|h_n\|_\phi^o \leq \|f\|_\phi^o = 1.$$

Pour montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\inf\|h_n\|_\phi^o \geq 1$, on raisonne par l'absurde.
Supposons que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\inf\|h_n\|_\phi^o < 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
2 &= \|2f\|_\phi^o \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\|g_n+h_n\|_\phi^o \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\inf\|g_n+h_n\|_\phi^o \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\inf\left(\|g_n\|_\phi^o+\|h_n\|_\phi^o\right) \\
&= 1+\lim_{n\longrightarrow\infty}\inf\|h_n\|_\phi^o \\
&< 2,
\end{aligned}$$

une contradiction. D'où,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\inf\|h_n\|_\phi^o \geq 1 \text{ ou encore } \lim_{n\longrightarrow\infty}\|h_n\|_\phi^o = 1.$$

Cependant, pour tout $\alpha > 1$ nous avons :

$$\begin{aligned}\rho_\phi(\frac{2\alpha k}{1-\lambda}(g_n - f)) &= \rho_\phi(\frac{2\alpha k}{1-\lambda}(f + \frac{(1-\lambda)b(\phi)}{2k}\chi_{B_n} - f)) \\ &= \rho_\phi(\alpha b(\phi)\chi_{B_n}) \\ &= \phi(\alpha b(\phi))\mu(B_n) = \infty,\end{aligned}$$

en particulier, on a :

$$\rho_\phi(\frac{2\alpha k}{1-\lambda}(g_n - f)) > 1,$$

d'où,

$$\begin{aligned}\|g_n - f\|_\phi^o &\geq \|g_n - f\|_\phi \quad \text{(voir le } \textit{Théorème } 2.5.1) \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \rho_\phi\left(\frac{1}{\lambda}(g_n - f)\right) \leq 1\} \\ &\geq \frac{1-\lambda}{2\alpha k} \neq 0.\end{aligned}$$

Comme,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|g_n\| = 1, \ \lim_{n \longrightarrow \infty} \|h_n\| = 1 \ \text{ et } \ g_n + h_n = 2f \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ avec } \lim_{n \longrightarrow \infty} \|g_n - f\|_\phi^o \neq 0.$$

Contradiction avec le fait que f est un point fortement extrême. ■

Lemme 3.3.2 [*9*]
Si $b(\phi) < \infty$ et $\phi(b(\phi)) = \infty$ alors, $Fext\left(B\left(L_\phi^o\right)\right) = \emptyset$.

Démonstration.
Supposons que $f \in S\left(L_\phi^o\right)$ est un point fortement extrême de $B\left(L_\phi^o\right)$, $b(\phi) < \infty$ et $\phi(b(\phi)) = \infty$.
Par le *Lemme* 3.3.1 nous avons :

$$k\,|f(t)| = b(\phi) \ \mu - p.p. \ t \in \Omega \text{ où } \{k\} = K(f).$$

De plus,

$$\rho_\phi(kf) = \rho_\phi(b(\phi)) = \mu(\Omega)\,\phi(b(\phi)) = \infty,$$

c'est-à-dire : $k \notin K(f)$, une contradiction. Alors, $Fext\left(B\left(L_\phi^o\right)\right) = \emptyset$. ■

Théorème 3.3.1 [9]
Soit ϕ une fonction d'Orlicz avec $\phi(b(\phi)) < \infty$ alors,

$$Fext(B(L_\phi^o)) = \left\{ f \in S(L_\phi^o) : k\,|f(t)| = b(\phi)\ \mu - p.p.\ t \in \Omega \text{ où } \{k\} = K(f) \right\}.$$

Comme la démonstration de ce théorème nécessite beaucoup de calcul alors, on va donner juste la première inclusion "$\subset$", pour plus de détails voir [9].

Démonstration.
Si $\phi(b(\phi)) < \infty$ alors, on a nécessairement $b(\phi) < \infty$. Par le *Lemme* 3.3.1 on a,

$$Fext(B(L_\phi^o)) \subset \left\{ f \in S(L_\phi^o) : k\,|f(t)| = b(\phi)\ \mu - p.p.\ t \in \Omega \text{ où } \{k\} = K(f) \right\}.$$

■

3.3.2 Points fortement extrêmes avec $b(\phi) = \infty$

Lemme 3.3.3 [9]
Soit ϕ une fonction d'Orlicz avec $b(\phi) = \infty$. Si $Fext\left(B\left(L_\phi^o\right)\right) \neq \emptyset$ alors, $\phi \in \triangle_2(\infty)$.

Démonstration.
On raisonne par l'absurde. Supposons que $\phi \notin \triangle_2(\infty)$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs croissante vers l'infini tel que :

$$\phi(2x_n) > 2^n \phi(x_n)\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prenant $a > 0$ tel que l'ensemble,

$$\Omega_a = \{t \in \Omega : |f(t)| \leq a\},$$

est de mesure positive, et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\Omega_n \in \Sigma$ avec $\Omega_n \subset \Omega_a$ tel que :

$$\mu(\Omega_n) = \frac{1}{2^n \phi(x_n)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{aligned}
g_n(t) &= f(t)\,\chi_{\Omega\setminus\Omega_n}(t) + \left(f(t) + \frac{x_n}{k} sign\ f(t)\right)\chi_{\Omega_n}(t) \\
h_n(t) &= f(t)\,\chi_{\Omega\setminus\Omega_n}(t) + \left(f(t) - \frac{x_n}{k} sign\ f(t)\right)\chi_{\Omega_n}(t) \\
f_n(t) &= f(t)\,\chi_{\Omega\setminus\Omega_n}(t) + \frac{x_n}{k} sign\ f(t)\,\chi_{\Omega_n}(t),
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$g_n + h_n = 2f, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par le fait que $\mu(\Omega_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ nous avons,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|g_n - f_n\|_\phi^0 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|f\chi_{\Omega n}\|_\phi^0 \leq a \lim_{n\longrightarrow\infty} \|\chi_{\Omega n}\|_\phi^0 = 0.$$

Comme, $|h_n| \leq |g_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \|h_n\|_\phi^0 &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \|g_n\|_\phi^0 \qquad (3.3.1)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \|f_n\|_\phi^0\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \left(\inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi(kf_n)\right]\right)\\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi\left(kf\chi_{\Omega\backslash\Omega_n}\right)+\rho_\phi\left(x_n\chi_{\Omega_n}\right)\right]\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \frac{1}{k}\left[1+\rho_\phi\left(kf\chi_{\Omega\backslash\Omega_n}\right)+\int_{\Omega n}\phi(x_n)\,d\mu\right]\\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \left[\frac{1}{k}\left(1+\rho_\phi\left(kf\chi_{\Omega\backslash\Omega_n}\right)\right)+\frac{1}{k}\phi(x_n)\,\mu(\Omega_n)\right]\\
&= 1 + \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \frac{1}{k}\phi(x_n)\,\mu(\Omega_n)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

De plus,

$$0 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|f\chi_{\Omega n}\|_\phi^0 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|f - f\chi_{\Omega\backslash\Omega n}\right\|_\phi^0,$$

d'où,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|f\chi_{\Omega\backslash\Omega n}\right\|_\phi^0 = \|f\|_\phi^0 = 1.$$

Ainsi par,

$$\|g_n\|_\phi^0 \geq \|h_n\|_\phi^0 \geq \left\|f\chi_{\Omega\backslash\Omega n}\right\|_\phi^0 \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

nous avons,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \|g_n\|_\phi^0 \geq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \|h_n\|_\phi^0 \geq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \left\|f\chi_{\Omega\backslash\Omega n}\right\|_\phi^0 = 1. \qquad (3.3.2)$$

D'après, (3.3.1) et (3.3.2) on a,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|g_n\|_\phi^0 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|h_n\|_\phi^0 = 1.$$

Cependant, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\rho_\phi\left(2k\left(g_n - f\right)\right) &= \rho_\phi\left(2k\left[f\chi_{\Omega\backslash\Omega_n} + f\left(t\right)\chi_{\Omega_n} + \frac{x_n}{k} sign\ f\chi_{\Omega_n} - f\right]\right) \\
&= \rho_\phi\left(2x_n\chi_{\Omega_n}\right) \\
&= \int\limits_{\Omega n} \phi\left(2x_n\right) d\mu \\
&= \phi\left(2x_n\right)\mu\left(\Omega_n\right) \\
&> 2^n\phi\left(x_n\right)\mu\left(\Omega_n\right) = 1,
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\left\|g_n - f\right\|_\phi^0 &\geq \left\|g_n - f\right\|_\phi \quad (\text{voir le } \textit{Théorème } 2.5.1) \\
&= \inf\{\lambda > 0 : \rho_\phi\left(\frac{1}{\lambda}\left(g_n - f\right)\right) \leq 1\} \\
&\geq \frac{1}{2k} \neq 0.
\end{aligned}$$

Comme,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|g_n\right\| = 1, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|h_n\right\| = 1 \ \text{ et } \ g_n + h_n = 2f \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ avec } \lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|g_n - f\right\|_\phi^o \neq 0.$$

Contradiction avec le fait que f est un point fortement extrême. Donc $\phi \in \triangle_2(\infty)$. ■

Lemme 3.3.4 [*9*]
Soit ϕ une fonction d'Orlicz avec $b\left(\phi\right) = \infty$, $a\left(\phi\right) = 0$ et $\mu\left(\Omega\right) = +\infty$.
Si $Fext\left(B\left(L_\phi^o\right)\right) \neq \emptyset$ alors,

$$\phi \in \triangle_2 \quad \left(\phi \in \triangle_2\left(\infty\right) \ \textit{ et } \phi \in \triangle_2\left(0\right)\right).$$

3.3.3 Le résultat global

Théorème 3.3.2 [*8*]
$f \in S\left(L_\phi^o\right)$ est un point fortement extrême de $B\left(L_\phi^o\right)$ si et seulement si :
a) *L'ensemble $K(f)$ se compose d'un seul élément ($\{k\} = K(f)$ où $k > 0$).*
b) *$kf(t) \in SC\left(\phi\right)$ $\mu - p.p.$ $t \in \Omega$.*
c) *Ou bien :* $\mathbf{c}_1$) *$\phi(b(\phi)) < \infty$ et $k\left|f\left(t\right)\right| = b(\phi)$ $\mu - p.p.$ $t \in \Omega$ ou :* $\mathbf{c}_2$) *$\phi \in \triangle_2(\infty)$ et au*

moins l'une des conditions suivantes,

i) $\mu(\Omega) < \infty$

ii) $a(\phi) > 0$

iii) $\phi \in \triangle_2(0)$.

Comme la démonstration de ce théorème est très longue alors, on va donner que quelques éléments, pour plus de détails voir [8].

Démonstration.

La nécessité :

Soit $f \in S\left(L_\phi^o\right)$un point fortement extrême de $B\left(L_\phi^o\right)$. Comme les points fortement extrêmes sont extrêmes, donc la nécessité des conditions (**a**) et (**b**) résulte du *Théorème* 3.2.1. Montrons maintenant la nécessité de la condition (**c**).

Premièrement, supposons $b(\phi) = \infty$ ou encore $\phi(b(\phi)) = \infty$ (c'est-à-dire : que la condition ($\mathbf{c}_1$) n'est pas satisfaite), et nous montrons la nécessité de la condition ($\mathbf{c}_2$).

i) Nous devons d'abord montrer la nécessité de $\phi \in \triangle_2(\infty)$ (voir *Lemme* 3.3.3).

ii) Montrons maintenant que si,

$$\mu(\Omega) = \infty,\ a(\phi) = 0,\ b(\phi) = \infty \text{ et } \phi \in \triangle_2(\infty),$$

alors $\phi \in \triangle_2\ (0)$ toutes les fois que f est un point fortement extrême de $B(L_\phi^o)$ (voir *Lemme* 3.3.4).

Deuxièmement, pour finir la démonstration de la nécessité il ne reste a montré, la nécessité de la condition ($\mathbf{c}_1$) (c'est-à-dire : $\phi(b(\phi)) < \infty$ et $kf(t) = b(\phi)\ \mu - p.p.\ t \in \Omega$) (voir *Théorème* 3.3.1).

La suffisance :

Soit $f \in S(L_\phi^o)$. Par le *Théorème* 3.2.1 et les conditions (**a**) et (**b**), f est un point extrême de $B(L_\phi^o)$. Nous montrerons que si de plus la condition (**c**) est satisfaite alors, f est un point fortement extrême de $B(L_\phi^o)$.

Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ et $(h_n)_{n\geq 1}$ deux suites de L_ϕ^o telle que,

$$\|g_n\|_\phi^o,\ \|h_n\|_\phi^o \longrightarrow 1, \text{ et } g_n + h_n = 2f \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

nous devons montrer que, $\|g_n - f\|_\phi^o \longrightarrow 0$. ■

Remarque 3.3.1 *Si ϕ est une N-fonction alors, $f \in S\left(L_{\phi}^{o}\right)$ est un point fortement extrême de $B\left(L_{\phi}^{o}\right)$ si et seulement si :*

a) *L'ensemble $K(f)$ se compose d'un seul élément ($\{k\} = K(f)$ où $k > 0$).*

b) *$kf(t) \in SC\left(\phi\right)$ $\mu - p.p.$ $t \in \Omega$.*

c) *$\phi \in \triangle_2(\infty)$ et au moins l'une des conditions suivantes,*

i) $\mu(\Omega) < \infty$

ii) $a(\phi) > 0$

iii) $\phi \in \triangle_2(0)$.

Car : *$b(\phi)$ est toujours égal à l'infini ($b(\phi) = \infty$).*

CHAPITRE 4

Quelques applications

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les résultats du chapitre précédent pour caractériser les points extrêmes et fortement extrêmes des espaces de Banach classiques comme l'espace L^∞, les espaces $L^1 + L^\infty$ et les espaces $L^p \cap L^\infty$ $(1 \leq p < \infty)$.

4.2 Les points extrêmes et fortement extrêmes de $B(L^\infty)$

Corollaire 4.2.1 [*8*]
Dans l'espace L^∞ les points extrêmes et les points fortement extrêmes de $B(L^\infty)$ coïncident, ces points sont les seuls points qui vérifient :

$$|f(t)| = 1 \ \mu - p.p. \ t \in \Omega.$$

Démonstration.
L'espace L^∞ est l'espace d'Orlicz $L^o_{\phi_\infty}$ (avec l'égalité des normes) où,

$$\phi_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in [-1, 1] \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et,

$$a(\phi_\infty) = b(\phi_\infty) = 1, \ SC\,(\phi_\infty) = \{-1, \ +1\}.$$

Premièrement, soit $f \in S(L^\infty)$ et $|f(t)| = 1$ $\mu - p.p.$ $t \in \Omega$.

Calculons la norme de f,

$$\|f\|^o_{\phi_\infty} = \inf_{0<k\leq\frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}} \frac{1}{k} = \inf_{0<k\leq 1} \frac{1}{k},$$

ce qui implique que,

$$K(f) = \{1\} \text{ et } kf\,(t) \in SC\,(\phi_\infty) \;\; \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

Par conséquent, les conditions (**a**) et (**b**) du *Théorème* 3.2.1 sont satisfaites. Donc,

$$f \in Ext\,(B(L^\infty))\,.$$

Deuxièmement, comme

$$\phi_\infty\,(b(\phi_\infty)) = 0 < \infty \text{ et } k\,|f\,(t)| = b(\phi_\infty) = 1 \;\mu - p.p.\ t \in \Omega,$$

alors d'après le *Théorème* 3.3.2 tout point extrême est fortement extrême, ce qui termine la démonstration. ■

4.3 Les points extrêmes et fortement extrêmes de $B\left(L^1+L^\infty\right)$

Sur la base des *Théorème* 3.2.1 et 3.3.2 nous pouvons facilement caractériser les points extrêmes et fortement extrêmes de la boule unité de l'espace d'interpolation $L^1 + L^\infty$.

Corollaire 4.3.1 [*8*]

Soit $f \in S(L^1 + L^\infty)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) *f est un point extrême de $B(L^1 + L^\infty)$.*

b) *$\mu(\Omega) > 1$ et $|f(t)| = 1$ $\mu - p.p.$ $t \in \Omega$.*

c) *f est un point fortement extrême de $B(L^1 + L^\infty)$.*

Démonstration.

L'espace $L^1 + L^\infty$ est l'espace d'Orlicz $L^o_{\phi_{\infty,1}}$ (avec l'égalité des normes) où,

$$\phi_{\infty,1}\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \in [-1,\,1] \\ |x| - 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et,

$$SC(\phi_{\infty,1}) = \{-1,\, 1\}.$$

(**a**) $\Longrightarrow$ (**b**) : Soit f un point extrême de $B(L^1 + L^\infty)$.

i) Montrons d'abord que $|f(t)| = 1 \ \mu - p.p.\ t \in \Omega$.

Par la condition (**b**) du *Théorème* 3.2.1, il existe $k_0 > 0$ tel que,

$$k_0 f(t) \in SC\left(\phi_{\infty,1}\right) \ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

ce qui donne,

$$|k_0 f(t)| = 1 \ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

On suppose que $k_0 \neq 1$ alors,

$$\|f\|_{L^1+L^\infty} = \frac{1}{k_0}[1 + \int\limits_\Omega \phi_{\infty,1}(k_0 f(t))d\mu] = \frac{1}{k_0} \neq 1,$$

ce qui signifie que f ne peut pas être un élément de $S(L^1 + L^\infty)$. Par conséquent,

$$K(f) = \{1\} \text{ et } |f(t)| = 1 \ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

ii) Montrons maintenant que $\mu(\Omega) > 1$.

Comme on a montre que, $|f(t)| = 1 \ \mu - p.p.\ t \in \Omega$. Alors,

$$\phi_{\infty,1}(kf) = \phi_{\infty,1}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \,]0,\, 1] \\ k-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons la norme de f,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1+L^\infty} &= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1 + \int\limits_\Omega \phi_{\infty,1}(k)d\mu\right] \\ &= \min\left\{\inf_{k\in]0,1]} \frac{1}{k},\ \inf_{k\in]1,\infty[} \frac{1}{k}[1 + (k-1)\,\mu(\Omega)]\right\} \\ &= \min\left\{1,\ \inf_{k\in]1,\infty[} [\frac{1}{k}(1 - \mu(\Omega)) + \mu(\Omega)]\right\}. \end{aligned}$$

Pour montre que $\mu(\Omega) > 1$, on va raisonner par l'absurde.

Si $\mu(\Omega) < 1$: alors,

$$[\frac{1}{k}(1 - \mu(\Omega)) + \mu(\Omega)],$$

est une fonction décroissante de la variable k. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\inf_{k\in]1,\infty[}[\frac{1}{k}(1-\mu(\Omega))+\mu(\Omega)] &= \lim_{k\to\infty}[\frac{1}{k}(1-\mu(\Omega))+\mu(\Omega)] \\ &= \mu(\Omega).\end{aligned}$$

Donc,

$$\|f\|_{L^1+L^\infty}=\min\{1,\,\mu(\Omega)\}=\mu(\Omega)<1.$$

Ainsi,

$$f\notin S(L^1+L^\infty).$$

Contradiction avec le fait que f est un point extrême.
Si $\mu(\Omega)=1$: alors,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1+L^\infty} &= \min\left\{1,\ \inf_{k\in]1,\infty[}[\frac{1}{k}(1-\mu(\Omega))+\mu(\Omega)]\right\} \\ &= \min\{1,\,1\} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Par conséquent, $K(f)=[1,\,\infty[$ alors la condition (**a**) du *Théorème* 3.2.1 n'est pas satisfaite.
Contradiction avec le fait que f est un point extrême.
(**b**) $\Longrightarrow$ (**c**) : Soit $\mu(\Omega)>1$ et $|f(t)|=1$ $\mu-p.p.$ $t\in\Omega$. Alors,

$$[\frac{1}{k}(1-\mu(\Omega))+\mu(\Omega)],$$

est une fonction croissante de la variable k. D'où,

$$\begin{aligned}\inf_{k\in]1,\infty[}[\frac{1}{k}(1-\frac{1}{k})\mu(\Omega)] &= \lim_{k\to 1}[\frac{1}{k}(1-\mu(\Omega))+\mu(\Omega)] \\ &= \mu(\Omega).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$K(f)=\{1\} \text{ et } kf\in SC\left(\phi_{\infty,1}\right)\ \mu-p.p.\ t\in\Omega,$$

donc les conditions (**a**) et (**b**) du *Théorème* 3.3.2 sont satisfaites. Nous observons que

$$\phi_{\infty,1}\in\triangle_2(\infty) \text{ et } a(\phi_{\infty,1})=1>0,$$

cela signifie que la condition (**c**) du *Théorème* 3.3.2 est également satisfaite.

D'ou, f est un point fortement extrême.

(**c**) $\Longrightarrow$ (**a**) : Cette implication est triviale, parce que dans n'importe quel espace de Banach chaque point fortement extrême est un point extrême.

■

4.4 Les points extrêmes et fortement extrêmes de $B(L^1 \cap L^\infty)$

Nous pouvons facilement obtenir des critères pour les points extrêmes de $B(L^1 \cap L^\infty)$ en utilisant le *Théorème* 3.2.1. De plus, d'après le *Théorème* 3.3.2, on peut trouver une caractérisation des points fortement extrêmes de $B(L^1 \cap L^\infty)$. Contrairement aux espaces L^∞ et $L^1 + L^\infty$, un point extrême de $B(L^1 \cap L^\infty)$ n'est pas forcément un point fortement extrême.

Corollaire 4.4.1 [*8*]

a) *Un point $f \in S(L^1 \cap L^\infty)$ est extrême si seulement si f est sous la forme,*

$$\frac{\chi_A}{k} \quad \textit{où} \quad A \in \Sigma,\ \mu(A) < \infty \ \textit{et}\ k = 1 + \mu(A).$$

b) *Les seuls points fortement extrêmes de $B(L^1 \cap L^\infty)$ sont les points extrêmes correspondant à,*

$$A = \Omega.$$

Démonstration.

Premièrement, L'espace $L^1 \cap L^\infty$ est l'espace d'Orlicz $L^o_{\phi_{1,\infty}}$ (avec l'égalité des normes) où,

$$\phi_{1,\infty}(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1,\, 1] \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et,

$$SC(\phi_{1,\infty}) = \{-1,\, 0,\, 1\}.$$

La suffisance :

Supposons que,

$$|f| = \frac{\chi_A}{1+\mu(A)} \text{ avec } \mu(A) < \infty.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|f\|_\phi^o &= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\rho_{\phi_{1,\infty}}(kf)\right] = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\int_\Omega \phi_{1,\infty}(kf(t))\,d\mu\right] \\
&= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\int_{\{t\in\Omega:|kf(t)|\le 1\}} \phi_{1,\infty}(kf(t))\,d\mu + \int_{\{t\in\Omega:|kf(t)|>1\}} \phi_{1,\infty}(\lambda f(t))\,d\mu\right],
\end{aligned}$$

comme $\rho_{\phi_{1,\infty}}(kf) = \int_\Omega \phi_{1,\infty}(kf(t))\,d\mu < \infty$, alors :

$$\mu(\{t\in\Omega : |kf(t)| > 1\}) = 0 \text{ c'est-à-dire } |kf(t)| \le 1 \ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\|f\|_\phi^o &= \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1+\int_\Omega \phi_{1,\infty}\left(\frac{k}{1+\mu(A)}\chi_A\right)d\mu\right] \\
&= \inf_{0<k\le 1+\mu(A)} \frac{1}{k}\left[1+\int_A \left|\frac{k}{1+\mu(A)}\right| d\mu\right] \text{ où } 1+\mu(A) = \theta(f) \\
&= \inf_{0<k\le 1+\mu(A)} \left[\frac{1}{k} + \frac{\mu(A)}{1+\mu(A)}\right] \\
&= 1,
\end{aligned}$$

ce qui donne, $k = 1+\mu(A) = \theta(f)$ est le seul nombre pour lequel l'inf est atteint et $f \in S(L^1 + L^\infty)$:

$$K(f) = \{1+\mu(A)\},$$

et,

$$(1+\mu(A))f(t) = \pm\chi_A \in SC(\phi_{1,\infty}) \ \ \mu - p.p.\ t \in \Omega,$$

Donc, par le *Théorème* 3.2.1 f est un point extrême de $B(L^1 + L^\infty)$.

La nécessité :

Supposons maintenant que $f \in S(L^1 + L^\infty)$ est un point extrême. D'après le *Théorème* 3.2.1

$$K(f) = \{k\} \text{ et } kf(t) \in SC(\phi_{1,\infty}) = \{-1, 0, 1\} \ \mu - p.p. \ t \in \Omega.$$

Donc,

$$|kf(t)| = 1 \ \mu - p.p. \ t \in Supp\,(f) = A.$$

Le seul $k > 0$ qui satisfait,

$$|kf(t)| = 1 \ \mu - p.p. \ t \in A \quad \text{et} \quad \frac{1}{k}\left[1 + \rho_{\phi_{1,\infty}}(kf)\right] = 1,$$

est,

$$k = 1 + \mu(A). \tag{4.4.1}$$

En effet,

$$1 = \frac{1}{k}\left[1 + \int_A \phi_{1,\infty}(1)d\mu\right] = \frac{1}{k}\left(1 + \mu(A)\right),$$

c'est-à-dire :

$$k = 1 + \mu(A).$$

D'où,

$$|f| = \frac{\chi_A}{k} \text{ où } k = 1 + \mu(A).$$

Deuxièmement, il reste à donner une démonstration pour les points fortement extrêmes. Puisque,

$$b(\phi_{1,\infty}) = \sup\left\{x > 0 : \phi_{1,\infty}(x) < \infty\right\} = 1,$$

alors,

$$\phi_{1,\infty}(b(\phi_{1,\infty})) = 1 < \infty.$$

Par le *Théorème* 3.3.2, un point extrême $f \in B(L^o_{\phi_{1,\infty}})$ est fortement extrême si de plus la condition suivante est satisfaite,

$$k\,|f(t)| = b(\phi_{1,\infty}) = 1 \ \mu - p.p. \ t \in \Omega \text{ où } K(f) = \{k\}. \tag{4.4.2}$$

Comme on l'a déjà montré (voir l'égalité 4.4.1),

$$k = 1 + \mu(A) \text{ avec } A = Supp\,(f)\,.$$

Et puisque $K(f) = \{k\}$ on a,

$$\rho_{\phi_{1,\infty}}(kf) < \infty,$$

de plus,

$$\rho_{\phi_{1,\infty}}(kf) = \int_{\Omega} \phi_{1,\infty}\left(kf\left(t\right)\right) d\mu = \int_{Supp(f)} \left|kf\left(t\right)\right| d\mu = \mu(Supp\left(f\right)) < \infty.$$

Par conséquent, d'après (4.4.2) on a,

$$Supp\left(f\right) = \Omega = A \text{ c'est-à-dire } \mu(\Omega) < \infty.$$

■

4.5 La stricte convexité des espaces $L^p \cap L^\infty$

Corollaire 4.5.1 [*8*]

L'espace $L^p \cap L^\infty$ est strictement convexe où $1 < p < \infty$.

Démonstration.

L'espace $L^p \cap L^\infty$ est l'espace d'Orlicz $L^o_{p,\infty}$ (avec l'égalité des normes) où,

$$\phi_{p,\infty}(x) = \begin{cases} |x|^p & \text{si } \ x \in [-1,\, 1] \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et,

$$SC(\phi_{p,\infty}) = [-1,\, 1].$$

Soit $f \in S\left(L^p \cap L^\infty\right)$. Calculons la norme de f (voir *Exemple* 2.7.4),

$$1 = \|f\|_{L^p \cap L^\infty} = \inf_{0<k\leq \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}} \frac{1}{k}\left[1 + k^p \|f\|^p_{L^p}\right].$$

Considérons maintenant la fonction g de variable $k > 0$ définie par :

$$g(k) = \frac{1}{k}\left[1 + ak^p\right] \text{ avec } a > 0.$$

La fonction g est dérivable sur $]0,\, \infty[$ et sa dérivé est de la forme :

$$g'(k) = \frac{-1}{k^2} + a(p-1)k^{p-2},$$

de plus,

$$\begin{cases} g'(k) < 0 & \text{si } \ k < (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}} \\ g'(k) = 0 & \text{si } \ k = (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}} \\ g'(k) > 0 & \text{si } \ k > (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

Ceci signifie que $g(k)$ est décroissante sur $]0, (\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}}[$ et croissante sur $](\frac{q}{ap})^{\frac{1}{p}}, \infty[$.

D'où, en prenant $a = \|f\|_{L^p}^p$.

Si,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^\infty}} \leq \frac{1}{\|f\|_{L^p}}(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}},$$

alors le seul nombre pour lequel l'inf est atteint est :

$$k_0 = \frac{1}{\|f\|_{L^\infty}}.$$

Si,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^\infty}} > \frac{1}{\|f\|_{L^p}}(\frac{p}{q})^{\frac{1}{p}},$$

alors le seul nombre pour lequel l'inf est atteint est :

$$k_0 = \frac{1}{\|f\|_{L^p}}(\frac{q}{p})^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi,

$$K(f) = \{k_0\} \text{ et } k_0 f(t) \in SC(\phi_{p,\infty}) = [-1, 1] \ \mu - p.p. \ t \in \Omega.$$

Donc, par le *Théorème* (3.2.1), f est un point extrême de $B(L^p \cap L^\infty)$, cela montre que l'espace $L^p \cap L^\infty$est strictement convexe. ■

Conclusion

Ce travail nous a permis de comprendre les espaces de Lebesgue, qui sont des cas particuliers des espaces d'Orlicz, et l'application des résultats de convergence de la théorie de la mesure et d'intégration, ainsi que les espaces d'interpolation : $L^1 + L^\infty$ et $L^1 \cap L^\infty$. Nous estimons que la théorie des espaces d'Orlicz est un domaine très intéressant et trouve beaucoup d'applications (Optimisation, EDP...) et comme il est d'actualité beaucoup de questions sont encore posées.

Annexe A

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Fonction semi-continue supérieurement

Définition 1

Une fonction f est dite semi-continue supérieurement en x_0 si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée,

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que pour tout $x \in U$:

$$f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \sup f(x) \leq f(x_0)$.

Exemple 1

La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une fonction semi-continue supérieurement.

Théorème de Hahn-Banach (**deuxième forme géométrique**)

Définition 2

Soit E un espace vectoriel normé. Un **hyperplan** est un ensemble de la forme :

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\},$$

où f est une forme linéaire sur E, non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Proposition 1 [4]

L'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si est seulement si f est continue.

Définition 3

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. On dit que l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ et } f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B.$$

Théorème 1 [4]

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Rappels de quelques notions de la théorie d'intégration

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré.

Mesure (σ-finie, non atomique et complète)

Définition 4

On dit que la mesure μ est $\boldsymbol{\sigma}$**−finie** lorsqu'il existe un recouvrement dénombrable de Ω par des sous-ensembles de mesure finie, c'est-à-dire lorsqu'il existe une suite $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de la tribu Σ, tous de mesure finie, avec :

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n.$$

Définition 5

Un ensemble $A \in \Sigma$ est dit un **atome** si, $\mu(A) > 0$ et pour tout sous-ensemble mesurable B de A avec $\mu(A) > \mu(B)$ alors, $\mu(B) = 0$.

Définition 6

Une mesure est dite **non atomique** si pour tout ensemble mesurable A avec $\mu(A) > 0$, il existe un sous-ensemble mesurable B de A tel que :

$$\mu(A) > \mu(B) > 0.$$

C'est-à-dire : A n'est pas un atome.

Définition 7

On dit que la mesure μ est **complète** si, tout ensemble négligeable est mesurable. C'est-à-dire, pour tout ensemble $N \in \Sigma$ vérifiant $\mu(N) = 0$ et pour toute partie $A \subset N$, alors $A \in \Sigma$, ou encore

$$A \text{ est négligeable} \iff \mu(A) = 0.$$

Théorème de la convergence monotone (ou de *Beppo-Levi*)

Le théorème suivant est un résultat d'interversion limite-integrale dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 2 [2]

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant vers f, alors :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Lemme de Fatou

Le lemme de *Fatou* est un résultat important de la théorie de l'intégration de Lebesgue. Ce lemme compare l'intégrale d'une limite inférieure de fonctions mesurables positives avec la limite inférieure de leurs intégrales.

Théorème 3 [2]

Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables positives, on a :

$$\int_{\Omega} \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Le théorème de la *convergence dominée de Lebesgue* est l'un des théorèmes les plus importants de la théorie de l'intégration. Il permet de résoudre, dans des conditions très générales, le problème de passage à la limite sous le signe intégral.

Théorème 4 [2]

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables vérifiant,

a) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(t) = f(t)\ \mu - p.p.\ t \in \Omega$

b) il existe une fonction $\mu-$intégrable g telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq g(x)\ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

Alors, f et f_n sont $\mu-$intégrables et on a :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int\limits_{\Omega} f_n d\mu = \int\limits_{\Omega} f d\mu.$$

Annexe B

Espace d'interpolation

En analyse, un espace d'interpolation est un espace qui se trouve entre deux autres espaces. L'idée essentielle est que l'on peut obtenir des renseignements sur des espaces ou des opérateurs "intermédiaires" en fonction de renseignements sur des espaces ou opérateurs "extrémaux". Par exemple, si une fonction linéaire est continue sur un certain espace L^p et aussi sur un autre espace L^q, alors elle est aussi continue sur l'espace L^r, pour tout r compris entre p et q. Pour une étude plus détaillée de la théorie d'interpolation et de toutes les notions qui s'y rapportent se référer à [1].

Définition 1 (**Couple d'interpolation**)
On dit que deux espaces de Banach X et Y forment un *couple d'interpolation* si X et Y s'injectent continûment dans un même espace vectoriel topologique séparé V.

Proposition 1 (**Espaces intersection et somme**)
Soient X et Y des espaces de Banach formant un couple d'interpolation. Alors

$$X \cap Y \quad \text{et} \quad X + Y,$$

sont des espaces de Banach si on les munit des normes respectives,

$$|||f|||_{X\cap Y} = \max(\|f\|_X\,,\ \|f\|_Y).$$

$$\|f\|_{X+Y} = \inf\left\{\|g\|_X + \|h\|_Y : f = g + h,\, g \in X,\, h \in Y\right\}. \tag{4.5.1}$$

Remarque 1 Les normes suivantes sont aussi utilisées,

$$\|f\|_{X\cap Y} = \|f\|_X + \|f\|_Y\,. \tag{4.5.2}$$

$$|||f|||_{X+Y} = \inf\left\{\max(\|g\|_X\,,\ \|h\|_Y) : f = g + h,\, g \in X,\, h \in Y\right\}.$$

Définition 2 (**Espace intermédiaire**)
Soient X et Y deux espaces de Banach formant un couple d'interpolation. On appelle *espace intermédiaire* entre X et Y tout espace de Banach E tel que,

$$X \cap Y \subset E \subset X + Y,$$

avec des injections continues.

Exemple 1 Les espaces L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ sont des espaces intermédiaires entre L^1 et L^∞ c'est-à-dire,

$$L^1 \cap L^\infty \subset L^p \subset L^1 + L^\infty,$$

avec des injections continues.

Proposition 2
Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés. L'application $\|L\|_{\mathcal{L}(E_1,\, E_2)}$ de $\mathcal{L}\,(E_1,\, E_2)$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par,

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E_1,\, E_2)} = \sup_{\|x\|_{E_1} \leq 1} \|f\,(x)\|_{E_2}\,,$$

est une norme sur,

$$\mathcal{L}\,(E_1,\, E_2) = \{f : E_1 \longrightarrow E_2,\, f \text{ linéaire et continue}\}\,.$$

Définition 3 (**Espace d'interpolation**)
Soient X et Y deux espaces de Banach formant un couple d'interpolation, et soit E un espace intermédiaire entre X et Y. On dit que E est un espace d'interpolation entre X et Y si toute application linéaire de $X + Y$ dans $X + Y$, continue de X dans X et de Y dans Y, est continue de E dans E.
En d'autres termes, pour toute application linéaire $f : X + Y \longrightarrow X + Y$,

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty \text{ et } \|f\|_{\mathcal{L}(Y)} < +\infty \Longrightarrow \|f\|_{\mathcal{L}(E)} < +\infty.$$

Remarque 2 Les espaces $X \cap Y$ et $X + Y$ sont aussi des espaces d'interpolation.

Bibliographie

[1] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation Spaces.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1976.

[2] N. Boccara. *Analyse fonctionelle.* Ellipses, 1984.

[3] J. M. Borwein and J. D. Vanderwerff. *Convex functions. Cambridge,* 2010.

[4] H. Brezis. *Analyse fonctionelle. Masson,* 1987.

[5] S. Chen. *Geometry of Orlicz spaces.* Dissertationes Math. 356 (1996) $1-204$.

[6] S. Chen, Y. Cui and H. Hudzik. *Isometric copies of* l^1 *and* l^∞ *in Orlicz spaces equipped with the Orlicz norm.* Proc. Amer. Math. Soc. Volume 132, Number 2, Pages $473-480$, 2003.

[7] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1985.

[8] Y. Cui, H. Hudzik and R. Pluciennik. *Extreme Points and Strongly Extreme Points in Orlicz Spaces Equipped with the Orlicz Norm.* Z. Anal. Anwendungen 22 (4) (2003) $789-817$.

[9] Y. Cui, H. Hudzikb, J. Li and M. Wisla. S*trongly extreme points in Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm.* Nonlinear Analysis 71 (2009) $6343-6364$.

[10] Y. Cui, H. Hudzik, M. Nowak and R. Pluciennik. *Some Geometric Properties in Orlicz Sequence Spaces equipped with Orlicz Norm.* J. Convex Anal. 6 (1999), $91-113$.

[11] A. Curnock. *An introduction to extreme points and applications in isometric Banach space theory.* Seminar, Goldsmiths College, University of London, 1st May 1998.

[12] P. Foralewski, H. Hudzik and R. Płuciennik. *Orlicz spaces without extreme points.* J. Math. Anal. Appl. 361 (2010) 506 – 519.

[13] R. Grzaslewicz and H. Hudzik. *Smooth Points of Orlicz Spaces Equipped with Luxemburg Norm.* Math. Nachr. 155 (1992) 31 – 45.

[14] H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastylo. *Local geometry of $L^1 \cap L^\infty$ and $L^1 + L^\infty$.* Arch. Math. 68 (1997), 159 – 168.

[15] H. Hudzik and L. Maligranda. *Amemiya norm equals Orlicz norm in general.* Indag. Mathem., N.S., 11(4), (2000), 573 – 585.

[16] H. Hudzik and M. Wisla. *On extreme points of Orlicz spaces with Orlicz norm.* Collect. Math. 44 (1993), 135 – 146.

[17] Z. Hu. *Strongly extreme points and the Radon-Nikodym property.* Amer. Math. Soc. Volume 118, Number 4, (1993), 1167 – 1172.

[18] P. Kosmol and D. Müller-Wichards. *Optimization in Function Spaces.* De Gruyter, 2011.

[19] M. A. Krasnosel'skiĭ and Ya. B. Rutickiĭ. *Convex function and Orlicz spaces.* Philadelphia 26, Pennsylvania, 1961.

[20] R.E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory. Springer,* 1998.

[21] R. McGuigan. *Strongly extreme points in Banach Space.* Manuscripta math. 5. 113 – 122 (1971).

[22] M. M. Rao and Z.D. Ren. *Application of Orlicz spaces.* Marcel Dekker Inc., New York, 2002.

[23] M. M. Rao and Z.D. Ren. *Theory of Orlicz Spaces.* Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[24] S. Shang, Y. Cui and Y. Fu. *Extreme Points and Rotundity in Musielak-Orlicz-Bochner Function Spaces Endowed with Orlicz Norm*. Hind. Publ. Corp. Volume 2010, Article ID 914183, $1 - 13$.

Résumé

En analyse fonctionnelle, les espaces d'*Orlicz* L_ϕ sont des espaces fonctionnels qui généralisent les espaces de *Lebesgue* L^P $(1 \leq p \leq \infty)$, les espaces $L^p \cap L^\infty$ $(1 < p < \infty)$ et les espaces d'interpolation $L^1 + L^\infty$, $L^1 \cap L^\infty$.

La notion de points extrêmes est une notion clé très utilisée quand on étudie la géométrie des espaces de *Banach.* Elle joue un rôle très important dans certaines branches des mathématiques par exemple en *optimisation.* Pour justifier cette importance, on peut citer : Le principe du maximum de *Bauer*, la propriété de *Krein-Milman* et la caractérisation de la stricte convexité, la convexité uniforme locale.

Ce travail contient quatre chapitres.

Dans le *premier chapitre,* nous étudions la notion de points extrêmes des espaces normés avec quelques résultats importants. Dans le *deuxième chapitre,* nous présentons les espaces d'Orlicz ainsi que leurs propriétés fondamentales, une attention particulière est accordée à la norme d'Orlicz particulièrement à la formulation d'Amemiya. Dans le *troisième chapitre,* on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point de $S\left(L_\phi^o\right)$ soit un point extrême et celles pour lesquelles il soit fortement extrême, et on donne aussi des conditions suffisantes sous lesquelles $Ext\left(B(L_\phi^o)\right) = \emptyset$.

Enfin dans le *quatrième chapitre,* nous appliquons les résultats du chapitre 3 pour caractériser les points extrêmes et fortement extrêmes de la boule unité des espaces L^∞, $L^1 + L^\infty$ et $L^p \cap L^\infty$ $(1 \leq p < \infty)$.