

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Memoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de
Master II
Spécialité : Statistique et Analyse Décisionnelle

Par

Melle AHMIM Yamina

THÈME

**UNE METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE DES PROBLEMES
INVERSES LINEAIRES**

Soutenu publiquement, le 15/Juin/2014 devant le jury composé de :

Mr.	A. DAHMANI	Professeur	U.A.M. Béjaïa	Président.
Mme.	K. TIMERIDJINE	Maître de Conférences B	U.A.M. Béjaïa	Rapporteur.
Mme.	F. AMERI	Maître de Conférences B	U.A.M. Béjaïa	Examinatrice.
Mme.	H. BECHIR	Maître de Conférences B	U.A.M. Béjaïa	Examinatrice.

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Madame TIMERIDJINE Karima d'avoir bien voulu être rapporteur de ce mémoire. Je voudrais lui dire toute ma gratitude pour tous ses précieux conseils et sa patience tout au long de ce travail, mais aussi pour les nombreuses discussions et échanges que nous avons eus.

Je suis très honorée que Monsieur le professeur Abdelnacer DAHMANI, de l'université A/Mira ait accepté de présider mon jury. Je sais que sa notoriété rend son emploi du temps très chargé, et j'ai apprécié réellement qu'il puisse se consacrer à la lecture de mon mémoire.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Madame F. AMERI de l'université A/Mira pour l'intérêt qu'elle a bien voulu porter à ce travail et pour avoir accepté d'être membres de mon jury.

Toute ma reconnaissance à l'ensemble des enseignants du département de mathématiques, tout particulièrement les enseignants de l'option SAD, qui ont enrichi mon cursus universitaire.

Enfin, j'adresse mes remerciements à toute ma famille et tous mes amis qui ont été d'un grand soutien.

A cœur vaillant rien d'impossible

A conscience tranquille tout est accessible

Quand il y a la soif d'apprendre

Tout vient à point à qui sait attendre.

Dédicaces

Je dédie ce travail

à mon défunt père qui a été le premier à m'encourager à aller si loin dans mes études.

Il m'a inculqué le goût du travail, de la rigueur et de l'ambition.

*Parce que tu m'avais toujours soutenu, même au plus fort de ta maladie, tu me disais
et ça sera la dernière fois :*

« Concentre toi sur ton travail, ne t'inquiète pas pour moi »

j'ai voulu le mener à terme pour que tu sois fier de moi.

à toute ma famille et mes amis.

UNE METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE DES PROBLEMES INVERESES LINEAIRES

Abstract

This memory focus on the linear ill-posed inverse problems .

If the problem has unique solution, but this solution is not continuous witch respect to small variations in the data, this problem is ill-posed.

The classical method for solving such problems is the regularization, il consist to transform ill-posed problem into a family of well-posed problems whose solution is an approximation of the exact solution of the initial problem. In this memory we introduce a new and simple numerical method based on the discretization in the linear case. It seems a good method for the approximation of the numerical solution of Fredholm equations of first espece. Contrary to the regularization methods which is based on inversion of the compact operator, this new method is based on the singular value decomposition (SVD) of the matrix which is obtained by discretization of the used kernel. Relying on numerical results, and comparing it to the classical SVD method, this new method gives more satisfactory results.

Résumé

Ce mémoire s'intéresse aux problèmes inverses mal posés linéaires.

Si un problème a une unique solution non continue par rapport aux faibles variations des données expérimentales, ce problème est mal-posé. La méthodologie classique pour la résolution de ce type de problèmes est la régularisation, qui transforme un problème mal-posé en une famille de problèmes bien posés dont la solution est une approximation de la solution exacte du problème initial.

Dans ce mémoire, nous introduisons une nouvelle méthode numérique qui est simple, basée sur la discrétisation dans le cas de problèmes linéaires. Cette méthode semble être bonne pour la résolution et l'approximation des équations intégrales, et plus particulièrement, des équations de Fredholm de première espèce. Contrairement aux méthodes de régularisation, qui se basent sur l'inversion des opérateurs compacts, cette nouvelle méthode se base sur la décomposition en valeur singulière de la matrice obtenue par discrétisation d'un noyau choisi. En s'appuyant sur des résultats numériques, et en la comparant à la méthode SVD classique, la méthode proposée est bien meilleure.

Table des matières

Introduction générale	1
0.1 Introduction	1
0.2 Présentation du mémoire	8
1 Exemples de problèmes mal posés et préliminaire	9
1.1 Exemples de problèmes mal posés	9
1.2 Espaces de Hilbert	13
1.3 Opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert	13
2 Modélisation et méthodes de résolution de problèmes mal posés	15
2.1 Introduction	15
2.2 Modélisation des problèmes inverses	16
2.3 Quelques Méthodes de régularisation de problèmes mal posés	19
2.3.1 Méthode de Tikhonov	23
2.4 Décomposition en valeurs singulières (Méthode SVD)	25
3 Méthode de résolution basée sur la discrétisation	32
3.1 Introduction	32
3.2 Opérateurs intégraux et équations intégrales	34
3.3 Discrétisation des équations intégrales	36

3.3.1	Discrétisation par quadrature	36
3.4	Equation de Fredholm de première espèce	39
3.5	Développement en valeurs singulières (SVE)	41
3.6	Discrétisation de l'équation de Fredholm de première espèce	43
4	Simulation	50
4.1	Formulation du problème	50
4.2	Discrétisation du problème	51
4.3	Estimation et régularisation	51
4.3.1	Nécessité d'utilisation d'une fonction de régularisation	51
4.3.2	Résolution par la méthode de discrétisation	53
4.3.3	Résolution par la méthode SVD	53
4.4	Résultats de simulation	53
4.4.1	Interprétation des résultats	56
5	Conclusion et perspectives	57
5.1	Conclusion	57
5.2	Perspectives	58
	Bibliographie	58

Introduction générale

0.1 Introduction

L'analyse statistique et numérique des problèmes mal posés en général, particulièrement des problèmes inverses, constitue le cœur du thème de ce mémoire. En effet, le développement actuel de ces problèmes dans le domaine mathématique est en plein essor tant par l'intérêt porté par les mathématiciens purs que par les mathématiciens appliqués. Beaucoup de ces problèmes étudiés sont étroitement liés à des phénomènes du monde réel. Les problèmes mal posés sont les plus contraignants d'un point de vue pratique mais les plus attrayants d'un point de vue mathématique.

Un des premiers traitements des problèmes mal posés (ill posed en anglais) a été l'étude du problème de Cauchy pour l'équation de Laplace par J.Hadamard (Mathématicien Français 1865/1963) [1902], qui a introduit dans son livre "Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations" la notion de «problème mal posé», illustrant par des exemples et contre exemples les difficultés qui se posent. Un problème est dit bien posé, s'il admet une solution pour toutes les données admissibles (existence), si la solution est unique (unicité) et si la solution dépend continûment des données (stabilités).

Si la solution au problème posé existe, il est parfaitement concevable, que des paramètres différents puissent conduire aux mêmes résultats, et si elle n'existe pas, il est impossible

d'en construire une. Cette dernière éventualité est soulevée par un procédé classique en mathématiques qui consiste à relaxer la notion de solution.

La non-unicité est un problème plus sérieux. S'il y a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir l'une d'entre elles. Disposer d'une information supplémentaire (information à priori).

La question la plus difficile est, sans aucun doute, celle de la stabilité. Si l'on change légèrement les données (conditions initiales, conditions aux limites, coefficients, la géométrie du domaine, et les éventuelles variations en temps de ces derniers), la solution varie-t-elle peu ou beaucoup? C'est-à-dire, varie-t-elle continûment en fonction des données? Il y a des problèmes où, une petite différence dans les paramètres entraîne un comportement totalement différent de la solution (cas des phénomènes dits "chaotiques").

Le manque de stabilité est problématique, en effet, le fait d'entrer par exemple les données sur un calculateur électronique, ou de remplacer le problème exact par un problème approché implique en général des perturbations sur les données. Si on n'est pas assuré que de «petites» perturbations sur les données entraînent des perturbations «pas trop grandes» sur la solution, il devient très difficile de calculer une solution approchée du problème.

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène. C'est également le contraire d'un problème direct. Autrement dit, un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets, ce problème est l'inverse de celui appelé direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues [17].

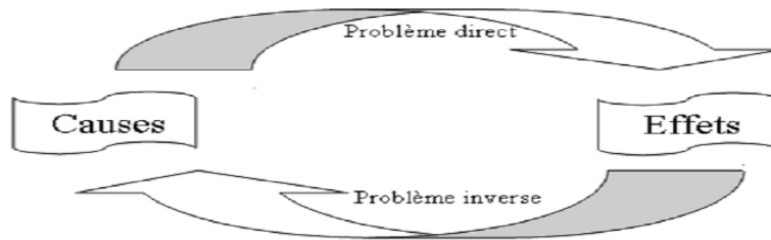


Fig 1: Problème direct et problème inverse

Nous remarquerons que l'étude des problèmes inverses nécessite de manière générale, une bonne connaissance du problème direct. Le problème est ensuite reformulé sous la forme de la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur entre les mesures et la solution issue du modèle direct. Parmi les problèmes inverses, il y a les problèmes linéaires et non-linéaires. Ces derniers sont plus difficiles à traiter. Il existe moins de résultats généraux les concernant, ils font partie d'une littérature spécialisée. Les problèmes linéaires, qui constituent le coeur du thème de ce mémoire, sont quant à eux plus «faciles» à étudier, l'analyse fonctionnelle et l'algèbre linéaire donnent des méthodes génériques et des résultats précis. Comme nous le verrons, la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur considéré est un outil fondamental pour l'étude des problèmes linéaires.

Néanmoins, à l'exception de quelques importants travaux de Calerman [7] dans les années 1930, et quelques attentions des mathématiciens russes pour les classes de problèmes inverses, Novicov [28], Tikhonov [34] et autres..., peu de considération a été donnée à ce genre de problèmes jusqu'au milieu des années 1950, on pensait que seuls les problèmes bien posés méritaient des investigations (Hadamard) [13]. Les travaux de A.Tikhonov [1943] nous ont prouvé le contraire, car en reformulant la définition donnée par Hadamard, il a ainsi élargit la classe des problèmes bien posés.

Selon Tikhonov, on peut reformuler le problème comme suit:

$$A : X \rightarrow Y$$

où A un opérateur compact défini de X à Y où X et Y sont des espaces normés.

L'équation

$$Ax = u$$

est bien posé s'il vérifie les conditions suivantes:

- La solution x existe pour tout u de Y (surjectivité de A).
- Cette solution est unique (injectivité de A).
- A^{-1} est continue.

D'un point de vue statistique, l'un des avantages majeurs est que l'étude des problèmes inverses nous donne un cadre cohérent dans lequel évoluer. On se pose ainsi des questions qui apparaissent logiquement pour ce sujet. Les divers travaux à accomplir et objectifs à atteindre se manifestent alors assez naturellement. Malgré tout, et ceci est essentiel, ce cadre ne limite pas les possibilités. En effet, les différents grands thèmes statistiques habituels sont présents. On peut s'intéresser à la construction de tests statistiques, ou d'estimateurs,... Les problèmes inverses fournissent donc un cadre, plus difficile, pour faire des statistiques, avec toutes les questions usuelles, plus de nouveaux problèmes directement issus du sujet (opérateurs bruités, bases inadéquates).

Le choix d'une étude intensive des problèmes inverses a été dicté par la richesse du sujet. En effet, le fort développement actuel du thème le confirme, les problèmes inverses sont réellement présents dans de nombreux domaines. Les mathématiques, bien sûr, avec la base fondamentale que forme la théorie des opérateurs, mais aussi, les équations aux

dérivées partielles qui sont à l'origine du premier problème mal-posé d'Hadamard (existence, unicité et stabilité). La physique, où naturellement les chercheurs se sont trouvés confrontés à des observations indirectes, les amenant à résoudre des problèmes inverses. En particulier, en optique et en géophysique où apparaissent de nombreux modèles de stéréologie et autres. L'imagerie médicale est aussi l'un des domaines les plus impliqués dans ce type de problème. La tomographie, notamment, est un sujet récurrent en radiologie, scanner, IRM. Les problèmes inverses constituent donc l'un des sujets où le lien entre la théorie mathématique et la pratique est le plus fort. De nombreux prototypes de scanners sont testés dans des universités ou des instituts de recherche à travers le monde (notamment au Japon et aux USA). Cette proximité est, bien entendu, particulièrement stimulante [6].

Expliquons sur un exemple rencontré en physique ce qu'est un problème inverse [17]:

Considérons une barre de fer rectangulaire que nous faisons chauffer à l'une de ces extrémités. La diffusion de la chaleur à l'intérieur de la barre est modélisée par un problème aux limites pour une équation de la chaleur. Les questions à poser sont: Pouvons nous déterminer le coefficient de diffusion en mesurant la température de la barre à l'autre extrémité? Combien de mesures sont-elles nécessaires pour s'assurer que nous déterminons le coefficient de diffusion de manière unique? Dans la pratique, nous souhaitons calculer ce coefficient. Nous commençons par remplacer le modèle continu par un modèle discret. Une difficulté peut alors apparaître à ce moment là, puisque l'unicité du coefficient de diffusion à partir des mesures n'a aucune raison de subsister pour le modèle discret. Ceci est étroitement lié au problème de stabilité. C'est à dire, comment pouvons nous contrôler les perturbations sur le coefficient de diffusion (dûs au fait de remplacer le modèle continu

par un modèle discret et aux erreurs de calculs) par les erreurs que nous faisons sur les mesures?

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 qui représente la barre de fer. Cet exemple peut être modéliser par le problème aux limites suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0, & \text{dans } \Omega \times \{0\}, \\ u = f, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \partial_t u = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \end{array} \right. \quad (0.1.1)$$

Où f représente la source de chaleur sur la partie Γ_1 du bord de Ω , Γ_2 est le reste du bord, et $a(x)$ est le coefficient de diffusion supposé constant en fonction du temps.

Pouvons nous alors déterminer le coefficient $a(x)$ à partir des mesures $u = g$, $M \times (0, T)$, M étant une partie de Γ_2 ?

Pour ce problème, nous examinons d'abord l'unicité (c'est à dire l'injectivité de l'application qui à a associe g). Nous nous intéressons ensuite à la stabilité. Plus précisément, nous souhaitons établir une estimation de la forme:

$$d_1(a_1, a_2) \leq w(d_2(g_1, g_2)),$$

pour $d_1(a_1, a_2)$ voisin de zéro, et w et une fonction croissante, définie sur $]0, +\infty[$ et telle que $w(s) \rightarrow 0$ quand s tend vers 0.

Par d_1 et d_2 , nous désignons des distances définies respectivement sur l'ensemble des coefficients et l'ensembles des mesures.

Notons que, dû à l'effet régularisant des équations elliptiques et paraboliques, le module de continuité w , ici et dans la quasi-totalité des autres cas, est un logarithme où une puissance de celui ci. Il existe des exemples où le module de continuité w a été démontré qu'il est optimal. D'où la notion de problème mal posé au sens de Hadamard. Pour

cette raison , si nous souhaitons calculer a à partir de g , en minimisant par exemple une fonctionnelle de la forme

$$J(a) = \|u - g\|_{L^2(M \times (0,T))}^2$$

Nous devons utiliser une méthode de régularisation, par exemple de type Tikhonov (que nous allons détailler dans le chapitre 2).

Concernant les mesures, ils existent plusieurs possibilités. Nous pouvons par exemple remplacer ce qui précède par:

$$u(., t_i) = g_i, \text{ sur } M, \text{ avec } t_i, 1 \leq i \leq N, \text{ des points de } (0, T).$$

Nous pouvons aussi faire varier f . Nous nous donnons un ensemble J fini ou infini. Pour chaque $f_j, j \in J$, nous avons une mesure g_i . Dans ce cas, le problème inverse consiste en la détermination de a à partir de l'application $\Lambda : f_j \rightarrow g_i$.

Ce problème est un problème inverse dans lequel nous essayons de déterminer un coefficient. Il existe aussi d'autres types de problèmes inverse, par exemple des problèmes inverse géométriques (comme les problèmes de détection de corrosions, les problèmes de détection de fissures ou de cavités,...).

Beaucoup de chercheurs ont exploré de nombreuses facettes théoriques et algorithmiques de ces problèmes inverses. Par l'approche déterministe, Nicolay [27] étudie les problèmes inverses via les techniques de mesures de risques ou maximisation d'utilité, alors qu'Aspremont [2] avait utilisé des méthodes de programmation semi définies positives. R.Cont et P.Tankov [9] ont développé un algorithme de régularisation par entropie relative pour l'identification non paramétrique de modèle de diffusion avec saut à partir des prix d'option. En revanche, par la procédure stochastique, R. Cont et ben Hamida [9] ont développé une approche statistique du problème inverse en utilisant des algorithmes

évolutionnaires. R. Cont et Leonard [21] ont développé une approche probabiliste fondée sur la minimisation d'entropie relative dans l'espace des paramètres de modèles.

0.2 Présentation du mémoire

Ce mémoire s'intéresse aux problèmes inverses mal posés linéaire. Il est subdivisé comme suit:

- Le premier chapitre de ce mémoire est consacré aux préliminaires. Nous donnerons des définitions et les outils de base d'analyse fonctionnelle, en particulier nous présenterons la théorie des opérateurs linéaire nécessaires aux développements des méthodes proposées dans ce manuscrit.
- Dans le deuxième chapitre, nous présenterons des méthodes de régularisation illustrées par des exemples. Nous introduirons la notion fondamentale de problème mal posé, qui est caractéristique des problèmes inverses.
- Au chapitre 3, nous introduirons une source importante de problèmes inverses linéaires: les équations intégrales de première espèce. En particulier, nous exposerons l'équation de Fredholm de première espèce où nous expliquerons en quoi est elle un problème mal posé. Enfin nous introduirons une nouvelle méthode de discrétisation qu'on appliquera à la résolution de l'équation de Fredholm de première espèce.
- L'application numérique de la nouvelle méthode de discrétisation fera l'objet du quatrième chapitre, où nous allons tenter de démontrer l'efficacité de la méthode en s'appuyant sur une étude de simulation, et en la comparant aux résultats obtenus par la méthode SVD classique.
- Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion générale et des perspectives.

Exemples de problèmes

mal posés et préliminaire

Ce chapitre est une sensibilisation aux conséquences des problèmes mal posés, nous proposons d'introduire une source importante de problèmes inverses linéaires, où nous aborderons un exemple historique, un exemple bayésien, et quelques exemples de type déterministes [17]. Nous présenterons aussi un rappel de quelques notions et compléments mathématiques d'analyse fonctionnelle en relation avec ce travail. On citera en particulier, les théories des opérateurs dans l'espace de Hilbert. Les références suivantes nous ont servi de support [32], [1].

1.1 Exemples de problèmes mal posés

Exemple 1: "Problème de Didon et ville de Carthage (Tunisie)" (814 av. JC).

Etant donné un périmètre L . Quelle est la plus grande surface S qu'on peut former avec ce périmètre?

Elissa (princesse phénicienne, surnommée Didon), a choisi une forme circulaire, ce qui correspond à la solution optimal du problème inverse d'isopérimétrique dans un demi-plan

euclidien.

Exemple 2: "Problème bayésien".

Les sondages sont des problèmes mal posés par nature. Pour connaître l'avis d'une population, il est rare d'interroger l'ensemble de la population, sauf dans le cas où l'erreur est interdite (les présidentielles, référendums,...). Seul un échantillon est prélevé pour représenter l'ensemble de la population. Il n'est pas rare en France de représenter 60 millions d'habitants avec 1000 personnes. Le fait d'extrapoler l'avis de quelques personnes est un problème inverse. Et il est par nature mal posé. Si l'échantillon ne contient que des doctorants, la représentation sera faussée. La connaissance à priori de la population (statut social, âge,...) est indispensable. Nous sommes ici dans une approche de type bayésienne où les statistiques sont essentielles. Dans ce cas, il peut être plus judicieux de prendre un nombre de personnes bien choisi que de prendre aléatoirement un plus grand nombre. Il s'agit donc d'un compromis entre quantité et qualité de l'informations.

A présent, nous allons présenter quelques problèmes mal posés de type déterministes les plus rencontrés en mathématiques.

Exemple 3: "Problème polynômial".

Le nombre de racines réelles du polynôme $p(x) = -x^2 + 3x - m$ varie de façon discontinue quand m varie continûment sur la droite réelle. Il y a en effet, deux racines réelles si $m \leq 9/4$, et il n'y en a aucune si $m > 9/4$.

Démonstration:

$$\Delta = 9 - 4m$$

- Si $m > 9/4$, $\Delta < 0 \Rightarrow$ pas de racines.
- Si $m \leq 9/4$, $\Delta > 0 \Rightarrow$ deux racines distinctes.
- Si $m = 9/4 \Rightarrow$ une racine double.

Exemple 4 " Problème de matrice mal conditionnée".

On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = y$, où A est la matrice donné par

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 11 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 36 \\ 27 \\ 37 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Alors on trouve

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prenons maintenant un second membre y_* très légèrement différent de y ,

soit

$$y_* = \begin{pmatrix} 36.1 \\ 26.9 \\ 37.1 \\ 34.9 \end{pmatrix};$$

On vérifie alors que la solution de $Ax = y_*$ est

$$x = \begin{pmatrix} \frac{60}{7} \\ \frac{-79}{7} \\ \frac{32}{7} \\ \frac{-8}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.57 \\ -11.28 \\ 4.57 \\ -1.14 \end{pmatrix}$$

On voit que de très petites variations sur y ont conduit à de grandes variations sur x .

Dans cet exemple, et de façon précise, $\text{cond}(A) = 546.06$ (conditionnement de la matrice A qui est défini par: $\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, où la norme choisie est la norme matricielle associée à $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{R}^4). Ce phénomène de mauvais conditionnement explique en partie la difficulté de prévoir certains phénomènes. Les appareils de mesure ne sont jamais fiables, et il est impossible de connaître exactement y , cela peut entraîner une très grande imprécision sur la valeur de x .

Exemple 5: "Equation rétrograde de la chaleur".

Considérons l'équation différentielle de rétrograde de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\delta u(x,t)}{\delta t} + \Delta u(x,t) = 0, \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = v(x), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Si

$$d = 1 \text{ et } v(x) = n^{-1} \sin(nx), \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

alors la solution est donnée par

$$u(x,t) = n^{-1} e^{n^2 t} \sin(nx), \text{ vérifiée en la substituant dans l'équation (1.1.1)}$$

avec

$$\begin{aligned} \|v\|_\infty &= n^{-1} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \\ \|u(x,t)\|_\infty &= n^{-1} e^{n^2 t} \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Ce problème est mal posé.

En d'autres termes, trouver la propagation de température ultérieure, sachant la propagation de température initiale, est un problème bien posé. Cependant, trouver la propagation de température à un temps final est un problème mal posé.

1.2 Espaces de Hilbert

Soit E un espace vectoriel normé

Définition 1.2.1 *On dit que E est un espace de Banach s'il est complet. Autrement dit, E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

Définition 1.2.2 *Un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme $\|\cdot\|$ découle d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par la formule*

$$\|\cdot\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

C'est la généralisation en dimension quelconque d'un espace euclidien.

1.3 Opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert

L'analyse fonctionnelle fait interagir la topologie et l'algèbre linéaire. Ainsi, sur un espace de Hilbert, il sera naturel d'étudier les applications qui respectent à la fois la structure d'espace vectoriel (les applications linéaires) et la structure hilbertienne (les applications continues).

Définition 1.3.1 *Un opérateur (linéaire, continu) A d'un espace de Hilbert E dans un espace de Hilbert F est une application linéaire continue de E dans F , c'est à dire qui vérifie:*

1. $\forall u \in E, \forall v \in F;$
2. $\forall (u, v) \in E \times E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av.$
3. $\exists M > 0, \forall u \in E, \|Au\|_F \leq M \|u\|_E.$

Le plus petit nombre M qui vérifie 3 ci-dessus s'appelle la norme de l'opérateur A qui s'écrit sous la forme:

$$\|A\| = \sup_{u \in E} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_E}$$

Rappelons les deux espaces fondamentaux associés à un opérateur linéaire :

- Le noyau de A est le sous-espace de E :

$$\text{Ker}A = \{u \in E, Au = 0\}.$$

- L'image de A est le sous-espace de F :

$$\text{Im}A = \{v \in F, \exists u \in E, Au = v\}.$$

Modélisation et méthodes de résolution de problèmes mal posés

2.1 Introduction

La méthode de régularisation a été imaginée par le mathématicien russe Andreï Nicolaïevitch Tikhonov. En statistique, cette méthode est également connue sous le nom de régression d'arête "ridge regression". Elle est connexe à l'algorithme de Levenberg Marquardt pour la résolution des problèmes non linéaires des moindres carrés [32].

Ce chapitre est une sensibilisation aux conséquences des problèmes mal posés, nous présenterons quelques méthodes de régularisation les plus utilisées en statistique et en pratique, illustrées par quelques exemples.

2.2 Modélisation des problèmes inverses

Une large variété des problèmes qui se posent dans différents domaines des sciences appliquées peuvent être souvent regardés mathématiquement comme une équation à opérateur. Nous allons à présent donner de façon plus formelle la forme générale d'un problème inverse linéaire. Celui-ci se présente de façon suivante : soit \mathbb{H} et \mathbb{K} deux espaces vectoriels et soit $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ un opérateur linéaire. On cherche à trouver une bonne approximation de la solution de l'équation

$$Ax = u \tag{2.2.1}$$

lorsque l'on dispose d'une mesure de $u \in \mathbb{K}$.

Les problèmes inverses se divisent en deux catégories, celle des problèmes mal posés, et celles des problèmes bien posés. Ces derniers dont l'expression a été caractérisée par J. Hadamard regroupent les problèmes où la solution x existe, est unique et dépend continûment des données u (i.e stabilité). Revenons à présent aux problèmes mal posés qui vont occuper l'essentiel de notre attention dans ce mémoire. Selon la nature et les propriétés de l'opérateur A , l'obtention de la solution x s'avère plus ou moins ardue. En effet, trois cas majeurs se distinguent:

- Si l'opérateur A n'est pas surjectif, la solution n'existe pas nécessairement pour tout $u \in \mathbb{K}$.
- Si l'opérateur A n'est pas injectif, la solution peut ne pas être unique, auquel cas il nous incombe de réfléchir quelle solution privilégier.
- Si A^{-1} n'est pas continu, de petites perturbations sur les données u peuvent engendrer de forts écarts sur la solution.

En d'autres termes, trouver $x = A^{-1}u$ à partir de u , ceci est beaucoup plus délicat que le cas direct où l'on cherche simplement à calculer u à partir de x . En effet, même en

supposant que u et A sont connus, résoudre l'équation (2.2.1) nécessite l'inversion d'un opérateur. Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique. Par ailleurs, de nombreux problèmes se posent concernant l'existence, l'unicité ou la continuité de la solution par rapport à la donnée u . Ces propriétés sont mises en évidence par Hadamard et sont au coeur de la théorie des problèmes inverses.

Les méthodes de résolution de l'équation (2.2.1) sont très nombreuses. Nombre d'entre elles nous viennent de l'analyse numérique. Citons, en plus des méthodes de régularisation de Tikhonov, que nous allons voir plus en détails dans le deuxième chapitre, la régularisation variationnelle, la régularisation itérative, la décomposition en valeur singulière (méthode S.V.D), les techniques récursives dans les espaces de Hilbert, les méthodes de projection et les méthodes de quasi-solution (voir les travaux de Ramm [30] pour plus de détails).

La méthodologie classique pour la résolution de ces problèmes est de les régulariser en approximant l'opérateur compact auto-adjoint A^*A par un opérateur de régularisation dont l'inverse est continu et converge vers A^*A .

Résoudre ainsi l'équation

$$A^*Ax = A^*u$$

et construire la fonction $x_\alpha^\delta = R_\alpha A^*u^\delta$ où R_α est un opérateur de régularisation qui converge vers l'inverse de l'opérateur (A^*A). De manière générale, l'opérateur de régularisation dépend d'un paramètre de lissage α qui tend vers zéro.

En outre, pour démontrer la convergence de l'estimateur x_α^δ vers la vraie solution, il est nécessaire d'imposer la condition suivante $\|x_\alpha - x\|^2 = O(\alpha^\beta)$ où β est un paramètre de contrôle de la vitesse de convergence. L'espace Φ_β ainsi défini:

$$\Phi_\beta = \{x : \|x_\alpha - x\|^2 = O(\alpha^\beta)\}$$

est appelé espace de saturation.

La condition $x \in \Phi_\beta$ est cruciale pour obtenir la vitesse de convergence de l'estimateur et intervient dans de nombreux problèmes inverse mal posés. On peut voir par exemple les travaux de Loubes et Vanhems [23].

Il existe plusieurs exemples classiques d'opérateurs de régularisation comme le spectral cut-off ou encore la régularisation de Tikhonov [34], nous expliquons brièvement, dans ce qui suit la méthode de régularisation de Tikhonov qui est à la base de nombreuses procédures d'estimation statistiques. Les détails de l'approche de Tikhonov seront donnés dans le deuxième chapitre.

L'approche de Tikhonov consiste à formuler le problème considéré comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'adéquation quadratique

$$x = \arg \min_{\hat{x} \in \mathbb{k}} \|A\hat{x} - u\|^2$$

Tout aussi mal posé que le premier, car la fonctionnelle est positive, mais n'est pas définie. La méthode consiste ensuite, à supposer que la solution se trouve dans un espace de Hilbert \mathbb{H} et à pénaliser la fonctionnelle d'adéquation par un terme supplémentaire dit de régularisation qui est lui coercif

$$x_\alpha = \arg \min_{\hat{x} \in \mathbb{H}} \|A\hat{x} - u\|^2 + \alpha \|\hat{x}\|_{\mathbb{H}}^2$$

La fonctionnelle obtenue est par construction coercive, et le nouveau problème ainsi construit a une solution unique, pourvu que l'opérateur A soit continu au sens de la norme hilbertienne de \mathbb{H} . α est appelé paramètre de régularisation. Cette manière de régularisation est la bien connu méthode de régularisation de Tikhonov [32].

La régularisation est donc un moyen systématique de transformer un problème mal posé en un problème bien posé. Cet avantage a un prix considérable. Régulariser ainsi un problème mal posé revient à faire des hypothèses fortes sur le signal (solution inconnue x) à savoir que:

- le signal est dans un espace de Hilbert.
- la solution est un optimum bayésien qui consiste à voir le signal x comme une réalisation d'un processus aléatoire centré et dont la matrice d'autocovariance est la matrice du produit scalaire qui définit l'espace de Hilbert.

Ces hypothèses sont parfois difficiles à justifier. Par ailleurs, le choix d'un espace de Hilbert précis est arbitraire, alors qu'il a une influence déterminante sur la forme de la solution. Dans le cas où l'opérateur A est borné dans un espace de Hilbert, l'équation (2.2.1) est dite mal posée au sens d'Hadamard si A n'admet pas d'inverse borné [32].

2.3 Quelques Méthodes de régularisation de problèmes mal posés

Pour résoudre un problème mathématique qui présente quelques difficultés, on choisit généralement une méthode approximative, parfois on remplace le problème de départ par un problème approché.

Si un problème est bien posé, il y a de bonnes chances qu'une solution soit trouvée par un algorithme stable. Sinon, il doit être reformulé pour traitement numérique. Typiquement, cela suppose des hypothèses supplémentaires, par exemple la régularité de la solution. Ce processus est connu sous le nom de régularisation.

Dans ce chapitre, nous considérons les problèmes mal posés au sens où l'opérateur n'est pas continûment inversible, i.e deux données proches au sens d'une norme, peuvent conduire à des solutions significativement différentes.

Soit une équation à opérateur compact, un tel problème est toujours mal posé, puisque un opérateur compact n'est pas continûment inversible.

$$Ax = u \tag{2.3.1}$$

L'opérateur $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$. \mathbb{H} et \mathbb{K} sont deux espaces de Hilbert. On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire (sur \mathbb{H} ou \mathbb{K}) et par $\|\cdot\|$ les normes associées.

Nous considérons essentiellement que l'opérateur A est linéaire compact, son adjoint est noté par A^* .

Définition 2.3.1 *Un opérateur linéaire $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ est dit compact si l'image de tout sous ensemble borné de \mathbb{H} est compact dans \mathbb{K} .*

Même si on suppose que u appartient à l'image de A , l'approximation $\hat{x} = A^{-1}u$ n'est pas du tout recevable, car l'opérateur A^{-1} n'est pas continu, rien ne garanti qu'une petite perturbation conduira à un estimateur de bonne qualité. Dès lors, il faut réfléchir à des méthodes d'estimation de x qui seront plus fines. Les méthodes de régularisation ont ainsi fait leurs apparitions [32].

Définition 2.3.2 *La famille des opérateurs linéaires bornés $\Phi_\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{H}$, pour un paramètre de régularisation $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, avec une règle du choix du paramètre α tel que*

$$\alpha : \{(\delta, u_\delta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{K}, \exists u \in \text{Im}(A) \ \|u_\delta - u\| \leq \delta\} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

est dite méthode de régularisation linéaire pour l'opérateur A si

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi_\alpha u = A^* u$$

pour tout $u \in \text{Im}(A)$ et si les solutions de régularisation $x_\alpha^\delta = \Phi_\alpha u_\delta$ convergent vers la meilleure solution approximée x^+ pour tout $u \in \text{Im}(A)$ dans le sens suivant

$$\sup \{ \|x_\alpha^\delta - x^+\| : \|u_\delta - u\| \leq \delta \} \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0$$

Si α dépend seulement du niveau de bruit δ , on dit que c'est une règle a priori du choix du paramètre. Sinon, on dit que c'est une règle de choix a posteriori.

On cherche à trouver le signal (ou fonction) x en utilisant la donnée u . D'un point de vue pratique, ce n'est pas toujours possible, car la valeur exacte de u est inconnue, on a seulement une mesure approximative. On se ramène alors à la résolution de l'équation

$$u = Ax + \epsilon \tag{2.3.2}$$

Où ϵ représente un bruit ou une erreur. On cherche alors la solution de l'équation (2.3.2) qui soit la plus proche possible de la solution de l'équation (2.3.1).

A partir du moment où la donnée observée u est perturbée, il est difficile voire impossible de retrouver de manière exacte la solution x de l'équation (2.3.1). Une partie de l'information est en quelque sorte perdue. On espère alors se rapprocher le mieux possible de la solution exacte. Idéalement, plus l'erreur est petite, plus la solution approximée est proche de la solution exacte. Plus formellement, le minimum requis pour un estimateur est de converger "en un sens à préciser" vers la vraie valeur inconnue. i.e $\hat{x} \rightarrow x_e$ quand $\epsilon \rightarrow 0$, où x_e est la solution exacte de l'équation (2.3.1) [32]. Dans la littérature, deux modèles différents ont été étudiés pour considérer l'erreur sur les observations [25]:

Modèle déterministe

C'est historiquement la première modélisation utilisée. On s'intéresse à l'équation $u = Ax$ pour laquelle seule une donnée bruitée u_ς est disponible, cette dernière vérifiant:

$$\|u_\varsigma - u\| \leq \varsigma \tag{2.3.3}$$

La quantité $\varsigma > 0$ modélise l'erreur présente dans u_ς . Pour plus de détails, le lecteur peut s'orienter vers les travaux de [27], [2], [9].

Modèle statistique

La donnée bruitée est cette fois-ci est aléatoire, elle est représentée par

$$u = Ax + \epsilon\xi \tag{2.3.4}$$

Où $\epsilon > 0$ désigne le niveau du bruit, ξ est un élément aléatoire à valeur dans \mathbb{K} , qui représente un bruit blanc, généralement, on le suppose suivre une loi gaussienne.

Pour tout élément $v \in \mathbb{K}$, il est possible d'observer

$$\langle u, v \rangle = \langle Ax, v \rangle + \epsilon \langle \xi, v \rangle; \text{ pour } \langle \xi, v \rangle \sim N(0, \|v\|^2) \tag{2.3.5}$$

Pour tout $v_1, v_2 \in \mathbb{K}$, la covariance entre $\langle \xi, v_1 \rangle$ et $\langle \xi, v_2 \rangle$ est donnée par:

$$E(\langle \xi, v_1 \rangle \langle \xi, v_2 \rangle) = \langle v_2, v_1 \rangle$$

Ce type d'objet est étudié plus en détail par Hida [15]. Le modèle du bruit blanc gaussien est également souvent représenté dans la littérature sous la forme:

$$du(t) = Ax(t)dt + \epsilon dw(t)$$

Où w représente un processus de Wiener [25].

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux type de méthodes de régularisation:

- Méthode directes: parmi elles, citons: méthode des Moindres Carrés (MC), méthode de Tikhonov, méthode de Lavrentiev, méthode de quasi-réversibilité, méthode de décomposition en valeur singulières (SVD).
- Méthode itératives: on peut citer: méthode de Landweber et la procédures semi-itératives et v -méthodes.

2.3.1 Méthode de Tikhonov

C'est l'une des méthodes de régularisation les plus connues, aussi bien en statistique qu'en analyse numérique.

Dans le but de privilégier une solution particulière dotée de propriétés qui semblent pertinentes et puisque la méthode des moindres carrés est peu satisfaisante dans la mesure où la norme de l'opérateur $(A^*A)^{-1}$ est infinie, un terme de régularisation est introduit dans la minimisation de la quantité

$$\|Ax - u\|^2 + \|\gamma x\|^2$$

et ainsi, chercher à contrôler dans le même temps, la norme de la solution approximée. γ est l'opérateur de régularisation de Tikhonov, doit être judicieusement choisi pour le problème considéré. x est la solution inconnue de l'équation (2.3.1) qu'on cherche à exprimer. Dans de nombreux cas, l'opérateur γ représente l'identité I . Ce qui favorise les solutions de petites normes. Dans d'autres cas, c'est l'opérateur de différence ou opérateur transformé de Fourier pondéré utilisé pour éliminer les variations rapides de la fonction lorsqu'on a de bonnes raisons de croire que x est une approximation d'une fonction continue. Cette régularisation améliore les conditionnements du problème, permettant ainsi, de trouver une solution unique. Ce qui revient à résoudre le problème d'optimisation

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{H}} \|Ax - u\|^2 + \|\gamma x\|^2$$

Soit G la fonctionnelle définie par $G : x \mapsto \|Ax - u\|^2 + \|\gamma(x)\|^2$. Pour tout $h \in \mathbb{H}$, la fonction différentielle de G en h est donnée par

$$\begin{aligned} D_x G & : H \rightarrow \mathbb{R} \\ h & \rightarrow D_x G.h = \langle 2A^*(Ax - u) + 2\gamma x, h \rangle \end{aligned}$$

En effet, pour $x \in \mathbb{H}$ et $h \in \mathbb{H}$ tel que $\|h\| \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
 G(x+h) - G(x) &= \langle A(x+h) - u, A(x+h) - u \rangle + \langle \gamma(x+h), \gamma(x+h) \rangle \\
 &\quad - \langle Ax - u, Ax - u \rangle + \langle \gamma x, \gamma x \rangle \\
 &= 2\langle Ax - u, Ah \rangle + 2\langle \gamma x, \gamma h \rangle + \|Ah\|^2 \\
 &= \langle 2A^*(Ax - u) + 2\gamma^*\gamma x, h \rangle + \|Ah\|^2 \\
 &= \langle \nabla D_x, h \rangle + o(\|h\|)
 \end{aligned}$$

on obtient ainsi $\forall h \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
 \nabla_x G &= 0 \Leftrightarrow 2A^*(Ax - u) + 2\gamma^*\gamma x = 0 \\
 &\Leftrightarrow (A^*A + \gamma^*\gamma)x = A^*u
 \end{aligned}$$

Par le théorème de Lax-Milgram, la solution notée \hat{x} est donnée par

$$\hat{x} = (A^*A + \gamma^*\gamma)^{-1} A^*u$$

L'effet de la régularisation dépend du choix de l'opérateur γ . Dans le cas où $\gamma^*\gamma = \alpha I$, $\alpha > 0$, l'estimateur de Tikhonov \hat{x}_α est

$$\hat{x}_\alpha = \Phi_\alpha(A^*A) A^*u = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*u$$

plus α est petite, plus $\Phi_\alpha(A^*A)$ est proche de $(A^*A)^{-1}$ et donc, plus l'erreur induite est importante. Mais, au contraire, la norme $\|\hat{x}_\alpha\|$ sera mieux contrôlé par les grandes valeurs de α , au risque de s'éloigner de la solution exacte x_e .

Pour $\gamma = \alpha I$, lorsque $\alpha = 0$, on revient au cas de la solution non régularisée des moindres carrés pourvu que l'opérateur $(A^*A)^{-1}$ existe [32].

Dans les différentes méthodes de régularisation de Tikhonov, on fait toujours appel à l'inversion d'un opérateur, ce qui n'est pas toujours facile à faire, cette opération demande beaucoup de temps de calcul. Pour ce faire, les méthodes itératives ont été proposées.

Les méthodes itératives sont utilisées pour les problèmes de grande taille, car souvent après la discrétisation, on obtient des matrices creuses. Ces méthodes consistent à chercher des suites de solutions approchées qui convergent vers la solution désirée. Mais dans la pratique, on se retrouve dans des situations où il faut aussi régulariser le processus itératif quand la suite construite ne converge pas vers la solution du problème [17], citons: la méthode itérative de Landweber et procédures semi itératives et v -méthode, pour plus de détails voir [32].

2.4 Décomposition en valeurs singulières (Méthode SVD)

Avant de formaliser la décomposition en valeurs singulières, un rappel succinct de la notion d'orthogonalité nous semble être utile [3].

Définition 2.4.1 Une suite de vecteurs $\{x_1, \dots, x_p\} \in \mathbb{R}^m$ est orthogonale si $x_i^T x_j = 0$ pour tout $i \neq j$ et orthonormale si $x_i^T x_j = \delta_{ij}$.

Une suite de sous-espaces $S_1, \dots, S_p \in \mathbb{R}^m$ sont deux à deux orthogonaux si $x^T y = 0$ avec $x \in S_i$ et $y \in S_j$, pour $i \neq j$. Le complément orthogonal d'un sous-espace $S \subseteq \mathbb{R}^m$ s'écrit :

$$S^\perp = \{y \in \mathbb{R}^m : y^T x = 0 \text{ pour tout } x \in S\}$$

Les vecteurs v_1, \dots, v_k forment une base orthonormale de $S \subseteq \mathbb{R}^m$ s'ils sont orthonormaux et engendrent S .

Une matrice $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est orthogonale si $Q^T Q = I$. Si $Q = [q_1, \dots, q_m]$ est orthogonale, alors les q_i forment une base orthonormale de \mathbb{R}^m .

Un résultat important : Si $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ possède des *colonnes orthonormales*, alors il existe $V_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ tel que $V = [V_1 V_2]$ est une matrice orthogonale et $Im(V_1)^\perp = Im(V_2)$.

Nous allons à présent formaliser la décomposition en valeurs singulières. Les sources suivantes nous ont servi de support [12], [14].

Théorème 2.4.1 Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang r . Il existe deux matrices orthogonales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, ($U^T U = U U^T = I_m$) et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ($V^T V = V V^T = I_n$) telles que

$$A = U \Sigma V^T, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^T A V = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

avec $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_r)$ où $r = \min(m, n)$ et $\sigma_1 \geq \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

Théorème 2.4.2 Les σ_i sont les valeurs singulières de A . Si l'on note $U = (u_1, \dots, u_m)$ et $V = (v_1, \dots, v_n)$ les colonnes des matrices U et V , alors les vecteurs u_i et v_i sont, respectivement, les vecteurs singuliers gauches et droits associés à la valeur singulière σ_i .

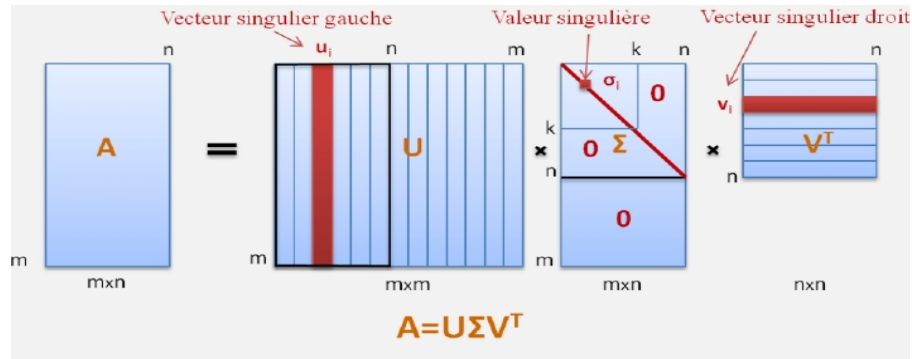


fig.2: Schéma de la SVD complète appliquée à une matrice

rectangulaire $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Proposition 2.4.1 À partir des équations précédentes, il est facile de vérifier en comparant les colonnes dans les équations $AV = U$ et $A^T U = V \Sigma^T$ que:

$$\left\{ \begin{array}{l} Av_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1 : r \quad \text{avec } r = \min(m, n) \\ A^T u_i = \sigma_i v_i, \quad i = 1 : r \\ A^T u_i = 0, \quad i = (r + 1) : \max(m, n) \end{array} \right.$$

Si $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_r = 0$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rang}(A) = k \quad (\text{nombre de valeurs singulières non nulles}) \\ \ker(A) = \text{Vect}(v_{k+1}, \dots, v_n) \\ \text{Im}(A) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \\ \|A\|_2 = \sigma_1 \end{array} \right.$$

et nous pouvons écrire :

$$A = \sum_{i=1}^{k=\text{rang}(A)} \sigma_i u_i v_i^T$$

Le système $AX = Y$, telle que $A = U\Sigma V^T$ admet alors l'inversion, nous obtenons ainsi le vecteur des entrées par

$$X = V^t \Sigma^{-1} U^t Y$$

La système est alors équivalent à $\Sigma X' = Y'$ telle que $X' = V^t X$ et $Y' = U^t Y$.

Dans la plupart des cas, le système admet une infinité de solution (le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ et le nombre de valeurs singulières est inférieure à n). On parle alors des quasi-solutions. Donc le problème devient un problème de minimisation.

La SVD révèle la structure intrinsèque d'une matrice. Nous allons voir dans le chapitre 3, de quelle manière certaines de ses propriétés peuvent être exploitées pour la discrétisation de l'équation de Fredholm de première espèce.

Remarque 2.4.1 *De manière générale, la décomposition d'une matrice est une factorisation (méthodes factorielles) en un produit de matrices sous une forme donnée, ce qui facilite son étude. Le procédé de décomposition en valeurs singulières s'apparente en algèbre linéaire à un outil de factorisation des matrices rectangulaires ($m \times n$) réelles ou*

complexes. La décomposition en valeurs propres par contre, ne s'applique que pour certaines matrices carrées. Néanmoins, dans certains cas, les deux décompositions restent liées. Par exemple pour une matrice hermitienne (ou auto-adjointe), semi-définie positive, les valeurs singulières et vecteurs singuliers correspondent aux valeurs propres et vecteurs propres de la matrice. D'un point de vue géométrique, la SVD de la matrice A , fournit deux bases de vecteurs orthonormées, à savoir les colonnes des matrices U et V , telles que la matrice devient diagonale une fois transformée dans ces bases. Ceci constitue la principale différence avec la diagonalisation, bien que toute matrice possède une décomposition en valeurs singulières, seules les matrices normales sont diagonalisables dans une base orthonormée.

Une façon naturelle d'étudier le problème présenté par l'équation (2.3.1) est de s'intéresser à la décomposition en valeurs singulières (SVD) de l'opérateur A .

Théorème 2.4.3 *Soit $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ un opérateur linéaire compact auto-adjoint, où \mathbb{H} et \mathbb{K} sont deux espaces de Hilbert. Alors, toutes les valeurs propres de A sont réelles non négatives et s'accroissent en zéro. Les espaces propres associés à chaque valeur propre sont de dimension finie et sont orthogonaux entre eux.*

Preuve. [12] ■

Puisque l'opérateur considéré A est compact, l'opérateur $A^*A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ est aussi compact, et est autoadjoint. Ces valeurs propres sont alors réelles. On note par $\{b_k^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ les valeurs propres de A^*A et par $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ les vecteurs propres associés, que nous supposons former une base orthonormée de \mathbb{H} . En particulier, tout $x \in \mathbb{H}$ s'écrit

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \theta_k \phi_k$$

On peut alors identifier x à la suite $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Estimer x revient à estimer un nombre infini de paramètres θ_k .

Pour tout entier k , on pose $\psi_k = b_k^{-1} A \phi_k \in \mathbb{K}$. On a alors

$$A^* \psi_k = b_k^{-1} A^* A \phi_k = b_k \phi_k \quad (2.4.1)$$

car ϕ_k est un vecteur propre de $A^* A$ associé à la valeur propre b_k^2 . La décomposition en valeurs singulières de $A^* A$ s'exprime par le système suivant

$$\begin{cases} A \phi_k = b_k \psi_k \\ A^* \psi_k = b_k \phi_k \end{cases} \quad (2.4.2)$$

(ϕ_k, ψ_k, b_k) est appelé système singulier.

D'après l'équation (2.3.5), on remplace v par ψ_k

$$\langle u, \psi_k \rangle = \langle Ax, \psi_k \rangle + \varepsilon \langle \xi, \psi_k \rangle$$

Posons $\xi_k = \langle \xi, \psi_k \rangle$ c'est une suite de variables aléatoires i.i.d gaussiennes standard, puisque les ψ_k sont aussi orthogonaux.

Et donc d'après le système (2.4.2)

$$\begin{aligned} u_k &= \langle u, \psi_k \rangle \\ &= \langle x, A^* \psi_k \rangle \\ &= b_k \theta_k + \varepsilon \xi_k \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Le problème dans (2.4.3) est d'estimer $\theta = \{\theta_k\}$ à partir de l'observation $u = \{u_k\}$. Les b_k sont en général connues et caractérisent le problème inverse. En effet, l'une des propriétés des opérateurs compacts est qu'il ont leurs valeurs propres convergentes vers zéro. Si les valeurs propres décroissent comme des polynômes : $b_k \sim k^{-\beta}$ pour $\beta > 0$, ceci signifie que le problème est mal posé mais pas trop. C'est un problème légèrement mal posé. Si au contraire, la décroissance est plus rapide, exponentielle, l'estimation est beaucoup plus difficile et le problème est très mal posé.

L'opérateur compact a donc, tendance à lisser le signal, rendant l'estimateur de x très délicat en présence du bruit. En effet, de l'équation (2.4.3)

$$b_k^{-1}u_k = \theta_k + \varepsilon b_k^{-1}\xi_k$$

Pour chaque θ_k l'estimateur le plus naturel est $b_k^{-1}u_k$. L'estimateur de chaque θ_k induit l'erreur $\varepsilon b_k^{-1}\xi_k$. Et $Var(b_k^{-1}u_k) = \varepsilon^2 b_k^{-2} var(\xi_k) \rightarrow \infty$, quand $k \rightarrow \infty$. On peut pas donc espérer d'estimer l'ensemble des θ_k . Pour remédier, l'idée, est de filtrer $b_k^{-1}u_k$ pour garder uniquement les plus significatives.

Pour cela, on considère

$$\hat{x}_t = \sum_{k \geq 0} \lambda_k(t) b_k^{-1}u_k \phi_k$$

où $\lambda_k(t) \in [0, 1]$, $\forall k \in \mathbb{N}$. La suite $\{\lambda_k(t)\}$ est appelée filtre. Le terme t symbolise un éventuel paramètre de régularisation.

Remarque 2.4.2 Si $\lambda_k(t)$ ne dépend pas des observations u_k , on parlera de méthodes d'estimation linéaires. Dans le cas contraire, on parlera de méthodes d'estimation non linéaires.

De nombreuses méthodes de filtrage ont été proposées, en voici quelques exemples

- La troncature spectrale

$$\begin{cases} \lambda_k = 1 & \text{si } k \leq N \\ \lambda_k = 0 & \text{si } k > N \end{cases}$$

- La régularisation de Tikhonov

$$\lambda_k = \frac{b_k^2}{b_k^2 + \alpha^2}$$

- Le filtre de Tikhonov-phillips

$$\lambda_k = \frac{1}{1 + (k/\alpha)^\beta}$$

- Les filtres de pinsker

$$\lambda_k = \left(1 - (k/\alpha)^\beta\right)_+$$

avec la notation $x_+ = \max(x, 0)$.

Toutes ces filtres tiennent compte d'un ou plusieurs paramètres (N, α, β) .

La méthode SVD, bien qu'elle représente un problème inverse sous une forme claire, par l'équation (2.4.3), elle met en évidence les effets de l'opérateur sur le signal. Néanmoins, elle présente certains inconvénients. Cette dernière dépend du choix des bases (ϕ_k) et (ψ_k) qui sont complètement déterminées par l'opérateur A , on peut avoir des opérateurs pour lesquels la base ne convient pas, dans le sens où un grand nombre de coefficients sont nécessaires pour approximer x . Dans certains cas, la décomposition en valeurs singulières de manière implicite peut s'avérer très coûteuse en terme de temps de calcul. Il est nécessaire de connaître toutes les valeurs propres de manière précise, ainsi que les vecteurs propres de A^*A .

Sur le plan théorique, l'optimalité asymptotique des estimateurs SVD a été établie dans de nombreuses situations. Citons comme exemple Mathé et Pereverzev [26], Cavalier et al. [6] Tsybakov [33] dans le cas de décroissance polynômiale des valeurs propres. Dans le cas de décroissance exponentielle des valeurs propres on peut voir Golubev [11].

3.1 Introduction

En analyse numérique, il existe une vaste famille d'algorithmes dont le but principal est d'estimer la valeur numérique de l'intégrale d'une fonction donnée définie sur un domaine particulier.

Les techniques d'analyse numérique procèdent en trois phases distinctes :

1. Décomposition du domaine en morceaux (un intervalle en sous-intervalles contigus).
2. Intégration approchée de la fonction sur chaque morceau.
3. Sommation des résultats numériques ainsi obtenus.

On appelle formule de quadrature une expression linéaire dont l'évaluation fournit une valeur approchée de l'intégrale sur un morceau typique (l'intervalle $[0, 1]$ par exemple). Une transformation affine permet de transposer la formule sur un morceau particulier. La formule de quadrature fait intervenir des valeurs pondérées de la fonction (et parfois également celles de sa dérivée) en certains nœuds : les coefficients de pondération et les

nœuds dépendent de la méthode employée. Ces formules de quadrature sont en effet obtenues à l'aide de la substitution de la fonction par une approximation, c'est-à-dire par une fonction approchée dont l'intégrale peut être déterminée algébriquement.

Une indication grossière de l'efficacité d'une formule de quadrature est son ordre qui, par définition, est la plus grande valeur entière pour laquelle la valeur approchée de l'intégrale soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à m . Cependant, la précision du résultat obtenu dépend à la fois de l'ordre de la formule de quadrature, de la taille des morceaux et de la régularité de la fonction. D'autre part, il est généralement inutile d'appliquer une formule de quadrature d'ordre m si la fonction n'est continûment dérivable jusqu'à l'ordre $m + 1$.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une nouvelle méthode de résolution numérique des problèmes mal posés donnée par une équation à opérateur intégrale. Il s'agit de la discrétisation. Cette méthode peut être considérée comme une généralisation de la méthode de Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) classique. Généralement, elle donne des résultats satisfaisants. Cela donne à la méthode de discrétisation plus de flexibilités par rapport à d'autres méthodes de régularisations. Nous allons appliquer cette méthode à l'équation de Fredholm de première espèce. Mais avant cela, nous allons introduire quelques notions sur les opérateurs intégraux et équations intégrales, cela nous permettra d'introduire le développement en valeurs singulières (SVE, en anglais : Singular Value Expansion) des opérateurs compacts, puis nous présenterons quelques méthodes de discrétisation par quadrature des équations intégrales. L'objectif étant de comprendre dans ce chapitre, le fonctionnement intrinsèque de cette nouvelle méthode qui généralise la décomposition en valeurs singulières (SVD, en anglais : Singular Value Decomposition) appliquée aux données «brutes» directement. Ces deux principales références nous ont servis de support [24] et [3].

3.2 Opérateurs intégraux et équations intégrales

Théorème 3.2.1 Soit K une fonction de l'espace $L^2([a, b] \times [c, d])$. L'opérateur

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x, s)u(s)dx, \quad x \in [c, d] \quad (3.2.1)$$

est bien défini en tant qu'opérateur de $L^2(a, b)$ dans $L^2(c, d)$: Consulter [[16], p. 31] pour voir la preuve.

Théorème 3.2.2 Soit $K \in L^2([a, b] \times [c, d])$. L'opérateur intégral A de noyau K est compact de $L^2(a, b)$ dans $L^2(c, d)$. [[16], p. 34]

Il existe deux catégories d'équations intégrales associées à l'opérateur intégral A de noyau carré intégrable :

Équations de première espèce

$$Au = f \quad \text{avec} \quad f \in L^2(c, d) \quad \text{connue} \quad (3.2.2)$$

Intégrales de Fredholm Un exemple classique de problème linéaire mal posé, est l'intégrale de Fredholm de première espèce avec un noyau de carré intégrable $K(s, t)$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$\int_0^1 K(x, s)f(s)ds = g(x) \quad \text{avec} \quad 0 < x < 1 \quad (3.2.3)$$

Généralement le noyau K est décrit par le modèle mathématique, la fonction g représente des quantités mesurées, donc entachées d'erreurs et connues sur un nombre fini de points (x_1, \dots, x_n) .

Équations de seconde espèce

$$u - Au = f \quad \text{avec } f \in \mathcal{L}^2(c, d) \text{ connue} \quad (3.2.4)$$

ou encore

$$(I - A)u = f \quad (3.2.5)$$

L'équation (3.2.5) est connue sous le nom d'alternative de Fredholm. Elle possède une propriété remarquable, à savoir que l'image $Im(I - A)$ est fermée, ce qui a pour conséquence que $(I - A)$ est un opérateur continu. Les équations de seconde espèce conduisent donc à des problèmes bien posés et possèdent en général une solution unique. Ce qui n'est pas le cas pour les équations de première espèce, qui conduisent toujours à des problèmes mal posés (car A est un opérateur compact et donc ImA n'est pas fermée et donc A n'est pas continu). Intuitivement, l'intégration avec un noyau régulier K dans l'équation (3.2.3), a un effet lissant sur f , à savoir que les composantes de hautes fréquences et les singularités de la fonction f vont être atténuées. Pour illustrer cet amortissement ou atténuation prenons un exemple, soit

$$f(s) = \sin(ps), \text{ avec } p \in [1, 2, \dots, +\infty[$$

l'équation (3.2.3) devient alors :

$$g(x) = \int_0^1 K(x, s) \sin(ps) ds \quad \text{avec } p \in [1, 2, \dots, +\infty[\quad (3.2.6)$$

et d'après le lemme de Riemann-Lebesgue [voir [3], page 65]

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g = O\left(\frac{1}{p}\right) \approx 0 \quad (3.2.7)$$

Les perturbations hautes fréquences de f (i.e. de $\sin(ps)$ quand p est grand) seront indétectables. Par conséquent lors de l'opération *inverse* pour déterminer f à partir de g , on s'attend à ce que les composantes de hautes fréquences de g soient amplifiées.

3.3 Discrétisation des équations intégrales

Dans ce qui suit, nous présentons une approximation numérique des équations de première espèce par la méthode de quadrature. Ces dernières fournissent le principal exemple de problèmes inverses linéaires [16].

3.3.1 Discrétisation par quadrature

Commençons par quelques rappels sur les formules de quadrature, qui consistent à approximer une intégrale

$$I = \int_a^b \varphi(s) ds$$

par une somme pondérée des valeurs de φ , en des points appelés noeuds.

Dans les exemples qui suivent, n est un entier. Nous nous contenterons de présenter les formules les plus simples : formule des rectangles, des trapèzes et de Simpson.

Exemple 3.3.1 (*Formule des rectangles*).

Les noeuds de la formule des rectangles sont les points $s_{j-1/2} = s_j - h/2$ avec $j = 1, \dots, n$, et les poids sont tous égaux à h .

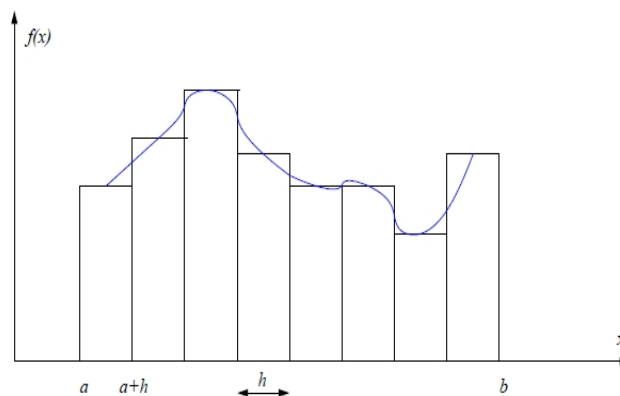


Fig. 2.2.1: Formule des rectangles.

On approche l'intégrale (l'aire sous la courbe) par la somme des aires des rectangles de largeur h , et de hauteur est déterminée par $\varphi(s_j - h/2)$:

$$I^R = h (\varphi(s_{1/2}) + \dots + \varphi(s_{j-1/2}) + \dots + \varphi(s_{n-1/2}))$$

Exemple 3.3.2 (Formule des trapèzes).

Les noeuds de la formule des trapèzes sont les points s_j avec $j = 1, \dots, n$, où $h = (b - a)/n$. Les poids sont $w_j = h$ tel que $j = 2, \dots, n - 1$ ainsi que $w_1 = w_n = h/2$.

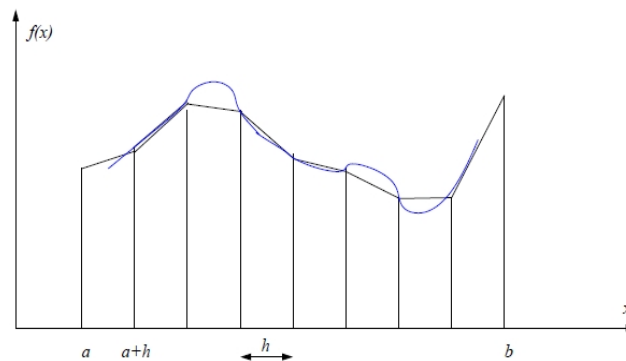


Fig. 2.2.2: Formule des trapèzes.

La formule de quadrature s'obtient en remplaçant l'intégrale par la somme des aires des trapèzes déterminés par les valeurs de la fonction aux points s_j et s_{j+1} , ce qui donne:

$$I^T = h (1/2\varphi(a) + \varphi(s_1) + \dots + \varphi(s_{n-1}) + 1/2\varphi(b))$$

Exemple 3.3.3 (Formule de Simpson).

On suppose cette fois que n est pair. Les noeuds de la formule de Simpson sont les mêmes que pour la formule des trapèzes. Les poids sont $w_{2j} = 2h/3$; $j = 1, \dots, n/(2 - 1)$, $w_{2j+1} = 4h/3$ avec $j = 0, \dots, n/2 - 1$, et $w_0 = w_n = h/3$. La formule de quadrature de

Simpson est :

$$I^S = h/3 (\varphi(a) + 4\varphi(s_1) + 2\varphi(s_2) + \dots + 2\varphi(s_{n-2}) + 4\varphi(s_{n-1}) + \varphi(b))$$

Sous des hypothèses convenables, on peut majorer l'erreur commise en remplaçant l'intégrale par les différentes formules de quadrature.

Proposition 3.3.1 *On a les majorations suivantes:*

1. Formule des rectangles: *Sous l'hypothèse $\varphi \in C^2[a, b]$*

$$|I - I^R| \leq \frac{(b-a)h^2}{24} \|\varphi''\|_\infty$$

2. Formule des trapèzes: *Sous l'hypothèse $\varphi \in C^2[a, b]$*

$$|I - I^T| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \|\varphi''\|_\infty$$

3. Formule de Simpson: *Sous l'hypothèse $\varphi \in C^4[a, b]$*

$$|I - I^S| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \|\varphi^{(4)}\|_\infty$$

Preuve. voir le livre de Kress [19] ■

De façon générale, en notant s_j et w_j pour $j = 1, \dots, n$ respectivement les noeuds et les poids, une formule de quadrature s'écrit :

$$I^a = \sum_{j=1}^n w_j \varphi(s_j) \tag{3.3.1}$$

L'application d'une formule de quadrature à une équation intégrale (de première espèce) passe par une méthode de collocation. On vérifie l'équation intégrale en un nombre finis de points t_i , $i = 1, \dots, m$,

$$\int_a^b K(t_i, s)u(s)ds = f(t_i), \quad i = 1, \dots, m \tag{3.3.2}$$

et on remplace l'intégrale ci-dessus par la formule de quadrature donnée dans l'équation (3.3.1). On obtient le système d'équation (rectangulaire):

$$\sum_{j=1}^n w_j K(t_i, s_j) u_j = f(t_i), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3.3)$$

Il s'agit là d'un système linéaire $Ax = b$, comme on le voit en posant

$$A_{ij} = w_j K(t_i, s_j), \quad b_i = f(t_i), \quad x_j = u_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m$$

où A_{ij} représente l'opérateur intégral, et K représente la fonction noyau.

Avant de passer à la discrétisation des équations intégrales, nous allons étudier particulièrement l'équation de Fredholm de première espèce, et nous allons expliquer en quoi est elle un problème mal posés.

3.4 Equation de Fredholm de première espèce

Considérons l'équation fonctionnelle de Fredholm de première espèce suivante:

$$Az(x) = \int_a^b K(x, t) z(t) dt = u(x), \quad \forall x \in (c, d) \quad (3.4.1)$$

Où K est le noyau de l'opérateur A considéré connu.

$z(t)$ est une fonction inconnue sur (a, b) ,

et $u(x)$ est une fonction connue qui représente le second membre de l'équation.

Nous supposons dans ce travail que le noyau $K(x, t)$ est une fonction continue en x à dérivée partielle $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ également continue.

Montrons que le problème est mal posé, supposons que pour un second membre $u_1(x)$, nous connaissons une solution exacte $z_1(t)$. On peut écrire alors:

$$u_1(x) = \int_a^b K(x, t) z_1(t) dt$$

Maintenant supposons que le second membre est connu approximativement, peu différent de, et l'on se propose de rechercher une solution voisine de $z_1(t)$.

Considérons la solution :

$$z_2(t) = z_1(t) + \Gamma \sin(\omega t) \quad (3.4.2)$$

qui est solution de l'équation :

$$u_2(x) = u_1(x) + \Gamma \int_a^b K(x, t) \sin(\omega t) dt$$

Dans une métrique quadratique u_u , cette expression permet de calculer la distance de $|u_1(x) - u_2(x)|$:

$$\begin{aligned} u_u &= \left\{ \int_c^d |u_1(x) - u_2(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\Gamma| \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(x, t) \sin(\omega t) dt \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En prenant $\omega \gg |\Gamma|$, cette expression peut être très petite. Calculons maintenant la distance entre les solutions correspondantes, avec la même métrique:

$$\begin{aligned} u_u(z_1, z_2) &= \left\{ \int_a^b |z_1(t) - z_2(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\Gamma| \left[\int_a^b \sin^2(\omega t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\Gamma| \left[\int_a^b \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\Gamma| \left[\int_a^b \frac{dt}{2} - \int_a^b \frac{\cos(2\omega t)}{2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\Gamma| \left[\frac{(b-a)}{2} + \frac{\sin(2\omega b)}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega a)}{4\omega} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Finalement:

$$u_u(z_1, z_2) = |\Gamma| \left[\frac{(b-a)}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin[\omega(b-a)] \cos[\omega(b-a)] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.4.3)$$

On voit sans peine que ω et Γ peuvent être choisis de telle façon que la distance $u_u(z_1, z_2)$ calculé par la formule (3.4.3) puisse être arbitrairement grande.

Définition 3.4.1 Soit M une matrice $n \times n$ à coefficients complexes. On appelle valeurs singulières de A les racines carrées des valeurs propres de la matrice M^*M .

La matrice M^*M est une matrice symétrique positive, elle admet donc n valeurs propres positives ou nulles. Les valeurs singulières de M sont les racines carrées (positives) de ces valeurs propres.

3.5 Développement en valeurs singulières (SVE)

Un moyen remarquable pour étudier les intégrales de Fredholm de première espèce est le *développement en valeurs singulières*. En effet les noyaux carré intégrables possèdent une propriété très puissante, à savoir ils peuvent s'écrire sous la forme d'une somme infinie comme suit:

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i(x) v_i(s) \quad (3.5.1)$$

Les fonctions u_i et v_i s'appellent les fonctions singulières de K . Elles sont orthonormales au sens du produit scalaire usuel:

$$(u_i, u_j) = (v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

avec $(., .)$ défini par $(f, g) = \int_0^1 f(s)g(s)ds$.

Les nombres u_i sont les valeurs singulières de K , elles sont positives et peuvent toujours être ordonnées dans l'ordre décroissant. Elles vérifient de plus, la propriété suivante:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 = \|K\|^2$$

Ce développement en valeurs singulières $\{\mu_i, u_i, v_i\}$ est unique pour K donné. Le lien entre les fonctions et valeurs singulières est exprimé par la relation suivante :

$$\int_0^1 K(x, s)v_i(s)ds = \mu_i u_i(x) \quad (3.5.2)$$

Autrement dit, les fonctions v_i sont reliées aux u_i par leurs valeurs singulières μ_i , qui peuvent être interprétées comme étant un facteur d'amplification. Si à présent cette dernière équation, ainsi que l'équation (3.5.1), sont insérées dans (3.2.3), nous obtenons l'équation:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(v_i, f)u_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (u_i, g)u_i(x) \quad (3.5.3)$$

ce qui conduit à la relation finale

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(u_i, g)}{\mu_i} v_i(s) \quad (3.5.4)$$

L'étude des $\mu_i^{-1}(u_i, g)$ ainsi que des fonctions v_i , permet de caractériser complètement f .

Propriétés d'amortissement du noyau K

Le comportement des fonctions singulières u_i, v_i et des valeurs singulières μ_i est intimement lié aux propriétés du noyau K . Tout d'abord, une remarque concernant les valeurs singulières μ_i .

Remarque 3.5.1 *Plus les valeurs singulières sont petites, plus il y a d'oscillations (changement de signe) dans les fonctions u_i et v_i .*

La seconde propriété concerne la «régularité» du noyau. Plus le noyau possède de dérivées continues, plus il est lisse ou régulier. Autrement dit K est de classe $C^k([a, b] \times [c, d])$ avec $k \geq 1$ un entier. Plus le noyau est régulier (quand k est grand) plus les valeurs singulières décroissent rapidement et $\mu_i \approx O(i^{-k-\frac{1}{2}})$.

Preuve. voir [3], page 66 ■

3.6 Discrétisation de l'équation de Fredholm de première espèce

Considérons une solution numérique de l'équation de Fredholm de première espèce

$$\int_{-1}^1 k(t, s)x(s)ds = y(t), \text{ avec } -1 \leq t \leq 1 \quad (3.6.1)$$

Cette équation se trouve dans plusieurs situations en pratique, c'est le cas type d'un problème mal-posé.

Une méthode simple de résolution de l'équation (3.6.1) proposée par Peter Linz dans une publication intitulée "A new numerical method for ill-posed problems" en 1993, est la discrétisation, qui consiste à choisir n points t_1, t_2, \dots, t_n pondérés par w_1, w_2, \dots, w_n respectivement. Remplacer en suite l'intégrale donné par l'équation (3.6.1) par des quadratures basées sur les t points choisis.

Soit le système

$$K_n x = y \quad (3.6.2)$$

avec $K_{(n,n)}$ une matrice carré de dimension $n \times n$, et k un noyau donné.

$$K_n = \begin{pmatrix} w_1 k(t_1, t_1) & \cdot & \cdot & \cdot & w_n k(t_1, t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1 k(t_n, t_1) & \cdot & \cdot & \cdot & w_n k(t_n, t_n) \end{pmatrix}$$

x et y sont des vecteurs de \mathbb{R}^n , tel que

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} y(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y(t_n) \end{pmatrix}$$

On souhaite que x_i soit une bonne approximation de $x(t_i)$. La décomposition en valeurs singulières est une façon de résoudre l'équation (3.6.2).

On considère la décomposition de K_n

$$K_n = Q\Lambda P^t$$

Où Q une matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n , et

P une matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs u_1, u_2, \dots, u_n .

Λ matrice diagonale des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non negatives tel que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, λ_i sont les valeurs singulières de K_n , associé aux vecteurs singuliers de droite u_i , et de vecteurs singuliers de gauche v_i .

Définition 3.6.1 Une matrice carrée A de dimension n orthogonale, est une matrice unitaire à coefficients réels. Elle vérifie donc ${}^tAA = I_n$, où tA est la matrice transposée de A et I_n est la matrice identité.

On a alors:

$$K_n u_i = \lambda_i v_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

et

$$K_n^t v_i = \lambda_i u_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

La solution de (3.6.2) est donné par

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\lambda_i} u_i \tag{3.6.3}$$

où

$$\beta_i = v_i^t y$$

en effet

$$\begin{aligned} K_n \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\lambda_i} u_i &= y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n K_n \frac{1}{\lambda_i} v_i^t y = y \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} (K_n v_i^t) y = \left(\sum_{i=1}^n u_i \right) y \\ \text{où } K_n v_i^t &= \lambda_i u_i \end{aligned}$$

Définition 3.6.2 Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible ou régulière ou encore non singulière, s'il existe une matrice B d'ordre n telle que :

$$AB = BA = I_n$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n . D'après le théorème du rang, chacune des deux conditions $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ suffit. Dans ce cas, la matrice B est unique et est appelée la matrice inverse de A , et est notée A^{-1} . Une matrice carrée qui n'est pas inversible est dite non inversible ou singulière.

Si K_n est singulière ou presque singulière, la solution de (3.6.2) est très instable. Il faut donc régulariser la solution en introduisant un paramètre de régularisation $\alpha > 0$. L'approche proposée est donc la méthode SVD.

On considère

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \alpha} \beta_i u_i \quad (3.6.4)$$

Comme tout les λ_i sont positives, alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_\alpha = x$$

On peut voir que x_α est une approximation de x pour α petit, α a un petit effet sur le comportement de grandes valeurs de λ_i , ainsi pour $\alpha \ll \lambda_i^2$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \alpha} \simeq \frac{1}{\lambda_i}$$

D'autre part, si $\lambda_i^2 \ll \alpha$, alors

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \alpha} \simeq \frac{\lambda_i}{\alpha} \ll \frac{1}{\lambda_i}$$

Ainsi avec de très petites valeurs singulières ou nulles, le comportement sera amortie. C'est une approximation raisonnable de la solution de l'équation (3.6.2).

La sommation n'est que la méthode SVD classique décrite par Baker et al [4]. L'avantage de cette méthode est que l'hypothèse des vecteurs propres associés aux grandes valeurs propres sont lissées. Ce qui n'est pas le cas de SVD, qui donne des résultats non satisfaisants.

x_α donné par l'équation (3.6.4) vérifie

$$(K_n^t K_n + \alpha I)x = K_n^t y \quad (3.6.5)$$

ainsi x_α minimise

$$\Phi_\alpha = \|K_n x - y\|^2 + \alpha \|x\|^2$$

L'équation (3.6.4) peut être aussi vu comme la régularisation de Tikhonov d'ordre zero. Souvent, on suggère de minimiser la fonctionnelle

$$\Phi_\alpha = \|K_n x - y\|^2 + \alpha \|Bx\|^2$$

où B représente l'opérateur de lissage.

La méthode basée sur la discrétisation que nous suggérons maintenant, élimine les oscillations sans aucune a priori sur le lissage.

De la même façon pour la SVD, la solution peut être exprimé à l'aide des vecteurs propres de droites.

Définition 3.6.3 Soit une famille de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in V$ d'un espace vectoriel V . S'il existe un vecteur \vec{u}_i et une combinaison linéaire c_1, c_2, \dots, c_n tel que

$$\vec{u}_i = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_n \vec{u}_n$$

alors on dit que les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ sont liés. Si une telle combinaison n'existe pas, alors on dira que les vecteurs sont linéairement indépendants.

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, n vecteurs linéairement indépendants, on pose

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i \tag{3.6.6}$$

On peut écrire ceci sous la forme

$$x = \Phi c \tag{3.6.7}$$

où Φ est une matrice de $dim(n, n)$ dont les colonnes sont Φ_i et $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$

Avec la décomposition de K_n comme dans (3.6.3), l'équation (3.6.2) devient

$$Q\Lambda P^t x = y$$

on remplace x par (3.6.7) et multiplier par Q^t , on aura

$$\Lambda P^t \Phi c = Q^t y$$

avec

$$c = B^{-1} Q^t y, \quad \text{où} \quad B = \Lambda P^t \Phi$$

B est généralement très mal conditionnée, on régularise en introduisant

$$c_\alpha = B(\alpha I + B^2)^{-1} Q^t y$$

et

$$x_\alpha = \Phi c_\alpha = \Phi B(\alpha I + B^2)^{-1} Q^t y \tag{3.6.8}$$

Tout algorithme d'inversion de matrice peut être utilisé pour résoudre l'équation x_α .

Le paramètre α joue le même rôle que dans SVD

Ainsi

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_\alpha = x$$

Dans le cas particulier où $\Phi = P$, alors

$$B = \Lambda P^t P \tag{3.6.9}$$

Et l'équation (3.6.8) devient

$$x_\alpha = P\Lambda(\alpha I + \Lambda^2)^{-1} Q^t y \tag{3.6.10}$$

qui est identique à (3.6.4). L'équation (3.6.8) n'est pas seulement une modification mais c'est une généralisation de la méthode de SVD.

L'avantage de cette généralisation est qu'on est libre de choisir une fonction d'expansion pour atteindre les caractéristiques de la solution désirée. Depuis $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, on peut les arranger de sorte que les caractéristiques souhaitées de notre solution soient représentées par Φ_i avec un i petit. Une bonne régularisation du paramètre α apportera ces caractéristiques. Ce qui est très différent de la méthode SVD classique, où la régularisation croissante du paramètre α accentue la contribution du vecteur singulier associé à la plus grande valeur singulière λ . Cette généralisation est aussi différente de la régularisation proposée par Tikhonov, où le paramètre α est la solution la plus lisse, sans prendre en considération les caractéristiques spéciales de la solution [24].

Les équations intégrales de première espèce, tout particulièrement les équations de Fredholm, sont considérées comme étant une source importante de problèmes inverses linéaires. Dans ce chapitre nous allons présenter un aspect numérique du problème inverse considéré, où nous mettrons en pratique la nouvelle méthode de discrétisation. En se basant sur des résultats numériques, nous tenterons de démontrer son efficacité en la comparant à la méthode SVD classique.

4.1 Formulation du problème

Les détails de l'étude de simulation sont les suivants:

L'espace de Hilbert \mathbb{H} est l'espace $\mathcal{L}^2([-1, 1])$. $u \in \mathbb{H}$, l'opérateur linéaire compact $A \in K(\mathbb{H})$ est donnée par l'équation de Fredholm de première espèce donnée par, pour $x \in \mathbb{H}$

$$Ax(s) = \int_{-1}^1 k(s, t)x(t)dt \quad (4.1.1)$$

$k(s, t)$ est le noyau de l'intégral, il modélise l'influence du paramètre à estimer x sur la donnée mesurée y . La fonction noyau est donnée par:

$$k(s, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2st}}$$

On se propose de comparer la solution exacte $x(s)$ qui est donnée par

$$x(t) = x_{ex} = \frac{35t^3 - 27t}{2}$$

de l'équation

$$Ax(s) = y(s) = 2s^3 - 2s$$

à des solutions approximatives qu'on identifiera plus loin [18].

4.2 Discrétisation du problème

La fonction y est représentée par un vecteur de taille $(n, 1)$. Par conséquent, le résultat est également cherché sous forme numérique et c'est pourquoi on a comme inconnue un vecteur x de taille $(n, 1)$.

La formulation du problème fait donc apparaître une matrice K_n de dimension $n \times n$ qui correspond à la discrétisation du noyau k .

L'équation (4.1.1) devient alors:

$$K_n x = y$$

4.3 Estimation et régularisation

4.3.1 Nécessité d'utilisation d'une fonction de régularisation

La résolution de ce type de fonction d'intégrale est un problème mal conditionné étant donné que les valeurs singulières du noyau k décroissent rapidement vers 0 (fig.3), leur

conditionnement est infini. Pour cette raison, la réponse du problème ne varie pas de manière régulière avec les données du problème, ce qui revient à dire qu'une petite variation des données peut mener à une grande variation de la sortie. Les théorèmes sur le calcul numérique montrent que les erreurs d'approximation, au cours d'un calcul, sont multipliées par le conditionnement de la matrice qui intervient dans le calcul. Les erreurs d'approximation peuvent devenir très grandes au cours du processus numérique. Ce problème est dû uniquement aux caractéristiques du noyau k et pas au nombre de points d'échantillonnage choisis pour discrétiser le problème.

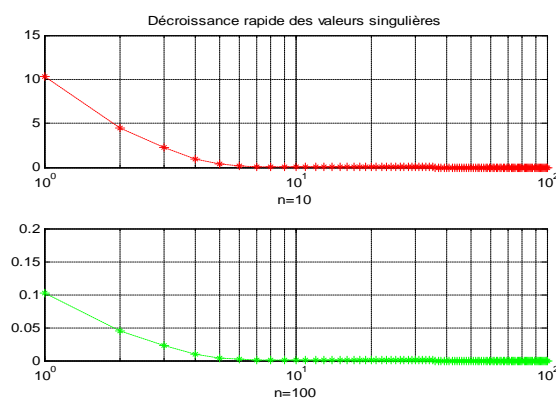


fig.3 Décroissance rapide des valeurs
singulières.

Pour rétablir une certaine stabilité, nous pouvons faire appel à la méthode SVD et la nouvelle méthode de discrétisation qui est considérée une généralisation de la SVD classique. En s'appuyant sur des résultats numériques, nous tenterons de montrer l'efficacité de la nouvelle méthode dans le cas de l'intégrale de Fredholm de première espèce. Ces deux méthodes permettent de rendre les problèmes inverses stables, cependant c'est au prix d'une modification du problème initial, donc la solution obtenue est également modifiée.

4.3.2 Résolution par la méthode de discrétisation

L'estimateur x_α proposé par Peter Linz [1993] est donné par:

$$x_\alpha = \Phi B(\alpha I + B^2)^{-1} Q^t y$$

où Φ est une matrice de dimension $n \times n$, et $B = \Lambda P^t \Phi$.

En posant $\Phi = P$, où P une matrice orthogonale des vecteurs singuliers de droite.

La solution x_α devient alors

$$x_\alpha = P \Lambda (\alpha I + \Lambda^2)^{-1} Q^t y$$

4.3.3 Résolution par la méthode SVD

Le système $Ax = y$, telle que $A = U \Sigma V^T$ admet l'inversion, nous obtenons ainsi le vecteur des entrées défini par

$$x_{SVD} = V^t \Sigma^{-1} U^t y$$

Pour plus de détails sur les deux méthodes citées ci dessus. Voir la section 3.6 du troisième chapitre et la section 2.3 du deuxième chapitre.

4.4 Résultats de simulation

En faisant varier la taille de l'échantillon n et les valeurs du paramètre de régularisation α , les résultats de simulation sont les suivants.

Pour différentes tailles d'échantillons $n = 10$, $n = 100$, $n = 500$, $n = 1000$, et différentes valeurs du paramètre de régularisation $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.001$, nous avons donné dans le tableau Tab.1, les erreurs quadratique moyennes entre la solution exacte x_{ex} et la solution par la méthode SVD classique, et dans le tableau Tab.2, les

erreurs quadratique moyennes entre la solution exacte x_{ex} et son approximation par la nouvelle méthode de discrétisation x_α .

avec:

$$MSE(x_{SVD}/x_{ex}) = E((x_{SVD} - x_{ex})^2) \text{ et } MSE(x_\alpha/x_{ex}) = E((x_\alpha - x_{ex})^2)$$

n	10	100	500	1000
$MSE(x_{SVD}/x_{ex})$	1.0436	0.3119	0.1393	0.0985

Tab.1 : erreurs quadratique moyennes entre x_{SVD} et x_{ex}

$n \setminus \alpha$	0.1	0.01	0.001
10	0.8976	0.7011	0.5291
100	0.2921	0.2385	0.2304
500	0.1312	0.1072	0.1056
1000	0.0928	0.0758	0.0741

Tab.2 : erreurs quadratique moyennes entre x_α et x_{ex}

Les figures 4, 5 et 6 suivantes représentent les courbes de la solution exacte et ses approximations par la méthode SVD classique et la nouvelle méthode de discrétisation.

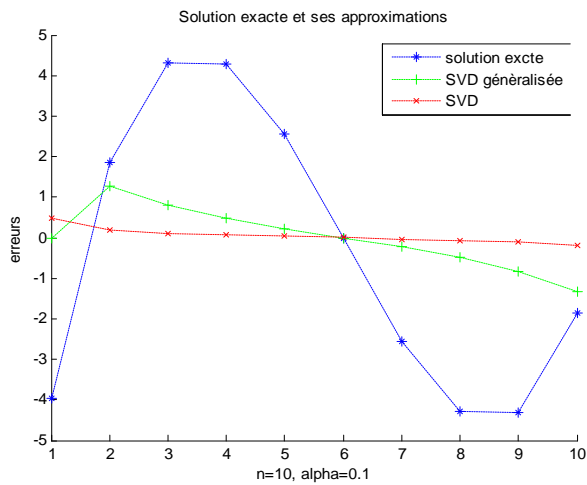


fig.4: $MSE(x_\alpha/x_e) = 0.8976$ et
 $MSE(x_{SVD}/x_e) = 1.0436$

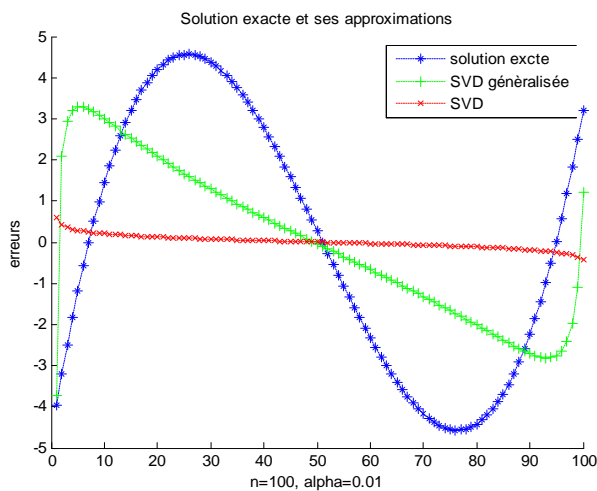


fig.5: $MSE(x_\alpha/x_e) = 0.2385$ et
 $MSE(x_{SVD}/x_e) = 0.3119$

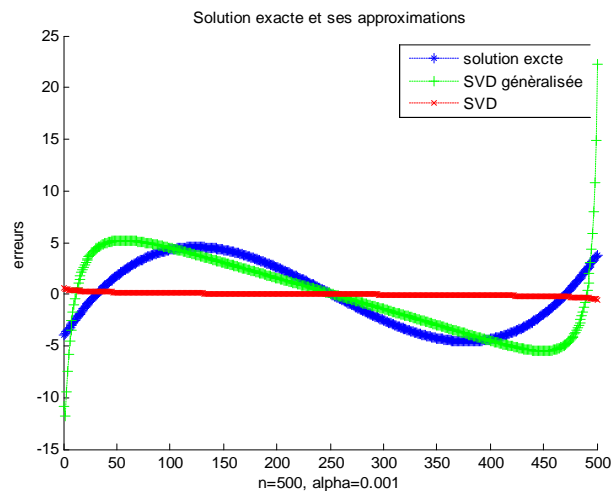


fig.6: $\text{MSE}(x_\alpha/x_e) = 0.1056$ et

$$\text{MSE}(x_{SVD}/x_e) = 0.1393$$

4.4.1 Interprétation des résultats

Ces courbes montrent l'optimalité de x_α . Comme on pouvait s'y attendre, l'approximation avec la nouvelle méthode de discrétisation est bien meilleure qu'avec la méthode SVD classique. Comme en témoignent les résultats, avec une taille de l'échantillon n assez grande et un bon choix du paramètre de régularisation α , par exemple pour $n = 500$, l'erreur quadratique moyenne, entre la solution exacte x_{ex} et la nouvelle méthode proposée x_α , est de 0.1056 pour une valeur du paramètre de régularisation assez petite $\alpha = 0.001$, par contre pour une même taille de l'échantillon n , le MSE entre x_{ex} et la solution de méthode la SVD classique x_{SVD} quant à elle, elle est de 0.1393. Ceci peut se justifier par le rôle que joue le paramètre de régularisation, car plus α est petit (allant jusqu'à 0.001) plus l'approximation devient meilleure. Donc, la convergence de la solution x_α dans le cas de la résolution de l'équation de Fredholm de première espèce est satisfaisante.

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion

Les problèmes inverses ont un domaine d'investigation très large, ils constituent une branche de recherche Mathématique dont l'importance ne cesse de croître. On les retrouve aussi bien en mécanique, en thermique, en météorologie, en statistique ainsi que dans plein d'autre domaine, d'où la naissance de plusieurs méthodes de résolutions à ces problèmes. Ceci dit, la question de stabilité suscite un intérêt particulier chez les mathématiciens.

Un problème inverse est en général une situation où on est dans l'ignorance du système (certaines informations concernant la géométrie, les matériaux, les conditions initiales,...). La plupart de ces problèmes sont modélisés en des systèmes d'équations linéaires (étape difficile, se consulter avec un spécialiste du domaine étudié). Notre travail est indexé sur la présentation des méthodes de régularisation, mais aussi sur l'application d'une nouvelle méthode de résolution numérique des fonctions intégrales, plus particulièrement

de l'équation de Fredholm de première espèce, qui est une source importante des problèmes inverses linéaires.

Dans ce mémoire, nous avons introduit quelques exemples afin de présenter le caractère mal posé des problèmes inverses et quelques méthodes de résolution à savoir: la méthode des moindres carrés, la SVD, la régularisation de Tikhonov, mais aussi quelques méthodes itératives tels que la méthode de Landweber et procédures semi itératives et v -méthodes.

Dans la dernière partie de notre travail, nous avons mis en application la nouvelle méthode de résolution numérique des problème inverses linéaire, qui est considérée comme étant une généralisation de la méthode SVD classique, où nous avons traité le cas de l'équation de Fredholm de première espèce définie sur $[-1, 1]$. Nous avons essayé d'étudier l'efficacité de la nouvelle méthode à l'aide d'une simulation, en la comparant à la méthode SVD classique, et ce, en se basant sur des résultats numériques qui se sont avérés satisfaisants.

5.2 Perspectives

Dans ce travail, nous avons traité un problème inverse mal posé de type déterministe. Nous avons considéré la méthode de discrétisation dans le cas de la résolution l'équation de Fredholm de première espèce définie sur $[-1, 1]$. Il sera donc intéressant d'étudier notre nouvelle méthode dans les cas suivant:

- i) Autres équations intégrales de premières espèce tels que les équations de Volterra.
- ii) Dans un cadre stochastique avec un modèle qui s'écrit sous la forme $K_n x + \epsilon = y$, où ϵ représente un bruit ou une erreur.

Bibliographie

- [1] R. AHMED YAHIA. sur une classe de problèmes non standards discrets par des équations différentielles. Memoire Magister.
- [2] A. ASPREMONT (2003). Interest rate model Calibration using semidefinite programming. Applied Mathematical Finance, 10 (3): 183-213.
- [3] V. AYVAZYAN (2012). Étude de champs température séparables avec une double décomposition en SVD.Thèse doctorat.
- [4] BAKER C T H, FOX L. MAYERS D F and Wright K (1964). Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind compus J.7 141-8.
- [5] H. BREZIS (1983). Analyse fonctionnelle – Théorie et applications. Masson, Paris.
- [6] L. CAVALIER (2003). Problèmes inverses en statistique. Mémoire pour obtenir l'habilitation à diriger des recherches.
- [7] T. CARLEMAN (1939). Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Ark. Mat. Astr. Fys., 26B (17), 1–9.
- [8] R.CONT et S. BEN HAMID (2005). Recovering volatility from option prices by evolutionary optimization. Journal of computational Finance, vol 8 N°4.

-
- [9] R. CONT et P TANKOV (2002). Calibration of jump-diffusion option pricing models: a robust nonparametric approach. *Journal of computational Finance* vol. 7 N°3:1-49.
- [10] X. GOURDON (1994). *Les maths en tête - Analyse*. Éditions Ellipses, ISBN 2-7298-4449-X, ch. Annexe B, pp. 401–402.
- [11] Y.GOLUBEV(2004). The principle of penalized empirical risk in severely ill-posed problems. *Theory Probab. and Appl.*, 130:18-38.
- [12] G.H. GOLUB et C. F. VAN LOAN (1996): *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, third edition édition, p 695.
- [13] J. HADAMARD. (1932). The principle of penalized empirical risk in severely ill-posed problems. *Theory Probab. and Appl.*, 130:18-38.
- [14] C. HANSEN (1998) : *RANK-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*. SIAM, Philadelphia, 247 p.
- [15] T. HIDA (1980). *Brownian motion*. Springer-Verlag, New-York.
- [16] M. KERN. *PROBLÈMES INVERSES* (2003). Problèmes linéaires. Chapitre 2.
- [17] S.KHOUFACHE (2012). *Problèmes inverses en EDP*. Memoire de Magister.
- [18] M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO, (1976). *Equations Intégrales. Problèmes et exercices*. Edition MIR. MOSCOU.
- [19] R. KRESS (1989). *Linear Integral Equations*, volume 82 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer.
- [20] K. KUNISCH, W. Ring (1993), Regularization of nonlinear ill-posed problems with closed operators, *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* 14, 389–404.

- [21] C. LEONARD (2001). Minimization of energy functionals applied to some inverse problems. *J. App. Math. Ipoti.* 44:273-297.
- [22] P. LEVY-BRUH. Introduction à la théorie spectrale. Dunod, Paris, 2003, I.S.B.N210007072x.
- [23] J.M. LOUBSES et A.VANHEMS (2002). Estimating the solution of a differential equation with endogeneous effects. Prepublications de l'université de Paris Sud, 12.
- [24] P. LINZ (1994). A new numerical method for ill-posed problems.
- [25] C. MARTEAU (2007). Recherche d'inégalités oracles pour des problèmes inverses. Thèse doctorat.
- [26] P. MATHE et S. V.PEREVERZEV (2003). Geometry of linear ill-problems in variable Hilbert scales. *Inverse Problems* 19:789-803.
- [27] D. NICOLAY (2002). Calibration et couverture de produits dérivés. Thèse doctorat.
- [28] P. S. NOVICOV (1938), Sur l'unicité du problème inverse de la théorie du potentiel (en russe). *Rapports de l'académie des sciences de l'U.R.S.S*, 18, 3.
- [29] O. PROT (2005). Méthode de régularisation antropicque et application au calcul de la fonction de distribution des ondes. Thèse, Orleans.
- [30] A.G. RAMM (1990). *Random Fields Estimation Theory*. Longman Scientific/ Wiley, New York.
- [31] N. RAYMOND (9 novembre 2011). Autour du Laplacien de Dirichlet.
- [32] K. TIMERIDJINE (2013). Operateur lineaire dans un problème de calibration à erreur aléatoire. Thèse doctorat.

- [33] A.B. TSYBAKOV (1997). on nonpametric estimation of density level sets. Ann. Statist. 25/948-969.
- [34] A. N. TYKHONOV (1943). On the stability of inverse problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR39, N 5, 195-198.