Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse et probabilités

Par

ADDOUR Malika
SANAA Zahra

THÈME

Théorèmes de densité et d'injection dans les espaces de Musielak-Orlicz et les espaces de Lebesgue à exposants variables

Soutenu devant le jury composé de :

Mr.	MOUSSAOUI	M.C.A	Université A-Mira de Béjaia.	Président.
Mme.	TALBI	M.C.B	Université A-Mira de Béjaia.	Rapporteur.
Mr.	BLIDI	M.A.A	Université A-Mira de Béjaia.	Examinateur.

Année 2013–2014

Remerciements

Nous tenons à exprimer toute notre gratitude et notre sympathie à Mme TALBI, d'une part pour nous avoir donné l'opportunité de participer à ce projet qui a développer en nous une capacité de recherche et d'adaptation, d'autre part pour, sa disponibilité totale, son enthousiasme et sa modestie face au travail qui furent pour nous une aide constante.

Nos profonds remerciements vont aussi aux membres du jury, Mr. BLIDI et Mr. MOUSSAOUI qui nous font honneur de juger et d'évaluer notre travail.

Nos vifs remerciements et reconnaissance à tous les enseignants du département de Mathématiques.

Dédicaces

ADDOUR Malika

Je dédie ce modeste travail :

A toute ma famille:

mes parents qui m'ont toujours soutenu,

mes frères et sœurs,

mon oncle, ma tante ainsi que leurs enfants.

A la mémoire de mes grands parents.

A Malek, sa sollicitude et amour me marqueront à jamais.

A mon binôme Zahra.

Dédicaces

SANAA Zahra

Merci mon dieu de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la

force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve.

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma chère mère, que dieu la protège.

A ma grand-mère et mon grand-père qui m'ont toujours protégé, et encouragé dans ma vie, que dieu les garde.

A toute la famille TAMENDJARI, en particulier mes oncles et leurs familles, pour leurs accueil.

A ma tante Dalila, son mari Foudil, et leurs enfants.

A ma tante Malika son mari Amirouche et leur petite fille Nedjma.

A mes adorables sœurs, Lynda, Kahina et Mira, et mes deux frères Djilali et Bahi.

A mes amis.

A mon binôme Sissa.

A tous ceux qui me sont chers, tous ceux qui m'aiment, tous ceux que j'aime, je dédie ce travail.

Table des matières

Notations

$(\Omega,\ \Sigma,\mu)$	*Espace mesuré de mesure* μ
$M(\Omega,\mu)$	*L'ensemble des fonctions* $\mu-$*mesurables sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$
$M(\Omega)$	*L'ensemble des fonctions* $\mu-$*mesurables sur* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$
$S(\Omega,\mu)$	*L'ensemble des fonctions simples sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$
$p.p$	*Presque partout*
$f_k\longrightarrow f$	f_k suite convergente vers f
$f_k\nearrow f$	f_k suite croissante et convergente vers f
χ_A	*Indicatrice de* A, $\chi_A(t)=\begin{cases}1 & t\in A\\ 0 & sinon\end{cases}$
$sign(g)$	Signe de g
$L^p(\Omega)$	$\{f\in M(\Omega):\int\limits_\Omega \lvert f(t)\rvert^p\,d\mu<\infty$ pour $1\leq p<\infty\}$
$L^\infty(\Omega)$	$\{f\in M(\Omega):\exists\alpha>0,\ \lvert f(t)\rvert\leq\alpha\ \ \mu-p.p.\ t\in\Omega\}$
ρ	Semi-modulaire ou modulaire
ρ^*	Semi-modulaire (ou modulaire) conjugée
φ	Fonction de Musielak-Orlicz
$\phi(\Omega,\mu)$	Ensemble des fonction de Musielak-Orlicz
φ^*	*La fonction complémentaire de* φ

ρ_{φ}	*Modulaire de musielak-Orlicz*, $\rho_{\varphi}(f) = \int\limits_{\Omega} \varphi(y, f(y))\, d\mu$
$L^{\varphi}(\Omega, \mu)$	*Espace de Musielak-Orlicz*
$(L^{\varphi}(\Omega, \mu))'$	$\left\{ g \in L^{\varphi}(\Omega, \mu) : \sup\limits_{f \in L^{\varphi}(\Omega,\mu): \|f\|_{\varphi} \leq 1} \int\limits_{\Omega} \|f\| \|g\|\, d\mu \right\}$
La condition$-\triangle_2$	Condition de croissance sur φ
$P(\Omega, \mu)$	L'ensemble des exposants variables définis sur un ensemble mesurable Ω
$P(\Omega)$	L'ensemble des exposants variables définis sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
p^+, p^-	*sup ess* et $inf\ ess$ de p
$L^{p(.)}(\Omega, \mu)$	Espace de Lebesgue généralisé
$L^{p(y)}(\Omega)$	Espace de Lebesgue généralisé muni de la mesure de Lebesgue
$\|.\|_{\varphi}^{o}$	*Norme d'Orlicz*
$\|.\|_{\varphi}$	*Norme de Luxemburg*
$\|.\|_{\varphi}^{A}$	*Norme d'Amemiya*
$\overline{\Omega}$	*Désigne la fermeture de* Ω
$\overline{\Omega}^{\rho}$	*Désigne la* ρ*-fermeture de* Ω
$\hookrightarrow$	Injection continue
$\overset{\rho}{\hookrightarrow}$	Injection continue au sens de la modulaire
$F \subset\subset E$	F fortement inclus dans E, c'est à dire $\overline{F} \subset E$ est compact
$C_0(\Omega)$	L'ensemble des fonctions de $C(\Omega)$ à support compact dans Ω
$D(\Omega)$	L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact
Supp f	$\overline{\{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}}$

Introduction

Les premières tentatives pour généraliser les espaces de *Lebesgue* classiques L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$ ont été faites au début de l'année 1930 par *W. Orlicz,* quand il a considéré l'espace fonctionnel $L^\varphi(\Omega, \mu)$ défini par

$$L^\varphi(\Omega, \mu) = \left\{ f \in M(\Omega, \mu), \text{ tel que } \rho(\lambda f) = \int_\Omega \varphi(\lambda |f(x)|)\, dx < +\infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}$$

où φ est une fonction convexe dite fonction d'*Orlicz* qui possède des propriétés analogues à celles de la fonction puissance, qui définie les espace de *Lebesgue* usuels.

Par la suite *H. Nakano* s'est concentré sur l'étude des propriétées principales de la fonction ρ, ce qui l'a amené à définir une classe plus large d'espaces fonctionnels, appelés espaces modulaires. En 1959 *W. Orlicz* et *J. Musielak* ont développé la théorie des espaces de *Musielak-Orlicz*, qui sont un exemple d'espaces modulaires, défini de la même manière que les espaces d'*Orlicz,* en considérant une fonction φ définie sur $\Omega \times [0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty]$, telle que, $\varphi(., t)$ est mesurable, et $\varphi(x, .)$ est une fonction d'*Orlicz*, $\varphi(x, t)$ est appelée fonction d'*Orlicz* généralisée ou encore fonction de *Musielak-Orlicz.*

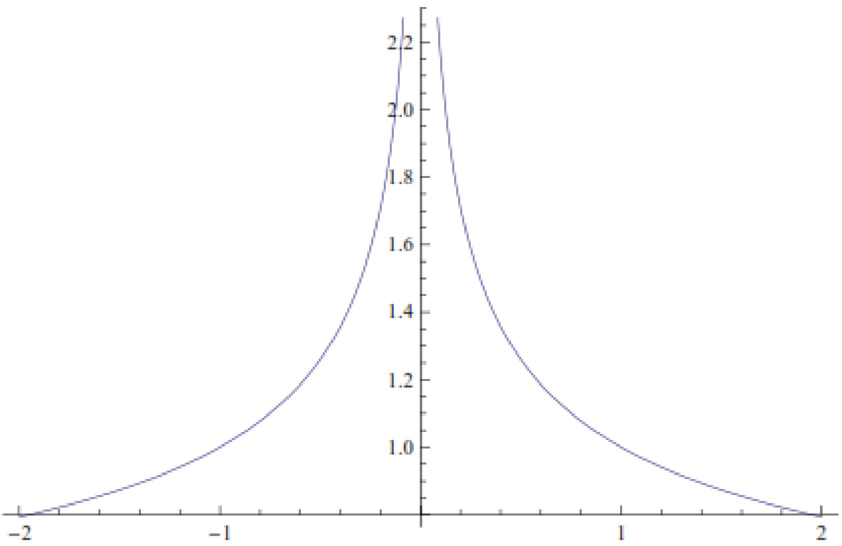
Notre travail consiste en premier lieu à présenter ces espaces de *Musielak-Orlicz*, en donnant leurs propriétés et celles de la fonction qui les définissent. Une attention particulière est accordée aux théorèmes de densité et d'injection.

En second lieu, on s'intéressera à un cas particulier de ces espaces, qui sont les espaces de Lebesgue à exposants variables et pour donner un sens à ces espaces des exemples élémentaires sont présentés dans [5]:

Exemple 1:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto f(x) = |x|^{\frac{-1}{3}}$$

cette fonction n'appartient pas à $L^p(\mathbb{R})$ pour tout p $1 \leq p \leq +\infty$. En effet pour une valeur donnée à p, f se développe très rapidement à l'origine et décroit lentement à l'infini. On considère les espaces L^2 et L^4, puis on partage le domaine de f et on trouve $f \in L^2([-2,2])$ et $f \in L^4(\mathbb{R} \setminus [-2,2])$.



Figure(1) : Représentation graphique de la fonction $f(x)$

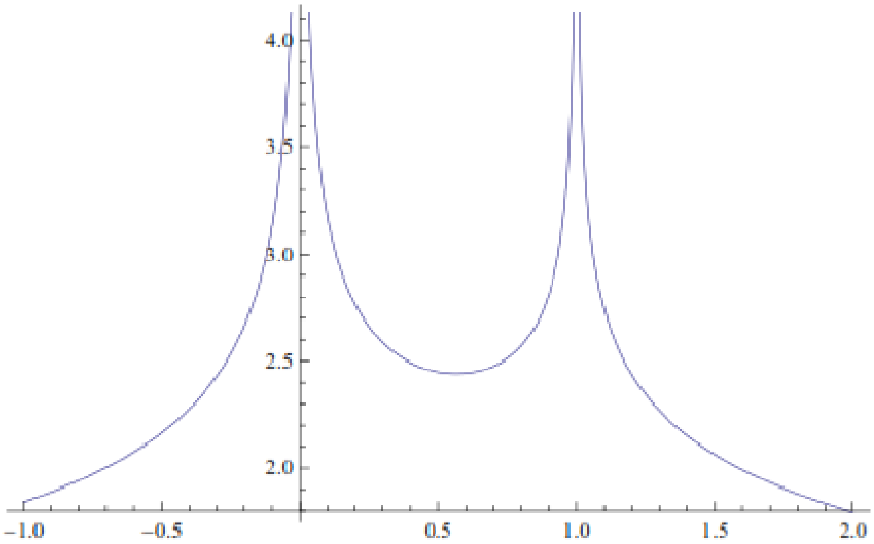
Exemple 2:

Considérons la fonction g définie par

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto g(x) = |x|^{\frac{-1}{3}} + |x-1|^{\frac{-1}{4}}$$

alors on a $g \in L^2([-2,2])$, ou plus généralement, elle est dans $L^p([-2,2])$ pour tout $1 < p < 3$.

D'autre part, $g \notin L^4(\mathbb{R} \setminus [-2,2])$: on a $g \in L^p(\mathbb{R} \setminus [-2,2])$ pour $p > 4$, mais $g \in L^2(\left[-1, \frac{1}{2}\right])$, $g \in L^3(\left[\frac{1}{2}, 2\right])$ et $g \in L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R} \setminus [-1,2])$.



Figure(2) : Représentation graphique de la fonction $g(x)$

L'inconvénient de cette approche apparaît lorsqu'on considère des fonctions plus compliquées. Les espaces de *Lebesgue* généralisés, donne une approche differente, on laisse le domaine tel qu'il est, et faisons varier l'exposant, par exemple soit

$$p(x) = \frac{9|x| + 2}{2|x| + 1} = \frac{9}{2} - \frac{\frac{5}{2}}{2|x| + 1}$$

alors, $p(0) = 2$, $p(1) = \frac{11}{3}$ et $p(x) \longrightarrow \frac{9}{2}$ quand $|x| \to +\infty$, de plus

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p(x)}\, dx < +\infty \text{ et } \int\limits_{\mathbb{R}} |g(x)|^{p(x)}\, dx < +\infty$$

autrement dit l'exposant variable $p(.)$ nous permet de décrire avec plus de précision le comportement de chaque fonction.

Ces exemples motivent la définiton des espaces de *Lebesgue* à exposants variables

On se donne un ensemble mesurable Ω et une fonction mesurable $p : \Omega \longrightarrow [1, +\infty]$ et on définit $L^{p(.)}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables f tel que $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{q(x)}\, dx < +\infty$.

Notre travail est structuré en trois chapitres
Dans *le premier chapitre* nous rappelons les resultats essentiels sur les espaces modulaires, indispensables pour la suite du travail.
Dans *le second chapitre* nous présentons les espaces de *Musielak-Orlicz*, dans un premier temps, nous définissons ces espaces et énnoçons leurs propriétés fondamentales, la complétude, la dualité, la séparabilité... nous terminons ce chapitre par les théorèmes de densité et d'injection.
Le troisième et dernier chapitre est consacré à l'études des théorèmes de densité et d'injection dans les espaces de *Lebesgue* à exposants variables. A titre d'illustration des exemples sont présentés dans chaque chapitre.

CHAPITRE 1

Les espaces modulaires

Dans ce chapitre introductif nous présentons une classe importante d'espaces fonctionnels appelés espaces modulaires, nous nous intéressons aux propriétés et résultats essentiels pour l'étude des espaces de Musielak-Orlicz.

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1 *Soit X un espace vectoriel réel.*
La fonction $\rho : X \longrightarrow [0\ ,+\infty\ ]$ est dite ***semi-modulaire*** *sur X si les propriétés suivantes sont verifieés.*
(1) $\rho(0) = 0$,
(2) $\rho(\lambda x) = \rho(x)$ *pour tout* $x \in X$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *avec* $|\lambda| = 1$,
(3) ρ *est convexe, c'est à dire* $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)\ \forall\ \alpha, \beta \geq 0$ *avec* $\alpha + \beta = 1$,
(4) $\rho(\lambda x) = 0$ *pour tout* $\lambda > 0$ *implique* $x = 0$.
La semi-modulaire est dite ***modulaire*** *si* $\rho(x) = 0$ *implique* $x = 0$.

Définition 1.1.2 *Si ρ est une semi-modulaire (resp. modulaire) sur X alors,*

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

est dit espace semi-modulaire (resp.espace modulaire).

Théorème 1.1.1 *[6]*
Soit ρ une semi-modulaire sur X alors X_ρ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Preuve.

Soient $x,\, y \in X_\rho$ et $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Par définition de l'espace X_ρ et comme $\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda|\, x)$ on a $\alpha x \in X_\rho$.

Grâce à la convexité de ρ on a

$$0 \leq \rho\left(\lambda(x+y)\right) \leq \frac{1}{2}\rho\left(2\lambda x\right) + \frac{1}{2}\rho\left(2\lambda y\right).$$

D'où

$$\lim_{\lambda \to 0}\rho\left(\lambda(x+y)\right) \leq \lim_{\lambda \to 0}\frac{1}{2}\rho\left(2\lambda x\right) + \lim_{\lambda \to 0}\frac{1}{2}\rho\left(2\lambda y\right) = 0$$

Par suite

$$x + y \in X_\rho.$$

Ainsi X_ρ est un espace vectoriel. ■

Remarque 1.1.1

L'espaces semi-modulaire X_ρ est muni de la ***norme de Luxemburg*** *définie comme suit*

$$\|x\|_\rho = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

Une autre norme est définie sur cet espace semi modulaire X_ρ dite **norme d'Amemiya**, donnée par

$$\|x\|_\rho^A = \inf_{\lambda > 0}\frac{1}{\lambda}\left[1 + \rho(\lambda x)\right]$$

De plus, on a

$$\|x\|_\rho \leq \|x\|_\rho^A \leq 2\,\|x\|_\rho.$$

1.2 Continuité d'une modulaire

La modulaire ρ est dite

1) continue à droite si $\lim\limits_{\lambda \overset{\geq}{\to} 1}\rho(\lambda x) = \rho(x)$ pour tout $x \in X_\rho$,

2) continue à gauche si $\lim\limits_{\lambda \overset{\leq}{\to} 1}\rho(\lambda x) = \rho(x)$ pour tout $x \in X_\rho$,

3) continue si elle est continue à droite et à gauche.

1.3 Propriétés de la modulaire

Soit ρ une semi-modulaire sur X alors

1) $\begin{cases} \rho(\lambda x) = \rho(|\lambda|\, x) \leq |\lambda|\, \rho(x) & \forall\, |\lambda| \leq 1 \\ \rho(\lambda x) = \rho(|\lambda|\, x) \geq |\lambda|\, \rho(x) & \forall\, |\lambda| \geq 1 \end{cases}$

2) $\rho(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \rho(x_i)$ pour $\alpha_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$

3) Pour $x \in X$, l'application $\lambda \longmapsto \rho(\lambda x)$ est non décroissante.

Remarque 1.3.1 *La première propriété permet de définir aussi $X_\rho$comme suit:*

$$X_\rho = \{x \in X : \rho(\lambda x) < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0\}.$$

Puisque pour $0 < \lambda' < \lambda$on a

$$\rho(\lambda' x) = \rho(\frac{\lambda'}{\lambda} \lambda x) \leq \frac{\lambda'}{\lambda} \rho(\lambda x) \to 0 \text{ quand } \lambda' \to 0.$$

Théorème 1.3.1 *[6]*

Soit ρ une semi-modulaire sur X alors ρ est semi-continue inférieurememt sur X_ρ c'est à dire:

$$\rho(x) \leq \liminf_{k \to +\infty} \rho(x_k) \text{ pour tout } x_k, x \in X_\rho \text{ avec } \lim_{k \to +\infty} x_k = x.$$

1.4 Modulaire et norme

Lemme 1.4.1 *[6]*

Soit ρ une semi-modulaire sur X alors on a

$$\|x\|_\rho \leq 1 \Leftrightarrow \rho(x) \leq 1.$$

Si de plus ρ est continue alors

$$\begin{cases} \|x\|_\rho < 1 \Leftrightarrow \rho(x) < 1 \\ \|x\|_\rho = 1 \Leftrightarrow \rho(x) = 1 \end{cases}$$

Corollaire 1.4.1

Soit ρ une semi-modulaire sur X alors

$$\begin{cases} \|x\|_\rho \leq 1 \Rightarrow \rho(x) \leq \|x\|_\rho \leq 1 \\ \|x\|_\rho > 1 \Rightarrow \|x\|_\rho \leq \rho(x) \\ \|x\|_\rho \leq \rho(x) + 1 \end{cases}$$

De plus, si $\rho(\lambda x_1) \leq \rho(\lambda x_2)$ pour tout $\lambda > 0$ et $x_1, x_2 \in X$ alors $\|x_1\|_\rho \leq \|x_2\|_\rho$.

1.5 Convergence dans les espaces modulaires

En plus, de la convergence au sens de la norme, on a la convergence modulaire définie comme suit:

Définition 1.5.1 *Une suite $(x_n) \in X_\rho$ sera dite ρ-**convergente** ou **modulaire convergente** vers x (on ecrit $x_n \xrightarrow{\rho} x$) s'il existe un $\lambda > 0$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(\lambda\left(x_n - x\right)\right) = 0.$$

Le résultat suivant caractérise la convergence en norme d'une suite de fonctions en terme de convergence modulaire. On se réstreint au cas de la convergence vers zéro.

Lemme 1.5.1 *[6]*

Soit ρ une semi-modulaire sur X et $(x_n) \subset X_\rho$ alors,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_\rho = 0 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to\infty} \rho\left(\lambda x_n\right) = 0 \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Preuve.

Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_\rho = 0$, alors

$$\forall \lambda > 0,\ \forall \alpha > 1 \text{ on a } \lim_{n\to\infty} \|\alpha\lambda x_n\|_\rho = 0,$$

ce qui implique que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 > 0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \quad \|\alpha\lambda x_n\|_\rho \leq \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = 1$ et d'après le lemme 1.4.1

$$\|\alpha\lambda x_n\|_\rho \leq 1 \Longrightarrow \rho(\alpha\lambda x_n) \leq 1,$$

et grâce aux propriétés de la modulaire on obtient,

$$\rho(\lambda x_n) = \rho\left(\frac{\alpha}{\alpha}\lambda x_n\right) \leq \frac{1}{\alpha}\rho(\alpha\lambda x_n) \leq \frac{1}{\alpha}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\lambda x_n) = 0$$

Inversement, supposons maintenant que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\lambda x_n) = 0 \ \forall\lambda > 0$ alors $\rho(\lambda x_n) \leq 1$;le lemme 1.4.1 implique que

$$\|\lambda x_n\|_\rho \leq 1 \Longrightarrow \|x_n\|_\rho \leq \frac{1}{\lambda}.$$

on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_\rho = 0$. ■

1.5.1 Propriétés de la convergence modulaire

1) Si $x_n \xrightarrow{\rho} x$ et $y_n \xrightarrow{\rho} y$ dans X_ρ alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) $\alpha x_n + \beta y_n \xrightarrow{\rho} \alpha x + \beta y$.
2) La convergence en norme entraîne toujours la convergence modulaire. La réciproque n'est pas toujours vrai comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.5.1 *Soient* $\Omega =]1, \infty[$, $f \equiv 1$, $f_k(x) = \chi_{]1,k[}(x)$ *et* $\rho(f) = \int\limits_\Omega |f|^x \, dx$ *alors on a*

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{1}{2}(f - f_k)\right) &= \int_1^k \frac{1}{2^x} |f - f_k|^x \, dx \\ &= \int_1^k \frac{1}{2^x} dx \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Donc $f_k \xrightarrow{\rho} f$ *pour* $\lambda = \frac{1}{2}$; *mais* f_k *ne converge pas en norme vers* f, *il suffit de prendre* $\lambda = 1$.

$$\rho(f - f_k) = \int_1^k 1^x dx \xrightarrow{k\to\infty} \infty.$$

Le lemme suivant nous donne une condition pour l'équivalence de ces deux modes de convergence.

Lemme 1.5.2 *[6]*
La convergence modulaire et la convergence en norme sont equivalentes si et seulement si,

$$\rho(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \rho(2x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Preuve.
On suppose que la convergence modulaire et la convergence en norme sont équivalentes et on montre que

$$\rho(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \rho(2x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit (x_n) une suite de X_ρ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$.

Par le lemme 1.5.1 on obtient,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\lambda x_n) = 0 \ \forall\lambda > 0,$$

$$\begin{aligned} \rho(2x_n) &= \rho(\frac{2}{\lambda'}\lambda' x_n) \\ &= \rho\frac{2}{\lambda'}(\lambda' x_n), \ \forall\lambda' > 0 \end{aligned}$$

par passage à la limite on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \rho(2x_n) = 0 \ \forall\lambda' > 0.$$

Inversement, soit (x_n) une suite de X_ρ modulaire convergente vers 0 et montrons qu'elle est fortement convergente vers 0. Ceci revient à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\lambda x_n) = 0 \ \forall\lambda > 0$.

Pour $\lambda > 0$ fixé, choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^m \geq \lambda$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \rho(2x_n) = 0 \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \rho(2^m x_n) = 0$$

D'après les propriété de la modulaire on aura

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \rho(\lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(\frac{\lambda}{2^m} 2^m x_n) \leq \frac{\lambda}{2^m} \lim_{n\to\infty} \rho(2^m x_n) = 0$$

Donc par le lemme 1.5.1, on

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\rho = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\rho(\lambda x_n) = 0,\ \forall\lambda > 0.$$

on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0.$$

■

Remarque 1.5.1 *Si l'une des conditions d'équivalence dans le lemme précédent est vérifiée on dit que ρ satisfait la condition-Δ_2 faible.*

Lemme 1.5.3 *[6]*
Soit ρ une semi-modulaire sur X on suppose qu'elle satisfait la condition-Δ_2 faible alors,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \rho(x) \le \delta \Rightarrow \|x\|_\rho \le \varepsilon$$

1.6 Notions topologiques dans les espaces modulaires

Définition 1.6.1 *Soit X_ρ un espace modulaire et A un sous ensemble de X_ρ alors,*
1) *A est dit **ρ-fermé** si $(x_n) \subset A$ et $x_n \xrightarrow{\rho} x$ alors $x \in A$.*
2) *Le plus petit sous ensemble ρ-fermé contenant l'ensemble $A \subset X_\rho$ sera dit **ρ-fermeture** de A, noté $\overline{A}^\rho$.*
3) *Si $\overline{A}^\rho = X_\rho$ alors A sera dit **ρ-dense** dans X_ρ.*
4) *Un espace modulaire X_ρ est dit **ρ-séparable,** s'il contient une partie dénombrable ρ-dense.*

Remarque 1.6.1 *[12]*
Un ensemble fermé pour la norme n'est pas forcement ρ-fermé.

1.7 Modulaire conjuguée et espace dual

Soit X un espace normé, son dual X^* est l'ensemble de toutes les fonctions linéaires continues (bornées) sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

X^* est muni de la norme

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |< x^*, x >| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |x^*(x)|$$

Définition 1.7.1 *Soit une semi modulaire (ou modulaire) sur X alors, on note X_ρ^* l'espace dual de $(X_\rho, \|x\|_\rho)$ et on définit ρ^* par:*

$$\begin{aligned} \rho^* : X_\rho^* &\longrightarrow [0\ \infty] \\ x^* &\longmapsto \rho^*(x^*) = \sup_{x \in X_\rho} \left(x^*(x) - \rho(x)\right), \end{aligned}$$

*dite **semi modulaire (ou modulaire) conjuguée** de ρ et on note par $X\rho^*$ l'espace modulaire défini par ρ^*.*

Grâce au théorème **1** de l'annexe **A** et le théorème 1.3.1 on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.7.1 *[6]*
Soit ρ une semi-modulaire sur X alors

$$\rho^{**}(x) = \sup_{x^* \in X_\rho^*} \left(x^*(x) - \rho^*(x^*)\right) = \rho(x).$$

Théorème 1.7.2 *[6]*
Soit ρ une semi-modulaire sur X alors,

$$\|x\|_\rho^o = \sup\left\{x^*(x) : x^* \in X_\rho^*, \rho^*(x^*) \leq 1\right\},$$

*définie une norme sur $X_\rho$dite **norme d'Orlicz**, de plus on a*

$$\|x\|_\rho \leq \|x\|_\rho^o \leq 2\|x\|_\rho.$$

Théorème 1.7.3 *[6]*
Soit ρ une semi-modulaire sur X alors, pour tout $x^* \in X_\rho^*$ on a

$$\|x^*\|_{\rho^*} \leq \|x^*\|_{X_\rho^*} \leq 2\|x^*\|_{\rho^*}.$$

CHAPITRE 2

Espaces de Musielak-Orlicz

Dans ce chapitre nous présentons les espaces de Musielak-Orlicz, un exemple d'espaces modulaire où la modulaire est donnée par l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles. On donnera les propriétés basiques de ces espaces et on s'intéressera évidement aux résultats d'approximations et théorèmes d'injection.

2.1 Fonctions d'Orlicz et fonctions d'Orlicz généralisées

2.1.1 Fonction d'Orlicz

Définition 2.1.1 *(ϕ-fonction)*

Soit $\varphi : [0,\ \infty[\longrightarrow [0,\infty]$ *telle que,*

a) φ *est convexe et continue à gauche,*$\forall t \in]0, +\infty[$.

b) $\varphi(0) = 0$,

c) $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$; $\lim\limits_{t\to +\infty} \varphi(t) = +\infty$.

Une telle fonction φ est appelée ***ϕ-fonction*** *ou* ***fonction d'Olicz;*** *elle est dite positive si $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$.*

Remarques 2.1.1

1) *φ peut prendre des valeurs infinies et peut s'annuler en dehors de zéro.*

2) *Toute ϕ-fonction est semi continue inferieurement.*

3) *Toute ϕ-fonction est croissante sur $[0,+\infty[$.*

En effet, si on prend $0 \leq t_1 < t_2$ alors,

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) &= \varphi\left(\frac{t_2 - t_1}{t_2} \times 0 + \frac{t_1}{t_2} t_2\right) \\ &\leq \frac{t_2 - t_1}{t_2} \varphi(0) + \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2) \\ &\leq \varphi(t_2). \end{aligned}$$

Exemple 2.1.1 *Pour tout $t > 0$ et $1 \leq p < \infty$.*

1) $\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{p} t^p$

2)$\bar{\varphi}(t) = t^p$

3) $\tilde{\varphi}_\infty(t) = \bar{\varphi}_\infty(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in [0,1] \\ \infty \ si \ t \in]1,\infty[\end{cases}$

sont des ϕ-fonctions

Proposition 2.1.1 *[6]*

Soit φ une ϕ-fonction alors,

1) *φ est continue si et seulement si φ est finie dans $[0,\infty[$.*

2) *Pour tout $t \geq 0$ on a*

$$\begin{cases} \varphi(\alpha t) < \alpha \varphi(t) \ si \ \alpha \in]0,1[\\ \varphi(\alpha t) > \alpha \varphi(t) \ si \ \alpha \in]1,\infty[. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Exemple 2.1.2 *Soit $t \geq 0$ et $1 \leq p < \infty$*

1) *$\tilde{\varphi}$ et $\bar{\varphi}$ sont continues et positives.*

2) *$\bar{\varphi}_\infty$ est continue à gauche, semi continue inférieurement mais n'est pas positive.*

Proposition 2.1.2 *(Ecriture intégrale d'une ϕ-fonction)*

Soit φ une ϕ-fonction alors sur l'ensemble $\{t \geq 0, \varphi(t) < \infty\}$, $\varphi(t)$ peut s'écrire comme suit:

$$\varphi(t) = \int_0^t a(s) ds$$

avec a la dérivée à droite de φ de plus, a est non décroissante et continue à gauche.

ϕ-fonction et semi-modulaire sur $\mathbb{R}$

Lemme 2.1.1 *[6]*
Soit $\varphi : [0 \ \ \infty) \longrightarrow [0 \ , \infty \ ]$ *et soit* ρ *son prolongement par parité,*

$$\rho(t) = \varphi(|t|) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$\varphi \text{ est une } \phi\text{-fonction} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho \text{ est une semi-modulaire sur } \mathbb{R} \text{ continue à gauche.} \\ \text{et} \\ X_\rho = \mathbb{R}. \end{cases}$$

De plus, φ *est positive si et seulement si* ρ *est une modulaire sur* $\mathbb{R}$ *et* $X_\rho = \mathbb{R}$.

Preuve.

La nécessité

Soit φ une ϕ-fonction alors φ est convexe, continue à gauche, $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$, donc ρ satisfait aussi ces propriétés.

$X_\rho = \mathbb{R}$ découle du fait que $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$, et pour que ρ soit une semi-modulaire il reste à montrer que

$$\rho(\lambda t_0) = 0, \forall \lambda > 0 \Longrightarrow t_0 = 0$$

On suppose que $\rho(\lambda t_0) = 0 \ \forall \lambda > 0$.

Par hypothèse $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$ alors il existe $t_1 > 0$ avec $\varphi(t_1) > 0$, donc il n'existe pas de $\lambda > 0$ tel que $t_1 = \lambda t_0$. En effet, s'il existe $\lambda > 0$ tel que $t_1 = \lambda t_0$ on aurait

$$0 < \varphi(t_1) = \varphi(\lambda t_0) = 0,$$

ce qui donne une contradiction.

Donc on a nécessairement

$$t_0 = 0.$$

Supposons, maintenant que φ est positive c'est à dire ($\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$), alors par hypothèse ceci est équivalent à ($\rho(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$).

Donc ρ est une modulaire sur $\mathbb{R}$.

La suffisance

Soit φ une semi modulaire sur $\mathbb{R}$, alors φ est convexe, $\varphi(0) = 0$ et φ est continue à gauche. Pour que φ soit une ϕ-fonction, il reste à montrer que $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to +\infty} \varphi(t) = +\infty$.

$a)$Commençant par montrer que $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$. Pour cela on a

$$X_\rho = \mathbb{R} \text{ ceci est équivalent à } \forall t \in \mathbb{R}, \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \rho(\lambda t) < \infty$$

alors $\exists t_1 > 0$ pour le quel $\rho(t_1) < +\infty$.

Soit $t \in [0, t_1]$, alors il existe $0 \le \lambda \le 1$ tel que $t = \lambda t_1$ ce qui implique que $\lambda = \frac{t}{t_1}$.

Par suite $\rho(\frac{t}{t_1} t_1) \le \frac{t}{t_1}\rho(t_1)$, et par conséquent $\rho(t) \le \frac{t}{t_1}\rho(t_1)$.

Donc on obtient

$$\varphi(|t|) \le \frac{t}{t_1}\varphi(t_1).$$

Par passage à la limite on aura

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi(|t|) \le \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t_1}\varphi(t_1) = 0$$

D'où

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0. \tag{2.1.2}$$

$b)$Montrons maintenant que $\lim\limits_{t\to +\infty} \varphi(t) = +\infty$.

Par la contraposée de ($\rho(\lambda t) = 0\ \forall \lambda > 0 \Longrightarrow t = 0$), c'est à dire

$$\exists \lambda > 0, \text{ tel que } \rho(\lambda . t) \neq 0.$$

En particulier,

$$\exists t_2 > 0 \text{ tel que } \rho(t_2) > 0 \text{ ce qui implique } \varphi(t_2) > 0.$$

Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\ \varphi(kt_2) \ge k\varphi(t_2) > 0.$$

Par passage à la limite on obtient

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(kt_2) \geq \lim_{t\to+\infty} k\varphi(t_2).$$

On a

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(\frac{t}{t_2}t_2) \geq \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t_2}\varphi(t_2)$$

D'où

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) \geq \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t_2}\varphi(t_2) = \infty.$$

Donc

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty. \tag{2.1.3}$$

De (2.1.2) et (2.1.3) φ est une ϕ-fonction.

Supposons maintenant que ρ est une modulaire sur $\mathbb{R}$ et montrons que φ est positive.

On a

$$\rho(t) = 0 \Longrightarrow t = 0.$$

On suppose le contraire, $t > 0 \Longrightarrow \rho(t) > 0$

Ce qui donne

$$\varphi(|t|) = \varphi(t) > 0.$$

D'où φ est positive. ■

Comme conséquence du lemme précédent on a, $\mathbb{R}$ est un espace modulaire.

2.1.2 Fonctions d'Orlicz généralisées

Définition 2.1.2 *(ϕ-fonction généralisée)*
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, avec μ une mesure σ-finie complète.
La fonction $\varphi : \Omega \times [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty]$ est dite ***fonction d'Orlicz généralisée*** *ou fonction de* ***Musielak-Orlicz,*** *et on ecrit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$.*

$$\varphi \in \phi(\Omega,\mu) \text{ si et seulement si} \begin{cases} \mathbf{1)}\ \varphi(y,.) \text{ est une } \phi\text{-fonction } \forall y \in \Omega, \\ \mathbf{2)}\ \varphi(.,t) \text{ est mesurable } \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Remarque 2.1.2 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, on écrit simplement $\varphi \in \phi(\Omega)$.*

Exemple 2.1.3 *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré, avec* μ *une mesure* σ*-finie complète. Soit* $p : \Omega \longrightarrow [1, +\infty]$ *une fonction mesurable, alors*

1) *la fonction* $\overline{\varphi}(y,t)$ *définie par*

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} : \Omega \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (y,t) &\mapsto \overline{\varphi}_{p(.)}(y,t) = t^{p(y)} \end{aligned}$$

et la fontion $\widetilde{\varphi}(y,t)$ *définie par*

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : \Omega \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (y,t) &\mapsto \widetilde{\varphi}_{p(.)}(y,t) = \tfrac{1}{p(y)} t^{p(y)} \end{aligned}$$

sont des fonctions d'Orlicz généralisées.

2) *Soit la fonction*

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow [0, \infty[\\ y &\longmapsto f(y) = \begin{cases} 0 \ si \ y \in \left[0, \frac{3}{8}\right] \\ 8y - 3 \ si \ y \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right] \\ -8y + 5 \ si \ y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right] \\ 0 \ si \ y \in \left[\frac{5}{8}, 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] \times [0,\infty[&\longrightarrow [0,\infty[\\ (y,t) &\longmapsto \varphi(y,t) = f(y)t^2 \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

est une fonction d'Orlicz généralisée.

La ϕ-fonction conjuguée

Définition 2.1.3 *Soit* $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$. *La fonction* $\varphi^* : \Omega \times [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty]$, *définie par :*

$$\varphi^*(y,u) = \sup_{t \geq 0}\{tu - \varphi(y,t)\} \ \forall y \in \Omega, \forall u \geq 0, \tag{2.1.5}$$

s'appelle la ***fonction complémentaire*** *ou la* ***fonction conjuguée*** *de* φ *au sens de Young.*

Définition 2.1.4 *Le couple* (φ, φ^*) *satisfait à l'****inégalité*** *suivante dite* ***de Young****,*

$$tu \leq \varphi(y,t) + \varphi^*(y,u) \ \forall t, u \geq 0. \tag{2.1.6}$$

Lemme 2.1.2 *[6]*
Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ alors,

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

La condition-Δ_2

Définition 2.1.5 *On dit que $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ satisfait la condition-Δ_2, s'il existe une constante $k \geq 2$ telle que*

$$\varphi(y, 2t) \leq k\varphi(y, t) \text{ pour tout } y \in \Omega \text{ et } t \geq 0 \tag{2.1.7}$$

2.2 Espaces de Musielak-Orlicz

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré avec μ une mesure σ-finie complète. On note par $M(\Omega, \mu)$ l'ensemble des fonctions $\mu-$mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ modulo la relation d'équivalence « $= \mu - p.p$ ».

2.2.1 Modulaire de Musielak-Orlicz

Le lemme suivant montre que toute ϕ-fonction généralisée, génère une semi modulaire sur l'ensemble des fonctions mesurables $M(\Omega, \mu)$.

Lemme 2.2.1 *[6]*
Soient $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ et $f \in M(\Omega, \mu)$ alors,
a) *La fonction:*

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow [0, \infty] \\ y &\longmapsto \varphi(y, |f(y)|), \end{aligned}$$

est mesurable.
b) *La fonction ρ_φ définie ainsi*

$$\begin{aligned} \rho_\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, \infty] \\ f &\longmapsto \rho_\varphi(f) = \int_\Omega \varphi(y, |f(y)|) d\mu \end{aligned}$$

*est une semi modulaire sur $M(\Omega,\mu)$, dite **semi modulaire induite par** φ.*

*De plus, si φ est positive, alors ρ_φ est une modulaire dite **modulaire de Musielak-Orlicz.***

Preuve.

1) Il suffit just de considérer le cas où $f \geq 0$.

Soit $(f_k)_k$ une suite croissantes de fonctions simples, non négatives,qui converge simplement vers f. Alors,

$$f_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k \chi_{\Omega_j^k} \text{ avec } \Omega_j^k \in \Sigma \text{ et sont deux à deux disjoints.}$$

$$\varphi(y, |f_k(y)|) = \varphi(y, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k \chi_{\Omega_j^k}(y)) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(y, \alpha_j^k) \chi_{\Omega_j^k}(y),$$

qui est mesurable.

Comme φ est croissante et continue alors $(\varphi(y, f_k(y)))_k$ est croissante et converge vers $\varphi(y, f(y))$.

D'où $\varphi(., f)$ est mesurable.

2) Montrons que $\rho_\varphi$est une semi modulaire.

De la définition de ρ_φ on

$$\rho_\varphi(0) = 0 \text{ et } \rho_\varphi(\lambda f) = \rho_\varphi(f) \text{ pour } |\lambda| = 1.$$

La convexité de ρ_φ découle de celle de φ et de la croissance de l'intégrale.

Il reste donc à montrer que $\big(\rho_\varphi(\lambda f) = 0 \ \forall \lambda > 0\big) \Longrightarrow f = 0$.

Soit $f \in M(\Omega, \mu)$ telle que $\rho_\varphi(\lambda f) = 0 \ \forall \lambda > 0$ alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \varphi(y, kf(y)) = 0 \ \ \mu - p.p \text{ dans } \Omega.$$

Comme $\mathbb{N}$ est dénombrable on déduit que

$$\varphi(y, kf(y)) = 0 \ \ \mu - p.p \text{ dans } \Omega, \ \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Par hypothèse φ est convexe et $\varphi(y, 0) = 0$ alors,

$$\varphi(y, \lambda f(y)) = 0 \ \ \mu.p.p \text{ dans } \Omega, \ \forall \ \lambda > 0.$$

Puisque $\underset{t\to+\infty}{lim}\varphi(y,t)=+\infty\ \forall y\in\Omega$ alors,

$$|f(y)|=0\quad \mu-p.p\ \text{dans}\Omega,\ \forall\ \lambda>0$$

D'où

$$f=0.$$

Donc ρ_φ est une semi modulaire.

Supposons maintenant que φ est positive et $\rho_\varphi(f)=0$ alors,

$$\varphi(y,f(y))=0 \text{ pour prèsque tout } y\in\Omega$$

Puisque φ est positive on a

$$\varphi(y,f(y))=0\Longrightarrow f(y)=0 \text{ pour prèsque tout } y\in\Omega,$$

d'où

$$f=0.$$

Ce qui montre que ρ_φ est une modulaire. ■

2.2.2 Espaces de Musielak-Orlicz

Définition 2.2.1 *(Classe de Musielak-Orlicz)*
*Soit $\varphi\in\phi(\Omega,\mu)$, on définit la **classe de Musielak-Orlicz** comme suit*

$$L^{\varphi}_{oc}(\Omega,\mu)=\{f\in L^{\varphi}(\Omega,\mu),\rho_\varphi(f)<+\infty\}.$$

Remarque 2.2.1 *La classe de Musielak Orlicz n'est pas un espace vectoriel.*

Définition 2.2.2 *Soient $\varphi\in\phi(\Omega,\mu)$ et*

$$\rho_\varphi(f)=\int_\Omega \varphi(y,|f(y)|)d\mu\ \forall f\in M(\Omega,\mu)$$

alors l'espace semi modulaire

$$\begin{aligned} L^{\varphi}(\Omega,\mu) &= \{f\in M(\Omega,\mu),\rho_\varphi(\lambda f)<+\infty \text{ pour un certain } \lambda>0\} \\ &= \left\{f\in M(\Omega,\mu),\lim_{\lambda\to+\infty}\rho_\varphi(\lambda f)<+\infty \text{ pour un certain } \lambda>0\right\} \end{aligned}$$

*est appelé **espace de Musielak-Orlicz**, dit aussi **espace d'Orlicz généralisé.***

On va maintenant définir un sous espace de $L^{\varphi}(\Omega,\mu)$, appelé aussi espace de Musielak -Orlicz, et est noté $E^{\varphi}(\Omega,\mu)$.

Définition 2.2.3 *Soit $\varphi \in \phi(\Omega,\mu)$, on définit l'espace de Musielak-Orlicz $E^{\varphi}(\Omega,\mu)$ comme suit:*

$$E^{\varphi}(\Omega,\mu) = \left\{ f \in L^{\varphi}(\Omega,\mu), \rho_{\varphi}(\lambda f) < \infty \ \forall\ \lambda > 0 \right\}.$$

Remarque 2.2.2 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $L^{\varphi}(\Omega,\mu), L^{\varphi}_{oc}(\Omega,\mu)$ et $E^{\varphi}(\Omega,\mu)$ sont notés respectivement $L^{\varphi}(\Omega), L^{\varphi}_{oc}(\Omega)$ et $E^{\varphi}(\Omega)$.*

Voici un exemple de de fonction qui appartient à la classe de Musielak-Orlicz, définie par la ϕ-fonction (2.1.4)

Exemple 2.2.1

Soit

$$g : [0,1] \longrightarrow [0,\infty[$$

$$y \quad \longmapsto \quad g(y) = \begin{cases} 1 \ si\ y \in \left[0,\frac{1}{4}\right[\\ -8y+3 \ si\ y \in \left[\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right[\\ 0 \ si\ y \in \left[\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right[\\ 8y-5 \ si\ y \in \left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right[\\ 1 \ si\ y \in \left[\frac{3}{4},1\right] \end{cases}$$

La fonction g appartient à la classe de Musielak-Orlicz, définie par la ϕ-fonction (2.1.4). En effet,

$$\varphi(y, g(y)) = 0 \ \forall y \in [0,1],$$

et

$$\begin{aligned} \rho_{\varphi}(g) &= \int_0^1 \varphi(y, g(y))dy = 0, \ \forall y \in [0,1] \\ &\Longrightarrow g \in L^{\varphi}_{oc}([0,1]). \end{aligned}$$

Exemple 2.2.2

1) *Les **espaces de Lebesgue classiques** $L^p(\Omega,\mu)$ avec $0 \leq p < +\infty$, sont des espaces de Musielak-Orlicz définies par la fonction*

$$\varphi_p\,(y,t) = \overline{\varphi}_p\,(t) = |t|^p\,.$$

2) *Les **espaces d'Orlicz** $L^{\varphi}(\Omega,\mu)$, sont un cas particuler des espaces de Musielak-Orlicz, en prenant*

$$\varphi(y,t) = \varphi(t).$$

3)***Les espaces de Lebesgue généralisés*** $L^{p(y)}$*, qu'on verra plus loin dans le chapitre suivant, sont aussi un exemple très important des espaces de Musielak-Orlicz.*

Remarques 2.2.3

De la définition de $L^{\varphi}_{oc}(\Omega,\mu)$, $L^{\varphi}(\Omega,\mu)$ et $E^{\varphi}(\Omega,\mu)$ on a

1) $E^{\varphi}(\Omega,\mu) \subset L^{\varphi}_{oc}(\Omega,\mu) \subset L^{\varphi}(\Omega,\mu)$.

2) $L^{\varphi}_{oc}(\Omega,\mu)$ *est convexe.*

3) $E^{\varphi}(\Omega,\mu)$ *est le plus grand sous espace fermé de* $L^{\varphi}_{oc}(\Omega,\mu)$.

4) $L^{\varphi}(\Omega,\mu)$ *est le plus petit espace vectoriel de* $M(\Omega,\mu)$ *qui contient* $L^{\varphi}_{oc}(\Omega,\mu)$.

5) $E^{\varphi}(\Omega,\mu) = L^{\varphi}_{oc}(\Omega,\mu) = L^{\varphi}(\Omega,\mu)$ *si et seulement si* $\phi \in \triangle_2$.

Exemple 2.2.3

1) $\varphi(y,t) = t^p, \forall 1 \leq p < \infty$ *alors,*

$$E^{\varphi}(\Omega,\mu) = L^{\varphi}_{oc}(\Omega,\mu) = L^{\varphi}(\Omega,\mu) = L^p(\Omega,\mu).$$

2)*Si on considère la fonction de Musielak-Orlicz suivante*

$$\varphi_{\infty}(y,t) = \begin{cases} 0 \;\; si \; 0 \leq t < 1 \\ \infty \;\; si \; t \in [1,\infty[\end{cases} \tag{2.2.1}$$

alors on obtient,

$$L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu) = L^{\infty}(\Omega).$$

En effet,

$$\begin{aligned} L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu) &= \{f \in M(\Omega,\mu), \exists\lambda > 0 : \rho_{\varphi_\infty}(\lambda f) < \infty \ \} \\ &= \{f \in M(\Omega,\mu), \exists\lambda > 0 : \int_\Omega \varphi_\infty(y, \lambda f(t)) < \infty \ \} \\ &= \{f \in M(\Omega,\mu), \exists\lambda > 0 : \int_{\{t, |\lambda f(t)| \le 1\}} \varphi_\infty(y, \lambda f(t)) d\mu + \int_{\{t, |\lambda f(t)| \ge 1\}} \varphi_\infty(y, \lambda f(t)) d\mu < \infty \end{aligned}$$

$$L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu) = \{f \in M(\Omega,\mu), \exists\lambda > 0 : \int_{\{t, |\lambda f(t)| \ge 1\}} \varphi_\infty(y, \lambda f(t)) d\mu < \infty \ \}.$$

Donc on a nécessairement

$$\mu(\{t, |\lambda f(t)| \ge 1\}) = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu) &= \{f \in M(\Omega,\mu), \exists\lambda > 0 : \lambda\, |f(t)| < 1 \ \mu - p.p \ \} \\ &= \{f \in M(\Omega,\mu), \exists\lambda > 0 : |f(t)| < \frac{1}{\lambda} \ \mu - p.p \ \}. \end{aligned}$$

$$L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu) = L^\infty(\Omega)$$

3) *Pour la fonction (2.2.1) on a*

$$E^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu) = \{0\}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} E^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu) &= \left\{f \in L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu), \rho_{\varphi_\infty}(\lambda f) < \infty \ \forall\ \lambda > 0 \ \right\} \\ &= \{f \in L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu), : \int_\Omega \varphi_\infty(y, \lambda f(t)) < \infty \forall\ \lambda > 0 \ \} \\ &= \{f \in L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu), : \int_{\{t, |\lambda f(t)| \le 1\}} \varphi_\infty(y, \lambda f(t)) d\mu + \int_{\{t, |\lambda f(t)| \ge 1\}} \varphi_\infty(y, \lambda f(t)) d\mu < \infty \ \forall\ \lambda > 0 \ \} \\ &= \{f \in L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu), : \int_{\{t, |\lambda f(t)| \ge 1\}} \varphi_\infty(y, \lambda f(t)) d\mu < \infty \ \forall\ \lambda > 0 \ \} \\ &= \{f \in L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu) : \lambda\, |f(t)| < 1 \ \mu - p.p \ \forall\lambda > 0 \ \} \\ &= \{f \in L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu) : |f(t)| < \frac{1}{\lambda} \ \mu - p.p \ \forall\lambda > 0 \ \} \\ &= \{f \in L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu) : |f(t)| = 0 \ \mu - p.p \ \}. \end{aligned}$$

D'où

$$E^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu)=\{0\}.$$

$$\begin{aligned}
L^{\varphi_\infty}_{oc}(\Omega,\mu) &= \{f\in L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu), \rho_{\varphi_\infty}(f)<\infty\ \}\\
&= \{f\in L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu), : \int\limits_{\{t,|\lambda f(t)|\geq 1\}} \varphi_\infty(y,f(t))d\mu<\infty\ \}.
\end{aligned}$$

On a nécessairement

$$\mu(\{t,|f(t)|\geq 1\})=0.$$

D'où

$$L^{\varphi_\infty}_{oc}(\Omega,\mu)=\{f\in L^{\varphi_\infty}(\Omega,\mu), |f(t)|\leq 1\mu-p.p\}.$$

4) *Soit* $\varphi(y,t)$ *une fonction de Musielak-Orlicz, définie par*

$$\varphi(y,t)=e^t-1 \text{ pour } t\in[0,1]$$

alors,

$$E^{\varphi}([0,1])\neq L^{\varphi}_{oc}([0,1])\neq L^{\varphi}([0,1]).$$

Pour celà il suffit de prendre $f(t)=\frac{k}{2}\chi_{[2^{-k},2^{-k+1}]}$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(f) &= \int_0^1 (e^{\frac{k}{2}}-1)\chi_{[2^{-k}\ 2^{-k+1}]}(t)d\mu\\
&= \sum_{k\geq 1}\int\limits_{[2^{-k}\ 2^{-k+1}]}(e^{\frac{k}{2}}-1)d\mu\\
&= \sum_{k\geq 1}(e^{\frac{k}{2}}-1)\mu([2^{-k}\ 2^{-k+1}])\\
&= \sum_{k\geq 1}(e^{\frac{k}{2}}-1)\left(\frac{1}{2^k}\right)<\infty
\end{aligned}$$

D'où $f\in L^{\varphi}_{oc}(\Omega,\mu)$.

D'autre part $2f\notin E^{\varphi}(\Omega,\mu)$ *car*

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(2f) &= \int_0^1 (e^{k}-1)\chi_{[2^{-k}\ 2^{-k+1}]}(t)\\
&= \sum_{k\geq 1}(e^k-1)\frac{1}{2^k}=\infty
\end{aligned}$$

2.2.3 Normes sur $\mathbf{L}^{\varphi}(\Omega,\mu)$

Dans les espaces de Musielak-Orlicz $L^{\varphi}(\Omega,\mu)$, on définit trois normes, qui sont appelées norme d'Orlicz, norme de Luxemburg et norme d'Amemiya. Ces normes sont définies comme suit :

Définition 2.2.4 *Soit $f \in L^{\varphi}(\Omega,\mu)$ alors,*

1)

$$\|f\|_{\varphi}^{o} = \sup\left\{\int_{\Omega} |f(t)\, g(t)|\, d\mu : g \in L^{\varphi^{*}}(\Omega,\mu)\,,\ \rho_{\varphi*}(g)) \leq 1\right\},$$

*est une norme sur l'espace $L^{\varphi}(\Omega,\mu)$ dite **norme d'Orlicz.***

2)

$$\|f\|_{\varphi} = \inf\left\{\lambda > 0\ \rho_{\varphi}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\},$$

*est une norme sur l'espace $L^{\varphi}(\Omega,\mu)$ dite **norme de Luxemburg.***

3)

$$\|f\|_{\varphi}^{A} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}[1 + \rho_{\varphi}(kf)]$$

*est une norme sur $L^{\varphi}(\Omega,\mu)$ dite **norme d'Amemiya.***

Remarque 2.2.4

1) *La norme d'Orlicz et celle de Luxemburg sont équivalentes, comme le montrent les inégalités suivantes:*

$$\|f\|_{\varphi} \leq \|f\|_{\varphi}^{o} \leq 2\|f\|_{\varphi}.$$

2) *La norme d'Amemiya est une autre écriture de la norme d'Orlicz, c'est à dire*

$$\|f\|_{\varphi}^{o} = \|f\|_{\varphi}^{A}.$$

Inégalité de Hölder

Lemme 2.2.2 *[6]*

Soit $\varphi \in \phi(\Omega,\mu)$, alors

$$\int_{\Omega} |f|\,|g|\, d\mu \leq 2\|f\|_{\varphi}\|g\|_{\varphi^{*}}$$

pour toute $f \in L^{\varphi}(\Omega,\mu)$ et $g \in L^{\varphi^{*}}(\Omega,\mu)$.

Preuve.

Soient $f \in L^{\varphi}(\Omega,\mu)$ et $g \in L^{\varphi^*}(\Omega,\mu)$,on suppose que $f \neq 0$ et $g \neq 0$.

Grâce au lemme 1.4.1, $\rho_\varphi(\frac{f}{\|f\|_\varphi}) \leq 1$ et $\rho_{\varphi^*}(\frac{g}{\|g\|_{\varphi^*}}) \leq 1$.

et d'après l'inégalité de Young (2.1.6) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|f(y)|}{\|f\|_\varphi}\frac{|g(y)|}{\|g\|_{\varphi^*}}d\mu &\leq \int_\Omega \varphi\left(y, \frac{|f(y)|}{\|f\|_\varphi}\right)d\mu + \int_\Omega \varphi^*\left(y, \frac{|g(y)|}{\|g\|_{\varphi^*}}\right) \\
&= \rho_\varphi\left(\frac{|f(y)|}{\|f\|_\varphi}\right) + \rho_{\varphi^*}\left(\frac{|g(y)|}{\|g\|_{\varphi^*}}\right) \\
&\leq 2
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_\Omega |f|\,|g|\,d\mu \leq 2\|f\|_\varphi\|g\|_{\varphi^*}$$

■

2.2.4 Résultats de convergence

Dans les espaces de Lebesgue classiques les théorèmes fondamentaux de convergences sont la convergence doninée, la convergence monotone et le lemme de Fatou, on démontrera les trois versions de ces théorèmes dans les espaces de Musielak-Orlicz. Nous verrons aussi les relations entre les types de convergence définis sur ces espaces à savoir la convergence en norme, en modulaire et la convergence en mesure.

Lemme 2.2.3 *(lemme de Fatou pour la modulaire)*
Soit $\varphi \in \phi(\Omega,\mu)$ et f une fonction mesurable, et soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables, Si $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k = f$ $\mu - p.p$ alors on a

$$\rho_\varphi(f) \leq \liminf_{k\to+\infty}\rho_\varphi(f_k).$$

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(f) &= \int_\Omega \varphi(y, f(y))d\mu \\
&= \int_\Omega \varphi(y, \lim_{k\to+\infty} |f_k(y)|)d\mu \\
&\leq \int_\Omega \liminf_{k\to+\infty} \varphi(y, |f_k(y)|)d\mu \\
&\leq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega \varphi(y, |f_k(y)|)d\mu
\end{aligned}$$

d'où,

$$\rho_\varphi(f) \leq \liminf_{k\to+\infty} \rho_\varphi(f_k).$$

■

Lemme 2.2.4 *[6](convergence monotone)*
Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ et f une fonction mesurable, et soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables croissante telle que $\lim_{k\to+\infty} |f_k| \longrightarrow |f|$ $\mu - p.p$, alors

$$\rho_\varphi(f) = \lim_{k\to+\infty} \rho_\varphi(f_k).$$

Preuve.

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissante convergente vers une foncton f ,

$$|f_k| \nearrow |f| \ \ \mu - p.p,$$

comme φ est croissante et continue à gauche alors,

$$\varphi(y, |f_k(y)|) \nearrow \varphi(y, |f(y)|) \ \mu - p.p.$$

Par la croissance de l'intégrale et grâce au théorème de la convergence monotone on aura,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(y, f(y))d\mu &= \int_\Omega \varphi(y, \lim_{k\to+\infty} |f_k(y)|)d\mu \\
&= \int_\Omega \lim_{k\to+\infty} \varphi(y, |f_k(y)|)d\mu \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \varphi(y, |f_k(y)|)d\mu \\
&= \lim_{k\to+\infty} \rho_\varphi(f_k).
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.5 *[6](convergence dominée)*
Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ et f, g deux fonctions mesurables, et soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables, Si $\lim_{k\to+\infty} f_k = f$ $\mu - p.p$, $|f_k| \leq |g|$ $\mu - p.p$ et $\rho_\varphi(\lambda g) < +\infty$ $\forall\lambda > 0$ alors,

$$\lim_{k\to+\infty} f_k = f \ \textit{dans}\ L^\varphi(\Omega, \mu).$$

En particulier, si $\rho_\varphi(\lambda g) < +\infty$ pour un certain $\lambda > 0$ alors,

$$f_k \xrightarrow{\rho} f \ \textit{dans}\ L^\varphi(\Omega, \mu).$$

Preuve.
On suppose que

$$\lim_{k\to+\infty} f_k = f \ \mu - p.p, \ |f_k| \leq |g| \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ et } \rho_\varphi(\lambda g) < +\infty \ \ \forall\lambda > 0$$

alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} |f_k - f| &= 0 \ \mu - p.p \text{ et } |f| \leq |g| \\
&\Rightarrow |f_k - f| \leq 2\,|g| \\
&\Rightarrow \lambda\,|f_k - f| \leq 2\lambda\,|g| \ \ \forall\lambda > 0
\end{aligned}$$

On a

$$\rho_\varphi(\lambda g) < +\infty \Rightarrow \rho_\varphi(2\lambda g) < +\infty \ \ \forall\lambda > 0$$

On utilise le théorème de la convergence dominée, et on conclut que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty}\int_{\Omega}\varphi(y,\lambda|f_k-f|)d\mu &= \int_{\Omega}\lim_{k\to+\infty}\varphi(y,\lambda|f_k-f|)d\mu \\
&= \int_{\Omega}\varphi(y,\lambda\lim_{k\to+\infty}|f_k-f|)d\mu \\
&= \int_{\Omega}\varphi(y,0)d\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Grâce au lemme 1.5.1 on obtient,

$$(f_k)_k \text{ converge vers } f \text{ dans } L^{\varphi}(\Omega,\mu).$$

■

Théorème 2.2.1 *[6]*

Soit $\varphi \in \phi(\Omega,\mu)$ alors

1) $\||f|\|_{\varphi} = \|f\|_{\varphi}$ $\forall f \in L^{\varphi}(\Omega,\mu)$.**2)** *Si $f \in L^{\varphi}(\Omega,\mu)$, $g \in M(\Omega,\mu)$ et $0 \leq |g| \leq |f|$ $\mu-p.p$, alors*

$$\begin{cases} g \in L^{\varphi}(\Omega,\mu) \\ \quad et \\ \|g\|_{\varphi} \leq \|f\|_{\varphi}. \end{cases}$$

3) *Si $f_k \to f$ $\mu-p.p$ alors $\|f\|_{\varphi} \leq \liminf\limits_{k\to\infty}\|f_k\|_{\varphi}$.*

4) *Si $|f_k| \nearrow |f|$ $\mu-p.p$ avec $f_k \in L^{\varphi}(\Omega,\mu)$ telle que $\sup\limits_{k\geq 0}\|f_k\|_{\varphi} < \infty$ alors*

$$\begin{cases} f \in L^{\varphi}(\Omega,\mu) \\ \quad et \\ \|f_k\|_{\varphi} \nearrow \|f\|_{\varphi}. \end{cases}$$

Les deux dérniers résultats sont appelés respectivement lemme de Fatou pour la norme et la propriété de Fatou.

Preuve.

Les résultats 1) et 2) sont évidents.

3) Soit $f_k \in L^{\varphi}(\Omega, \mu)$ une suite de fonctions telle que $f_k \to f \;\; \mu - p.p$ et soit

$$\lambda > \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{\varphi}\,, \tag{2.2.2}$$

alors

$$\|f_k\|_{\varphi} < \lambda \text{ pour } k \text{ assez grand.}$$

En vertu du lemme1.4.1

$$\rho_{\varphi}\left(\frac{f_k}{\lambda}\right) \leq 1 \text{ pour } k \text{ assez grand,}$$

et d'après le lemme de Fatou pour la modulaire 2.2.3 on aura

$$\rho_{\varphi}\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \liminf_{k\to\infty} \rho_{\varphi}\left(\frac{f_k}{\lambda}\right) \leq 1.$$

Par suite d'après le lemme 1.4.1

$$\left\|\frac{f}{\lambda}\right\|_{\varphi} \leq 1 \Longrightarrow \|f\|_{\varphi} \leq \lambda.$$

De l'inégalité (2.2.2) on obtient

$$\|f\|_{\varphi} \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{\varphi}\,.$$

4) Soit $|f_k| \nearrow |f| \;\; \mu - p.p$ avec $f_k \in L^{\varphi}(\Omega, \mu)$ et $\underset{k\geq 0}{sup} \|f_k\|_{\varphi} < \infty$.

Gâce aux résultats **1**) et **3**) on obtient

$$\|f\|_{\varphi} \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{\varphi} \leq \sup_{k\geq 0} \|f_k\|_{\varphi} < \infty,$$

ce qui prouve que $f \in L^{\varphi}(\Omega, \mu)$.

On a $|f_k| \nearrow |f|$ alors le deuxième résultat du théorème implique que

$$\|f_k\|_{\varphi} \nearrow \limsup_{k\to\infty} \|f_k\|_{\varphi} \leq \|f\|_{\varphi}\,.$$

D'où

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{\varphi} = \|f\|_{\varphi} \;\text{ et }\; \|f_k\|_{\varphi} \nearrow \|f\|_{\varphi}\,.$$

■

Remarque 2.2.5 *[12]*
Si $\mu(\Omega) < +\infty$ *et* $\lim_{n\to\infty} \rho_\varphi(\lambda f_n) = 0$ *pour un certain* $\lambda > 0$ *alors* (f_n) *converge en mesure vers zéro, et on écrit* $f_n \xrightarrow{\mu} 0$.

Lemme 2.2.6 *[6]*
Si $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$, *alors toute suite de Cauchy* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\varphi(\Omega, \mu)$ *pour la norme admet une sous suite qui converge* $\mu - p.p$ *vers une fonction mesurable* f.

2.2.5 La complètude

Théorème 2.2.2 *[6]*
Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ *alors l'espace* $L^\varphi(\Omega, \mu)$ *est un espace de Banach.*

Preuve.
D'après le théorème 1.1.1 $L^\varphi(\Omega, \mu)$ est un espace vectoriel.

Il reste à montrer que toute suite de Cauchy de $L^\varphi(\Omega, \mu)$ converge dans $L^\varphi(\Omega, \mu)$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, grâce au lemme 2.2.6, il existe une sous suite $(f_{n_k})_k$ et une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$(f_{n_k})_k \text{ converge vers } f \text{ pour presque tout } y \in \Omega.$$

Par suite,

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(y, |f_{n_k}(y)) - f(y)|) = 0 \ \mu - p.p.$$

Soit $\lambda > 0$, comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0, \forall m, k \geq N_0, \|\lambda(f_m - f_k)\|_\varphi \leq \varepsilon$$

Prenant $0 < \varepsilon < 1$, par le lemme 1.4.1 on obtient,

$$\rho_\varphi(\lambda(f_m - f_k)) \leq \varepsilon,$$

et d'après le lemme 2.2.3 on a

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(\lambda(f_m - f_k)) &= \int_\Omega \varphi(\lambda(f_m - f_k))d\mu \\
&= \int_\Omega \lim_{k\to\infty} \varphi(\lambda(f_m - f_{n_k}))d\mu \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_\Omega \varphi(\lambda(f_m - f_{n_k}))d\mu \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{k\to\infty} \rho_\varphi(\lambda(f_m - f)) = 0, \forall\lambda > 0.$$

Donc d'après le lemme 1.5.1 on a

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\varphi = 0$$

■

Proposition 2.2.1 *[6]*

$E^\varphi(\Omega,\mu)$ *est un sous espace fermé de* $L^\varphi(\Omega,\mu)$.

Preuve.

soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^\varphi(\Omega,\mu)$ telle que $f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\varphi} f$ dans $L^\varphi(\Omega,\mu)$ *alors,*

$$\lim_{k\to\infty} \rho_\varphi\left[2\lambda(f_k - f)\right] = 0,\ \forall\lambda > 0.$$

En particulier,

$$\rho_\varphi\left[2\lambda(f_{k_\lambda} - f)\right] \leq 1,\ \text{pour un certain } k_\lambda.$$

Par la convexité de ρ on obtient

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(\lambda f) &= \rho_\varphi\left[\frac{2\lambda(f - f_{k_\lambda}) + 2\lambda f_{k_\lambda}}{2}\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\rho_\varphi\left[2\lambda(f + f_{k_\lambda} - f_{k_\lambda})\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\rho_\varphi\left[2\lambda(f - f_{k_\lambda})\right] + \frac{1}{2}\rho_\varphi(2\lambda f_{k_\lambda}) \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho_\varphi(2\lambda f_{k_\lambda}) < \infty.
\end{aligned}$$

Donc $f \in E^\varphi(\Omega,\mu)$. ■

2.2.6 Fonctions d'Orlicz localement intégrables

L'intégrabilité locale d'une ϕ-fonction nous permet d'éviter le cas où la fonction φ prend des valeurs infinies. Notons que l'intégrabilité locale dans la définition qui suit défère de celle dans L^1_{loc}, où on suppose l'intégrabilité sur des sous ensembles compacts.

Définition 2.2.5 *Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu), \varphi$ est dite **localememt intégrable** sur Ω si*

$$\rho_\varphi(t\chi_A) < \infty \ \forall t \geq 0 \ \textit{et} \ \forall A \in \Sigma, \textit{tel que} \ \mu(A) < \infty.$$

Remarque 2.2.6 *[6]Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ alors*

$$S(\Omega, \mu) \subset E^\varphi(\Omega, \mu) \ \textit{si et seulement si} \ \varphi \ \textit{est localement intégrable.}$$

Exemple 2.2.4

Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ avec $\varphi(y, t) = \psi(t)$ où ψ est une ϕ-fonction continue alors, φ est localement intégrable.

En effet, comme ψ est continue alors $\psi(t)$ est finie dans $[0, \infty[$. En effet, si ψ n'est pas finie alors,

$$\exists t_1 \in \Omega \ \textit{telque} \ \varphi(t_1) = +\infty.$$

Par hypothèse φ est continue alors,

$$\lim_{t \to t_1} \varphi(t) = \varphi(t_1).$$

C'est à dire:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t - t_1| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_1)| < \varepsilon.$$

la contradiction est dans le fait que $\varphi(t_1) = +\infty$.

D'où φ est finie, ce qui donne

$$\rho_\varphi(t\chi_A) = \mu(A)\psi(t) < \infty \ \textit{pour tout} \ t \geq 0 \ \textit{et} \ \mu(A) < \infty.$$

Par conséquent, φ est localement intégrable.

Proposition 2.2.2 *[6]*

Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ localement intégrable alors,

$$\forall \lambda > 0,\ \forall A \subset \Omega,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \mu(A) < \delta \Longrightarrow \begin{cases} \rho_\varphi(\lambda \chi_A) \leq \varepsilon. \\ \quad et \\ \|\chi_A\|_\varphi \leq \frac{1}{\lambda}. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Preuve.

1) Montrons d'abord que $\rho_\varphi(\lambda\chi_A) \leq \varepsilon$, pour celà on suppose qu'il existe $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ pour les quels

$$\forall \delta > 0 \text{ (on prend } \delta = \frac{1}{2^k}) \text{ on a } \mu(A_k) \leq \frac{1}{2^k} \text{ et } \rho_\varphi(\lambda\chi_{A_k}) > \varepsilon.$$

Soit $G_k = \bigcup\limits_{m=k}^{\infty} A_m$, alors $\mu(G_k)$ tend vers zéro quand k tend vers $+\infty$.

En effet,

$$\begin{aligned} \mu(G_k) &= \mu(\bigcup_{m=k}^{\infty} A_m) \\ &\leq \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=k}^{n} 2^{-m} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{1-k}(1 - (\frac{1}{2})^{n-k+1}) \\ &= 2^{1-k}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(G_k) = \lim_{k\to\infty} 2^{1-k} = 0.$$

D'une part, puisque φ est localement intégrable et $\mu(G_1) \leq 1$ alors

$$\rho_\varphi(\lambda\chi_{G_1}) < \infty, \forall \lambda > 0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} \lambda\chi_{G_k} \leq \lambda\chi_{G_1}\ \forall \lambda > 0. \\ \quad \text{et} \\ \lambda\chi_{G_k} \longrightarrow 0\ \mu - pp. \end{cases}$$

Grâce au théorème de la convergence dominée on conclut que

$$\rho_\varphi(\lambda\chi_{G_k}) \text{ tend vers zéro lorsque } k \text{ tend vers } \infty.$$

Ce qui contredit le fait que

$$\rho_\varphi(\lambda\chi_{G_k}) \geq \rho_\varphi(\lambda\chi_{A_k}) \geq \varepsilon \quad \forall\lambda > 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Donc

$$\rho_\varphi(\lambda\chi_A) < \varepsilon.$$

2) Montrons que : $\|\chi_A\|_\varphi \leq \frac{1}{\lambda}$ $\forall\lambda > 0$.

On a $\rho_\varphi(\lambda\chi_A) < \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = 1$ on aura

$$\begin{aligned} \rho_\varphi(\lambda\chi_A) &< 1 \Longrightarrow \|\lambda\chi_A\|_\varphi \leq 1 \\ &\Longrightarrow \lambda\|\chi_A\|_\varphi \leq 1 \\ &\Longrightarrow \|\chi_A\|_\varphi \leq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

■

Caractérisation du dual

Définition 2.2.6 *(Fonction propre)*

Une fonction de Musielak-Orlicz est dite ***propre*** *si*

$$S(\Omega,\mu) \subset L^\varphi(\Omega,\mu) \cap (L^\varphi(\Omega,\mu))'.$$

Théorème 2.2.3 *[6]*

Soit $\varphi \in \phi(\Omega,\mu)$ *propre , localement intégrable et on suppose que* $E^\varphi(\Omega,\mu) = L^\varphi(\Omega,\mu)$ *alors*

$$\begin{aligned} V : L^{\varphi*}(\Omega,\mu) &\longrightarrow (L^\varphi(\Omega,\mu))^* \\ g &\mapsto J_g \end{aligned}$$

est un isomorphisme. avec $\begin{cases} J_g(f) = \int_\Omega fg\,d\mu, \text{ où } f \in L^\varphi(\Omega,\mu) \\ \text{et} \\ J_g \in (L^\varphi(\Omega,\mu))^* \end{cases}$

2.2.7 Théorèmes de densité

Théorème 2.2.4 *[12]*
Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$, localement intégrable et $S(\Omega, \mu)$ l'ensemble des fonctions simples alors,

$$\overline{S}^{\|\cdot\|_\varphi}(\Omega, \mu) = E^\varphi(\Omega, \mu).$$

Preuve.
Puisque φ est localement intégrable on a

$$S(\Omega, \mu) \subset E^\varphi(\Omega, \mu).$$

Comme $E^\varphi(\Omega, \mu)$ est fermé on obtient

$$\overline{S}^{\|\cdot\|_\varphi}(\Omega, \mu) \subset \overline{E^\varphi}^{\|\cdot\|_\varphi}(\Omega, \mu) = E^\varphi(\Omega, \mu).$$

Il reste à monter que $E^\varphi(\Omega, \mu) \subset \overline{S}^{\|\cdot\|_\varphi}(\Omega, \mu)$.

Soit $f \in E^\varphi(\Omega, \mu)$, montrons que $\exists\ f_k \in S(\Omega, \mu)$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\varphi = 0$. On suppose que $f(y) \geq 0\ \forall y \in \Omega$.

D'après le théorème 5 de l'annexe **A**, comme f est mesurable alors il existe une suite de fonctions simples croissante $(f_k)_k$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f.$$

D'après le lemme 2.2.5 on a f_k converge vers f dans $L^\varphi(\Omega, \mu)$.

C'est à dire

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\varphi = 0.$$

En particulier

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\varphi = 0 \text{ dans } E^\varphi(\Omega, \mu).$$

Par conséquent

$$S(\Omega, \mu) \text{ est dense dans } E^\varphi(\Omega, \mu).$$

■

Théorème 2.2.5 *[12]*

Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$, localement intégrable et $S(\Omega, \mu)$ l'ensemble des fonctions simples alors, $S(\Omega, \mu)$ est ρ-dense dans $L^{\varphi}(\Omega, \mu)$,

$$\overline{S}^{\rho}(\Omega, \mu) = L^{\varphi}(\Omega, \mu)$$

Remarque 2.2.7

Si en plus des hypothèses du théorème 2.2.5 $\varphi \in \Delta_2$, alors d'après la remarque 2.2.3 $L^{\varphi}(\Omega, \mu) = E^{\varphi}(\Omega, \mu)$ et grâce au théorème 2.2.4 on aura

$$S(\Omega, \mu) \text{ est dense dans } L^{\varphi}(\Omega, \mu).$$

2.2.8 Théorèmes de séparabilité

Pour établir les théorèmes de séparabilité dans les espaces de Musielak-Orlicz la mesure μ doit être séparable.

Définition 2.2.7 *(mesure séparable)*

Soit μ une mesure, elle est dite séparable s'il existe une suite $(A_k)_k \subset \Sigma$ qui verifie

a) $\mu(A_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

b) *Pour tout $A \in \Sigma$, avec $\mu(A) < \infty$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}$:*

$$\mu(A \Delta A_k) < \varepsilon$$

(*où Δ désigne la difference symétrique*).

Exemple 2.2.5 *La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est séparable.*

Théorème 2.2.6 *[12]*

Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$, localement intégrable et la mesure μ est séparable alors,

$$E^{\varphi}(\Omega, \mu) \text{ est séparable.}$$

Preuve.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'ensembles donnée dans la définition de la mesure séparable et soit

$$S_0(\Omega, \mu) = \left\{ g \in S(\Omega, \mu) \text{ telle que } g = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i},\ a_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

Comme l'ensemble des fonctions simple $S(\Omega, \mu)$ est dense dans $E^{\varphi}(\Omega, \mu)$, il suffit de montrer que S_0 est dense dans $S(\Omega, \mu)$.

Soit f une fonction simple alors

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{B_i}(y) \text{ où } b_i \in \mathbb{R},$$

où $\mu(B_i) < \infty \ \forall i = \overline{1,n}$ et $B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall i \neq j$.

Soient $a = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |a_i|$, $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$.

Puisque φ est localement intégrable, d'après la proposition 2.2.2 on a

$$\forall \lambda > 0, \ \forall \varepsilon > 0 \ \rho_{\varphi}(\lambda f) = \rho_{\varphi}(\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}(y)) \leq \varepsilon.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \rho_{\varphi}(\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}(y)) &= \int\limits_{B_i} \varphi(y, \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i) d\mu \\ &\leq \int\limits_{B_i} \varphi(y, \lambda n a) d\mu \\ &\leq \int\limits_{B_i} \varphi(y, 4\lambda n a) d\mu \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme μ est séparable, on peut trouver des ensembles mesurables $A_{j_1}, ...A_{j_n}$ de mesure finie tels que

$$\int\limits_{Aj_i \Delta B_i} \varphi(y, 4\lambda n a) d\mu \leq \varepsilon \quad \forall i = \overline{1,n},$$

pour $\varepsilon = 1$

$$\int\limits_{Aj_i \Delta B_i} \varphi(y, 4\lambda n a) d\mu \leq 1 \ \forall i = \overline{1,n} \tag{2.2.4}$$

Soit maintenant $B = \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$, comme φ est localement intégrable et $\mu(B) < \infty$ alors,

$$\lim_{\eta \to 0} \int\limits_{B} \varphi(y, 2\lambda\eta) d\mu = 0.$$

Ce qui donne

$$\int\limits_{B} \varphi(y, 2\lambda\delta) d\mu \leq 1 \text{ pour un certain } \delta > 0. \tag{2.2.5}$$

Grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $b_1, b_2, ...b_n \in \mathbb{Q}$ pour les quels

$$|a_i - b_i| \leq \delta \text{ et } |b_i| \leq 2a \ \forall i = \overline{1,n}.$$

Soit

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{A_{j_i}} \in S_0(\Omega, \mu)$$

alors

$$\begin{aligned}
|f(y) - g(y)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}(y) - \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{A_{j_i}}(y) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{B_i}(y) - b_i \chi_{B_i}(y) + b_i \chi_{B_i}(y) - \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{A_{j_i}}(y) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \chi_{B_i}(y) - \sum_{i=1}^{n} b_i (\chi_{A_{j_i}}(y) - \chi_{B_i}(y)) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \chi_{B_i}(y) + \sum_{i=1}^{n} |b_i| (\chi_{A_{j_i}}(y) - \chi_{B_i}(y)).
\end{aligned}$$

D'où

$$|f(y) - g(y)| \leq \delta \chi_B(y) + \sum_{i=1}^{n} 2a \left| \chi_{A_{j_i} \Delta B_i} \right|.$$

Par suite, grâce à la covexité de φ et ρ_φ on aura

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(\lambda |f(y) - g(y)|) &= \rho_\varphi \left[\frac{2\lambda |f(y) - g(y)|}{2} \right] \\
&\leq \rho_\varphi \left[\frac{2\lambda\delta\chi_B(y) + 2\sum_{i=1}^{n} 2a \left| \chi_{A_{j_i} \Delta B_i} \right|}{2} \right] \\
&\leq \frac{1}{2} \rho_\varphi(2\lambda\delta\chi_B) + \frac{1}{2} \rho_\varphi \left[\frac{4\lambda a n \sum_{i=1}^{n} \left| \chi_{A_{j_i} \Delta B_i} \right|}{n} \right].
\end{aligned}$$

Grâce aux estimations (2.2.4), (2.2.5) et les propriétés de ρ_φ on obtient,

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(\lambda |f(y) - g(y)|) &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \rho_\varphi(4\lambda a n \left| \chi_{A_{j_i} \Delta B_i} \right|) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \int_{Aj_i \Delta B_i} \varphi(y, 4\lambda a n) d\mu \\
&\leq \frac{1}{2n} < 1.
\end{aligned}$$

D'où

$$\rho_\varphi(\lambda\,|f(y)-g(y)|) \leq 1 \ \forall \lambda > 0.$$

Ce qui donne grâce au lemme 1.4.1

$$\|\lambda\,|f-g|\|_\varphi \leq 1$$

D'où

$$\|f-g\|_\varphi \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Par conséquent, S_0 est dense dans $S(\Omega,\mu)$.

Ce qui permet de conclure que $E^\varphi(\Omega,\mu)$ est séparable. ■

Remarque 2.2.8 *L'espace $L^\varphi(\Omega,\mu)$ n'est pas séparable mais il est ρ-séparable comme le montre le théorème suivant.*

Théorème 2.2.7 *[12]*

Soit $\varphi \in \phi(\Omega,\mu)$ localement intégrable et la mesure μ est séparable alors,

$$L^\varphi(\Omega,\mu) \text{ est } \rho\text{-séparable.}$$

Remarque 2.2.9

Si en plus des hypothèses du théorème 2.2.6 $\varphi \in \Delta_2$, alors d'après la remarque 2.2.3 $L^\varphi(\Omega,\mu) = E^\varphi(\Omega,\mu)$ et grâce au théorème 2.2.6 on aura

$$L^\varphi(\Omega,\mu) \text{ est séparable.}$$

2.2.9 Théorèmes d'injection

On sait que dans le cas des espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, si $1 \leq p \leq q < \infty$ et $\mu(\Omega) < \infty$ alors $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. A fin de comparer les espaces d'Olicz, de nouvelles relations d'ordre partielles sont définies.

Définition 2.2.8 *Soient φ et ψ deux fonctions d'Orlicz alors,*

1) *Si $\mu(\Omega) < \infty$, on dit que φ domine ψ à l'infini ($\psi \prec \varphi$ à l'infini) si et seulement si*

$$\exists k, t_0 > 0 : \psi(t) \leq \varphi(kt) \ \forall t \geq t_0, \tag{2.2.6}$$

2) *Si $\mu(\Omega) = \infty$, on dit que φ domine ψ globalement ($\psi \prec \varphi$ globalement) si et seulement si*

$$\exists k > 0 : \psi(t) \leq \varphi(kt) \ \forall t \geq 0 \tag{2.2.7}$$

Proposition 2.2.3 *[13]*

Soient φ et ψ deux fonctions d'Orlicz et $\mu(\Omega) < \infty$ alors les propriétés suivantes sont équivalantes.

1) *$\psi \prec \varphi$ à l'infini.*

2) *$L^{\varphi}(\Omega, \mu) \hookrightarrow L^{\psi}(\Omega, \mu)$.*

3) *$E^{\varphi}(\Omega, \mu) \hookrightarrow E^{\psi}(\Omega, \mu)$.*

Pour démontrer les théorèmes d'injections des classes et des espaces de Musielak -Orlicz, on aura besoin du lemme suivant:

Lemme 2.2.7 *[12]*

Soit μ une mesure sans atomes, et soit $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombre positifs, et $(g_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions mesurables, finies, non négatives définies sur Ω, tels que

$$\int_{\Omega} g_i(y) d\mu \geq 2^i \alpha_i \ \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Alors, il existe une suite d'entiers $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ croissante et une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables deux à deux disjoints tels que

$$\int_{A_K} g_{i_k}(y) d\mu = \alpha_{i_k} \ \textit{pour } k = 1, 2, ...$$

Preuve.

Comme μ est sans atomes alors il existe un ensemble D_1 mesurable tel que

$$\int_{D_1} g_1(y) d\mu = \alpha_1.$$

Par conséquent, il existe une sous suite (g_k^1) de la suite (g_i) avec $i = 2, 3, ...$pour laquelle deux cas se presentent, soit

$$\int_{D_1} g_k^1(y) d\mu \geq \frac{1}{2} \alpha_k^1 \ \text{ pour } k = 1, 2, ... \tag{2.2.8}$$

ou bien

$$\int_{\Omega \setminus D_1} g_k^1(y)d\mu \geq \frac{1}{2}\alpha_k^1 \text{ pour } k = 1, 2, .. \tag{2.2.9}$$

où (α_k^1) est la sous suite de (α_i) avec $i = 1, 2, ...$ qui correspond à la sous suite (g_k^1). Donc dans (2.2.8) on prend $A_1 = D_1$ et $i_1 = 1$, et dans (2.2.9) on prend $A_1 \subset \Omega \setminus D_1$.

Ainsi

$$\int_{A_1} g_1(y)d\mu = \alpha_1.$$

Pour déninir A_2 et i_2 on procède comme précédemment, en remplaçant Ω, (g_i) et (α_i) par $\Omega \setminus A_1$, (g_k^1) et $(\frac{1}{2}\alpha_k^1)$ respectivement.

Ainsi on obtient (g_k^2) une sous suite de (g_k^1), et (α_k^2) une sous suite de (α_k^1) avec $A_2 \in \sum$ et un indice $i_2 \leq i_1$.

Puis en remplaçant Ω, (g_i) et (α_i) par $\Omega \setminus (A1 \cup A_2)$, (g_k^2) et $(\frac{1}{2}\alpha_k^2)$ respectivement; on obtient alors A_3 et i_3.

Ainsi on construit les deux suites (A_k) et (i_k) qui vérifient

$$\int_{A_k} g_{i_k}(y)d\mu = \alpha_{i_k}.$$

■

Théorème 2.2.8 *[12]*
Soient φ, $\psi \in \phi(\Omega, \mu)$ localememt intégrables et la mesure μ sans atomes alors

$$L_{oc}^{\varphi}(\Omega, \mu) \subset L_{oc}^{\psi}(\Omega, \mu) \textit{ si et seulement si}$$

$$\psi(y, t) \leq k\varphi(y, t) + h(y) \ \forall t \geq 0 \textit{ et pour prèsque tout } y \in \Omega \tag{2.2.10}$$

Où h est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ intégrable et k est une constante positive.

Preuve.

1) Supposons que l'inégalité (2.2.10) est vérifiée et montrons que $L_{oc}^{\varphi}(\Omega, \mu) \subset L_{oc}^{\psi}(\Omega, \mu)$.

Soit $f \in L_{oc}^{\varphi}(\Omega, \mu)$, comme $h \in L^1(\Omega)$ et par la croissance de l'intégrale on aura

$$\int_{\Omega} \psi(y, f(y))d\mu \leq k \int_{\Omega} \varphi(y, f(y))d\mu + \int_{\Omega} h(y)d\mu < \infty.$$

Par suite $f \in L^{\psi}_{oc}(\Omega, \mu)$.

D'où

$$L^{\varphi}_{oc}(\Omega, \mu) \subset L^{\psi}_{oc}(\Omega, \mu).$$

L'inclusion est vérifiée même si la mesure est atomique.

2)Montrons que l'inclusion $L^{\varphi}_{oc}(\Omega, \mu) \subset L^{\psi}_{oc}(\Omega, \mu)$ implique l'inégalité (2.2.10)

On suppose que la mesure est sans atomes, $L^{\varphi}_{oc}(\Omega, \mu) \subset L^{\psi}_{oc}(\Omega, \mu)$ et l'inégalité (2.2.10) n'est pas vraie on doit aboutir à une contradiction.

$$\forall h \in L^1(\Omega) \text{ (positive) et } \forall k > 0, \psi(y,t) \geq k\varphi(y,t) + h(y),$$

pour un certain $t \geq 0, \forall y \in A$ avec A non négligeable

Etape 1 On subdivise Ω, $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ avec $\mu(\Omega_i) < \infty$ $\forall i = 1, 2, ...$ et $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.

Soit

$$f_{r,i}(y) = \begin{cases} r & \text{si } y \in \Omega_i \text{ où } r \in \mathbb{Q}^+ \\ & 0 \text{ ailleurs dans } \Omega \end{cases}. \tag{2.2.11}$$

Posons

$$h_n(y) = \sup_{t \geq 0} \{\psi(y,t) - 2^{-n}\varphi(y,t)\} \tag{2.2.12}$$

Montrons que

$$h_n(y) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \{\psi(y, f_{r,i}(y)) - 2^{-n}\varphi(y, f_{r,i}(y))\} \tag{2.2.13}$$

Soit $y \in \Omega, (y \in \Omega_i)$,et par définition de la borne supérieure dans l'inégalité (2.2.12) on aura

$$\psi(y,t) - 2^{-n}\varphi(y,t) \leq h_n(y)$$

Par suite

$$\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon = 2^{-k}),\ \exists t_k : \psi(y, t_k) - 2^{-n}\varphi(y, t_k) \geq h_n(y) - 2^{-k} \tag{2.2.14}$$

Grâce à la continuité de φ et ψ, il existe un rationnel $r_k \geq 0$ pour lequel on obtient

$$\begin{cases} \psi(y, r_k) \geq \psi(y, t_k) - 2^{-k} \\ \varphi(y, r_k) \leq \varphi(y, t_k) + 2^{-n-k} \end{cases} \tag{2.2.15}$$

D'apès (2.2.11) on a

$$\psi(y, f_{r_k,i}(y)) - 2^n\varphi(y, f_{r_k,i}(y)) = \psi(y, r_k) - 2^n\varphi(y, r_k)$$

Grâce à (2.2.15) et (2.2.14) on aura

$$\begin{aligned} \psi(y, r_k) - 2^n\varphi(y, r_k) &\geq \psi(y, t_k) - 2^{-k} - 2^n\varphi(y, t_k) - 2^{-k} \\ &\geq h_n(y) - 3.2^{-k} \end{aligned}$$

D'où

$$h_n(y) \leq \psi(y, r_k) - 2^n\varphi(y, r_k) + 3.2^{-k}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} h_n(y) &\leq \psi(y, f_{r_k,i}(y)) - 2^n\varphi(y, f_{r_k,i}(y)) + 3.2^{-k} \\ &\leq \sup_{r\in\mathbb{Q}^+} \{\psi(y, f_{r,i}(y)) - 2^n\varphi(y, f_{r,i}(y))\} + 3.2^{-k} \end{aligned}$$

Par passage à la limite lorseque k tend vers $+\infty$ on obtient

$$h_n(y) \leq \sup_{r\in\mathbb{Q}^+} \{\psi(y, f_{r,i}(y)) - 2^n\varphi(y, f_{r,i}(y))\}$$

Par suite,

$$h_n(y) = \sup_{k>0} \{\psi(y, f_k(y)) - 2^n\varphi(y, f_k(y))\}, \tag{2.2.16}$$

où (f_k) est un rearrangement quelconque de $(f_{r,i})$ avec $f_1 = f_{0,i}$

D'après (2.2.16) les fonctions h_n sont mesurables et $h_n(y) \geq 0$.

Par suite, le deuxième point du théorème sera démontré si on montre que les h_n sont intégrables sur Ω.

Etape2 Montrons par l'absurde que h_n sont intégrables, On suppose

$$\int_\Omega h_n(y)d\mu = \infty \text{ pour } n = 1, 2, ...$$

Soit

$$T_{m,n}(y) = \max_{1\leq k\leq m} \{\psi(y, f_k(y)) - 2^n\varphi(y, f_k(y))\}$$

Comme $f_1(y) = 0$ alors $T_{m,n}(y) \geq 0$.

De plus $T_{m,n}$ sont mesurables et $(T_{m,n}(y))_m$ est une suite non décroissante, qui tend vers $h_n(y)$quand m tend vers ∞.

D'où pour tout n il existe un certain indice m_n tel que

$$\int_\Omega T_{m_n,n}(y)(y)d\mu \geq 2^n \tag{2.2.17}$$

Posons $T_n = T_{m_n,n}$.

Soient

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= \{y \in \Omega : \psi(y, f_k(y)) - 2^n\varphi(y, f_k(y)) = T_n(y)\} \\ B_n &= \Omega \backslash B_{n,1} \cup ... \cup B_{n,m_n} \end{aligned}$$

Alors $\mu(B_n) = 0$.

Posons

$$\widetilde{f}_k(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \in B_{n,1} \cup B_n \\ f_k(y) \text{ si } y \in B_{n,k} \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} B_{n,j} \text{ pour } k = 2, 3, ..., m_n \end{cases}$$

Alors

$$T_n(y) = \psi(y, \widetilde{f}_n(y)) - 2^n\varphi(y, \widetilde{f}_n(y)) \geq 0 \tag{2.2.18}$$

Par la croissance de l'intégrale on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \psi(y, \widetilde{f}_n(y))d\mu &= 2^n \int_\Omega \varphi(y, \widetilde{f}_n(y))d\mu + \int_\Omega T_n(y)d\mu \\ &\geq \int_\Omega T_n(y)d\mu \end{aligned}$$

D'après (2.2.17)

$$\int_\Omega \psi(y, \widetilde{f}_n(y))d\mu \geq 2^n \tag{2.2.19}$$

Appliquons maintenant le lemme 2.2.7 avec

$$\begin{cases} g_i(y) = \psi(y, \widetilde{f}_i(y)) \\ \alpha_i = 1 \end{cases}$$

Alors il existe une suite croissante $(n_k)_k$ d'entiers et une suite $(A_k)_k$ d'ensembles mesurables deux à deux disjoints tels que

$$\int_\Omega \psi(y, \widetilde{f}_{n_k}(y))d\mu = 1 \text{ pour } k = 1, 2, ... \tag{2.2.20}$$

Ce qui est en contradiction avec (2.2.19).

Ainsi

$$\int_\Omega h_n(y)d\mu < \infty \text{ pour } n = 1, 2, ...$$

Etape 3 Construire une fonction $f \notin L^\psi_{oc}(\Omega, \mu)$ et $f \in L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu)$, ce qui est une contradiction avec $L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu) \subset L^\psi_{oc}(\Omega, \mu)$

Posons

$$f(y) = \begin{cases} \widetilde{f}_{n_k}(y) \text{ si } A_k, k = 1, 2, ... \\ \quad 0 \text{ ailleurs dans } \Omega \end{cases}$$

D'une part on a

$$\begin{aligned} \rho_\psi(f) &= \int_\Omega \psi(y, f(y))d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \psi(y, \widetilde{f}_{n_k}(y))d\mu = \infty \end{aligned}$$

Par conséquent

$$f \notin L^\psi_{oc}(\Omega, \mu)$$

D'autre part de (2.2.18) on a

$$\begin{aligned} \rho_\varphi(f) &= \int_\Omega \varphi(y, f(y))d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \varphi(y, \widetilde{f}_{n_k}(y))d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n_k} \left[\int_{A_k} \psi(y, \widetilde{f}_{n_k}(y))d\mu - \int_{A_k} T_n(y)d\mu \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n_k} \int_{A_k} \psi(y, \widetilde{f}_{n_k}(y))d\mu \end{aligned}$$

Grâce à (2.2.20) on aura

$$\rho_\varphi(f) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n_k} \leq 1$$

Par conséquent

$$f \in L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu)$$

Ce qui est en contradiction avec $L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu) \subset L^\psi_{oc}(\Omega, \mu)$. ■

Dans le cas des espaces de Musielak-Orlicz, une relation d'ordre partielle est définie par:

$$\psi(y, t) \leq k_1 \varphi(y, k_2 t) + h(y) \ \forall t \geq 0 \text{ et pour prèsque tout } y \in \Omega \qquad (2.2.21)$$

Où h est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ intégrable et k_1, k_2 sont des constantes positives.

La relation (2.2.21) est notée par $\psi \prec \varphi$ et on dit que φ domine ψ.

Théorème 2.2.9 *[12]*
Soient φ, $\psi \in \phi(\Omega, \mu)$, on suppose que ψ est localement intégrable et la mesure μ est sans atomes alors

$$L^\varphi(\Omega, \mu) \overset{\rho}{\hookrightarrow} L^\psi(\Omega, \mu) \text{ si et seulement si } \psi \prec \varphi.$$

Preuve.

1) La suffisance

a) Supposons que $\psi \prec \varphi$ et soit $f \in L^\varphi(\Omega, \mu)$ alors

$$\exists \lambda > 0 \text{ tel que } \rho_\varphi(\lambda f) < \infty$$

Par la croissance de l'intégrale et (2.2.21)

$$\int_\Omega \psi(y, \lambda f(y)) d\mu \leq k_1 \int_\Omega \varphi(y, \lambda k_2 f(y)) d\mu + \int_\Omega h(y) d\mu < \infty$$

D'où

$$f \in L^\psi(\Omega, \mu).$$

Donc

$$L^{\varphi}(\Omega,\mu) \subset L^{\psi}(\Omega,\mu). \tag{2.2.22}$$

b) Il reste à montrer que

$$i : L^{\varphi}(\Omega,\mu) \longrightarrow L^{\psi}(\Omega,\mu) \text{ est continue}$$

on supposons de plus que ψ est localement intégrable.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions telles que

$$\begin{cases} (f_n)_n \in L^{\varphi}(\Omega,\mu) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\varphi}(\lambda f_n) = 0 \text{ pour un certain } \lambda > 0 \end{cases}$$

Soient $\varepsilon > 0, k_2$ et h respectivement la constante et la fonction déja définie dans (2.2.10)

Alors on peut trouver un ensemble $A \in \Sigma$ de mesure finie tel que

$$\int\limits_{\Omega\backslash A} h(y)d\mu < \frac{\varepsilon}{4}$$

Puisque ψ est localement intégrable, il existe $a > 0$ tel que

$$\int\limits_{A} \psi(y, \lambda k_2 a)d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \;\text{ pour un certain } \lambda > 0$$

D'après la remarque 2.2.5 f_n converge en mesure vers zéro dans A.

Posons

$$A_n = \{y \in A : |f_n(y)| \leq a\} \;\text{ et } B_n = A\backslash A_n$$

On a $\mu(B_n)$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

Par conséquent,

$$\int\limits_{B_n} h(y)d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \text{ pour } n \text{ assez grand } (n > N)$$

De plus on suppose que

$$k_1\rho_{\varphi}(\lambda f_n) < \frac{\varepsilon}{4} \text{ pour } n > N,$$

où k_1 la constante définie dans (2.2.10).

Par suite d'après (2.2.21) on obtient

$$\begin{aligned}
\rho_\psi(\lambda k_2 f_n) &= \int\limits_{\Omega} \psi(y, \lambda k_2 |f_n(y)|) d\mu \\
&\leq \int\limits_{A_n} \psi(y, \lambda k_2 a) d\mu + k_1 \int\limits_{B_n} \varphi(y, \lambda |f_n(y)|) d\mu + \\
&\quad + \int\limits_{B_n} h(y) d\mu + k_1 \int\limits_{\Omega \backslash A} \varphi(y, \lambda |f_n(y)|) d\mu + \int\limits_{\Omega \backslash A} h(y) d\mu \\
&\leq \int\limits_{A} \psi(y, \lambda k_2 a) d\mu + \int\limits_{A} \varphi(y, \lambda |f_n(y)|) d\mu + 2.\frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

Donc

$$\rho_\psi(\lambda k_2 f_n) \leq \varepsilon \text{ pour un certain } \lambda > 0 \text{ et } n > N.$$

D'où

$$f_n \text{ converge en modulaire dans } L^\psi(\Omega, \mu). \tag{2.2.23}$$

De (2.2.22) et (2.2.23) on aura

$$L^\varphi(\Omega, \mu) \overset{\rho}{\hookrightarrow} L^\psi(\Omega, \mu).$$

2) La nécéssité

Pour montrer que l'inclusion implique que $\psi \prec \varphi$ on doit supposer que la mesure est sans atomes et on suit les étapes de la démonstration du deuxième point du théorème 2.2.8 ■

Théorème 2.2.10 *[12]*
Soient φ, $\psi \in \phi(\Omega, \mu)$, on suppose que ψ est localement intégrable et la mesure μ est sans atomes alors

$$L^\varphi(\Omega, \mu) \hookrightarrow L^\psi(\Omega, \mu) \textit{ si et seulement si } \psi \prec \varphi.$$

CHAPITRE 3

Les espaces de Lebesgue généralisés

Dans ce chapitre on définit les espaces de Lebesgue à exposants variables $L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu)$, qui sont un cas particulier des espaces de Musielak-Orlicz et une généralisation des espaces de Lebesgue classiques L^p.

Ces espaces sont différents des espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, \mu)$ par le fait que l'exposant "p" n'est pas une constante mais une fonction mesurable définie sur un ensemble mesurable Ω à valeurs dans $[1, \infty]$.

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Exposant variable

Soit $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure σ-finie complète.

Définition 3.1.1 *On appelle exposant variable sur Ω toute fonction mesurable,*
$p : \Omega \longrightarrow [1,\ \infty]$, *on note $P(\Omega, \mu)$ l'ensemble de ces exposants.*
On pose,

$$p^+ = \sup ess\ p = \inf \{\alpha > 0, |p| \leq \alpha\ \ \mu - p.p\},$$

et

$$p^- = \inf ess\ p = \inf \{\alpha > 0, |p| > \alpha\ \ \mu - p.p\}.$$

Exemple 3.1.1 *Soit* $\Omega = \mathbb{R}$,*alors les fonctions définies par*

$p(y) = p$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$.

$p(y) = 2 + \sin(y)$

sont des exposants variables.

Remarque 3.1.1 *Si* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* μ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^n$, *alors on note l'ensemble des exposants variables par* $P(\Omega)$.

Définition 3.1.2 *(Exposant variable conjugué)*

Si $p \in P(\Omega)$, *alors on définit* $p' \in P(\Omega, \mu)$ *par*

$$\frac{1}{p(y)} + \frac{1}{p'(y)} = 1.$$

La fonction p' *est appelée* ***exposant variable conjugué*** *(ou* ***dual****) de* p.

Remarque 3.1.2

1) *Dans toute la suite on considère les deux fonctions* $\varphi_{p(.)}(y,t) = t^{p(y)}$ *et* $\varphi_{p(.)}(y,t) = \frac{1}{p(y)} t^{p(y)}$.

2) *Si* $p^+ < \infty$, *alors l'exposant variable* p *est dit* ***borné.***

3.1.2 Espaces de Lebesgue généralisés

Définition 3.1.3 *Soient* $p \in P(\Omega, \mu)$ *et* $\varphi_{p(.)} \in \phi(\Omega, \mu)$,*alors*

$$\begin{aligned} \rho_{p(.)} : M(\Omega, \mu) &\longrightarrow [1, \infty] \\ f &\longmapsto \int_\Omega \varphi_{p(y)}(y, |f(y)|)) d\mu, \end{aligned}$$

est une modulaire et l'espace

$$\begin{aligned} L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) &= \left\{ f \in M(\Omega, \mu) : \int_\Omega \varphi_{p(y)}(y, \lambda |f(y)|) d\mu < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega, \mu) : \int_\Omega |\lambda f(y)|^{p(y)} d\mu < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}, \end{aligned}$$

ou

$$L^{p(.)}(\Omega,\mu)=\left\{f\in M(\Omega,\mu):\ \int\limits_{\Omega}\frac{|\lambda f(y)|^{p(y)}}{p(y)}d\mu<\infty \text{ pour un certain } \lambda>0\right\}$$

est appelé **espace de Lebesgue généralisé** ou **espace de Lebesgue à exposant variable**.

Remarque 3.1.3 *Soient*

$$L^{p(.)}_{oc}(\Omega,\mu)=\left\{f\in M(\Omega,\mu):\rho_{p(.)}(f)<\infty\ \right\},$$
$$E^{p(.)}(\Omega,\mu)=\left\{f\in M(\Omega,\mu):\rho_{p(.)}(\lambda f)<\infty,\forall\lambda>0\right\},$$

alors

$$E^{p(.)}(\Omega,\mu)\subset L^{p(.)}_{oc}(\Omega,\mu)\subset L^{p(.)}(\Omega,\mu).$$

Remarque 3.1.4

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, alors on note respectivement $L^{p(.)}(\Omega,\mu)$, $L^{p(.)}_{oc}(\Omega,\mu)$ et $E^{p(.)}(\Omega,\mu)$ par $L^{p(.)}(\Omega)$, $L^{p(.)}_{oc}(\Omega)$ et $E^{p(.)}(\Omega)$.

Remarque 3.1.5

Soit $p\in P(\Omega,\mu)$, tel que $p^+<+\infty$.
alors,

$$\varphi_{p(.)} \text{ est localement intégrable.}$$

Soit $\varphi_{p(.)}=t^{p(.)}$, puisque, $\forall\lambda\geq 0$ et $\forall A\in\Sigma$ avec $\mu(A)<+\infty$, on a

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\varphi_{p(.)}(\lambda\chi_A)d\mu &= \int\limits_{A}\lambda^{p(y)}d\mu\\ &\leq \mu(A)\max(\lambda^{p^-},\lambda^{p^+})<+\infty.\end{aligned}$$

Mais la réciproque n'est pas toujours vraie, comme le montre l'example suivant.

Soient $\Omega=\mathbb{R}$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ tels que les A_k sont deux à deux disjoints et

$$\mu(A_k)=\exp(\exp(-k)).$$

On définit
$$p(y) = \begin{cases} k \text{ pour } y \in A_k \\ 1 \text{ pour } y \in \mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^{+\infty} A_k. \end{cases}$$

Alors pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $A \subset \mathbb{R}$ avec $\mu(A) < +\infty$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{p(y)}(\lambda \chi_A) dy &= \int_{\mathbb{R}} |(\lambda \chi_A)|^{p(y)} dy \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k \exp(\exp(-k)) + \lambda \mu(A) < +\infty. \end{aligned}$$

ceci dit, bien que $\varphi_{p(.)}$ est localement intégrable, mais $p^+ = +\infty$.

Les normes sur l'espace $L^{p(.)}(\Omega, \mu)$

1) La norme de Luxemburg

$$\|f\|_{p(.)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \rho_{p(y)}(\frac{f}{\lambda}) \leq 1 \right\}$$

2) La norme d'Orlicz

$$\|f\|^{o}_{p(.)} = \sup_{\substack{g \in L^{q(y)}(\Omega,\mu) \\ \rho_{q(y)}(g) \leq 1}} \int_{\Omega} |f(y)g(y)| \, d\mu \quad \text{avec } q(y) = \frac{p(y)}{p(y)-1}$$

3) La norme d'Amemiya

$$\|f\|^{A}_{p(.)} = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left[1 + \rho_{p(y)}(\lambda f) \right].$$

Inégalité de Hölder généralisée

Lemme 3.1.1 *[6]*
Soient $p, q, s \in P(\Omega, \mu)$ tels que $\frac{1}{p(y)} + \frac{1}{q(y)} = \frac{1}{s(y)}$ $\mu - p.p$, alors pour $f \in L^{p(.)}(\Omega, \mu)$ et $g \in L^{q(.)}(\Omega, \mu)$ on a

$$\begin{cases} \rho_{s(.)}(fg) \leq \rho_{p(.)}(f) + \rho_{q(.)}(g) \\ \quad\quad et \\ \|fg\|_{s(.)} \leq 2 \|f\|_{p(.)} \|g\|_{q(.)}. \end{cases}$$

Lemme 3.1.2 *[6]*

Soit $p \in P(\Omega,\mu)$ *et* $\varphi_{p(.)} = t^{p(.)}$ *alors,*

$$\begin{cases} S(\Omega,\mu) \subset L^{p(.)}(\Omega,\mu) \\ \textit{et} \\ \min\{1,\mu(A)\} \leq \|\chi_A\|_{p(y)} \leq \max\{1,\mu(A)\} \ \textit{pour tout mesurable } A \subset \Omega. \end{cases}$$

Preuve.

Comme une fonction simple est une combinaison linéaire finie, de fonctions caractéristiques, on obtient

$$S(\Omega,\mu) \subset L^{p(y)}(\Omega,\mu).$$

Soit $A \subset \Omega$ un sous ensemble mesurable avec $\mu(A) < +\infty$.Alors

$$\begin{aligned} \rho_{p(y)}\left(\frac{\chi_A}{\max\{1,\mu(A)\}}\right) &= \int_\Omega \varphi\left(y, \frac{\chi_A(y)}{\max\{1,\mu(A)\}}\right) d\mu \\ &= \int_\Omega \left|\frac{\chi_A(y)}{\max\{1,\mu(A)\}}\right|^{p(y)} d\mu \\ &= \int_A \frac{1}{(\max\{1,\mu(A)\})^{p(y)}} d\mu \\ &\leq \int_A \frac{1}{\max\{1,\mu(A)\}} d\mu \\ &\leq \frac{1}{\max\{1,\mu(A)\}} \mu(A) \leq 1. \end{aligned}$$

Puis d'après le lemme 1.4.1 on obtient

$$\left\|\frac{\chi_A}{\max\{1,\mu(A)\}}\right\|_{p(.)} \leq 1 \text{ ce qui donne } \frac{1}{\max\{1,\mu(A)\}} \|\chi_A\|_{p(.)} \leq 1.$$

D'ou

$$\|\chi_A\|_{p(.)} \leq \max\{1,\mu(A)\}. \tag{3.1.1}$$

Soit maintenant, $\lambda > 1$ alors

$$\begin{aligned}
\rho_{p(.)}(\frac{\lambda\chi_A}{\min\{1,\mu(A)\}}) &= \int_\Omega \varphi(y, \frac{\lambda\chi_A(y)}{\min\{1,\mu(A)\}})d\mu \\
&= \int_A \frac{\lambda^{p(y)}}{(\min\{1,\mu(A)\})^{p(y)}}d\mu \\
&\geq \int_A \frac{\lambda}{\min\{1,\mu(A)\}}d\mu \\
&\geq \lambda > 1.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.4.1 on a

$$\left\| \frac{\lambda\chi_A}{\min\{1,\mu(A)\}} \right\|_{p(.)} > 1 \text{ on obtient } \frac{\lambda}{\min\{1,\mu(A)\}} \|\chi_A\|_{p(.)} > 1,$$

l'auteur dans [6] conclu que

d'ou

$$\|\chi_A\|_{p(.)} \geq \min\{1,\mu(A)\}, \tag{3.1.2}$$

de (2.1.2) et (2.1.3) on obtient alors

$$\min\{1,\mu(A)\} \leq \|\chi_A\|_{p(.)} \leq \max\{1,\mu(A)\}.$$

■

Proposition 3.1.1 *[5]*
Soit $p \in P(\Omega,\mu)$, si $f \in L^{p(.)}(\Omega,\mu)$ alors f est localement intégrable.

Preuve.
Soit $A \subset \Omega$ avec $\mu(A) < +\infty$.
D'après l'inégalité de *Hölder et le lemme 3.1.2*

$$\int_A |f(y)|\, dy \leq c \|f\|_{L^{p(.)}} \|\chi_A\|_{L^{q(.)}(\Omega)} < +\infty.$$

En particulier si A est compact, on obtient l'intégrabilité local de f. ■

Afin de démontrer les théorèmes d'injection et de densité on donne quelques résultats sans démonstrations

Lemme 3.1.3 *[6]*

Soit $s \in P(\Omega, \mu)$. *Alors*

$$\frac{1}{2}\min\left\{\mu(\Omega)^{\frac{1}{s^+}},\ \mu(\Omega)^{\frac{1}{s^-}}\right\} \leq \|1\|_{s(.)} \leq 2\max\left\{\mu(\Omega)^{\frac{1}{s^+}},\ \mu(\Omega)^{\frac{1}{s^-}}\right\},$$

pour tout ensemble Ω, *avec* $\mu(\Omega) > 0$. *Où* 1 *désigne une fonction* $g(y) = 1\ \forall\ y \in \Omega$.

Théorème 3.1.1 *[6]*

Soit $p \in P(\Omega, \mu)$ *alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) $p^+ < \infty$,

2) $E^{p(.)}(\Omega, \mu) = L^{p(.)}_{oc}(\Omega, \mu) = L^{p(.)}(\Omega, \mu)$,

3) $\varphi_{p(.)}$ *vérifie la condition-*Δ_2 *avec la constante* 2^{p^+}.

Théorème 3.1.2 *[6]*

L'espace $(L^{p(.)}(\Omega, \mu), \|.\|_{p(.)})$ *est un espace de Banach.*

L'espace dual

Rappellons que pour tout $g \in L^{p'(.)}(\Omega, \mu)$ l'application J_g est définie par

$$\begin{cases} J_g(f) = \int\limits_{\Omega} fgd\mu, \text{où } f \in L^{p(.)}(\Omega, \mu) \\ \text{et} \\ J_g \in \left(L^{p(.)}(\Omega, \mu)\right)^* \end{cases}$$

Théorème 3.1.3 *[6]*

Soit $p \in P(\Omega, \mu)$,*avec* $p^+ < \infty$ *alors,*

$$\begin{array}{rcl} V : L^{p'(.)}(\Omega, \mu) & \longrightarrow & \left(L^{p(.)}(\Omega, \mu)\right)^* \\ g & \mapsto & J_g \end{array}$$

est un isomorphisme.

Théorème de séparabilité

Théorème 3.1.4 *[6]*

Soit $p \in P(\Omega, \mu)$, *tel que* $p^+ < \infty$ *et* μ *est une mesure séparable (voir la définition 2.2.7), alors*

$$L^{p(.)}(\Omega, \mu) \text{ est séparable.}$$

Preuve.

Comme p est borné grâce à la remarque 3.1.5 $\varphi_{p(.)}$ est localement intégrable.
D'aprés le théorème 2.2.6 on a

$$E^{p(\cdot)}(\Omega,\mu) = E^{\varphi_{p(\cdot)}}(\Omega,\mu) \text{ est séparable.}$$

Puisque $p^+ < +\infty$ alors d'après le théorème 3.1.1 on obtient

$$E^{p(\cdot)}(\Omega,\mu) = L^{p(\cdot)}(\Omega,\mu).$$

D'ou

$$L^{p(\cdot)}(\Omega,\mu) \text{ est un espace séparable.}$$

■

Résultats de convergence

En plus des résultats de convergence obtenus dans le chapitre précédent, nous donnons d'autres résultats de convergence dans le cas où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.1.5 *[5]*
Soit $p \in P(\Omega)$ on suppose que $p^+ < +\infty$, pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et pour toute suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, les propriétés suivantes sont equivalentes
1) *f_k converge vers f en norme.*
2) *f_k converge vers f en en modulaire.*
3) *f_k converge vers f en mesure et pour un certain $\gamma > 0$, $\rho(\gamma f_k) \longrightarrow \rho(\gamma f)$.*

Théorème 3.1.6 *[5]*
Soit $p \in P(\Omega)$ et soit une suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Si $(f_k)_k$ converge vers f en norme alors elle converge vers f en mesure.

$$f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{p(\cdot)}} f \Longrightarrow f_k \xrightarrow{\mu} f$$

3.2 Théorèmes d'injection

Nous appelons constante de l'injection $L^{p(.)}(\Omega,\mu) \hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega,\mu)$, la plus petite constante k telle que $\|f\|_{q(.)} \leq k \|f\|_{p(.)}$.

Théorème 3.2.1 *[6]*
Soient p, $q \in P(\Omega,\mu)$, on définit l'exposant $r \in P(\Omega,\mu)$ par

$$\frac{1}{r(y)} = \max\left(\frac{1}{q(y)} - \frac{1}{p(y)}, 0\right) \text{ pour tout } y \in \Omega.$$

1) *Si $q \leq p$ $\mu - p.p$ et $1 \in L^{r(.)}(\Omega,\mu)$, alors*

$$L^{p(.)}(\Omega,\mu) \hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega,\mu) \text{ avec la constante de l'injection } k \leq 2\|1\|_{r(.)}.$$

Avec 1 désigne une fonction $g(y) = 1 \forall y \in \Omega$.

2) *Si μ est sans atomes et $L^{p(.)}(\Omega,\mu) \hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega,\mu)$ alors*

$$q \leq p \ \mu - p.p$$

Preuve.

1) Supposons que $q \leq p$ $\mu - p.p$.

Soit $f \in L^{p(.)}(\Omega,\mu)$, alors

$$\exists \lambda > 0 : \rho_{p(.)}(\lambda f) < \infty$$

Comme $q \leq p$, par la croissance de l'intégrale et celle de $\varphi_{p(.)}$ on aura

$$\int_{\Omega} \varphi_{q(.)}(y, \lambda f(y)) d\mu \leq \int_{\Omega} \varphi_{p(.)}(y, \lambda f(y)) d\mu < \infty.$$

Par suite

$$f \in L^{q(.)}(\Omega,\mu).$$

D'où

$$L^{p(.)}(\Omega,\mu) \subset L^{q(.)}(\Omega,\mu). \tag{3.2.1}$$

Il reste à montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall f \in L^{p(.)}(\Omega,\mu)$ $\|f\|_{q(.)} \leq k \|f\|_{p(.)}$.

Puisqu'on a $q \leq p \ \mu - p.p$, $\frac{1}{r(y)} = \frac{1}{q(y)} - \frac{1}{p(y)}$ et $1 \in L^{r(\cdot)}(\Omega, \mu)$,alors d'après l'inégalité de Hölder donnée dans le lemme 3.1.1

$$\|f\|_{q(.)} \leq 2 \|1\|_{r(.)} \|f\|_{p(.)} .$$

De (3.2.1) et (**??**)

$$L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega, \mu).$$

2) Montrons que $q \leq p \ \mu - p.p.$ On a par hypothèse $L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega, \mu)$ alors, d'après le théorème 2.2.9 il existe $h \in L^1(\Omega)$, k_1, k_2 positives tels que

$$\varphi_{q(.)}(y, t) \leq k_1 \varphi_{q(.)}(y, k_2 t) + h(y).$$

Ce qui donne avec $\varphi_{p(.)}(y, t) = t^{p(y)}$

$$t^{q(y)} \leq k_1 (k_2 t)^{p(y)} + h(y).$$

Ou encore

$$t^{q(y)} \leq k t^{p(y)} + h(y) \ \forall t \geq 0, \ y \in \Omega \tag{3.2.2}$$

Raisonnons par l'absurde,

supposons que $q \leq p \ \mu - p.p$ n'est pas vraie, alors il existe un sous ensemble $A \subset \Omega$ de mesure positive tel que

$$q(y) > p(y) \text{ pour tout } y \in A.$$

Comme$\int\limits_{\Omega} h(y) d\mu > 0$ on peut trouver un sous ensemble $B \subset A$ et une constante α positive tels que

$$h(y) \leq \alpha, \forall y \in B$$

En multipliant l'inégalité (3.2.2) par $t^{-p(y)}$on trouve

$$\begin{aligned} t^{q(y)-p(y)} &\leq k t^{p(y)-p(y)} + \alpha t^{-p(y)} \\ &\leq k + \alpha t^{-p(y)}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand t tend vers $+\infty$ on obtient une contradiction ($+\infty \leq k$).

Par suite $q \leq p \ \mu - p.p.$ ■

Remarque 3.2.1 *[6]*
Si $\mu(\Omega) < \infty$ alors grâce au lemme 3.1.2 la condition $1 \in L^{r(.)}(\Omega, \mu)$ est toujours vérifiée, d'où le corollaire suvant.

Corollaire 3.2.1 *[6]*
Soient $p, q \in P(\Omega, \mu)$, on suppose que μ est sans atomes et $\mu(\Omega) < \infty$ alors,

$$L^{q(.)}(\Omega, \mu) \hookrightarrow L^{p(.)}(\Omega, \mu) \text{ avec la constante de l'injection } k \leq 2(1 + \mu(\Omega))$$

si et seulement si $p(y) \leq q(y)$ $\mu - p.p$ pour $y \in \Omega$.

Avant de caractériser les injections de la somme et de l'intersection de deux espaces de Lebesgue généralisés, rappelons que pour deux espaces nornés X et Y,
les espaces $X \cap Y = \{f : f \in X,\ f \in Y\}$ et $X + Y = \{f = g + h : g \in X,\ h \in Y\}$ sont respectivement muni des normes

$$\|f\|_{X \cap Y} = \max \{\|f\|_X\,,\ \|f\|_Y\}$$

et

$$\|f\|_{X+Y} = \inf (\|g\|_X + \|h\|_Y)$$

et on donne quelques propriétés de $\varphi_{p(.)}$ sans démonstration.

Proposition 3.2.1 *[6]*
Soit $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$ alors $\forall t \geq 0$ on a

$$\varphi_q(t) \leq \varphi_p(t) + \varphi_r(t) \tag{3.2.3}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_p (\max\{t - 1,\ 0\}) &\leq \varphi_q(t) \\ \varphi_r (\min\{t,\ 1\}) &\leq \varphi_q(t) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Lemme 3.2.1 *[6]*
soient $p,\ q,\ r \in P(\Omega, \mu)$, avec $p \leq q \leq r$ $\mu - p.p$ dans Ω. alors

$$L^{p(.)}(\Omega, \mu) \cap L^{r(.)}(\Omega, \mu) \subset L^{q(.)}(\Omega,\ \mu).$$

Preuve.

Soit $f \in L^{p(.)}(\Omega,\mu) \cap L^{r(.)}(\Omega,\mu)$ avec

$$\|f\|_{L^{p(y)}(\Omega,\mu)\cap L^{r(.)}(\Omega,\mu)} \leq 1$$

C'est à dire

$$\max\left\{\|f\|_{L^{p(.)}}, \|f\|_{L^{r(.)}}\right\} \leq 1.$$

D'après le lemme 1.4.1

$$\rho_{p(.)}(f) \leq 1 \text{ et } \rho_{r(.)}(f) \leq 1.$$

D'après l'inégalité (3.2.3) de la demarque 3.2.1

$$\rho_{q(.)}(f) \leq \rho_{p(.)}(f) + \rho_{r(.)}(f) \leq 2.$$

D'où

$$f \in L^{q(.)}(\Omega,\mu).$$

■

Remarque 3.2.2 *Pour démontrer la continuté de*

$$i : L^{p(.)}(\Omega,\mu) \cap L^{r(.)}(\Omega,\mu) \longrightarrow L^{q(.)}(\Omega,\mu)$$

voir le théorème 3.3.11 page 83 du livre [6].

Théorème 3.2.2 *[6]*

soient $p,\ q,\ r \in P(\Omega,\mu)$, avec $p \leq q \leq r\ \ \mu - p.p$ dans Ω. alors

$$L^{q(.)}(\Omega,\ \mu) \hookrightarrow L^{p(.)}(\Omega,\mu) + L^{r(.)}(\Omega,\mu).$$

Preuve.

Soit $g \in L^{q(.)}(\Omega,\mu)$ avec $\|g\|_{q(.)} \leq 1$, d'près le lemme 1.4.1 $\rho_{q(.)}(g) \leq 1$.

On définit,

$$g_0 = sign(g)\max\{|g| - 1,\ 0\},$$

et

$$g_1 = sign(g)\min\{|g|,\ 1\},$$

alors on obtient,

$$g = g_0 + g_1$$

Par suite,

$$L^{q(.)}(\Omega,\ \mu) \subset L^{p(.)}(\Omega, \mu) + L^{r(.)}(\Omega, \mu).$$

D'apès l'inégalité 3.2.4 de la remarque 3.2.1 on a

$$\varphi_p(g_0) = \varphi_p\left(sign(g) \max\left\{|g| - 1,\ 0\right\}\right) \leq \varphi_q(g) \leq 1,$$

et

$$\varphi_r(g_1) = \varphi_r\left(sign(g) \min\left\{|g|\,,\ 1\right\}\right) \leq \varphi_q(g) \leq 1.$$

Grâce au lemme 1.4.1

$$\|g_0\|_{p(.)} \leq 1 \text{ et } \|g_1\|_{r(.)} \leq 1.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^{p(.)}(\Omega,\mu)+L^{r(.)}(\Omega,\mu)} &= \inf_{g=g_0+g_1} \left\{\|g_0\|_{p(.)} + \|g_1\|_{r(.)}\right\} \\ &\leq 2\,\|g\|_{q(.)}\,. \end{aligned}$$

Donc

$$L^{q(.)}(\Omega,\ \mu) \hookrightarrow L^{p(.)}(\Omega, \mu) + L^{r(.)}(\Omega, \mu).$$

■

Lemme 3.2.2 *[6]*

Soient $\varphi_{p(.)} = t^{p(.)}$, $p \in P(\mathbb{R}^n)$ *et* $q \in [1,\ \infty]$ *On définit* $s \in P(\mathbb{R}^n)$ *par*

$$\frac{1}{s(y)} = \left|\frac{1}{p(y)} - \frac{1}{q}\right|.$$

Alors, $1 \in L^{s(.)}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si*

$$L^{\max\{p(.),\ q\}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(.)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\min\{p(.),\ q\}}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve.

1) Supposons que les injections ont lieu, alors grâce au théorème 3.2.1 on a $1 \in L^{s(.)}(\mathbb{R}^n)$.

2) Supposant que $1 \in L^{s(.)}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\gamma \in]0, 1[$ tel que

$$\rho_{s(.)}(\gamma) < \infty.$$

On définit r_1 et r_2 comme suit

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{r_1(y)} &= \tfrac{1}{\max\{p(y),\, q\}} - \tfrac{1}{p(y)} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\ \tfrac{1}{r_2(y)} &= \tfrac{1}{p(y)} - \tfrac{1}{\max\{p(y),\, q\}} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Alors,

$$s \leq r_1 \text{ et } s \leq r_2 \ \mu - p.p,$$

et comme $\gamma \in]0,\, 1[$ on aura

$$\begin{aligned} \rho_{r_1(.)}(\gamma) \leq \rho_{s(.)}(\gamma) < \infty \\ \rho_{r_2(.)}(\gamma) \leq \rho_{s(.)}(\gamma) < \infty \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} \gamma \in L^{r_1(.)}(\mathbb{R}^n) \\ \qquad \text{et} \\ \gamma \in L^{r_2(.)}(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

En particulier, pour $\gamma = 1$ on a le même résultat

Appliquant maintenant le théorème 3.2.1;

D'une part, pour l'exposant r_1, on a

$$\frac{1}{\max\{p(y),\ q\}} - \frac{1}{p(y)} \leq 0$$

Par suite,

$$\frac{1}{\min\{p(y),\ q\}} - \frac{1}{p(y)} \geq 0,$$

et comme $1 \in L^{r_1(.)}(\mathbb{R}^n)$ on aura

$$L^{p(.)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\min\{p(.),\, q\}}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2.5}$$

D'autre part, On a

$$\frac{1}{r_2(y)} = \frac{1}{p(y)} - \frac{1}{\max\{p(y),\ q\}} \geq 0,$$

et comme $1 \in L^{r_2(.)}(\mathbb{R}^n)$ on aura

$$L^{\max\{p(.),\, q\}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(.)}(\mathbb{R}^n) \tag{3.2.6}$$

De (3.2.5) et (3.2.6) on obtient

$$L^{\max\{p(.),\, q\}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p(.)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\min\{p(.),\, q\}}(\mathbb{R}^n).$$

■

3.3 Théorèmes de densité

Théorème 3.3.1 *[6]*
Soit $p \in P(\Omega, \mu)$,avec $p^+ < +\infty$ alors l'ensemble des fonctions simples $S(\Omega, \mu)$ est dense dans $L^{p(.)}(\Omega, \mu)$.

$$\overline{S}^{\|\cdot\|_{p(.)}}(\Omega, \mu) = L^{p(.)}(\Omega, \mu).$$

Preuve.
Comme $p^+ < +\infty$, d'après la remarque 3.1.5 φ est localement intégrable et grâce au théorème de densité 2.2.4 on a

$$S(\Omega, \mu) \text{ est dense dans } E^{p(.)}(\Omega, \mu)$$

Du théorème 3.1.1, comme $p^+ < +\infty$, on a

$$E^{p(.)}(\Omega, \mu) = L^{p(.)}(\Omega, \mu)$$

D'ou

$$\overline{S}^{\|\cdot\|_{p(.)}}(\Omega, \mu) = L^{p(.)}(\Omega, \mu).$$

■

Remarque 3.3.1 *[6]*
Comme l'ensemble des fonctions simples $S(\Omega)$ est un sous ensemble de $L^\infty(\Omega) \cap L^{p(.)}(\Omega)$ alors il en découle du théorème 3.3.1 que

$$L^\infty(\Omega) \cap L^{p(.)}(\Omega) \text{ est dense dans } L^{p(.)}(\Omega).$$

Théorème 3.3.2 *[5]*
Soit $p \in P(\Omega)$, on suppose que $p^+ < +\infty$ alors, l'ensemble des fonctions bornées à support compact est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Preuve.
Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de sous ensembles compacts de Ω tel que $\Omega = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$.

Pour l'instant, soit

$$A_k = \left\{ x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{k} \right\} \cap \overline{B(0,k)}.$$

où $\overline{B(0,k)}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon k.

Soient $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu)$ et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_k(y) = \begin{cases} k & \text{si } f_k(y) > k \\ f(y) & \text{si } -k \leq f(y) \leq k \\ -k & \text{si } f_k(y) < -k \end{cases}$$

Soit

$$g_k(y) = f_k(y)\chi_{A_k}(y).$$

Comme f est finie $\mu - p.p$, $\lim\limits_{k\to\infty} g_k = f \ \mu - p.p.$

Oomme $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $|g_k(y)| \leq |f(y)|$ alors $g_k \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Par conséquent, puisque $p^+ < +\infty$, par le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$g_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{p(\cdot)}} f.$$

■

Corollaire 3.3.1 *[5]*
Soit $p \in P(\Omega)$, on suppose que $p^+ < +\infty$, alors les ensembles des fonctions continues à support compact $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

$$\overline{C_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_{p(\cdot)}} = L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Preuve.

On fixe f dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$; et on cherchera à trouver une fonction $h \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \varepsilon$.

D'après le théorème 3.3.2, il existe une fonction bornée à support compact g, tel que

$$\|f - g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

soit $Supp(g) \subset B \cap \Omega$, pour une certaine boule B.

Comme on a $p^+ < +\infty$ alors par le théorème 7 de l'annex B on a

$$C_c(B \cap \Omega) \text{ est dense dans } L^{p^+}(B \cap \Omega),$$

donc il existe une fonction $h \in C_c(B \cap \Omega) \subset C_c(\Omega)$ tel que

$$\|g - h\|_{L^{p^+}(\Omega)} = \|g - h\|_{L^{p^+}(B\cap\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{4(1 + \mu(B \cap \Omega))}.$$

Par suite, grâce au corollaire 3.2.1 on a

$$\|g - h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq 2(1 + \mu(B \cap \Omega)) \, \|g - h\|_{L^{p^+}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\begin{aligned} \|f - h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} &= \|f - h + g - g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \\ &\leq \|f - g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|g - h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|f - h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

■

Remarque 3.3.2 *[5]*

Soit $p \in P(\Omega)$, si $p^+ < +\infty$ alors

$$\bigcap_{q>1} L^q(\Omega) \text{ est dense dans } L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Car cette intersection contient $C_c(\Omega)$.

Théorème 3.3.3 *[6]*

Si $p \in P(\Omega)$, avec $p^+ < +\infty$, alors, l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact $C_c^\infty(\Omega) = D(\Omega)$, est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

$$\overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{p(\cdot)}} = L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Preuve.

Puisque $p^+ < +\infty$, alors, d'après le théorème 3.3.1 l'ensemble des fonctions simples est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, et puisque les fonctions simples appartiennent à $L^{p^-}(\Omega,\mu) \cap L^{p^+}(\Omega,\mu)$,

donc elles peuvent être approximées par une suite de $D(\Omega)$ dans lui même, ce qui donne le résultat car $L^{p^-}(\Omega) \cap L^{p^+}(\Omega)$ s'injecte dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. ■

Notation 3.3.1

Il est parfois necessaire de considerer un sous ensemble de fonctions de $L^{p(y)}(\Omega,\mu)$, de moyenne nulle, défini comme suit:

$$L_0^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ f \in L^{p(\cdot)}(\Omega,\mu), \quad \int\limits_\Omega f(y)dy = 0 \right\} \textit{pour tout domaine } \Omega \textit{ avec } \mu(\Omega) < +\infty.$$

L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact de moyenne nulle est noté par $C_{c,0}^\infty(\Omega)$.

Proposition 3.3.1 *[6]*

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in P(\Omega)$ un exposant borné. Si $\mu(\Omega) < \infty$ ou $p^- > 1$ alors,

$$C_{c,0}^\infty(\Omega) \textit{ est dense dans } L_0^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Preuve.

1) On commence d'abord par le cas où $\mu(\Omega) < \infty$.

On se donne une fonction $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ qui satisfait $\int\limits_\Omega \psi dy = 1$.

Soit $f \in L_0^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et d'apès le théorème 3.3.3 il existe une suite de fonctions $(\widetilde{f_k}) \in D(\Omega)$, qui converge vers f dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Comme Ω est de mesure finie, grâce à l'inégalité de Hölder du lemme 3.1.1 on obtient

$$\left\|f - \widetilde{f}_k\right\|_{L^1_{(\Omega)}} \leq 2\left\|\chi_\Omega\right\|_{p'(.)}\left\|f - f_k\right\|_{p(.)}.$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} \widetilde{f}_k = f \text{ dans } L^1(\Omega) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{k\to+\infty} \int\limits_\Omega \widetilde{f}_k dy = \int\limits_\Omega f dy = 0. \end{cases}$$

Posons

$$f_k = \widetilde{f}_k - \psi \int\limits_\Omega \widetilde{f}_k dy$$

Alors

$$f_k \in C^\infty_{c,0}(\Omega)$$

De plus

$$\begin{aligned} \|f - f_k\|_{p(.)} &= \left\|f - \widetilde{f}_k + \psi \int\limits_\Omega \widetilde{f}_k dx\right\|_{p(y)} \\ &\leq \left\|f - \widetilde{f}_k\right\|_{p(.)} + \|\psi\|_{p(.)}\left|\int\limits_\Omega \widetilde{f}_k dx\right| \end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque $k \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \|f - f_k\|_{p(.)} = 0.$$

Ainsi $C^\infty_{c,0}(\Omega)$ est dense dans $L^{p(.)}_0(\Omega)$.

2) supposons maintenat que $\mu(\Omega) = +\infty$ et $p^- > 1$.

On choisit une suite croissante de domains $(\Omega_j)_j \subset\subset \Omega$ tels que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega \text{ , } \Omega_j \text{ borné et } \mu(\Omega_j) \geq 1 \ \forall j \in \mathbb{N}$$

et une suite de fonctions non négatives $\psi_j \in D(\Omega_j)$ qui vérifient

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega_j} \psi_j dx = 1 \\ \text{et} \\ \psi_j \leq c\frac{1}{\mu(\Omega_j)}\chi_{\Omega_j}. \qquad (*) \end{cases}$$

De l'inégalité (*) et grâce lemme 3.1.3 on obtient

$$\begin{aligned} \left\|\psi_j\right\|_{p(y)} &\leq c\frac{1}{\mu(\Omega_j)}\left\|\chi_{\Omega_j}\right\|_{p(y)} \\ &\leq c\max\left\{\mu(\Omega_j)^{-1+\frac{1}{P^-}}, \mu(\Omega_j)^{-1+\frac{1}{P^+}}\right\}. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Par suite

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\psi_j\right\|_{p(.)} = 0.$$

Pour $f \in L_0^{p(.)}(\Omega)$ le théorème 3.3.3 implique qu'il existe une suite $(\widetilde{f}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$, qui converge vers f dans $L^{p(.)}(\Omega)$ c'est à dire

$$\left\|\widetilde{f}_k - f\right\|_{p(.)} \leq \varepsilon$$

On a

$$\begin{aligned} \left\|\widetilde{f}_k\right\|_{p(.)} &= \left\|\widetilde{f}_k - f + f\right\|_{p(.)} \\ &\leq \left\|\widetilde{f}_k - f\right\|_{p(.)} + \|f\|_{p(.)} \\ &\leq \varepsilon + \|f\|_{p(.)}. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = 1$,on aura

$$\left\|\widetilde{f}_k\right\|_{p(.)} \leq 1 + \|f\|_{p(.)}. \tag{3.3.2}$$

On pose maintenant

$$f_k = \widetilde{f}_k - \psi_{j_k}\int\limits_{\Omega_k}\widetilde{f}_k dy,$$

où j_k est une suite croissante dans $\mathbb{N}$ qui va être choisie par la suite.

Par définition de f_k on a

$$f_k \in C_{c,0}^\infty(\Omega).$$

De (3.3.2) etl'inégalité de *Hölder (3.1.1) on obtient l'estimation suivante*

$$\begin{aligned} \|f - f_k\|_{p(.)} &= \left\|f - \widetilde{f}_k + \psi_{j_k}\int\limits_{\Omega_k}\widetilde{f}_k dy\right\|_{p(.)} \\ &\leq \left\|f - \widetilde{f}_k\right\|_{p(.)} + \left\|\psi_{j_k}\right\|_{p(.)}\left|\int\limits_{\Omega_k}\widetilde{f}_k dy\right| \\ &\leq \left\|f - \widetilde{f}_k\right\|_{p(.)} + \left\|\psi_{j_k}\right\|_{p(.)} 2\left\|\chi_{\Omega_k}\right\|_{p'(.)}\left(\|f\|_{p(y)} + 1\right). \end{aligned}$$

Comme $\mu(\Omega_k) < +\infty$, d'après le lemme 3.1.2; l'ensemble des fonctions simples est inclus dans $L^{p'(.)}(\Omega)$ ainsi

$$\chi_{\Omega_k} \in L^{p'(.)}(\Omega)$$

De (3.3.1), on peut choisir j_k de sorte que

$$\left\|\psi_{j_k}\right\|_{p(.)} \left\|\chi_{\Omega_k}\right\|_{p'(.)} \leq 2^{-k}.$$

Avec ce choix de j_k on a l'estimation suivante

$$\|f - f_k\|_{p(.)} \leq \left\|f - \widetilde{f}_k\right\|_{p(.)} + 2^{-k+1}\left(\|f\|_{p(.)} + 1\right)$$

En faisant tendre k vers l'infini on aura

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{p(.)} = 0$$

Ainsi $C_{c,0}^{\infty}(\Omega)$ est dense dans $L_0^{p(.)}(\Omega)$. ■

Conclusion

Nous estimons que la théorie des espaces de Musielak-Orlicz est un domaine très intéressant et trouve beaucoup d'applications (Optimisation, EDP...); et avec les conditions les plus faibles $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ les espaces de Lebesgue généralisés ont aussi de nombreuses propriétés intéréssantes. Comme la théorie de ces espaces est d'actualité beaucoup de questions sont encore posées:

-Trouver un ensemble dense dans $L^{p(\cdot)}$ quand $p^+ = \infty$.

-Sous quelles conditions l'ensemble $L^{p(\cdot)} \cap \bigcup_{1 \leq p < \infty} L^p$ est dense dans $L^{p(\cdot)}$.

-Caractériser le dual de $L^{p(\cdot)}$ quand $p^+ = \infty$.

Annexe A

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Définition 1

Une fonction f est dite semi-continue inférieurement en x_0 si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée,

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que pour tout $x \in U$:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x).$$

b) $\lim_{x \to x_0} \inf f(x) = f(x_0)$.

Définition 2

Soit X un espace normé et soit $f^* : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction conjugée de $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, alors on définit la biconjuguée de f par f^{**} définie ainsi

$$\begin{aligned} f^{**} : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f^{**}(x) = \sup_{x \in X^*} \{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\} \end{aligned}$$

théorème 1 [8] (*Fenchel-Moreau*)

Soit X un espace normé et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, les propriétés suivante sont équivalentes.

1) f est semi-continue inférieurement.

2) $f^{**} = f$.

Définition 3

Soient E et Fdeux espaces de Banach. On dit que E s'injecte continûment dans F et on note $E \hookrightarrow F$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

(i) E est un sous-espace de F.

(ii) Toute suite convergente dans E est convergente dans F.

Autrement dit, l'identité $I : E \longrightarrow F$ est continue, ou encore $\exists\ c > 0$ telle que

$$\|f\|_F \leq c\,\|f\|_E \text{ pour tout } f \in E.$$

Définition 4

Soit E un espace de Banach et soit $F \subset E$ On dit que F est dense dans E si pour tout $\varepsilon > 0$ et $f \in E$, il existe $g \in F$ tel que

$$\|g - f\|_E \leq \varepsilon.$$

L'ensemble F permet d'approximer un élement $f \in E$ par une suite $(g_n) \in F$telle que

$$\|g_n - f\|_E \leq \varepsilon.$$

Définition 5

On dit qu'un espace de Banach est séparable s'il contient un sous ensemble dénombrable dense.

Quelques rappels de la théorie d'intégration

Soit $(\Omega,\, \Sigma,\, \mu)$ un espace mesuré.

Mesure (σ**-finie, non atomique et complète**)

Définition 6

On dit que la mesure μ est $\boldsymbol{\sigma}$**−finie** lorsqu'il existe un recouvrement dénombrable de Ω par des sous-ensembles de mesure finie, c'est-à-dire lorsqu'il existe une suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de la tribu Σ, tous de mesure finie, avec :

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n.$$

Définition 7

Un ensemble $\Omega \in \Sigma$ est dit un **atome** si, $\mu(\Omega) > 0$ et pour tout sous-ensemble mesurable B de Ω avec $\mu(\Omega) > \mu(B)$ alors, $\mu(B) = 0$.

Définition 8

Une mesure est dite **non atomique** ou **sans atomes** si pour tout ensemble mesurable Ω avec $\mu(\Omega) > 0$, il existe un sous-ensemble mesurable B de Ω tel que :

$$\mu(\Omega) > \mu(B) > 0.$$

C'est-à-dire : Ω n'est pas un atomes.

Définition 9

On dit que la mesure μ est **complète** si, tout ensemble négligeable est mesurable. C'est-à-dire, pour tout ensemble $N \in \Sigma$ vérifiant $\mu(N) = 0$ et pour toute partie $\Omega \subset N$, alors $\Omega \in \Sigma$, ou encore

$$\Omega \text{ est négligeable } \iff \mu(\Omega) = 0.$$

Théorème de la convergence monotone (ou de *Beppo-Levi*)

Le théorème suivant est un résultat d'interversion limite-integrale dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 2 [1]

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant vers f, alors :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Lemme de Fatou

Le lemme de *Fatou* est un résultat important de la théorie de l'intégration de Lebesgue. Ce lemme compare l'intégrale d'une limite inférieure de fonctions mesurables positives avec la limite inférieure de leurs intégrales.

Théorème 3 [1]

Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables positives, on a :

$$\int_{\Omega} \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Le théorème de la *convergence dominée de Lebesgue* est l'un des théorèmes les plus importants de la théorie de l'intégration. Il permet de résoudre, dans des conditions très générales, le problème de passage à la limite sous le signe intégral.

Théorème 4 [1]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables vérifiant,
$\Omega)$ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(t) = f(t)$ $\mu - p.p.$ $t \in \Omega$
b) il existe une fonction $\mu-$intégrable g telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq g(x)\ \mu - p.p.\ t \in \Omega.$$

Alors, f et f_n sont $\mu-$intégrables et on a : $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int\limits_{\Omega} f_n d\mu = \int\limits_{\Omega} f d\mu.$

Définition 10(fonction simple)
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré. On dit qu'une fonction $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ est **étagée** (simple) si elle est combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables de mesure finie, c-à-d:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} s_i \chi_{\Omega_i}(x) \text{ avec } \mu(\Omega_i) < \infty, s_i \in \mathbb{R} \forall i = \overline{1, k}$$

L'ensemble des fonctions simples est noté $S(\Omega, \mu)$.
Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ on le note $S(\Omega)$.

Approximation par des fonctions étagées

Une propriété essentielle des fonctions mesurables positives est qu'elles sont approximables par des fonctions étagées:

Théorème 5 [1]
Soit f une fonction mesurable positive, alors il existe une suite de fonctions (f_k) étagées, positives et croissante qui converge simplement vers f.

Espace de Lebesgue

Définition 11
Soit p un nombre réel positif. On note par $L^p(\Omega)$ la classe de toutes les fonctions

mesurables f définies sur Ω telle que

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Théorème 6[2]

L'espace $\left(L^p(\Omega), \|f\|_p \right)$ est

(1) un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ (théorème de Fischer-Riesz).

(2) un espace séparable pour $1 \leq p < \infty$.

(3) $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Inégalité de Hölder

Lemme 1[2]

Soient $1 \leq p < \infty$ et q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors

$$\begin{cases} fg \in L^1(\Omega) \\ \text{et} \\ \int_{\Omega} |fg| \, d\mu \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} . \end{cases}$$

Théorèmes d'injection

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue.

Théorème 7 [2]

Si $\mu(\Omega) < \infty$, et $1 \leq p \leq q \leq \infty$.alors

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Théorèmes de densité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue.

Théorème 8[2]

L'ensemble des fonctions simples bornées est dense dans $L^\infty(\Omega)$.

Théorème 9[2]

L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^p(\Omega)$, $\forall\ 1 \leq p < \infty$.

Théorème 10[2]

L'ensemble des fonctions intégrables est dense dans $L^p(\Omega)$, $\forall\ 1 \leq p < \infty$.

Théorème 11[2]

L'ensemble $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$, $\forall\ 1 \leq p < \infty$.

Théorème 12[2]

L'ensemble $D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$, $\forall\ 1 \leq p < \infty$.

Bibliographie

[1] N. Boccara. *Analyse fonctionelle.* Ellipses, (1984).

[2] N. Boccara. *Intégration* Ellipses, (1995) $ISBN2-7298-4513-5$

[3] H. Brezis. *Analyse fonctionelle. Masson,* (1987).

[4] S. Chen. *Geometry of Orlicz spaces.* Dissertationes Math. N°356. (1996) $1-204$.

[5] D.V.Cruz-Uribe and A.Fiorenza, *Variable Lebesgue spaces,* Applied and Numerical-HarmonicAnalysis, Springer Basel (2013).

[6] L.Diening, P.Harjulehto, P.Hästö and M.Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. December* (2010).

[7] X.Fan and D.Zhao, *On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,\,p(x)}(\Omega)$.* Journal of Mathématical Analysis and Applications $N°263$, (2001).$424-446$

[8] P. Kosmol and D. Müller-Wichards. *Optimization in Function Spaces.* De Gruyter, 2011. $ISBN978-3-11-025020-6$.

[9] O.Kovàčik and J.Ràkosník. *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,\,p(x)}$.* Czechoslovak Mathematical Journal, Vol.41 (1991).

[10] M. A. Krasnosel'skiĭ and Ya. B. Rutickiĭ. *Convex functions and Orlicz spaces.* Philadelphia 26, Pennsylvania, 1961.

[11] W.M.Kozlowski. *Modular function spaces.* Marcel Dekker Inc., New York, (1988). $ISBN0-8247-8001-9$.

[12] J.Musielak. *Orlicz spaces and modular spaces.* Lecture note in mathematics. Vol.1034. Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[13] M. M. Rao and Z.D. Ren. *Application of Orlicz spaces.* Marcel Dekker Inc., New York, (2002). $ISBN 0-8247-0730-3$.

[14] M. M. Rao and Z.D. Ren. *Theory of Orlicz Spaces.* Marcel Dekker Inc., New York, (1991). $ISBN 0-8247-8478-2$.

Résumé

Dans ce travail on s'est intéréssé à deux notions à savoir:
∗ La notion de *densité* rend plus accessible la démonstration de certaines assertions, il est souvent moins difficile de montrer une certaine assertion pour des espaces plus "accueillant", puis utiliser la densité pour l'obtenir dans le cas général.
∗ La notion *d'injection* des espaces dans d'autres espaces ne manque pas aussi d'importance pour étudier les propriétés géométriques et topologiques des espaces fonctionnels.

Notre travail est structuré en trois chapitres. Dans *le premier chapitre* nous rappelerons les resultats essentiels sur les espaces modulaires. Dans *le second chapitre* nous presenterons les espaces de Musielak-Orlicz, dans un premeier temps, nous définissons ces espaces et ennoçons leurs propriétés fondamentales, ensuite nous donnerons les théorèmes de densité et d'injection. *Le troisième chapitre* est consacré à l'études des théorèmes de densité et d'injection dans les espaces de Lebesgue à exposants variables.