

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ A. MIRA - BEJAIA  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master  
en mathématiques**

**Spécialité : Analyse et probabilités**

**Par**

**AGOUM MOUNIA**

**THÈME**

**Systemes hamiltoniens : leurs solutions périodiques**

**Soutenu publiquement, devant le jury composé de :**

Mme. F. TALBI	Université A. Mira - Bejaia	Présidente
Mr. A. BERBOUCHA	Université A. Mira - Bejaia	Rapporteur
Mme. H. BECHIR	Université A. Mira - Bejaia	Examinatrice

**Année universitaire : 2014/2015**

---

# *Remerciements*

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Berboucha Ahmed mon promoteur, pour son dévouement, sa disponibilité et pour qui je témoigne mon profond respect.

Je remercie **Mme F. TALBI** pour avoir accepté de présider le jury devant lequel je présente mon travail.

Je remercie **Mme H. BECHIR** pour avoir accepté d'examiner mon travail et de faire partie du jury.

Mes vifs remerciements vont aussi à l'ensemble des personnes qui m'ont aidé de près ou de loin dans la réalisation de ce modeste mémoire.

Enfin, je remercie tout les membres du département de Mathématiques de l'université A. Mira-Bejaia, les enseignants, les étudiants ainsi que tous mes camarades et amis.

---

# Dédicaces

Avant toute chose je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné la force, le courage, la volonté et la patience pour réaliser ce modeste travail.

Ce mémoire est le résultat de cinq années de travail et c'est avec grande joie que je le dédie à :

Mon très cher mari Adel qui a fait preuve de beaucoup de compréhension, de sacrifices et surtout de patience.

Mes très chers parents, ce travail est le fruit des sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation.

Mon petit cher fils Yasser.

Mon cher frère : Zahir.

Mes chères soeurs : Lwiza, Samiha, Ilham et Yasmina.

Ma chère Karima et à ma belle famille.

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 notions de base</b>	<b>2</b>
1.1 les systèmes hamiltoniens . . . . .	2
1.1.1 Exemples de systèmes hamiltoniens . . . . .	3
1.2 Rappels et compléments . . . . .	4
1.2.1 Fonctions convexes . . . . .	4
1.2.2 Sous différentiel des fonctions convexes . . . . .	5
1.2.3 Inf-convolution . . . . .	6
1.2.4 Intégrandes normales . . . . .	8
1.2.5 Points critiques . . . . .	9
<b>2 Principe dual de moindre action</b>	<b>13</b>
2.1 Principe de Maupertuis . . . . .	13
2.2 Principe dual de moindre action de Clarke-Ekeland . . . . .	14
<b>3 Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens</b>	<b>23</b>
3.1 Cas des hamiltoniens à croissance sous-quadratique . . . . .	23
3.1.1 Vibrations forcées . . . . .	23
3.1.2 Vibrations libres . . . . .	28
3.1.3 Solution périodique de niveau d'énergie fixé . . . . .	32
3.1.4 Solution dans un voisinage fixé de l'origine et de l'infini . . . . .	35
3.2 Cas des hamiltoniens à croissance super-quadratique . . . . .	39
3.2.1 Formulation du problème . . . . .	40
3.3 Etude d'une méthode générale . . . . .	44
3.3.1 Résultats préliminaires . . . . .	45

3.3.2	Théorème d'existence . . . . .	52
3.4	Exemples d'application du théorème général . . . . .	55
3.4.1	Cas sous-quadratique . . . . .	55
3.4.2	Cas superquadratique . . . . .	57
3.4.3	Cas exponentiel . . . . .	58
	<b>Conclusion générale</b>	<b>64</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>65</b>

---

# Introduction

Ces dernières années ont vu un regain d'intérêt pour l'étude des systèmes hamiltoniens. Certes, voici bien longtemps que les merveilleuses équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}(t, x, p) \\ \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}(t, x, p) \end{array} \right.$$

à la symétrie subtilement brisée par la présence du signe moins, ces équations avaient acquis au fil des années un parfum un peu suranné, fleurant bon le XIX<sup>ème</sup> siècle et le déterminisme, et ce n'est que dans quelques domaines très spécialisés, comme la mécanique céleste, que l'on avait encore l'occasion de les utiliser dans quelques calculs de perturbation.

Les systèmes hamiltoniens sont les équations différentielles qui décrivent les mouvements d'un objet dont l'énergie est conservée (mécanique conservative c'est à dire l'énergie se conserve au cours du mouvement ).

Notre travail consiste en premier lieu à présenter ces systèmes hamiltoniens en donnant deux exemples et on regardera de plus quelques définitions de base (fonctions convexes, points critiques...).

En second lieu, on s'intéressera aux solutions périodiques de ces systèmes. La recherche de solutions se fait en utilisant le principe dual de moindre action où d'une méthode générale.

Notre travail est structuré en trois chapitres. Dans le premiers chapitre nous rappelons les résultats essentiels sur l'analyse convexe indispensables pour la suite du travail. Dans le seconde chapitre nous présentons le principe de moindre action. Le troisième et dernier chapitre sera consacré à l'étude des solutions périodiques des systèmes hamiltoniens.

Dans ce chapitre introductif nous présentons une classe importante de systèmes différentiels appelés systèmes hamiltoniens. Nous nous intéressons aussi à quelques rappels d'analyse convexe.

## 1.1 les systèmes hamiltoniens

Les systèmes hamiltoniens sont des systèmes différentiels ordinaires de dimension  $2n$  qui s'écrivent sous la forme dite **hamiltonienne** :

$$(P) \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) \end{cases}$$

où  $H$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  appelée **hamiltonien** du système. On sait que si  $(x, p)$  est solution de  $(P)$ , alors

$$H(x(t), p(t))$$

est constant. On s'intéresse également aux oscillations forcées d'un tel système, c'est à dire aux solutions du problème aux limites :

$$(P') \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p) \\ x(0) = x(T), p(0) = p(T) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où  $H$  est une fonction de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dans le cas particulier où le hamiltonien  $H$  est de la forme :

$$H(t, x, p) = \frac{p^2}{2} + U(t, x)$$

les équations (P) deviennent :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \nabla U(t, x) = 0 \\ x(0) = x(T), \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{cases}$$

Commençons par reformuler (P') posons  $u = (x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $\sigma(x, p) = (p, -x)$ , avec ces notations (P') prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{u} = \sigma \nabla H(t, x) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

On supposera  $H$  convexe en  $u$  alors (P') devient :

$$\begin{cases} \dot{u} \in \sigma \partial H(t, x) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

Où  $\partial H(t, x)$  désigne le sous-différentiel en  $u$  de la fonction convexe  $H(t, \cdot)$ .

### 1.1.1 Exemples de systèmes hamiltoniens

**Exemple 1.1.1 L'oscillateur harmonique :** On appelle ainsi le système différentiel qui décrit, par exemple, l'allongement d'un ressort (sans amortissement) ou un circuit "RLC" sans résistance ( $R=0$ ). Dans  $\mathbb{R}^2$  on prend pour hamiltonien la fonction

$$H(x, p) = \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{p^2}{2}$$

Dans cet exemple notre hamiltonien  $H$  est l'énergie totale. le système hamiltonien associée est alors

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -a^2x \end{cases}$$

ce système se simplifie alors en

$$\ddot{x} + a^2x = 0$$

**Exemple 1.1.2 Le pendule simple :** c'est le système mécanique constitué par une bille attachée à une corde dont l'autre extrémité est fixe. On considère ici que la bille se meut

dans un plan verticale. Désignons par  $\theta$  l'angle fait par la corde du pendule avec la verticale. L'équation différentielle décrivant le mouvement de la bille  $\ddot{\theta} = -\sin \theta$ . L'équation différentielle est équivalente au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -\sin x \end{cases}$$

qui est le système hamiltonien associée à la fonction

$$H = \frac{p^2}{2} - \cos x = \frac{p^2}{2} - \cos \theta$$

L'énergie totale du pendule simple.

## 1.2 Rappels et compléments

### 1.2.1 Fonctions convexes

**Définition 1.2.1** soit  $X$  un espace vectoriel réel, une fonction convexe sur  $X$  est une fonction  $f$  de  $X$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in X^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

avec la convention  $(-\infty) + (+\infty) = (+\infty)$  le domaine de  $f$  est :

$$\text{dom} f = \{x \in X ; f(x) < +\infty\}$$

**Définition 1.2.2** Soit  $X$  un espace vectoriel en dualité séparante avec  $Y$ ,  $f$  une fonction de  $X$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ . La conjuguée de  $f$  est la fonction  $f^* : Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \cup \{+\infty\}$  définie par :

$$\forall y \in Y, f^*(y) = \sup_{x \in X} \{ \langle x, y \rangle - f(x) \}$$

où  $\langle, \rangle$  désigne la dualité entre  $X$  et  $Y$ .  $f^*$  est alors une fonction convexe  $\sigma(Y, X)$  semi continue inférieurement (Rappelons qu'une fonction définie sur un espace topologique à valeur dans  $\bar{\mathbb{R}}$  est semi continue inférieurement si

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = f(x_0)$$

ce qui est équivalent à dire que son épigraphe est fermé où

$$\text{épi} f = \{(x, t) \in \text{dom} f \times \mathbb{R} \text{ et } f(x) \leq t\}$$

**Théorème 1.2.1** Notons  $\Gamma_0(X)$  l'ensemble des fonctions convexes,  $\sigma(X, Y)$  semi continue inférieurement et propres (ce terme signifie que  $\text{dom } f \neq \emptyset$  et que  $f(x)$  ne vaut jamais  $(-\infty)$ ) alors : l'application

$$\begin{aligned} \Gamma_0(X) &\rightarrow \Gamma_0(Y) \\ f &\mapsto f^* \end{aligned}$$

est bijective et sa réciproque est donnée par :

$$\begin{aligned} \Gamma_0(Y) &\rightarrow \Gamma_0(X) \\ g &\mapsto g^* \end{aligned}$$

**Proposition 1.2.1** Soit  $X$  un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et  $f$  une fonction convexe de  $X$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , il est équivalent de dire :

- i) Il existe un ouvert non vide sur lequel  $f$  ne vaut pas constamment  $(-\infty)$  et est majoré par une constante finie .
- ii)  $f$  est propre, l'intérieure de son domaine est non vide et  $f$  y est continue .

Notons enfin la :

**Proposition 1.2.2** Toute fonction convexe, semi continue inférieurement et propre sur un espace de Banach est continue sur l'intérieure de son domaine. En particulier si  $f$  est convexe, semi continue inférieurement et à valeur dans  $\mathbb{R}$  elle est partout continue.

## 1.2.2 Sous différentiel des fonctions convexes

**Définition 1.2.3** Soit  $X$  un espace vectoriel en dualité séparante avec  $Y$  et  $f$  de  $X$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  une fonction convexe. Un élément  $y \in Y$  est dit sous-gradient de  $f$  en  $x$  si :

$$\forall z \in X, f(z) - f(x) \geq \langle z - x, y \rangle$$

L'ensemble des sous-gradients de  $f$  en  $x$  est appelé le sous -différentiel de  $f$  en  $x$  est noté  $\partial f(x)$ .

**Exemple 1.2.1** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe on montre que  $f$  est partout dérivable à droite et à gauche et que

$$\partial f(x) = \left[ f'_g(x), f'_d(x) \right]$$

**Théorème 1.2.2** Soit  $f \in \Gamma_0(X)$  il est équivalent de dire :

- i)  $y \in \partial f(x)$
- ii)  $x \in \partial f^*(y)$
- iii)  $f(x) + f^*(y) = \langle x, y \rangle$

Etudions alors le lien entre différentiabilité et la sous-différentiabilité.

**Définition 1.2.4** Soit  $X$  un espace vectoriel en dualité séparante avec  $Y$ ,  $f$  une fonction de  $X$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  et  $x_0 \in X$ . S'il existe  $y \in Y$  tel que

$$\forall x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} = \langle x, y \rangle$$

On dit que  $f$  est gâteaux-différentiable en  $x_0$  et on note  $y = f'(x_0)$ .

**Proposition 1.2.3** Soit  $f$  une fonction convexe de  $X$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , si  $f$  est gâteaux-différentiable en  $x_0$ ,  $f$  est sous-différentiable en  $x_0$  et  $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$ . Réciproquement si  $f$  est finie et continue en  $x_0$  et si  $\partial f(x_0) = \{y\}$ , alors  $f$  est gâteaux-différentiable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = y$ .

**Proposition 1.2.4** Soit  $E$  un espace normé et  $f$  une fonction convexe de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , alors

Si  $f$  est gâteaux-différentiable sur  $E$ , elle est Fréchet-différentiable sur  $E$  et sa Fréchet dérivée est égale à sa gâteaux-dérivée et est continue sur  $E$ .

### 1.2.3 Inf-convolution

**Définition 1.2.5** Soit  $X$  un espace vectoriel,  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , l'inf-convolution  $f \square g$  de  $f$  et  $g$  est la fonction définie par :

$$\forall x \in X, (f \square g)(x) = \inf \{f(x_1) + g(x_2); x_1 + x_2 = x\}$$

on a alors :

**Proposition 1.2.5** Soit  $X$  un espace vectoriel topologique localement convexe séparé  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  alors :

$$(f \square g)^* = f^* + g^*.$$

on peut tirer de cette proposition un résultat de sous-différentiabilité d'une somme de fonctions convexes qui nous sera utile, comme il ne semble pas être classique nous en donnons la démonstration.

**Proposition 1.2.6** *Soit  $X$  un espace vectoriel topologique localement convexe séparé de dual  $Y$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions dans  $\Gamma_0(X)$ , si  $f^* \square g^*$  est exacte pour tout  $y \in Y$  et est dans  $\Gamma_0(Y)$  alors*

$$\forall x \in X, \partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$$

**Démonstration.**

On a toujours

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f + g)(x)$$

par simple addition membre à membre de deux inégalités.

Réciproquement soit

$$y \in \partial(f + g)(x)$$

on a

$$(f + g)(x) + (f + g)^*(y) = \langle x, y \rangle$$

or

$$(f^* \square g^*)^* = f^{**} + g^{**} = f + g$$

d'où

$$(f + g)^* = (f^* \square g^*)^{**} = f^* \square g^*$$

l'inf-convolution étant exacte il vient :

$$f(x) + f^*(y_1) - \langle x, y_1 \rangle + g(x) + g^*(y_2) - \langle x, y_2 \rangle = 0$$

avec  $y_1 + y_2 = y$  or par définition de la conjuguée on a :

$$f(x) + f^*(y_1) - \langle x, y_1 \rangle \geq 0$$

$$g(x) + g^*(y_2) - \langle x, y_2 \rangle \geq 0$$

d'où ces deux termes sont nuls et on a bien  $y = y_1 + y_2$  avec  $y_1 \in \partial f(x)$  et  $y_2 \in \partial g(x)$ .

On utilisera par la suite un autre résultat de sous-différentiabilité ; si  $X$  est un espace normé,  $f$  et  $g$  deux fonctions convexes semi continue inférieurement et propres telles que  $0 \in \text{int}(\text{dom} f - \text{dom} g)$  alors pour tout

$$x \in X, \partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$$

■

### 1.2.4 Intégrandes normales

**Définition 1.2.6** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $B$  un borélien de  $\mathbb{R}^p$  une application  $f$  de  $\Omega \times B$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  est appelée une intégrande normale si

pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $f(x, \cdot)$  est semi continue inférieurement sur  $B$

il existe une fonction borélienne  $\tilde{f} : \Omega \times B \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  telle que pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $\tilde{f}(x, \cdot) = f(x, \cdot)$ .

L'intégrande normale est dite positive s'il existe une fonction  $a : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  intégrable telle que

$$\forall x \in \Omega, f(x, b) \geq a(x), \forall b \in B$$

**Proposition 1.2.7** Si  $f$  est une intégrande normale positive de  $\Omega \times B$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , alors la fonction :

$$\begin{aligned} F & : L^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^p) \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ u & \mapsto \int_{\Omega} f(x, u(x)) dx \end{aligned}$$

$1 \leq \alpha \leq +\infty$  est semi continue inférieurement, de plus si pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $f(x, \cdot)$  est convexe alors  $F$  est  $\sigma(L^\alpha, L^\beta)$  semi continue inférieurement où  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$

**Proposition 1.2.8** Soit  $f$  est une intégrande normale positive de  $\Omega \times B$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , et  $F$  définie comme ci-dessus. Supposons qu'il existe  $u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$  telle que  $F(u_0) < +\infty$  alors

$$\forall v \in L^\beta(\Omega, \mathbb{R}^p), F^*(v) = \int_{\Omega} f^*(x, v(x)) dx$$

la conjuguée étant prise par rapport à la deuxième variable.

**Proposition 1.2.9** Soit  $f$  une intégrande normale positive et convexe telle qu'il existe  $u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$  vérifiant  $F(u_0) < +\infty$  alors

$$\forall u \in L^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^p), \partial f(u) = \{v \in L^\beta(\Omega, \mathbb{R}^p); v(x) \in \partial f(x, u(x)) \text{ pp}\}$$

#### Démonstration.

Soit  $v \in L^\beta(\Omega, \mathbb{R}^p)$  tel que

$$v(x) \in \partial f(x, u(x)) \text{ pp}$$

alors pour tout  $\omega \in L^\alpha(\Omega, \mathbb{R}^p)$  on a

$$f(x, \omega(x)) - f(x, u(x)) \geq \langle v(x), \omega(x) - u(x) \rangle$$

d'où en intégrant

$$F(\omega) - F(u) \geq \langle v, \omega - u \rangle$$

d'où  $v \in \partial f(u)$ . Réciproquement soit  $v \in \partial f(u)$  on a :

$$F(u) + F^*(v) = \langle u, v \rangle$$

$$\int_{\Omega} [f(x, u(x)) + f^*(x, v(x)) - \langle u(x), v(x) \rangle] = 0$$

Or la fonction sous le signe  $\int$  est positive, son intégrale étant nulle elle est nulle presque partout et on a bien  $v(x) \in \partial f(x, u(x))$  pp. ■

### 1.2.5 Points critiques

**Définition 1.2.7** Soit  $E$  un espace normé,  $G$  une fonction convexe de  $E$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $H$  une fonction Fréchet-différentiable de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle point critique de la fonction

$$F = G + H$$

tout élément  $x \in E$  tel que

$$0 \in \partial G(x) + H'(x).$$

**Proposition 1.2.10** Si  $x_0$  est un minimum local de  $F$ , c'est alors un point critique de  $F$ .

#### Démonstration.

Soit  $r$  le rayon d'une boule centrée en  $x_0$  sur laquelle  $F$  atteint son minimum en  $x_0$ .  $G$  étant convexe on a :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in [0, 1], G(x) - G(x_0) \geq \frac{G(x_0 + \lambda(x - x_0)) - G(x_0)}{\lambda}$$

choisissons  $\lambda$  assez petit pour que  $\lambda \|x - x_0\| \leq r$  on a alors :

$$G(x_0 + \lambda(x - x_0)) - G(x_0) \geq -(H(x_0 + \lambda(x - x_0)) - H(x_0))$$

d'où

$$\begin{aligned} G(x) - G(x_0) &\geq \frac{-(H(x_0 + \lambda(x - x_0)) - H(x_0))}{\lambda} \\ &\geq \langle -H'(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{o(\lambda)}{\lambda} \end{aligned}$$

en faisant tendre  $\lambda$  vers  $0^+$  on a  $-H'(x_0) \in \partial G((x_0))$  d'où le résultat. ■

**Proposition 1.2.11** *Soit  $E$  un espace normé,  $K$  une fonction gâteaux-différentiable de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction convexe semi continue inférieurement propre telle que  $\text{dom} f$  soit dense dans  $E$ , on pose :*

$$B = \{x \in E, f(x) \leq c\}, \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

Supposons que  $K$  atteigne son minimum sur  $B$  en  $\bar{x}$  alors :  $K'(\bar{x}) \in \mathbb{R} \setminus \partial f(x)$ .

**Démonstration.**

Si  $K'(\bar{x}) = 0$  le résultat est démontré. On suppose donc que  $K'(\bar{x}) \neq 0$ . Posons

$$\Omega = \left\{ x \in E : \langle K'(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle < 0 \right\}$$

c'est un demi-espace ouvert de  $E$  posons  $A = \Omega \times ]-\infty, c[$

$$\text{épi} f = \{(x, \alpha) : x \in \text{dom} f, f(x) \leq \alpha\}$$

$A$  est convexe ouvert de  $E \times \mathbb{R}$  et  $\text{épi} f$  est un convexe fermé de  $E \times \mathbb{R}$ . On a  $\Omega \cap B = \emptyset$  en effet si  $x \in \Omega \cap B$  alors  $[x, \bar{x}]$  est inclus dans  $B$ , posons alors pour  $t \in [0, 1]$

$$g(t) = K(tx + (1-t)\bar{x}) \quad \text{on a } g'(0) = \langle K'(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle < 0$$

ce qui est contradictoire avec le fait que  $g$  atteint son minimum en 0. On en déduit que

$$\text{épi} f \cap A = \emptyset$$

en effet si

$$(x, \alpha) \in A \text{ on a } f(x) > c > \alpha$$

donc

$$(x, \alpha) \notin \text{épi} f$$

D'après le théorème de Hahn-Banach (deuxième forme géométrique) on peut séparer  $A$  et  $\text{épi} f$  par un hyperplan  $H$  de  $E \times \mathbb{R}$ .  $H$  n'est pas verticale car sinon il existerait  $E_1$  et  $E_2$

ouverts disjoints de  $E$  tels que  $\text{dom} f \subset E_1$  et  $A \subset E_2 \times \mathbb{R}$  ce qui contredit le fait que  $\text{dom} f$  soit dense dans  $E$ . Remarquons alors que  $(\bar{x}, c) \in \bar{A} \cap \text{épi} f$  donc  $H$  passe par  $(\bar{x}, c)$  donc  $H$  est le graphe d'une fonction affine de la forme  $\langle x^*, x - \bar{x} \rangle + c$  où  $x^* \in E$ . De part sa définition  $A$  est en dessous de  $H$  donc

$$\forall x \in \Omega, \alpha \prec \langle x^*, x - \bar{x} \rangle + c, \forall \alpha \prec c$$

d'où  $\Omega$  est contenu dans le demi espace défini par  $\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \succ 0$  donc  $x^* = \lambda K'(\bar{x})$  avec  $\lambda \prec 0$  par ailleurs  $\text{épi} f$  est au dessus de  $H$  donc :

$$\forall x \in \text{dom} f, f(x) \geq \langle x^*, x - \bar{x} \rangle + f(\bar{x})$$

donc  $x^* \in \partial f(\bar{x})$  d'où le résultat. ■

Nous démontrons une majoration qui nous sera utile.

**Proposition 1.2.12** *Soit*

$$\begin{aligned} E_\alpha &= L^\alpha(0, T, \mathbb{R}^n) \quad \alpha \geq 1 \\ F_\alpha &= \left\{ \dot{u} \in E_\alpha; \int_0^T \dot{u} dt = 0 \right\} \end{aligned}$$

pour  $\dot{u} \in F$  on considère  $u$  sa primitive de moyenne nulle alors :

$$\|u\|_\beta \leq \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{2}{\beta}} \|\dot{u}\|_\alpha \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

**Démonstration.**

Définissons

$$\begin{aligned} A_{(\alpha, \beta)} &: F_\alpha \rightarrow F_\beta \\ \dot{u} &\mapsto u \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{(\alpha, \beta)} &: E_\alpha \rightarrow E_\beta \\ \dot{u} &\mapsto A_{(\alpha, \beta)}(p(\dot{u})) \end{aligned}$$

est  $p$  est la projection de  $E_\alpha$  dans  $F_\alpha$ .  $\tilde{A}_{(\alpha, \beta)}$  et  $A_{(\alpha, \beta)}$  sont des opérateurs linéaires tels que

$$\|\tilde{A}_{(\alpha, \beta)}\| < \|A_{(\alpha, \beta)}\|.$$

pour  $\alpha = 2, \beta = 2$  on a  $\|A_{(2,2)}\| = \frac{T}{2\pi}$  et pour  $\alpha = 1, \beta = +\infty$  on a  $\|A_{(1,\infty)}\| \leq 1$ , un théorème de Riesz montre que  $\log \|\tilde{A}_{(\alpha,\beta)}\|$  est une fonction convexe de  $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$ , or si  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ , on a

$$\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) = \frac{2}{\beta} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) (1, 0)$$

d'où

$$\begin{aligned} \log \|\tilde{A}_{(\alpha,\beta)}\| &\leq \frac{2}{\beta} \log \|\tilde{A}_{(2,2)}\| + \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \log \|A_{(\alpha,\infty)}\| \\ \|\tilde{A}_{(\alpha,\beta)}\| &\leq \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{2}{\beta}} \end{aligned}$$

on a donc bien :

$$\forall u \in F_\alpha, \|u\|_\beta \leq \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{2}{\beta}} \|u\|_\alpha.$$

■

---

# Principe dual de moindre action

Ce deuxième chapitre va nous servir à nous fixer les idées sur ce qu'est le principe dual de moindre action. Le principe de moindre action prend ses racines sur un principe philosophique d'économie naturelle : "la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples" il a évolué au cours des siècles par la mathématisation de cette phrase. Ce principe présente de multiples avantages, comme on le verra. En outre, cette approche a des applications variées.

## 2.1 Principe de Maupertuis

Considérons le problème de calcul des variations :

$$(H) \begin{cases} \int_0^T \left[ \frac{\langle \sigma(\dot{u}), u \rangle}{2} + H(t, u) \right] dt \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

Ecrivons l'équation d'**Euler-Lagrange** associée à ce problème.

$$L(t, u, \dot{u}) = \frac{\langle \sigma(\dot{u}), u \rangle}{2} + H(t, u)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}(t, u, \dot{u}) = \frac{-\sigma(u)}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u}(t, u, \dot{u}) = \frac{\sigma(\dot{u})}{2} + \frac{\partial H}{\partial u}(t, u)$$

donc

$$-\sigma(\dot{u}) = \frac{\partial H}{\partial u}(t, u)$$

$$\dot{u} = \sigma \frac{\partial H}{\partial u}(t, u) \text{ et } u(0) = u(T)$$

donc les extrémales de  $(H)$  sont des solutions du problème aux limites :

$$(P) \begin{cases} \dot{u} = \sigma \frac{\partial H}{\partial u}(t, u) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

Dans la pratique la recherche d'extrema du problème  $(H)$  résiste à une attaque directe car le problème  $(H)$  est en générale non borné. Récemment **F. Clarke** et **I. Ekeland** ont introduit une fonctionnelle, d'étude directe plus aisée et dont les extrémales conduisent à des solutions de  $(P)$ . La fonctionnelle ainsi introduite peut être minimisée ou pourvue de points critiques décelés grâce à diverses méthodes de l'analyse non linéaire.

## 2.2 Principe dual de moindre action de Clarke-Ekeland

Lorsque le hamiltonien  $H$  est une fonction convexe, une formulation -dite dual- a été introduite par **Clarke** et **Ekeland**.

Soit

$$\begin{aligned} H & : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, u) & \mapsto H(t, u) \end{aligned}$$

vérifiant :

$$\mathbf{H}_1 : \forall t \in \mathbb{R}, H(t, \cdot) \text{ est convexe et } \lim_{|u| \rightarrow +\infty} H(t, u) = +\infty,$$

On remarque donc que  $H(t, \cdot)$  est continue car convexe et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . De plus cette fonction atteint son minimum sur  $\mathbb{R}^{2n}$ .

$$\mathbf{H}_2 : \forall u \in \mathbb{R}^{2n}, H(\cdot, u) \text{ est mesurable.}$$

On pose alors  $G(t, \cdot) = (H(t, \cdot))^*$  c'est à dire que

$$\forall v \in \mathbb{R}^{2n}, G(t, v) = \sup_{u \in \mathbb{R}^{2n}} (u \cdot v - H(t, u)).$$

$$\mathbf{H}_3 : H(t, 0) \text{ et } G(t, 0) \text{ sont intégrables sur } [0, T].$$

Ceci permet d'affirmer que  $G$  et  $H$  sont des intégrandes normales positives car

$$H(t, u) \geq -G(t, 0)$$

$$G(t, v) \geq -H(t, 0)$$

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  définis par  $\alpha \geq 1$  et  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$  posons

$$\begin{aligned} E_\alpha &= L^\alpha([0, T], \mathbb{R}^{2n}) \\ F_\alpha &= \left\{ \dot{v} \in E_\alpha; \int_0^T \dot{v} dt = 0 \right\} \end{aligned}$$

On définit alors

$$\begin{aligned} K &: E_\alpha \rightarrow \mathbb{R} \\ \dot{v} &\mapsto \frac{1}{2} \langle \sigma(\dot{v}), v \rangle = \frac{1}{2} \int_0^T (\sigma(\dot{v}) \cdot v) dt \end{aligned}$$

ou  $v$  est la primitive de moyenne nulle de  $\dot{v}$ .

$$\begin{aligned} J_\alpha &: E_\alpha \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \dot{v} &\mapsto \int_0^T G(t, \dot{v}) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{F_\alpha} &: E_\alpha \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \dot{v} &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{v} \in F_\alpha \\ +\infty & \text{si } \dot{v} \notin F_\alpha \end{cases} \end{aligned}$$

De plus  $J_\alpha^* : E_\beta \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est définie par

$$J_\alpha^*(\dot{u}) = \int_0^T H(t, \dot{u}) dt$$

On note également que :

$$\partial J_\alpha(\dot{v}) = \{\dot{u} \in E_\beta; \dot{u} \in \partial G(t, \dot{v}) pp\}$$

Supposons enfin que l'on a :

$$\mathbf{H}_4 : H(t, u) \leq c|u|^\beta + a(s) \text{ ou } a \in L^1[0, T] \text{ et } c > 0 \text{ dans le cas où } \beta < +\infty.$$

$$\int_0^T H(t, \xi) dt < +\infty \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{2n} \text{ dans le cas où } \beta = +\infty.$$

ou

$\mathbf{H}'_4$  : il existe  $\eta > 0$  tel que pour  $|\xi| \leq \eta$  on ait

$$\int_0^T G(t, \xi) dt < +\infty$$

On a alors

**Théorème 2.2.1** *Sous les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$  ou  $H_4'$ , s'il existe  $\alpha \geq 1$  tel que la fonction*

$$I : F_\alpha \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

définie par  $I = J_\alpha + K$ , ait un point critique  $\dot{v} \in F_\alpha$ , alors il existe  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $u = \sigma(v) + \xi$  soit solution de :

$$(P) \begin{cases} \dot{u} \in \sigma \partial H(t, u) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

**Remarque 2.2.1** *Le principe dual de moindre action n'est autre que la généralisation de l'équation d'Euler-Lagrange du problème :*

$$(P^*) \begin{cases} \int_0^T \left[ \frac{\langle \sigma(\dot{v}), v \rangle}{2} + G(t, \dot{v}) \right] dt \\ v(0) = v(T) \end{cases}$$

En effet, si  $G$  possède la régularité voulue et si  $(P^*)$  admet un extrémum en  $\dot{v}$ , les conditions nécessaires donnent :

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{\sigma(v)}{2} + \frac{\partial G}{\partial v}(t, \dot{v}) \right) = \frac{1}{2} \sigma(\dot{v})$$

d'où  $\sigma(v) + \xi = \frac{\partial G}{\partial v}(t, \dot{v})$ , posons alors  $u = \sigma(v) + \xi$  on a

$$u = \frac{\partial G}{\partial v}(t, \sigma^{-1}(\dot{u}))$$

utilisons le théorème 1.2.2 il vient

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(\dot{u}) &= \frac{\partial H}{\partial u}(t, u) \\ \dot{u} &\in \sigma \left( \frac{\partial H}{\partial t}(t, u) \right) \text{ et } u(0) = u(T) \end{aligned}$$

car

$$\int_0^T \dot{u} dt = \int_0^T \sigma(\dot{v}) dt = 0$$

**Démonstration.** (du théorème 2.2.1)

**1<sup>er</sup> point :**  $K$  est Fréchet-différentiable sur  $F_\alpha$  et  $K'(\dot{v}) = -\sigma(v)$ . En effet  $F_\alpha$  est un espace de Banach dont le dual s'identifie à  $F_\beta$  où  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$  on a alors :

$$K(\dot{v} + \dot{h}) = K(\dot{v}) + \frac{1}{2} \langle \dot{h}, -\sigma(v) \rangle + \frac{1}{2} \langle \sigma(\dot{v}), \dot{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle \sigma(\dot{h}), \dot{h} \rangle$$

or

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\dot{v}), h \rangle &= [\sigma(v) \cdot h]_0^T - \langle \sigma(v), \dot{h} \rangle \\ &= - \langle \sigma(v), \dot{h} \rangle \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \sigma(v)(0) &= \sigma(v)(T) \\ h(0) &= h(T) \end{aligned}$$

Appliquons deux fois l'inégalité de Hölder il vient

$$\left| \langle \sigma(\dot{h}), h \rangle \right| \leq T^{\frac{2}{\beta}} \left\| \dot{h} \right\|_{\alpha}^2$$

d'où

$$K(\dot{v} + \dot{h}) = K(\dot{v}) + \langle -\sigma(v), \dot{h} \rangle + o\left(\left\| \dot{h} \right\|_{\alpha}\right)$$

comme on a  $-\sigma(v) \in F_{\beta} = (F_{\alpha})'$  on a bien le résultat.

**2<sup>ème</sup> point** : le sous-différentiel de  $J_{\alpha}$  dans  $F_{\alpha}$  est égale à :

$$\bar{\partial}J_{\alpha}(\dot{v}) = \left\{ \dot{u} \in F_{\beta} ; \exists \xi \in \mathbb{R}^{2n}, \dot{u} - \xi \in \partial G(t, \dot{v}) \right\}$$

où on introduit la notation  $\bar{\partial}$  pour distinguer les sous-différentiels dans  $E_{\alpha}$  et dans  $F_{\alpha}$ .

En effet

Si  $\dot{u} \in F_{\beta}$  vérifie  $\dot{u} - \xi \in \partial G(t, \dot{v})$  alors

$$G(t, \dot{w}) - G(t, \dot{v}) \geq \langle \dot{u} - \xi, \dot{w} - \dot{v} \rangle$$

d'où en intégrant :

$$J_{\alpha}(\dot{w}) - J_{\alpha}(\dot{v}) \geq \langle \dot{u}, \dot{w} - \dot{v} \rangle$$

car on a

$$\langle \xi, \dot{w} - \dot{v} \rangle = 0, \text{ d'où } \dot{u} \in \bar{\partial}J_{\alpha}(\dot{v})$$

Réciproquement ; soit  $\dot{u} \in \bar{\partial}J_{\alpha}(\dot{v})$  alors il est clair que  $\dot{u} \in \partial(J_{\alpha} + \delta_{F_{\alpha}})(\dot{v})$ ,  $\partial$  désignant le sous-différentiel dans  $E_{\alpha}$ . Le résultat sera donc démontré si on a

$$\partial(J_{\alpha} + \delta_{F_{\alpha}})(\dot{v}) = \partial J_{\alpha}(\dot{v}) + \partial \delta_{F_{\alpha}}(\dot{v})$$

car  $\partial \delta_{F_{\alpha}}(\dot{v})$  est trivialement égale à l'ensemble des fonctions constantes et

$$\partial J_{\alpha}(\dot{v}) = \left\{ \dot{u} \in E_{\beta}, \dot{u} \in \partial G(t, \dot{v}) \text{ pp} \right\}$$

Etablissons que

$$\partial(J_\alpha + \delta_{F_\alpha})(\dot{v}) = \partial J_\alpha(\dot{v}) + \partial \delta_{F_\alpha}(\dot{v}).$$

Cas de l'hypothèse  $\mathbf{H}'_4$

On sait que  $\int_0^T G(t, \xi) dt \prec +\infty$  pour  $|\xi| \leq \eta$ , soit alors  $\dot{v} \in E_\alpha$  tel que  $\|\dot{v}\| \leq T^{-\frac{1}{\alpha}} \eta$  on a  $\dot{v} = \dot{w} + \xi$ . Où  $\dot{w} \in F_\beta$  et

$$\xi = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{v} dt$$

on a

$$|\xi| \leq T^{-\frac{1}{\alpha}} \|\dot{v}\|_\alpha \leq \eta$$

D'où  $\dot{v} \in \text{dom}(\delta_{F_\alpha}) - \text{dom}(J_\alpha)$  on a donc

$$0 \in \text{Int}(\text{dom}(J_\alpha) - \text{dom}(\delta_{F_\alpha}))$$

Ce qui permet de dire que

$$\partial(J_\alpha + \delta_{F_\alpha})(\dot{v}) = \partial J_\alpha(\dot{v}) + \partial \delta_{F_\alpha}(\dot{v})$$

Cas de l'hypothèse  $\mathbf{H}_4$

On a  $\delta_{F_\alpha}^* = \delta_C$  où  $C$  est l'ensemble des fonctions constantes donc

$$\forall \dot{u} \in E_\beta, (J_\alpha^* \square \delta_{F_\alpha}^*)(\dot{u}) = \inf_{c \in \mathbb{R}^{2n}} \int_0^T H(t, \dot{u} + c) dt$$

si  $\beta \prec +\infty$  on a

$$(J_\alpha^* \square \delta_{F_\alpha}^*)(\dot{u}) \leq c \|\dot{u}\|_\beta^\beta + \int_0^T a(s) ds$$

donc  $(J_\alpha^* \square \delta_{F_\alpha}^*)$  est continue (proposition 1.2.1) donc semi continue inférieurement.

Si  $\beta = +\infty$ , soit  $\|\dot{u}\|_\infty \leq r$  et  $\xi_1, \dots, \xi_{2n+1}$  tels que la boule de centre 0 et de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  soit contenue dans l'enveloppe convexe de ces vecteurs.

Par convexité on a

$$(J_\alpha^* \square \delta_{F_\alpha}^*)(u) \leq \max_{1 \leq i \leq 2n+1} \left( \int_0^T H(t, \xi_i) dt \right) \prec +\infty$$

donc d'après la proposition 1.2.1 cette fonction est continue, donc semi continue inférieurement. Il ne reste plus qu'à montrer que l'inf-convolution est exacte pour pouvoir appliquer la proposition 1.2.6. Pour ceci posons

$$f(c) = \int_0^T H(t, \dot{u} + c) dt$$

$f$  est convexe, partout finie donc continue, il suffit donc de montrer que

$$\lim_{|c| \rightarrow +\infty} f(c) = +\infty$$

pour garantir que  $f$  atteint son minimum sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . Soit donc  $c_k$  tel que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |c_k| = +\infty$  on a

$$H(t, u(t) + c_k) \geq -G(t, 0)$$

On peut donc appliquer le lemme de Fatou, d'après **H<sub>1</sub>**

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} H(t, \dot{u}(t) + c_k) = +\infty$$

on a  $\liminf_{k \rightarrow +\infty} f(c_k) = +\infty$  d'où le résultat.

**3<sup>ème</sup> point**, soit  $\dot{v} \in F_\alpha$  un point critique de  $J_\alpha + K$  dans  $F_\alpha$ .

On a donc  $-K'(\dot{v}) \in \bar{\partial}J_\alpha(v)$  donc d'après ce qui précède il existe  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que

$$\sigma(v) + \xi \in \partial G(t, \dot{v}) \text{ pp}$$

posons  $u = \sigma(v) + \xi$  il vient

$$u \in \partial G(t, \sigma^{-1}(\dot{u})), u \in \sigma \partial H(t, u)$$

de plus  $u(0) - u(T) = \int_0^T \sigma(\dot{v}) dt = 0$  ce qui achève la démonstration. ■

**Théorème 2.2.2** Soit  $H$  vérifiant les hypothèses **H<sub>1</sub>**, **H<sub>2</sub>**, **H<sub>3</sub>** et **H<sub>4</sub>** avec  $\beta = +\infty$ . Soit  $\Psi$  une fonction croissante continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  et

$$B(c) = \left\{ \dot{v} \in F_1; \int_0^T \Psi(|\dot{v}|) dt \leq c \right\}$$

Soit  $J_1$  et  $K$  définis au théorème précédent alors : si  $\dot{v} \in B(c)$  réalise le minimum de  $I = J_1 + K$  sur  $B(c)$ , si  $I(\dot{v}) \prec +\infty$  et

$$\int_0^T \Psi(|\dot{v}|) dt \leq c$$

il existe  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $u = \sigma(v) + \xi$  est solution de :

$$\begin{cases} \dot{u} \in \sigma \partial H(t, u) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

**Démonstration.**

On a  $\int_0^T \Psi(|\dot{v}|) dt \leq c$  donc  $\int_0^T \Psi(|\dot{v}|) dt + \varepsilon \leq c$  pour  $\varepsilon$  assez petit. Posons

$$f(t) = \Psi(|\dot{v}(t)|) + \frac{\varepsilon}{T}$$

on a

$$f \in L^1([0, T]; \mathbb{R}), \Psi(|\dot{v}|) \prec f, \int_0^T f dt \prec c$$

$\Psi$  étant croissante et continue, on définit une boule fermée  $B(t)$  de centre 0 et de rayon  $r(t)$  par

$$u \in B(t) \Leftrightarrow \Psi(|u|) \leq f(t)$$

on remarque que  $B(t)$  est un voisinage de  $\dot{v}(t)$ . Posons

$$\bar{G}(t, v) = G(t, v) + \delta_{B(t)}(v) = \begin{cases} G(t, v) & \text{si } v \in B(t) \\ +\infty & \text{si } v \notin B(t) \end{cases}$$

$\bar{G}(t, v)$  est alors convexe, semi continue inférieurement et propre.

posons  $\bar{H}(t, \cdot) = (\bar{G}(t, \cdot))^*$  c'est à dire que

$$\bar{H}(t, u) = \sup_{v \in B(t)} (u \cdot v - G(t, v))$$

on a  $\bar{H} \leq H$  donc  $\bar{H}(t, \cdot)$  est convexe continue, de plus  $\bar{H}(\cdot, u)$  est mesurable donc  $\bar{H}$  est une intégrande normale.

De plus

$$\begin{aligned} \bar{G}(t, 0) &= G(t, 0) \\ -G(t, 0) &\leq \bar{H}(t, 0) \leq H(t, 0) \end{aligned}$$

donc  $\bar{H}(t, 0)$  est intégrable.

Montrons alors que  $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \bar{H}(t, u) = +\infty$ .

Dans le cas contraire il existerait  $u_k \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |u_k| = +\infty \text{ et } \bar{H}(t, u_k) \leq h < +\infty$$

On aurait donc

$$\forall v \in B(t), u_k v \leq h + G(t, v)$$

or on a  $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} H(t, u) = +\infty$ , on a alors  $0 \in \text{dom } G(t, \cdot)$  donc  $G(t, \cdot)$  est continue donc bornée pour  $|v| \leq \eta$ , on aurait donc

$$\forall |v| < \eta, u_k \cdot v \leq h + m \text{ or si on pose } v = \eta \frac{u_k}{|u_k|}$$

on a donc  $\eta |u_k| \leq h + m$  ce qui est impossible car  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |u_k| = +\infty$ .

$\bar{H}$  vérifie donc les hypothèses  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{H}_3$  et  $\mathbf{H}_4$  de théorème 2.2.1 avec  $\alpha = 1$ . Remarquons alors que

$$\left. \begin{array}{l} v \in \partial \bar{H}(t, u) \\ |v| < r(t) \end{array} \right\} \implies \bar{H}(t, u) = H(t, u) \text{ et } v \in \partial H(t, u) \quad (2.2.1)$$

en effet si  $v \in \partial \bar{H}(t, u)$  alors  $u \in \partial \bar{G}(t, v)$  donc pour tout  $w \in B(t)$  on a

$$G(t, w) - G(t, v) \geq (uw - v)$$

donc la fonction  $G(t, w) - (vw)$  admet un minimum local en  $v$ , comme c'est une fonction convexe ce minimum est globale donc

$$u \in \partial G(t, v) \text{ d'où } v \in \partial H(t, u)$$

de plus

$$\begin{aligned} \bar{H}(t, u) &= uv - \bar{G}(t, v) \\ &= uv - G(t, v) \\ &= H(t, u) \end{aligned}$$

Posons alors

$$\bar{J}_1(\dot{v}) = \int_0^T \bar{G}(t, v) dt \text{ pour } \dot{v} \in F_1 \text{ et } \bar{I} = \bar{J}_1 + K$$

Si  $\dot{w} \in B(c)$  on a  $\bar{I}(\dot{w}) \geq I(\dot{w}) \geq I(\dot{v}) = \bar{I}(\dot{v})$ .

Si  $\dot{w} \notin B(c)$  alors  $\int_0^T \Psi(|\dot{w}|) dt \succ c$  et l'ensemble

$$S = \{t \in [0, T] . \Psi(|\dot{w}(t)|) \succ f(t)\}$$

est de mesure non-nulle et donc  $\bar{J}(\dot{w}) = +\infty$  d'où  $\bar{I}(\dot{w}) = +\infty$

$\bar{I}$  atteint donc son minimum sur  $F_1$  en  $\dot{v}$ , comme on peut appliquer le théorème 2.2.1, il existe  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $u = \sigma(v) + \xi$  vérifie

$$\begin{cases} \dot{u} \in \partial \bar{H}(t, u) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

Or  $|\dot{u}(t)| = |\dot{v}(t)| = |\sigma^{-1}\dot{u}(t)|$  donc  $|\dot{v}(t)| \prec r(t)$  et d'après (2.2.1)

$$\begin{cases} \dot{u} \in \sigma\partial H(t, u) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration. ■

---

# Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens

Dans ce chapitre nous présentons les solutions périodiques de systèmes hamiltoniens. Dans l'étude des orbites périodiques de ces systèmes, on peut dégager trois types de problèmes :

Orbites périodiques sur une surface d'énergie donnée.

Vibrations libres ou forcées.

Les solutions périodiques au voisinage d'une solution donnée.

## 3.1 Cas des hamiltoniens à croissance sous-quadratique

Dans cette section on suppose que le hamiltonien  $H$  est majoré par une expression de la forme

$$\frac{k}{2} |u|^2 + a$$

ce qui est le cas par exemple de  $H(u) = c |u|^\alpha$ ,  $1 < \alpha < 2$ .

### 3.1.1 Vibrations forcées

On considère  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$\mathbf{H}_1$  :  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $H(t, \cdot)$  est convexe

$\mathbf{H}_2$  :  $\forall u \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $H(\cdot, u)$  est mesurable .

$\mathbf{H}_3$  :  $h(t) \leq H(t, u) \leq \frac{k}{2} |u|^2 + a$  pour tout  $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$  où  $h$  est intégrable sur  $[0, T]$ ,  $k > 0$  et  $a \geq 0$ .

On remarque que

$$G(t, v) \geq \frac{1}{2k} |v|^2 - a \text{ où } G(t, \cdot) = (H(t, \cdot))^*$$

on a donc  $H(t, 0)$  et  $G(t, 0)$  sont intégrables sur  $[0, T]$ , les hypothèses  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{H}_3$  et  $\mathbf{H}_4$  avec  $\alpha = 2$  sont vérifiées, on peut appliquer le principe dual de moindre action pour rechercher des solutions de

$$\begin{cases} u \in \sigma\partial H(t, u) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

Donnons un exemple d'une classe de hamiltoniens vérifiant les hypothèses ci-dessus.

Soit

$$H(t, u) = \sigma H(u) - (f(t)) \cdot u$$

le système prend alors la forme

$$\begin{cases} \dot{u} \in \sigma\partial H(u) + f(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

On suppose que  $H$  est convexe, bornée inférieurement et vérifie

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{H(u)}{|u|} = 0$$

$f$  est mesurable et bornée sur  $[0, T]$ .

On a  $G(t, v) = G(v + \sigma f(t))$  où  $G = H^*$ , on suppose que  $G(\sigma f(t))$  est intégrable sur  $[0, T]$  ce qui permet d'affirmer que

$$H(t, u) \geq -G(\sigma f(t))$$

$k$  étant fixé on a  $H(t, u) \leq \frac{k}{2} |u|^2$  pour tout  $t$  et pour tout  $|u| \geq r$ . Il suffit de poser

$$a = \sup \left\{ H(t, u) - \frac{k}{2} |u|^2 ; t \in \mathbb{R}, |u| \leq r \right\}$$

et on a  $\mathbf{H}_3$ . On a alors

**Théorème 3.1.1** *Sous les hypothèses  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3$  et si  $T < \frac{2\pi}{k}$ , il existe une solution de*

$$(P) \begin{cases} \dot{u} \in \sigma\partial H(t, u) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

**Démonstration.**

$$\begin{aligned} E_2 &= L^2([0, T], \mathbb{R}^{2n}) \\ F_2 &= \left\{ \dot{v} \in E_2 : \int_0^T \dot{v} dt = 0 \right\} \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} K &: F_2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \dot{v} &\mapsto \frac{1}{2} \langle \sigma(\dot{v}), v \rangle = \frac{1}{2} \int_0^T (\sigma(\dot{v}) \cdot v) dt \\ J &: E_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \dot{v} &\mapsto \int_0^T G(t, \dot{v}) dt \\ I &= J + K \end{aligned}$$

Montrons que  $I$  atteint son minimum sur  $F_2$ .

**1<sup>er</sup> point :** on a  $H(t, u) \leq \frac{k}{2} |u|^2 + a$  donc en prenant les conjuguées des deux membres

$$G(t, v) \geq \frac{1}{2k} |v|^2 - a$$

d'où

$$J(\dot{v}) \geq \frac{\|\dot{v}\|^2}{2k} - aT$$

$\|\cdot\|$  désignant la norme de  $L^2([0, T], \mathbb{R}^{2n})$  on a aussi

$$\begin{aligned} |K(\dot{v})| &\leq \frac{1}{2} \|\sigma(\dot{v})\| \|v\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\dot{v}\| \|v\| \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n \neq 0} c_n \exp \frac{2\pi i n t}{T} \quad \text{car } c_0 = \int_0^T v dt = 0 \\ \dot{v} &= \sum_{n \neq 0} \frac{2\pi i n}{T} c_n \exp \frac{2\pi i n t}{T} \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|\dot{v}\|^2 &= T \sum_{n \neq 0} \frac{4\pi^2 n^2}{T^2} |c_n|^2 \\ &\geq T \frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{n \neq 0} |c_n|^2 \\ &\succ \frac{4\pi^2}{T^2} \|v\|^2 \quad \text{d'où } \|v\| \leq \frac{T}{2\pi} \|\dot{v}\| \end{aligned}$$

On a donc

$$|K(\dot{v})| \leq \frac{1}{2} \frac{T}{2\pi} \|\dot{v}\|^2 \text{ d'où } I(\dot{v}) \geq \frac{\|\dot{v}\|^2}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{T}{2\pi} \right) - aT$$

Remarquons que  $\left(\frac{1}{k} - \frac{T}{2\pi}\right) \succ 0$  ce qui montre que

$$\inf_{\dot{v} \in F_2} I(\dot{v}) \succ -\infty \text{ et } \lim_{\|\dot{v}\| \rightarrow +\infty} I(\dot{v}) = +\infty$$

$G$  étant une intégrande normale positive,  $J$  est  $\sigma(F_2, F_2)$  semi continue inférieurement (proposition 1.2.7). Soit alors  $r \geq 0$  tel que  $I(v) \succ I(0)$  pour  $\|v\| \succ r$ , la boule  $B$  de centre 0 et de rayon  $r$  est faiblement compacte dans  $F_2$ .  $K$  est alors faiblement continue dans  $B$ . En effet

$$K(\dot{v}) = \frac{1}{2} \int_0^T (\sigma(\dot{v}) \cdot v) dt$$

Comme

$$\int_0^T \dot{v} dt = 0$$

on peut supposer que  $v(0) = 0$ . Soit  $\dot{v}_n$  convergeant faiblement vers  $\dot{v}$  dans  $B$ ,

$$\text{on a } v_n(t) = \int_0^t \dot{v}_n ds$$

$$\text{converge simplement vers } v(t) = \int_0^t \dot{v} ds$$

de plus

$$|v_n(t)| \leq T^{\frac{1}{2}} \|\dot{v}_n\| \leq T^{\frac{1}{2}} r$$

donc d'après le théorème de Lebesgue,  $v_n$  converge fortement vers  $v$ .

$$\begin{aligned} |K(\dot{v}_n) - K(\dot{v})| &\leq \frac{1}{2} [|\langle \sigma(\dot{v}_n), v_n - v \rangle| + |\langle \sigma(\dot{v}_n) - \sigma(\dot{v}), v \rangle|] \\ &\leq \frac{1}{2} (r \|v_n - v\| + |\langle \sigma(\dot{v}_n) - \sigma(\dot{v}), v \rangle|) \end{aligned}$$

On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K(\dot{v}_n) = K(\dot{v})$  donc  $K$  est faiblement semi continue inférieurement sur  $B$ .  $I = J + K$  est donc faiblement semi continue inférieurement sur le compact faible  $B$ , d'où  $I$  atteint son minimum sur  $B$ , comme  $I(\dot{v}) > I(0)$  pour  $\dot{v} \notin B$ ,  $I$  atteint son minimum sur  $F_2$ .

D'après le théorème 2.2.1. On sait qu'il existe alors  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $u = \sigma(v) + \xi$  soit solution de  $(P)$  ce qui achève la démonstration du théorème. ■

### Etude d'un cas particulier

On suppose que

$$H(t, u) = \frac{1}{2}p^2 + U(t, x) \text{ où } u = (x, p)$$

$U$  étant convexe en  $x$ , les équations (P) deviennent

$$(N) \begin{cases} \ddot{x} \in -\partial U(t, x) \\ x(0) = x(T) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{cases}$$

On suppose que :

- (1)  $\begin{cases} U(t, \cdot) \text{ est convexe pour tout } t \in \mathbb{R}. \\ U(\cdot, x) \text{ est mesurable pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$   
 (2) il existe  $k > 0$ ,  $a \geq 0$  et  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable sur  $[0, T]$  telle que :

$$h(t) \leq U(t, x) \leq \frac{k}{2}|x|^2 + a$$

Posons

$$\xi = k^{\frac{1}{4}}x, \quad \pi = k^{\frac{1}{4}}p$$

et

$$(P)(t, \xi, \pi) = H(t, x, p) = k^{\frac{1}{2}}\frac{\pi^2}{2} + U\left(t, k^{\frac{1}{4}}x\right)$$

on a

$$(P)(t, \xi, \pi) \leq \frac{\sqrt{k}}{2}(\xi^2 + \pi^2) + a$$

$$h(t) \leq (P)(t, \xi, \pi) \text{ soit } T < \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

On peut appliquer le théorème 3.1.1 et obtenir ainsi une solution de

$$\begin{cases} k^{-\frac{1}{2}}\ddot{\xi} \in -k^{-\frac{1}{4}}\partial U\left(t, k^{-\frac{1}{4}}x\right) \\ \xi(0) = \xi(T) \\ \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}(T) \end{cases}$$

et donc une solution de (N).

Il serait intéressant de savoir ce qui se passe pour  $T > \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ .

En effet si

$$U(t, x) = \frac{k}{2}|x|^2 + f(t)x$$

où  $f$  est  $T$ -périodique, mesurable et bornée. On a

$$U(t, x) \leq \frac{k}{2} |x|^2 \text{ pour } |x| \geq \frac{2 \|f\|_\infty}{k}$$

Posant

$$a = \max \left[ 0, \sup_{|x| \leq \frac{2 \|f\|_\infty}{k}} \left( U(t, x) - \frac{k}{2} |x|^2 \right) \right]$$

Il vient

$$\begin{cases} U(t, x) \leq \frac{k}{2} |x|^2 + a \\ U(t, x) \geq -\frac{|f(t)|^2}{2k} \end{cases}$$

On sait donc que si  $T < \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$  on a une solution  $T$ -périodique de :

$$\ddot{x} + kx = f(t)$$

Mais pour  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$  il se produit le phénomène de résonance et on n'a pas de solution  $T$ -périodique.

### 3.1.2 Vibrations libres

$H$  ne dépend pas du temps, on s'intéresse à la solution de

$$(H) \begin{cases} \dot{u} \in \sigma \partial H(u) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

Dans le cas où  $H$  est de classe  $C^1$  on sait que  $H(u(t))$  est constant pour toute solution de

$$u = \sigma H'(u)$$

en effet

$$\frac{d}{dt} H(u(t)) = H'(u) \cdot \sigma H'(u) = 0$$

on a alors le

**Lemme 3.1.1** *Si  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et si la fonction absolument continue  $H(\cdot)$  est solution de  $\dot{u} \in \sigma \partial H(u)$ , alors  $H(u(t))$  est constant.*

**Démonstration.**

On a  $-\sigma(\dot{u}) \in \partial H(u)$  donc par définition du sous-différentiel

$$H(u(t+\tau)) - H(u(t)) \geq \langle -\sigma(\dot{u}(t)), u(t+\tau) - u(t) \rangle$$

Si  $u$  est dérivable en  $t$  on a donc

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{H(u(t+\tau)) - H(u(t))}{\tau} \geq \langle -\sigma(\dot{u}(t)), \dot{u}(t) \rangle = 0$$

et de même

$$\liminf_{t \rightarrow 0^-} \frac{H(u(t+\tau)) - H(u(t))}{\tau} \leq 0$$

or  $H$  est localement lipschitzienne car convexe donc

$$|H(u(t)) - H(u(s))| \leq c|u(t) - u(s)|$$

comme  $u(\cdot)$  est absolument continue il en est donc de même de  $H \circ u$ . Choisissons alors  $t$  tel que  $u(\cdot)$  et  $H \circ u$  soient dérivable en  $t$  on obtient

$$\begin{cases} (H \circ u)'_d(t) \geq 0 \\ (H \circ u)'_g(t) \leq 0 \end{cases}$$

Donc  $(H \circ u)'(t) = 0$  et ceci presque partout, d'où le résultat. ■

Pour chercher des solutions périodiques de  $(H)$  nous supposons qu'il existe une position d'équilibre, c'est à dire qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $0 \in \partial H(x_0)$ , la fonction  $H$  étant convexe cela revient à dire qu'elle atteint son minimum, par translation nous supposons ce dernier nul et atteint à l'origine.

$H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie

$\mathbf{H}_1$  :  $H$  est convexe,  $\forall u \in \mathbb{R}^{2n}, 0 = H(0) \leq H(u)$

$\mathbf{H}_2$  : Il existe  $v > k > 0, \eta > 0, a \geq 0$  tels que

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{R}^{2n}, H(u) &\leq \frac{k}{2}|u|^2 + a \\ \forall |u| \leq \eta, \frac{k}{2}|u|^2 &\leq H(u) \end{aligned}$$

De part l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$ , la fonction  $u(t) = 0$  est solution périodique de  $(H)$ , on dira que c'est la solution triviale. On a alors le

**Théorème 3.1.2** *Sous les hypothèses  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  et si  $T \in \left] \frac{2\pi}{v}, \frac{2\pi}{k} \right[$  il existe une solution  $T$ -périodique de  $(H)$  non triviale,  $T$  étant la plus petite période de cette solution.*

La démonstration est une conséquence de trois lemmes suivants.

**Lemme 3.1.2**  $G = H * \text{vérifie} \therefore$

- (1)  $\forall v \in \mathbb{R}^{2n}, G(v) \geq \frac{|v|^2}{2k} - a$   
 (2)  $\exists r > 0$  tel que  $G(v) \leq \frac{|v|^2}{2k}$  pour  $|v| \leq r$

**Démonstration.** (1) est une conséquence de  $H(u) \leq \frac{k}{2}|u|^2 + a$ .

(2)  $H$  atteint un minimum uniquement à l'origine donc on a  $0 \in \text{dom}(G)$ , ce qui montre que  $G$  est sous différentiable dans un voisinage de l'origine. On a alors  $\partial G(0) = \{0\}$ , en effet on a toujours  $0 \in \partial G(0)$ , réciproquement si  $u \in \partial G(0)$  alors  $0 \in \partial H(u)$  donc  $u = 0$  car  $H$  atteint son minimum en 0 seulement. Pour  $|v|$  assez petit on a donc

$$G(v) = uv - H(u) \text{ avec } u \in \partial G(v)$$

or la multiapplication  $\partial G$  est semi continue supérieurement donc il existe  $r > 0$  tel que pour  $|v| \leq r$  on ait  $|u| \leq \eta$  pour tout  $u \in \partial G(v)$ , il vient alors

$$\begin{aligned} G(v) &\leq uv - \frac{k}{2}|u|^2 \text{ pour } |v| \leq r \\ &\leq \frac{|v|^2}{2k} \text{ pour } |v| \leq r \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

On pose alors

$$\begin{aligned} E_2 &= L^2([0, T], \mathbb{R}^{2n}) \\ F_2 &= \left\{ \dot{v} \in E_2; \int_0^T \dot{v} dt = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &: F_2 \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \frac{1}{2} \langle \sigma(\dot{v}), v \rangle = \frac{1}{2} \int_0^T (\sigma(\dot{v}) \cdot v) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &: F_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \dot{v} &\mapsto \int_0^T G(\dot{v}) dt \end{aligned}$$

$$I = J_2 + K$$

Pour tout  $\dot{v} \in F_2$  on a

$$I(\dot{v}) \geq \frac{\|\dot{v}\|^2}{2} \left( \frac{1}{K} - \frac{T}{2\pi} \right) - aT$$

et  $I$  atteint son minimum sur  $F_2$  (même démonstration que celle du théorème 3.1.1).

On sait alors d'après le principe dual de moindre action que  $u = \sigma(v) + \xi$  est solution de  $(H)$ . Cette solution n'est pas la solution nulle en effet :

**Lemme 3.1.3** *Soit  $\dot{v} \in F_2$  réalisant le minimum de  $I$ , alors*

$$I(\dot{v}) = \inf I < 0$$

**Démonstration.**

Posons

$$\dot{w}(t) = \xi \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \sigma(\xi) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \text{ où } \xi \in \mathbb{R}^{2n}$$

on a  $\dot{w} \in F_2$  et

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{\xi T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{\sigma(\xi) T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \\ \frac{1}{2} \int_0^T \sigma(w(t)) w(t) dt &= -\frac{T^2 |\xi|^2}{4\pi} \end{aligned}$$

On prend alors  $|\xi| = r$  où  $r$  est défini au lemme précédent

$$\begin{aligned} G(\dot{w}(t)) &\leq \frac{r^2}{2k} \\ J_2(\dot{w}) &\leq \frac{Tr^2}{2k} \end{aligned}$$

d'où

$$I(\dot{w}) \leq \frac{Tr^2}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{T}{2\pi} \right) < 0$$

d'où le résultat.

On a donc  $\dot{v} \neq 0$  car  $I(\dot{v}) < 0$  et  $I(0) = 0$ , ceci montre que  $u(\cdot)$  n'est pas la solution nulle. ■

**Lemme 3.1.4**  *$T$  est la plus petite période de  $u(\cdot)$ .*

**Démonstration.**

Supposons que  $u$  et donc  $\dot{v}$  soient  $\frac{T}{m}$ -périodiques avec  $m \geq 2$ . Posons  $w(t) = mv\left(\frac{t}{m}\right)$

d'où  $\dot{w}(t) = \dot{v}\left(\frac{t}{m}\right)$ . On a

$$\begin{aligned} K(\dot{w}) &= \frac{m}{2} \int_0^T \sigma \dot{v}\left(\frac{t}{m}\right) \cdot v\left(\frac{t}{m}\right) dt \\ &= \frac{m^2}{2} \int_0^{\frac{T}{m}} \sigma \dot{v} \cdot v dt \\ &= mK(v). \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} J_2(\dot{w}) &= \int_0^T G\left(\dot{v}\left(\frac{t}{m}\right)\right) dt \\ &= m \int_0^{\frac{T}{m}} G(\dot{v}) dt \\ &= J_2(\dot{v}) \end{aligned}$$

or  $J_2(\dot{v}) > 0$  donc  $J_2(\dot{v}) < mJ_2(\dot{v})$  on a alors  $I(\dot{w}) < mI(\dot{v})$ , comme  $I(\dot{v}) < 0$  on a

$$I(\dot{w}) < I(\dot{v}) = \inf(I).$$

Ce qui achève la démonstration du lemme et du théorème. ■

### 3.1.3 Solution périodique de niveau d'énergie fixé

On s'est intéressé jusqu'ici au cas des solutions périodiques de période fixée. On peut aussi se poser la question de savoir si,  $h$  étant fixé, il existe une solution périodique de  $(P)$  telle que  $H(u)(t) = h$ . On va voir que l'on peut ramener ce problème à celui de la recherche des solutions périodiques de période fixée.

**Proposition 3.1.1** *Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux fonctions de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{R}$  ayant une hypersurface de niveau compacte en commun :*

$$S = H_1^{-1}(h_1) = H_2^{-1}(h_2)$$

*on suppose que  $\nabla H_1$  et  $\nabla H_2$  sont non nuls sur  $S$ . Alors les systèmes différentiels*

$$\begin{cases} (P_1) : \dot{u} = \sigma \nabla H_1 \\ (P_2) : \dot{u} = \sigma \nabla H_2 \end{cases}$$

*ont les mêmes trajectoires sur  $S$ .*

Avant de montrer cette proposition donnons-en deux corollaires

**Corollaire 3.1.1** *Si  $(P_1)$  a une solution périodique dans  $S$ , il en est de même de  $(P_2)$ .*

En effet, une solution périodique correspond à une trajectoire fermée

**Corollaire 3.1.2** *Si  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  est telle que  $H^{-1}(h) = S$  est une sphère et si  $\nabla H$  est non-nul sur  $S$ , alors toutes les solutions de  $(P)$  de niveau d'énergie  $h$  sont périodiques.*

En effet, la sphère est l'hypersurface de niveau associée à  $H_1(u) = |u|^2$  et toutes les solutions de  $u = \sigma \nabla H_1(u)$  sont périodiques et il en existe sur toutes les sphères.

**Démonstration. de la proposition**

Soit  $u \in S$  alors  $\nabla H_1(u)$  et  $\nabla H_2(u)$  sont des vecteurs normaux à  $S$ , donc il existe  $\lambda(u) \succ 0$  tel que

$$\nabla H_1(u) = \lambda(u) \nabla H_2(u)$$

remarquons que

$$\lambda(u) = \frac{|\nabla H_1(u)|}{|\nabla H_2(u)|}$$

donc  $\lambda$  est continue sur  $S$  et  $\lambda(u) \geq c \succ 0$  pour  $u \in S$  car  $S$  est compact. Soit  $u_1$  une solution de  $(P_1)$  contenue dans  $S$  alors

$$\dot{u}_1(t) = \lambda u_1(t) \sigma \nabla H_2(u_1(t)).$$

Posons

$$S(t) = \int_0^t \lambda u_1(s) ds$$

$S$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et si on pose  $u_2(s) = u_1(t)$  on a :

$$\begin{aligned} \dot{u}_2(s) &= \dot{u}_1(t) \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{\dot{u}_1(t)}{\lambda(u_1(t))} \\ &= \sigma \nabla H_2(u_2(s)) \end{aligned}$$

d'où le résultat ■

Donnons alors un théorème d'existence

**Théorème 3.1.3** *Soit  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . On suppose que  $S = H^{-1}(h)$  est la frontière d'un ensemble convexe compact d'intérieur non vide et que  $\nabla H(u) \neq 0$  pour tout  $u \in S$ , alors il existe au moins une solution de  $(P)$  contenue dans  $S$ .*

**Démonstration.**

Rappelons la définition d'une **jauge d'un convexe**:

Soit  $C$  un convexe tel que  $0$  est dans l'intérieure de  $C$  on appelle jauge de  $C$  l'application  $P_C : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$P_C(x) = \inf \left\{ \alpha \succ 0, \frac{x}{\alpha} \in C \right\}.$$

Soit  $C$  le convexe dont  $S$  est la frontière.

Posons

$$J(u) = \inf \{ \lambda \mid u \in \lambda C \}$$

$J$  est la jauge de  $C$ ,  $J(u)$  est toujours fini car  $0 \in C$  et on a  $J(ku) = kJ(u)$  pour  $k \geq 0$  et

$$J(u+v) \leq J(u) + J(v)$$

en effet si  $u \in \lambda C$  et  $v \in \mu C$  alors  $u+v \in (\lambda+\mu)C$  car  $C$  est convexe donc :

$$\begin{aligned} J(u+v) &\leq \lambda + \mu \\ &\leq J(u) + J(v) \end{aligned}$$

de plus  $J(0) = 0$  et si  $J(u) = 0$  alors  $u = \lambda_n u_n$  avec  $u_n \in C$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n u_n = 0$  donc  $u = 0$ .  $J$  est donc une norme sur  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $S = J^{-1}(1)$ .  $J$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$ .

Posons alors  $G(u) = |J(u)|^{\frac{3}{2}}$ . On a

$$\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{G(u)}{|u|^2} = +\infty \text{ et } \lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{G(u)}{|u|^2} = 0$$

$G$  vérifie alors les hypothèses du théorème 3.1.2,  $T$  étant fixé il existe une solution  $T$ -périodique non triviale de  $\dot{u}_0 = \sigma \nabla G(u_0)$  on a  $G(u_0(t)) = h_0 \succ 0$ .

Posons

$$u(t) = h_0^{\frac{2}{3}} u_0(t)$$

on a

$$G(u(t)) = \left[ h_0^{-\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} G(u_0(t)) = 1.$$

Remarquons alors que

$$\nabla G(\lambda u) = \lambda^{\frac{1}{2}} \nabla G(u) \text{ pour } \lambda \succ 0$$

en effet

$$\frac{G(\lambda u + tv) - G(\lambda u)}{t} = \lambda^{\frac{3}{2}} \frac{G\left(u + t \frac{v}{\lambda}\right) - G(u)}{t}$$

donc

$$\nabla G(\lambda u) \cdot v = \lambda^{\frac{3}{2}} \nabla G(u) \cdot \frac{v}{\lambda}$$

d'où

$$\nabla G(\lambda u) = \lambda^{\frac{1}{2}} \nabla G(u).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= h_0^{-\frac{2}{3}} \sigma \nabla G(u_0(t)) \\ &= h_0^{-\frac{2}{3}} h_0^{\frac{1}{3}} \sigma \nabla G(u(t)) \\ &= \alpha \sigma \nabla G(u(t)) \end{aligned}$$

Posons  $v(t) = u\left(\frac{t}{\alpha}\right)$  on a  $\dot{v} = \sigma \nabla G(v)$  et  $v$  est  $\alpha T$ -périodique de plus  $G(v(t)) = 1$  donc  $v(t) \in S$ , il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 3.1.1 et on a le résultat. ■

### 3.1.4 Solution dans un voisinage fixé de l'origine et de l'infini

Le théorème 3.1.2 comporte pour  $H$  une condition de croissance à l'origine et une à l'infini. Nous allons voir comment se passer de l'une des deux dans certains cas.

**Théorème 3.1.4** *Soit  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe vérifiant*

$$(1) \forall u \in \mathbb{R}^{2n}, 0 = H(0) \leq H(u)$$

$$(2) \exists v_0 \succ k_0 = \frac{r^2}{\Psi(A)}, \exists \eta \succ 0 \text{ tel que } v_0 \frac{|u|^2}{2} \leq H(u) \text{ pour } |u| \leq \eta,$$

où

$$\Psi(A) = \inf_{|u|=A} H(u)$$

et

$$r = \sup \{|v|; v \in \partial H(u), |u| \leq A\}$$

Alors si  $T \in \left] \frac{2\pi}{v_0}, \frac{2\pi}{k_0} \right[$ , il existe une solution non triviale de période minimale  $T$  de

$$\dot{u}(t) \in \sigma \partial H(u(t))$$

vérifiant

$$|u(t)| \leq A$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . De plus l'énergie  $h$  de la solution vérifie

$$h \leq \frac{Tr^2}{2\pi}$$

**Démonstration.**

**1<sup>er</sup> point** ; La fonction

$$\Psi(A) = \inf_{|u|=A} H(u)$$

est telle que  $\frac{\Psi(A)}{A}$  est croissante. En effet soit  $u \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $t \geq 0$ , posons

$$f(t) = H(tu)$$

$f$  est convexe de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  donc absolument continue sur tout intervalle borné de  $\mathbb{R}^+$ .

Soit alors

$$v(t) \in \partial H(t, u)$$

alors

$$v(t) \cdot u \in \partial f(t)$$

par ailleurs,  $H$  atteignant un minimum nul à l'origine, on a  $H(u) \leq v$ . Pour  $v \in \partial H(u)$ .

Il vient alors

$$v(t) \cdot u = \frac{v(t) \cdot tu}{t} \geq \frac{f(t)}{t}$$

La dérivée presque partout  $\dot{f}(t)$  de  $f$  vérifie donc

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &\geq \frac{f(t)}{t} \\ \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} &\geq \frac{1}{t} \end{aligned}$$

d'où en intégrant

$$\frac{f(t)}{f(t_0)} \geq \frac{t}{t_0} \text{ pour } t \geq t_0 \succ 0$$

Soit alors  $B > A$  et  $\omega$  de norme  $B$  tels que  $\Psi(B) = H(\omega)$ , posons  $u = A \frac{\omega}{|\omega|}$ , d'après ce qui précède on a

$$\frac{\Psi(B)}{B} \geq \frac{H(Au)}{A} \geq \frac{\Psi(A)}{A}$$

d'où le résultat.

**2<sup>ème</sup> point** ; posons  $G = H^*$  et

$$G_r(v) = \begin{cases} G(v) & \text{si } |v| \leq r \\ +\infty & \text{si } |v| \succ r \end{cases}$$

et  $H_r = (G_r)^*$ . On a alors

$$(3) \quad H_r(u) \leq r|u| \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^{2n},$$

$$(4) H_r(u) = H(u) \text{ pour } |u| \leq A,$$

$$(5) \partial H_r(u) = \partial H(u) \text{ pour } |u| \prec A.$$

En effet,  $G_r \geq \delta_{B_r}$  où  $\delta_{B_r}$  est la fonction indicatrice de la boule fermée de centre 0 et de rayon  $r$ , on donc

$$\begin{aligned} G_r^* &\leq \delta_{B_r}^* \\ H_r(u) &\leq r|u| \end{aligned}$$

D'où il vient (3). Par ailleurs

$$H_r(u) = \sup_{|v| \leq r} (uv - G(v))$$

Soit  $|u| \leq A$  et  $v \in \partial H(u)$  on a

$$H(u) = uv - G(v) \leq H_r(u) \text{ car } |v| \leq r$$

Or  $G_r \geq G$  donc  $H_r(u) \leq H(u)$  d'où il vient (4).

Enfin soit  $|u| \leq A$  et  $v \in \partial H_r(u)$ , alors pour tout  $\omega \in \mathbb{R}^{2n}$  on a

$$H(\omega) - H(u) \geq H_r(\omega) - H_r(u) \geq v \cdot (\omega - u)$$

d'où

$$\partial H_r(u) \subset \partial H(u).$$

Réciproquement soit  $|u| \prec A$  alors  $H$  et  $H_r$  coïncident dans un voisinage de  $u$  donc  $\partial H(u) = \partial H_r(u)$ .

**3<sup>ème</sup> point** ;  $H_r$  vérifie alors les hypothèses du théorème 3.1.2 avec  $k$  arbitraire car

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{H_r(u)}{|u|^2} = 0$$

Il existe donc une solution de période minimale  $T$  de

$$\dot{u}(t) \in \sigma \partial H_r(u(t))$$

Vérifiant

$$h = H_r(u(t)) \leq \frac{Tr^2}{2\pi}$$

Or

$$\frac{Tr^2}{2\pi} \leq \phi(A) = \phi_r(A)$$

d'où

$$\phi_r(|u(t)|) \leq H_r(u(t)) \leq \phi_r(A)$$

mais la fonction  $\frac{\phi_r(A)}{A}$  est croissante comme on l'a vu au début de la démonstration (1<sup>er</sup> point), comme  $\phi_r(A) > 0$  pour  $A > 0$ . on en déduit que  $\phi_r$  est strictement croissante et donc que  $|u(t)| \leq A$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Comme  $\partial H_r(u) \subset \partial H(u)$  pour  $|u| \leq A$  on a bien le résultat.

On obtient alors un résultat sur les solutions dans un voisinage fixé de l'infini en éludant la condition de croissance à l'origine pour le hamiltonien. ■

**Théorème 3.1.5** Soit  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

(1)  $H$  est convexe et  $0 = H(0) \leq H(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^{2n}$

(2)  $\exists k_0 < v_0 = \frac{\phi(A)^2}{A^2 \Psi(A)}$  tel que  $H(u) \leq \frac{k}{2}|u|^2$  pour  $|u|$  assez grand ou  $\phi$  est défini à

la proposition 3.1.1 et  $\Psi(A) = \sup_{|u|=A} H(u)$

alors si  $T \in \left] \frac{2\pi}{v_0}, \frac{2\pi}{k_0} \right[$  il existe une solution de période minimale  $T$  de

$$\dot{u}(t) \in \sigma \partial H(u(t))$$

vérifiant  $|u(t)| \geq A$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Démonstration.**

Posons  $H_A(u) = \sup(H(u), c|u|)$  en  $c = \frac{\phi(A)}{A}$ .

1<sup>er</sup> point ; on a

(3)  $H_A(u) = H(u)$  pour  $|u| \geq A$ .

(4)  $\partial H_A(u) = \partial H(u)$  pour  $|u| > A$ .

En effet soit  $|u| = B \geq A$  on a alors

$$H(u) \geq \phi(B) > B \frac{\phi(A)}{A} = c|u| \text{ d'où (3)}$$

Si  $|u| > A$ , alors  $H$  et  $H_A$  coïncident dans un voisinage de  $u$ , d'où  $\partial H_A(u) = \partial H(u)$ , ce qui démontre (4).

2<sup>ème</sup> point ; la fonction

$$\Psi_A(B) = \sup_{|u|=B} H_A(u)$$

est strictement croissante, en effet soit  $B_1 < B_2$  supposons

$$\Psi_A(B_2) \leq \Psi_A(B_1)$$

Définissons  $u_1 \in \mathbb{R}^{2n}$  par

$$H_A(u) = \Psi_A(B_1)$$

$u_1$  peut être mis sous la forme  $B_1\xi$  avec  $|\xi| = 1$ , posons  $u_2 = B_2\xi$  et définissons la fonction  $g$  par  $g(c) = H_A(c\xi)$ . Soit  $c \in [B_1, B_2]$  on a alors

$$H_A(c\xi) \leq (1 - \lambda) H_A(B_1\xi) + \lambda H_A(B_2\xi)$$

pour un certain  $\lambda \in [0, 1]$ , donc :

$$\begin{aligned} H_A(c\xi) &\leq (1 - \lambda) H_A(B_1\xi) + \lambda \Psi_A(B_2) \\ &\leq (1 - \lambda) H_A(B_1\xi) + \lambda \Psi_A(B_1) \\ &\leq H_A(B_1\xi) \\ g(c) &\leq g(B_1) \end{aligned}$$

or la fonction  $g$  est convexe, positive et  $g(0) = 0$ , c'est donc une fonction croissante, d'après ce que l'on vient de voir elle est constante sur  $[B_1, B_2]$  donc vaut 0 sur  $[B_1, B_2]$  ce qui est impossible car  $H_A^{-1}(0) = \{0\}$ , d'où le résultat.

**3<sup>ème</sup> point** ;  $H_A$  vérifie alors les hypothèses du théorème 3.1.3 avec  $k$  arbitraire car  $\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{A(u)}{|u|^2} = +\infty$ . Il existe donc une fonction  $u(\cdot)$  de période minimale  $T$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &\in \sigma \partial H_A(u(t)) \\ H_A(u(t)) &= h > \frac{Tc^2}{2\pi} \end{aligned}$$

On a alors

$$\forall t \in [0, T]; \Psi_A(|u(t)|) \geq H_A(u(t)) \geq \frac{Tc^2}{2\pi} > \Psi(A) = \Psi_A(A)$$

Donc d'après ce qui précède  $|u(t)| \succ A$  pour tout  $t \in [0, T]$  on a donc d'après (4)  $\dot{u}(t) \in \sigma \partial H(u(t))$  ce qui achève la démonstration. ■

## 3.2 Cas des hamiltoniens à croissance super-quadratique

On s'intéresse dans cette section à la recherche de solutions du problème

$$(N') \begin{cases} \dot{u} \in \sigma \partial H(u) + f(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

ce cas correspond à un système hamiltonien  $H$  excité par une force extérieure.

on suppose que

$\mathbf{H}_1$  :  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{H(u)}{|u|} = +\infty$$

$H$  atteint donc son minimum, on suppose que ce minimum est nul et atteint à l'origine.

$\mathbf{H}_2$  :  $\forall u \in \mathbb{R}^{2n}, H(u) \leq \frac{k^\beta}{\beta} |u|^\beta$  où  $k > 0$  et  $\beta > 2$ .

### 3.2.1 Formulation du problème

On pose  $G = H^*$  on sait donc que

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{R}^{2n}, 0 = G(0) < G(v) \\ \frac{1}{\alpha k^\alpha} |v|^\alpha \leq G(v) \text{ où } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \end{aligned}$$

Posons

$$H(t, u) = H(u) - \sigma f(t) u$$

on a

$$\partial H(t, u) = \partial H(u) - \sigma f(t)$$

donc

$$\dot{u} \in \sigma \partial H(t, u) \Leftrightarrow \dot{u} \in \sigma \partial H(u) + f(t)$$

on a alors

$$\begin{aligned} G(t, v) &= \sup_{u \in \mathbb{R}^{2n}} (uv - H(u) + \sigma f(t) u) \\ &= G(v + \sigma f(t)) \end{aligned}$$

$H(t, u)$  vérifie alors les hypothèses  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  et  $\mathbf{H}_3$  du théorème 2.2.1 si on suppose que l'on a

$\mathbf{H}_3$ ;  $f$  mesurable et  $G(\sigma f(t))$  intégrable sur  $[0, T]$ .

De plus l'hypothèse  $\mathbf{H}_4$  du théorème 2.2.1 est également vérifiée, le principe dual de moindre action s'applique donc ici.

On suppose alors que

$$\mathbf{H}_4 \quad ; \int_0^T f dt = 0 \text{ et } f \in L^\alpha([0, T], \mathbb{R}^{2n}).$$

Posons

$$\dot{w} = \dot{v} + \sigma f \text{ on a } w = v + \sigma F$$

$F$  étant la primitive de moyenne nulle de  $f$ .

Chercher des solutions de  $(N')$  revient à chercher des points critiques de la fonctionnelle

$$I(\dot{v}) = \int_0^T \left[ G(t, \dot{v}) + \frac{\sigma(\dot{v})v}{2} \right] dt \text{ pour } \dot{v} \in F_\alpha$$

Etudions l'effet du changement de variable

$$\dot{w} = \dot{v} + \sigma f \text{ sur } I$$

$$\begin{aligned} I(\dot{v}) &= \int_0^T \left[ G(w) + \frac{(\sigma(\dot{w}) + f) \cdot (w - \sigma(F))}{2} \right] dt \\ &= \int_0^T \left[ G(\dot{w}) + \frac{\sigma(\dot{w}) \cdot w}{2} - \frac{\sigma(\dot{w})\sigma(F)}{2} + \frac{fw}{2} - \frac{f\sigma(F)}{2} \right] dt \end{aligned}$$

or  $\sigma(\dot{w}) \cdot \sigma(F) = \dot{w} \cdot F$  et

$$\int_0^T f w dt = [Fw]_0^T - \int_0^T (\dot{w} \cdot F) dt = - \int_0^T (\dot{w} \cdot F) dt$$

On obtient :

$$I(\dot{v}) = \int_0^T \left[ G(\dot{w}) + \frac{\sigma(\dot{w}) \cdot w}{2} - \dot{w} \cdot F - \frac{f\sigma(F)}{2} \right] dt$$

On néglige alors le terme constant car on va chercher un minimum local.

On considère donc

$$\begin{aligned} \tilde{I} &: F_\alpha \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \dot{w} &\mapsto \int_0^T \left[ G(\dot{w}) + \frac{\sigma(\dot{w}) \cdot w}{2} - \dot{w} \cdot F \right] dt \\ \tilde{I} &= J + K \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} J(\dot{w}) &= \int_0^T G(\dot{w}) dt \\ K(\dot{w}) &= \frac{1}{2} \langle \sigma(\dot{w}), w \rangle - \langle \dot{w}, F \rangle \end{aligned}$$

supposons que  $\tilde{I}$  ait un point critique  $\dot{w}$ , on a

$$-K'(\dot{w}) \in \partial J(\dot{w})$$

or

$$K'(\dot{w}) = -\sigma(w) - F$$

Alors

$$\partial J(\dot{w}) = \{\dot{u} \in F_\beta ; u - \xi \in \partial G(\dot{w})\}$$

(voir la démonstration du théorème 2.2.1 2<sup>ème</sup> point)

On a alors

$$\sigma(v) + F + \xi \in \partial G(\dot{w})$$

posons

$$u = \sigma(v) + F + \xi \text{ on a } u(0) = u(T) \text{ et } \dot{w} = -\sigma(\dot{u}) + \sigma(f)$$

d'où

$$u \in \partial G(-\sigma(\dot{u}) + \sigma(f))$$

$$-\sigma(\dot{u}) + \sigma(f) \in \partial H(u)$$

$$\sigma^{-1}(\dot{u} - f) \in \partial H(u)$$

$$\dot{u} \in \sigma \partial H(u) + f$$

donc  $u$  est solution de  $(N')$ . Un minimum local étant un point critique (voire la proposition 1.2.5) on va montrer que  $\tilde{I}$  possède un minimum local.

Notons que

$$\dot{w} \mapsto \int_0^T \left[ G(\dot{w}) + \frac{\sigma(\dot{w}) \cdot w}{2} \right] dt$$

possède un minimum local en 0 comme le montre un calcul facile, on peut donc espérer que si le terme perturbateur  $\langle \dot{w}, F \rangle$  n'est pas trop grand, on ait encore un minimum local.

### **Théorème 3.2.1 d'existence**

Supposons que les hypothèses  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{H}_3$  et  $\mathbf{H}_4$  de la section 3.2.1 soient vérifiées et que

$$\|f\|_\alpha < (2 - \alpha)(2\alpha - 2)^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} (\alpha k^\alpha)^{\frac{1}{\alpha-2}} \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2\alpha-2}{\alpha(\alpha-2)}}$$

Alors il existe une solution vérifiant

$$\|\dot{u} - f\|_\alpha \leq \frac{2\|f\|_\alpha}{\beta - 2}$$

**Démonstration.**

On a

$$\begin{aligned} \int_0^T G(\dot{w}) dt &\geq \frac{1}{\alpha k^\alpha} \|\dot{w}\|_\alpha^\alpha \\ |\langle \dot{w}, F \rangle| &\leq \|\dot{w}\|_\alpha \|F\|_\beta \\ \left| \frac{1}{2} \langle \sigma(\dot{w}), w \rangle \right| &\leq \frac{1}{2} \|\dot{w}\|_\alpha \|w\|_\beta \end{aligned}$$

Or d'après la proposition 1.2.12 on a

$$\begin{aligned} \|F\|_\beta &\leq \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2}{\beta}} \|f\|_\alpha \\ \|w\|_\beta &\leq \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2}{\beta}} \|\dot{w}\|_\alpha \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \tilde{I}(w) &\geq \frac{1}{\alpha k^\alpha} \|\dot{w}\|_\alpha^\alpha - \frac{1}{2} \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2}{\beta}} \|\dot{w}\|_\alpha^2 - \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2}{\beta}} \|\dot{w}\|_\alpha \|f\|_\alpha \\ &\geq \|\dot{w}\|_\alpha \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2}{\beta}} \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{\beta}} \frac{\|\dot{w}\|_\alpha^{\alpha-1}}{\alpha k^\alpha} - \frac{1}{2} \|\dot{w}\|_\alpha - \|f\|_\alpha \\ &\geq \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2}{\beta}} \|\dot{w}\|_\alpha \phi(\|\dot{w}\|_\alpha) \end{aligned}$$

où

$$\phi(s) = as^{\alpha-1} - \frac{s}{2} - \|f\|_\alpha$$

avec

$$a = \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{\beta}} \frac{1}{\alpha k^\alpha}$$

Etudions le signe de  $\phi(s)$ . On a

$$\phi(s) = 0 \iff as^{\alpha-1} = \frac{s}{2} + \|f\|_\alpha$$

La fonction  $as^{\alpha-1}$  étant concave, son graphe coupera la droite

$$\frac{s}{2} + \|f\|_\alpha$$

si  $\|f\|_\alpha$  est inférieur à l'ordonnée à l'origine de la tangente au graphe de la fonction  $as^{\alpha-1}$  de pente  $\frac{1}{2}$ , le point de contact de cette tangente a pour abscisse

$$\bar{s} = \left[ \frac{1}{2(\alpha-1)a} \right]^{\frac{1}{\alpha-2}}$$

le calcul donne

$$\|f\|_\alpha \prec (2 - \alpha)(2\alpha - 2)^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} (\alpha k^\alpha)^{\frac{1}{\alpha-2}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{2\alpha-2}{\alpha(\alpha-2)}}$$

ce qui est vrai par hypothèse.

Dans ce cas l'équation  $\phi(s) = 0$  a deux solution  $s_1 \prec \bar{s} \prec s_2$ .

Etudions alors  $\tilde{I}$  sur

$$B = \{\dot{w} \in F_\alpha; \|\dot{w}\|_\alpha \leq \bar{s}\}$$

$I$  étant faiblement semi continue inférieurement sur  $B$ , atteint son minimum sur  $B$ , il suffit alors de montrer que ce minimum est atteint à l'intérieur de  $B$ . Or pour

$$s_1 \prec \|\dot{w}\|_\alpha \prec s_2$$

on a  $I(\dot{w}) \succ 0$  donc pour

$$\|\dot{w}\|_\alpha = \bar{s}$$

on a

$$I(\dot{w}) \succ I(0)$$

donc le minimum est atteint pour

$$\|\dot{w}\|_\alpha \prec \bar{s}$$

$\tilde{I}$  ayant un minimum local on en déduit que  $(N')$  possède une solution.

Soit  $w$  le point réalisant le minimum de  $\tilde{I}$  sur  $B$  on a alors

$$\|\dot{w}\|_\alpha \prec s_1 \text{ or } s_1 \prec \sigma$$

et

$$\sigma = \frac{\|f\|_\alpha}{s^{-\alpha-2} - \frac{1}{2}} = \|f\|_\alpha \frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha} = \frac{2\|f\|_\alpha}{\beta-2}$$

On a donc bien

$$\|\dot{w} - f\|_\alpha \leq \frac{2\|f\|_\alpha}{\beta-2}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

### 3.3 Etude d'une méthode générale

Dans cette section on donne une méthode générale d'étude de la fonctionnelle  $I$  introduite au deuxième chapitre. Dans les sections précédentes on faisait des hypothèses de

type polynômiales sur la croissance des hamiltoniens. La méthode exposée ici est beaucoup plus générale et permet d'étudier des hamiltoniens qui échappaient précédemment, comme par exemple les hamiltoniens à croissance exponentielle. De nombreux résultats des sections précédentes apparaissent comme des cas particuliers du théorème que nous allons démontrer.

### 3.3.1 Résultats préliminaires

On suppose que  $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \forall u \in \mathbb{R}^{2n}, H(\cdot, u) \text{ est mesurable} \\ \forall t \in \mathbb{R}, H(t, \cdot) \text{ est convexe} \\ \forall t \in \mathbb{R}, \lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{H(t, u)}{|u|} = +\infty \end{array} \right. \\ (\mathbf{H}_2) \quad & G(t, 0) \text{ est intégrable sur } [0, T]. \\ (\mathbf{H}_3) \quad & \forall s \geq 0, \phi(s) < +\infty \end{aligned}$$

où

$$\phi(s) = \sup \{ H(t, u) ; t \in [0, T], |u| \leq s \}$$

On remarque donc que  $H(t, 0)$  est intégrable sur  $[0, T]$ .

Etudions les propriétés de  $\phi$ .

**Lemme 3.3.1**  *$\phi$  est convexe, continue, croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et on a*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\phi(s)}{s} = +\infty$$

**Démonstration.**

$\phi$  est croissante par définition. Posons  $\Phi(u) = \phi(|u|)$  on a

$$\Phi(u) = \sup \{ H(t, Au) ; t \in [0, T], \|A\| \leq 1 \}$$

$\Phi$  étant borne supérieure d'une famille de fonctions convexes est convexe, donc  $\phi$  l'est aussi,  $\Phi$  est continue car partout finie donc il en est de même de  $\phi$ .

De plus

$$\phi(s) \geq \sup \{ H(0, u) ; |u| \leq s \}$$

donc

$$\frac{\phi(s)}{s} \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } s \rightarrow +\infty \text{ d'après } (\mathbf{H}_2)$$

$\phi$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ , on la prolonge à  $\mathbb{R}$  en lui donnant la valeur  $+\infty$  pour  $s < 0$ , on pose

$$\psi = \phi^*, \psi(a) = \sup_{s \geq 0} (as - \phi(s))$$

■

**Lemme 3.3.2**  $\Psi$  est convexe, continue et croissante sur  $\mathbb{R}$  et

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(a)}{a} = +\infty$$

de plus si

$$a \leq \phi'_d(0), \Psi(a) = -\phi(0)$$

**Démonstration.**

Soit  $a \leq \phi'_d(0)$  alors

$$\forall s \geq 0, a \leq \frac{\phi(s) - \phi(0)}{s}$$

car  $\phi$  est convexe, d'où

$$\forall s \geq 0, as - \phi(s) \leq -\phi(0) \text{ donc } \Psi(a) = -\phi(0)$$

$\Psi$  est partout finie, en effet

$$as - \phi(s) \leq 0 \text{ pour } s \text{ assez grand}$$

donc

$$\sup_{s \geq 0} \{as - \phi(s)\} = \sup_{s \leq R} \{as - \phi(s)\}$$

pour un certain  $R$ , donc  $\Psi$  est finie.

$\Psi$  est croissante, en effet

Soit  $b \geq a$  alors

$$bs - \phi(s) = (b - a)s + as - \phi(s) \geq as - \phi(s)$$

d'où

$$\begin{aligned} \Psi(b) &\geq \Psi(a) \\ \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(a)}{a} &= +\infty \end{aligned}$$

En effet  $\Psi$  étant convexe la fonction

$$\frac{\Psi(a) - \Psi(0)}{a}$$

est croissante donc a une limite finie ou infinie quand  $a$  tend vers  $+\infty$ , supposons cette limite finie et égale à 1, et soit  $s \geq 1$ , comme  $\phi = \Psi^*$  on a

$$\begin{aligned}\phi(s) &\geq as - \Psi(a) \\ &\geq a \left( s - 1 + \frac{\Psi(0)}{a} \right)\end{aligned}$$

donc en faisons tendre  $a$  vers  $+\infty$  on a  $\Psi(s) = +\infty$  ce qui contredit  $\mathbf{H}_3$ .

Enfin  $\Psi$  est continue car convexe et partout finie. ■

**Lemme 3.3.3** *Posons*

$$\begin{cases} \Phi(u) = \phi(|u|) \\ \Psi(v) = \psi(|v|) \end{cases}$$

alors  $\Phi^* = \Psi$  et si  $u \neq 0$ , alors

$$\partial\Phi(u) = \frac{u}{|u|} \partial\phi(|u|)$$

**Démonstration.**

$\forall v \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned}\Phi^*(v) &= \sup_{u \in \mathbb{R}^{2n}} (uv - \phi(|u|)) \\ &\leq \sup_{s \geq 0} (s|v| - \phi(s)) \\ &\leq \Psi(v)\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}\Phi^*(v) &\geq \sup_{s > 0} \left( s \frac{v}{|v|} \cdot v - \phi(s) \right) \\ &\geq \Psi(v)\end{aligned}$$

Soit  $v \in \partial\Phi(u)$  on a donc

$$\begin{aligned}\Phi(u) + \Psi(v) &= uv \\ \phi(|u|) + \psi(|v|) &= uv\end{aligned}$$

or

$$\phi(|u|) + \psi(|v|) \geq |u| \cdot |v|$$

donc  $u \cdot v = |u| \cdot |v|$  ce qui montre que  $v = \lambda \frac{u}{|u|}$  avec  $\lambda \geq 0$  car  $u \cdot v \geq 0$  on a alors

$$\phi(|u|) + \psi(\lambda) = \lambda |u| \text{ donc } \lambda \in \partial\phi(u).$$

Réciproquement si

$$v = -\frac{u}{|u|}\lambda \text{ avec } \lambda \in \partial\phi(|u|)$$

alors

$$\phi(|u|) + \psi(\lambda) = \lambda|u| \text{ or } \psi(\lambda) = \Psi(v)$$

donc

$$\Phi(u) + \Psi(v) = u \cdot v \text{ d'où } v \in \partial\Phi(u)$$

ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Posons pour  $c \geq -T\phi(0)$

$$B(c) = \left\{ \dot{v} \in F_1 ; \int_0^T \psi(|\dot{v}|) dt \leq c \right\}$$

où

$$F_1 = \left\{ \dot{v} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^{2n}) ; \int_0^T \dot{v} dt = 0 \right\}$$

le fait que  $c \geq -T\phi(0)$  garantit que  $0 \in B(c)$  donc que  $B(c) \neq \emptyset$ .

Posons

$$K(\dot{v}) = \frac{1}{2} \langle \sigma(v), \dot{v} \rangle = \frac{1}{2} \int_0^T \sigma(\dot{v}) \cdot v dt \text{ pour } \dot{v} \in F_1.$$

On a alors la propriété

**Propriété :** Si  $c \geq -T\phi(0)$ ,  $K$  atteint son minimum sur  $B(c)$  et

$$\inf \{K(\dot{v}) ; \dot{v} \in B(c)\} = -\frac{T}{4\pi}a^2 \text{ ou } \psi(a) = \frac{c}{T}$$

**Démonstration.**

Remarquons que  $B(c)$  est faiblement compacte dans  $F_1$  d'après le théorème de la **Vallée-Poussin**, il suffit donc de montrer que  $K$  est faiblement semi-continue inférieurement sur  $B(c)$ . Soit donc  $\dot{v}_n \in B(c)$  telle que  $\dot{v}_n$  converge faiblement vers  $\dot{v}$ , comme

$$\int_0^T \dot{v} dt = 0$$

on peut supposer que

$$v(t) = \int_0^t \dot{v} ds$$

$B(c)$  étant borné dans  $F_1$  on a

$$|v_n(t)| \leq m \text{ pour tout } n \text{ et pour tout } t \in [0, T]$$

Par ailleurs la compacité faible dans  $L^1$  est équivalente à l'intégrabilité uniforme donc  $\varepsilon$  étant donné il existe  $\delta$  tel si  $B$  est un mesurable de mesure inférieure à  $\delta$

$$\int_B |\dot{v}_n(t)| dt \leq \varepsilon$$

d'où si  $|t - \tau| \leq \eta$

$$|v_n(t) - v_n(\tau)| \leq \varepsilon$$

La suite  $v_n$  étant équicontinue et uniformément bornée admet une sous suite  $v_{n_k}$  uniformément convergente .

On a alors  $\dot{v}_{n_k}$  converge faiblement vers  $\dot{v}$ ,  $v_{n_k}$  converge fortement vers  $v$  donc

$$K(\dot{v}_{n_k}) = \frac{1}{2} \langle \sigma \dot{v}_{n_k}, v_{n_k} \rangle$$

converge vers  $K(\dot{v})$ . On a alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} K(\dot{v}_n) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} K(\dot{v}_{n_k}) = K(\dot{v})$$

donc  $K$  est bien faiblement semi continue inférieurement donc atteint son minimum sur  $B(c)$ .

Evaluation de

$$\inf \{K(\dot{v}); \dot{v} \in B(c)\}$$

Soit  $\dot{v} \in B(c)$  tel que

$$K(\dot{v}) = \inf \{K(\dot{w}), \dot{w} \in B(c)\}$$

On peut appliquer la proposition 1.2.11 avec  $E = F_1$

$$f(\dot{w}) = \int_0^T \psi(|\dot{w}|) dt$$

$f$  est bien convexe semi continue inférieurement et propre et  $dom f$  contient les fonctions mesurables bornées donc est dense dans  $E$ . On sait alors qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que

$$-\lambda K'(\dot{v}) \in \partial f(\dot{v})$$

remarquons que  $\lambda \neq 0$  car  $K'(\dot{v}) = \sigma(v)$  ne peut pas être nul car  $K$  prend des valeurs négatives sur  $B(c)$  comme on va le voir un peu plus loin .

Par ailleurs

$$\partial f(\dot{v}) = \{\dot{u} \in F_\infty : \exists \xi \in \mathbb{R}^{2n}, \dot{u} - \xi \in \partial \Psi(\dot{v})\}$$

(Voire la deuxième partie de la démonstration du théorème 2.2.1)

On a donc

$$\lambda\sigma(v) + \xi \in \partial\Psi(\dot{v}) \text{ pp}$$

Posons

$$u = \lambda\sigma(v) + \xi$$

il vient

$$\begin{cases} u \in \partial\Psi(\dot{v}) \\ \dot{u} \in \lambda\sigma\partial\Phi(u) \end{cases}$$

On sait d'après le lemme 3.1.1 que  $\Phi(u(t)) = h$  constant, montrons alors que

$$\alpha(t) = |u(t)|$$

est constant.

$\phi$  est croissante, convexe, continue et tend vers l'infini à l'infini, posons

$$\bar{s} = \sup \{s, \phi(s) = \phi(0)\}$$

Si  $h > \phi(0)$  alors  $|u(t)|$  est constant car  $\phi$  est injective sur  $[\bar{s}, +\infty[$ .

Si  $h = \phi(0)$  alors  $|u(t)| \leq \bar{s}$ . Soit alors  $I$  l'ensemble des  $t \in [0, T]$  tels que  $u$  et  $\alpha$  soient dérivable en  $t$ ,  $I$  est de mesure pleine. Si  $t \in I$  ou bien

$$|u(t)| = \bar{s}$$

auquel cas d'après le lemme 3.3.3 on a

$$\dot{u}(t) = \lambda u \frac{\sigma u(t)}{|u(t)|}$$

avec

$$\mu \in \partial\phi(\bar{s})$$

il vient alors

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{u(t)}{|u(t)|} \cdot \dot{u}(t) = \lambda\mu \frac{u(t) \cdot \sigma(u(t))}{|u(t)|^2} = 0$$

ou bien  $|u(t)| \leq \bar{s}$  auquel cas ceci reste encore vrai pour  $\tau$  voisin de  $t$ ,

on a alors

$$\partial\Phi(u(\tau)) = \{0\}$$

pour  $\tau$  voisin de  $t$ , d'où  $u(\tau)$  est constant au voisinage de  $t$  et  $\dot{\alpha}(t) = 0$ .

On a donc  $\dot{\alpha} = 0$  pp d'où  $|u(t)|$  est constant. On a alors

$$\dot{u}(t) \in \lambda \sigma \partial \Phi(u(t)) \text{ et } |u(t)| = b > 0.$$

d'après le lemme 3.3.3 il vient

$$\dot{u}(t) = \beta(t) \sigma(u(t))$$

où

$$\beta(t) = \frac{\lambda}{b} \partial \phi(b) = [r, s] \text{ avec } 0 < r \leq s$$

Notons que

$$\beta(t) = \frac{|\dot{u}(t)|}{b}$$

donc est mesurable. D'après l'unicité des solutions et une équation linéaire on a

$$u(t) = \xi \cos p(t) + \sigma(\xi) \sin p(t) \text{ avec } \xi \in \mathbb{R}^{2n} \text{ et } p(t) = \int_0^t \beta(\tau) d\tau$$

Or

$$\begin{cases} \sigma(\dot{v}(t)) = \frac{\dot{u}}{\lambda} \\ v(t) = \frac{\sigma(u(t))}{\lambda} + \sigma(\xi) \end{cases}$$

d'où

$$K(\dot{v}) = -\frac{1}{2} \frac{|\xi|^2}{\lambda^2} \int_0^t \beta(t) dt$$

or

$$r \leq \beta(t) \leq s$$

et  $K(\dot{v})$  est minimal on a donc  $\beta(t) = s$  pour tout  $t$ , à une translation près du temps il vient

$$\dot{v}(t) = \eta \cos(\omega t) + \sigma(\eta) \sin(\omega t), \eta \in \mathbb{R}^{2n}$$

$v$  étant  $T$ -périodique on a

$$T = k \frac{2\pi}{\omega} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

d'où

$$K(\dot{v}) = -\frac{|\eta|^2 T}{2\omega} = -\frac{|\eta|^2 T^2}{4\pi k}$$

la minimalité de  $K(\dot{v})$  et le fait que  $K(\dot{v}) < 0$  imposent que  $k = 1$ , d'où

$$K(\dot{v}) = -\frac{|\eta|^2 T^2}{4\pi}$$

Montrons que l'on a

$$\int_0^T \psi(|\dot{v}|) dt = c$$

Dans le cas contraire on aurait

$$\int_0^T \psi(|\dot{v}|) dt < c$$

donc  $s\dot{v}$  serait dans  $B(c)$  pour  $s > 1$  assez proche de 1, or

$$K(s\dot{v}) = s^2 K(\dot{v}) < K(\dot{v})$$

car  $K(\dot{v}) < 0$  ce qui est impossible

$$\int_0^T \psi(|\dot{v}|) dt = c$$

or

$$|\dot{v}(t)| = |\eta| = a$$

d'où

$$\begin{cases} T\psi(a) = c \\ \psi(a) = \frac{c}{T} \end{cases}$$

Remarquons que

$$\frac{c}{T} > -\phi(0) = \psi(0)$$

donc  $\psi$  étant croissante continue et convexe tendant vers l'infinie quand  $a$  tend vers  $+\infty$ , l'équation

$$\psi(a) = \frac{c}{T}$$

a une solution unique .

Ou bien alors

$$K(\dot{v}) = -\frac{T^2}{4\pi} a^2 \text{ où } \psi(a) = \frac{c}{T}$$

ce qui achève la démonstration . ■

### 3.3.2 Théorème d'existence

**Théorème 3.3.1** *Sous les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  de section 3.3.1 et si*

$$\int_0^T g(t) dt < \sup_{a>0} \left( -\frac{T^2}{4\pi} a^2 + T\psi(a) \right) \text{ où } g(t) = G(t, 0)$$

le système

$$(p) \begin{cases} \dot{u} \in \sigma \partial H(t, u) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

a une solution vérifiant

$$\int_0^T \psi(|\dot{u}|) dt \leq T\psi(\bar{a})$$

où  $\bar{a}$  est définie par

$$\bar{a} = \inf \left\{ a \geq 0 ; -\frac{T^2}{4\pi} a^2 + T\psi(a) \geq \int_0^T g(t) dt \right\}$$

**Démonstration.**

On a

$$G(t, 0) \geq \psi(0)$$

donc

$$T\psi(0) \leq \int_0^T g(t) dt$$

d'où

$$T\psi(0) < \sup_{a \geq 0} \left( -\frac{T^2}{4\pi} a^2 + T\psi(a) \right)$$

on déduit qu'il existe  $a \succ 0$  tel que

$$T\psi(0) < \left( -\frac{T^2}{4\pi} a^2 + T\psi(a) \right)$$

Posons  $c = T\psi(a)$  donc  $c \succ T\psi(0)$ , comme dans la section 3.3.1 on pose

$$B(c) = \left\{ \dot{u} \in F_1 ; \int_0^T \psi(|\dot{u}|) dt \leq c \right\}$$

$B(c)$  est un compact faible de  $F_1$ , on définit toujours

$$\begin{aligned} J_1 & : F_1 \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ \dot{v} & \mapsto \int_0^T G(t, \dot{v}) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K & : F_1 \rightarrow \mathbb{R} \\ \dot{v} & \mapsto \frac{1}{2} \langle \sigma(\dot{v}), v \rangle \end{aligned}$$

et

$$I = J_1 + K$$

$K$  est faiblement semi continue inférieurement sur  $B(c)$ ,  $J_1$  est faiblement semi continue inférieurement sur  $B(c)$ ,  $I$  atteint donc son minimum sur  $B(c)$  en  $\dot{v}$ .

on a

$$\int_0^T \psi(|\dot{v}|) dt < c$$

en effet

$$\begin{aligned} K(\dot{v}) &\geq -\frac{T^2}{4\pi}a^2 && \text{d'après le lemme 3.3.3} \\ J_1(\dot{v}) &\geq \int_0^T \psi(\dot{v}) dt \end{aligned}$$

comme  $0 \in B(c)$  on a

$$I(0) \geq I(\dot{v}) \geq -\frac{T^2}{4\pi}a^2 + \int_0^T \psi(|\dot{v}|) dt$$

d'où

$$\int_0^T \psi(|\dot{v}|) dt \leq \int_0^T g(t) dt + \frac{T^2}{4\pi}a^2 < c$$

d'après le choix de  $a$ . On peut donc appliquer le théorème 2.2.2, il existe  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $u = \sigma(v) + \xi$  soit solution de  $(P)$ .

Démontrons alors l'estimation annoncée dans le théorème.

$$\int_0^T \psi(|\dot{u}|) dt = \int_0^T \psi(|\dot{v}|) dt < c = T\psi(a)$$

où  $a$  vérifie

$$T\psi(a) > \frac{T^2}{4\pi}a^2 + \int_0^T g(t) dt$$

comme  $\psi$  est croissante on a bien

$$\int_0^T \psi(|\dot{u}|) dt \leq T\psi(\bar{a})$$

où  $\bar{a}$  vérifie :

$$\bar{a} = \inf_{a \geq 0} \left\{ -\frac{T^2}{4\pi}a^2 + T\psi(a) \geq \int_0^T g(t) dt \right\}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. ■

**Exemple 3.3.1** Nous donnons plus exactement un exemple de non-application de ce théorème. On pose  $T = 2\pi$

$$H(t, x, p) = \frac{x^2 + p^2}{2} - x \sin t$$

une solution de (P) est alors une solution de

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \sin t \\ x(0) = x(2\pi) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi) \end{cases}$$

problème dont on sait qu'il n'a pas de solution. Avec les notations du théorème précédent on a

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \sup \left\{ \left( \frac{x^2 + p^2}{2} - x \sin t \right) ; x^2 + p^2 \leq s^2, t \in [0, 2\pi] \right\} \\ &= \frac{s^2}{2} + s \end{aligned}$$

$$\psi(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 1 \\ \frac{a-1}{2} & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

donc

$$-\frac{T^2}{4\pi} a^2 + T\psi(a) = \begin{cases} -\pi a^2 & \text{si } a \leq 1 \\ \pi(1-2a) & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\int_0^T G(t, 0) = 0$$

le théorème ne s'applique donc pas.

## 3.4 Exemples d'application du théorème général

Nous allons retrouver successivement les résultats des sections précédentes et en établir de nouveaux, à l'aide du théorème général démontré précédemment.

### 3.4.1 Cas sous-quadratique

#### Vibrations forcées

On fait les hypothèses de (3.1.1)

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, H(t, \cdot) \text{ est convexe et } \lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{H(t, u)}{|u|} = +\infty \\ \forall u \in \mathbb{R}^{2n}, H(\cdot, u) \text{ est mesurable} \\ \forall (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, h(t) \leq H(t, u) \leq \frac{k}{2} |u|^2 + m \end{cases}$$

où  $h$  est intégrable sur  $[0, T]$ ,  $k > 0$  et  $m \geq 0, T < \frac{2\pi}{k}$ .

Les hypothèses  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  et  $\mathbf{H}_3$  du théorème général sont vérifiées.

On a alors avec les notations de la section précédente

$$\phi(s) \leq \frac{k}{2}s^2 + m$$

donc

$$\psi(a) \geq \frac{a^2}{2k} - m$$

d'où

$$\sup_{a \geq 0} \left( -\frac{Ta^2}{4k} + T\psi(a) \right) = \sup_{a \geq 0} \left[ \frac{Ta^2}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{T}{2\pi} \right) - mT \right] = +\infty$$

La condition suffisante du théorème 3.3.1 est vérifiée, on retrouve donc le théorème 3.3.1.

### Vibrations libres

On fait les hypothèse de la section 3.1.2

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall u \in \mathbb{R}^{2n}, 0 = H(0) \leq H(u), \lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{H(u)}{|u|} = +\infty \\ \forall u \in \mathbb{R}^{2n}, H(u) \leq \frac{k}{2}|u|^2 + m, k > 0 \text{ et } m \geq 0 \\ |u| \leq \eta \implies \frac{K}{2}|u|^2 \leq H(u) \text{ ou } \eta > 0, v \geq k, T \in \left[ \frac{2\pi}{K}, \frac{2\pi}{k} \right] \end{array} \right.$$

D'après le cas de vibration forcée les hypothèses du théorème 3.3.1 sont vérifiées, il ne reste plus à vérifier que la solution est non triviale pour retrouver les résultats du théorème 3.1.2

La solution  $u$  de (P) est donnée par  $u \in \sigma(v) + \xi$  où  $v$  minimise  $I$  sur  $B(c)$  avec  $c > T\psi(0)$ . Si on pose

$$\dot{w} = \xi \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \sigma(\xi) \sin\left(\frac{\xi \pi t}{T}\right) \text{ avec } |\xi| \leq r$$

$r$  vérifiant

$$G(v) \leq \frac{|v|^2}{2K} \text{ pour } |v| \leq r$$

On a

$$I(\dot{w}) < \frac{T|\xi|^2}{2} \left( \frac{1}{K} - \frac{T}{2\pi} \right) < 0$$

Or on peut choisir  $\xi$  assez petit pour que

$$\psi(\xi) < \frac{c}{T}$$

auquel cas  $\dot{w} \in B(c)$  ce qui montre que

$$\inf_{w \in B(c)} I(\dot{w}) < 0$$

donc que  $u \neq 0$ .

On peut alors localiser la solution en utilisant l'estimation

$$\int_0^T \psi(|\dot{u}|) dt \leq T\psi(\bar{a})$$

où

$$\bar{a} = \inf_{a \geq 0} \left\{ \left( \frac{T^2 a^2}{4\pi} + T\psi(a) \right) \geq \int_0^T g(t) dt \right\}$$

ici

$$\bar{a} = \left[ \frac{2m}{\frac{1}{k} - \frac{T}{2\pi}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\frac{\|\dot{u}\|^2}{2k} - mT \leq \frac{1}{2k} \left[ \frac{2mT}{\frac{1}{k} - \frac{T}{2\pi}} \right] - mT$$

on retrouve bien le résultat que l'on avait trouvé dans le théorème 3.1.2.

$$\|\dot{u}\|^2 \leq \frac{2mT}{\frac{1}{k} - \frac{T}{2\pi}}$$

### 3.4.2 Cas superquadratique

On fait les hypothèses  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  de la section 3.3.1 et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^{2n}, H(t, u) \leq \frac{k^\beta}{\beta} |u|^\beta + c \text{ où } k > 0, \beta > 2, c \geq 0.$$

On a alors le résultat suivant :

**Proposition 3.4.1** *Sous les hypothèse précédentes et si :*

$$(1) \int_0^T g(t) dt + cT \leq (2\pi)^{\frac{\beta}{\beta-2}} k^{\frac{2\beta}{2-\beta}} \left( \frac{\beta-2}{2\beta} \right) T^{\frac{2}{2-\beta}}$$

Alors il existe une solution de (P).

**Démonstration.**

On a ici

$$\phi(s) \leq \frac{k}{\beta} s^\beta + c$$

donc

$$\psi(a) \geq \frac{1}{\alpha k^\alpha} a^\alpha - c, \text{ avec } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

La condition suffisante du théorème 3.3.1 sera vérifiée si

$$\int_0^T g(t) dt \leq \inf_{a \geq 0} \left[ -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + \frac{T a^\alpha}{\alpha k^\alpha} - cT \right]$$

Le calcul donne

$$\int_0^T g(t) dt + cT \leq (2\pi)^{\frac{\beta}{\beta-2}} k^{\frac{2\beta}{2-\beta}} \left( \frac{\beta-2}{2\beta} \right) T^{\frac{2}{2-\beta}}$$

ce qui est l'hypothèse (1). ■

### 3.4.3 Cas exponentiel

On fait les hypothèses  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  de la section 3.3.1 et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^{2n}, H(t, u) \leq \exp(\alpha |u| + k) + c, \quad \alpha > 0, \quad k \text{ et } c \text{ réels}$$

**Proposition 3.4.2** *Sous les hypothèses ci-dessus et si*

$$\int_0^T g(t) dt < \sup_{a \geq \alpha \exp k} \left[ -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T \left( \frac{a}{\alpha} \log \left( \frac{a}{\alpha} \right) - k - 1 \right) - cT \right]$$

alors (P) possède une solution.

#### Démonstration.

On a

$$\phi(s) \leq \exp(\alpha s + k) + c$$

donc  $\psi \succ \tilde{\psi}$  où  $\tilde{\psi}$  est défini par

$$\tilde{\psi}(a) = \begin{cases} -\exp k - c & \text{si } a \leq \alpha \exp k \\ \frac{a}{\alpha} \left( \log \left( \frac{a}{\alpha} \right) - k - 1 \right) - c & \text{si } a \geq \alpha \exp k \end{cases}$$

La condition suffisante du théorème 3.3.1 sera vérifiée si

$$\int_0^T g(t) dt < \sup_{a \geq 0} \left( -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T \tilde{\psi}(a) \right)$$

On remarque que si  $0 \leq a \leq \alpha \exp k$ . On a

$$T \tilde{\psi}(a) = T \tilde{\psi}(0)$$

et que

$$\int_0^T g(t) dt > T \tilde{\psi}(0)$$

donc si  $0 \leq a \leq \alpha \exp k$ , on a

$$\int_0^T g(t) dt \geq -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T \tilde{\psi}(a)$$

La condition suffisante devient

$$\int_0^T g(t) dt < \sup_{a \geq \alpha \exp k} \left( -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T\psi(a) \right)$$

ce qui est vérifié par hypothèse. ■

Vibration de la forme :  $u \in \sigma \partial H(u) + f(t)$

Commençons par transformer l'équation

$$(1) \begin{cases} \dot{u} \in \sigma \partial H(u) + f(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

Pour pouvoir utiliser les résultats de la section précédente, on pose

$$m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

et on définit  $F$  par

$$\begin{cases} \dot{F} = f - m \\ \int_0^T F dt = 0 \end{cases}$$

On remarque que  $F(0) = F(T)$ .

Posons  $v = u - F$  et

$$\bar{H}(t, v) = H(v + F(t)) - \sigma(m)(v + F(t))$$

On a

$$\partial \bar{H}(t, v) = \partial H(v + F(t)) - \sigma(m)$$

d'où

$$(2) \begin{cases} \dot{v} \in \sigma \partial \bar{H}(t, v) \iff \dot{v} - f + m \in \sigma \partial H(v) + m \\ v(0) = v(T) \quad \quad \quad u(0) = u(T) \end{cases}$$

Les systèmes (1) et (2) sont donc équivalents. On fait sur  $H$  l'hypothèse

$\mathbf{H}_4$  :  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et vérifie

$$\forall u \in \mathbb{R}^{2n}, 0 = H(0) \leq H(u), \lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{H(u)}{|u|} = +\infty$$

On pose

$$\phi(s) = \sup \{ H(u) ; |u| \leq s \}$$

$$\bar{\phi}(s) = \sup \{ H(t, u) ; t \in [0, T], |u| \leq s \}$$

On a alors

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\bar{\phi}(s)}{s} = +\infty$$

par ailleurs

$$\bar{H}(t, 0) = H(F(t)) - \sigma(m) F(t)$$

est intégrable sur  $[0, T]$ .

$$\bar{G}(t, 0) = \sup_{v \in \mathbb{R}^{2n}} \sigma(m)(v + F(t)) - H((v + F(t))) = G(\sigma(m))$$

est aussi intégrable sur  $[0, T]$ .

$\bar{H}$  vérifie donc les hypothèses du théorème 3.3.1.

**Théorème 3.4.1** Soit  $H$  vérifiant  $\mathbf{H}_4$ , supposons que l'on ait

$$G(\sigma(m)) + |m| \|F\| + \frac{3Tm}{4\pi} < \sup_{a \geq \phi'_g(\|F\|)} \left( -\frac{Ta^2}{4\pi} - \left( \|F\| + \frac{T}{2\pi} m \right) a + \psi(a) \right)$$

Alors le problème

$$\begin{cases} \dot{u} \in \sigma \partial H(u) + f(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

possède au moins une solution.

**Démonstration.**

On a

$$\bar{\phi}(s) \leq \phi(s + \|F\|) + |m|(s + \|F\|) \text{ où } \|F\| = \|F\|_\infty$$

Posons

$$\tilde{\phi}(s) = \phi(s + \|F\|) + |m|(s + \|F\|)$$

On a

$$\bar{\psi}(a) \geq \tilde{\psi}(a)$$

où

$$\tilde{\psi}(a) = \sup_{s \geq 0} \{as - \phi(s + \|F\|) - |m|(s + \|F\|)\}$$

donc

$$\tilde{\psi}(a) = \sup_{s \geq \|F\|} \{(a - |m|)s - \phi(s) - a\|F\|\}$$

Evaluons alors  $\tilde{\psi}(a)$ , si  $(a - |m|) \in \partial\phi(\bar{s})$  pour un certain  $\bar{s} \geq \|F\|$  on a

$$\tilde{\psi}(a) = \Psi(a - |m|) - a\|F\|$$

$\phi$  étant convexe continue et tendant vers l'infini à l'infini on a

$$\{b \in \mathbb{R}; b \in \partial\phi(s), s \geq \|F\|\} = \left[ \phi'_g \|F\|, +\infty \right[$$

Donc si  $\tilde{a} \geq a = |m| + \phi'_g \|F\|$  on a

$$\tilde{\psi}(a) = \psi(a - |m|) - a \|F\|$$

si  $a \leq \tilde{a}$  la fonction  $s \mapsto (a - |m|)s - \phi(s)$  est décroissante sur  $[\|F\|, +\infty[$  et

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(a) &= (a - |m|) \|F\| - \phi(\|F\|) - a \|F\| \\ \tilde{\psi}(a) &= -|m| \|F\| - \phi(\|F\|). \end{aligned}$$

On a alors

$$\sup_{a \geq 0} \left( -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T(a) \right) \geq \sup_{a \geq 0} \left( -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T\tilde{\psi}(a) \right)$$

De plus

$$\int_0^T \bar{g}(t) dt = TG(\sigma(m)) \geq 0 \text{ d'après } \mathbf{H}_4$$

donc si an a :

$$(3) : TG(\sigma(m)) < \sup_{a \geq \tilde{a}} \left( -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T\tilde{\psi}(a) \right)$$

on aura

$$TG(\sigma(m)) < \sup_{a \geq 0} \left( -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T\tilde{\psi}(a) \right)$$

car sur  $[0, \tilde{a}]$ ,  $\left( -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T\tilde{\psi}(a) \right) \leq 0$ , le théorème 331 s'applique donc.

La condition (3) s'écrit alors

$$G(\sigma(m)) < \sup_{a \geq \tilde{a}} \left( -\frac{T^2 a^2}{4\pi} + \psi(a - |m|) - a \|F\| \right)$$

Posons  $x = (a - |m|)$  on obtient

$$G(\sigma(m)) + |m| \|F\| + \frac{3Tm}{4\pi} < \sup_{a \geq \phi'_g(\|F\|)} \left( -\frac{Ta^2}{4\pi} - \left( \|F\| + \frac{T}{2\pi} |m| \right) a + \psi(a) \right)$$

ce qui est vrai par hypothèse, d'ou le résultat. ■

La condition du théorème 3.4.1 s'écrit plus simplement si l'on a

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

**Corollaire 3.4.1** *Si  $H$  vérifie  $\mathbf{H}_4$  et si*

$$\int_0^T f(t) dt = 0$$

*une condition suffisante pour que le problème :*

$$\begin{cases} \dot{u} \in \sigma\partial H(u) + f(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

*Possède une solution et que*

$$0 < \sup \left\{ -\frac{Ta^2}{4\pi} - a\|F\| + \psi(a) ; a \geq \phi'_g(\|F\|) \right\}$$

*On peut alors appliquer le théorème 3.4.1 ainsi :*

*cas : **Sous-quadratique** :  $\phi(s) \leq \frac{k}{2}s^2 + c$*

***Sur-quadratique** :  $\phi(s) \leq \frac{k^\alpha}{\alpha}s^\alpha + c, \alpha > 2$*

***exponentiel** :  $\phi(s) \leq \exp(s+k) + c$*

et en tirer des conditions suffisantes d'existence, mais nous préférons un résultat général.

**Théorème 3.4.2** *On suppose que  $H$  vérifie  $\mathbf{H}_4$ . On pose*

$$T_0 = 4\pi \sup_{a \geq 0} \frac{\phi^*(a)}{a^2}$$

*Alors  $T_0 > 0$  et pour tout  $T < T_0$  il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que si  $\|f\|_1 \leq \varepsilon$  le problème aux limites :*

$$\begin{cases} \dot{u} \in \sigma\partial H(u) + c \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

*ait au moins une solution.*

### Démonstration.

Comme

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \psi(a) = +\infty$$

on a  $T_0 > 0$ . Supposons  $0 < T < T_0$  d'après la définition de  $T_0$  on a l'existence de  $\bar{a} > 0$  tel que

$$-\frac{T}{4\pi}\bar{a}^2 + \psi(\bar{a}) > 0$$

On sait que pour

$$a \in \partial\phi(0) = ]-\infty, \phi'_d(0)]$$

On a

$$\psi(a) = -\phi(0) = 0$$

on a donc

$$\bar{a} \succ \phi'_d(0).$$

Comme  $\psi$  et  $G$  sont continues avec  $G(0) = 0$  d'après  $H_4$  ; et comme  $\phi'_d$  est semi continue supérieurement, il existe  $\eta \succ 0$  assez petit pour que

$$|m| < \eta \text{ et } \|F\| < \eta$$

impliquent

$$\phi'_d \|F\| < \bar{a}$$

et

$$-\frac{T\bar{a}^2}{4\pi} - \left( \|F\|_\infty + \frac{T}{2\pi}m \right) \bar{a} + \psi(\bar{a}) \succ G(\sigma(m)) + |m| \|F\| + \frac{3Tm^2}{4\pi}$$

Ces deux conditions impliquent la condition d'existence du théorème 3.4.1. Il ne reste plus qu'à prendre  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que

$$\|f\|_1 \leq \varepsilon \Rightarrow |m| \leq \eta \text{ et } \|F\| \leq \eta$$

■

Indiquons les valeurs de  $T_0$  pour les trois cas que nous avons évoqué.

**Sous quadratique :**  $H(u) \leq \frac{k}{2}|u|^2 + c$ ,  $T_0 > \frac{2\pi}{k}$

**Sur quadratique :**  $H(u) \leq \frac{k^\alpha}{\alpha}|u|^\alpha + c$ ,  $\alpha > 2$ .  $T_0 = +\infty$  si  $c = 0$

$$T_0 > \frac{2\pi}{k^2} \left( \frac{2\beta c}{2-\beta} \right)^{1-\frac{2}{\beta}} \text{ où } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \text{ si } c > 0$$

**Exponentiel :**  $H(u) \leq \exp(\alpha|u|) + k$  avec  $\alpha < 0$

$$T_0 > \frac{4\pi}{\alpha^2} \exp - (k + 2).$$

---

# Conclusion

Pour conclure, l'objectif de ce travail à été d'introduire les solutions périodiques d'un système hamiltonien dans les cas sous-quadratique, super-quadratique et dans le cas générale. De plus, nous avons défini une forme dual du principe de moindre action sur laquelle repose la recherche où l'existence de ses solutions.

Indiquons que l'on trouvé une approche nouvelle pour les problèmes perturbatifs dans les systèmes hamiltoniens. De nombreux résultats concernant l'existence de solutions périodiques dans l'équation des ondes à une dimension ont été démontrés ces dernières années. La théorie de ces systèmes introduit l'auditoire aux méthodes classiques, reposant principalement sur l'application de Poincaré, et au théorème de Kolmogorov.

---

# Bibliographie

- [1] H. Bertychi, *Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens*, Seminaire N. Bourbaki, 1982, 105-128.
- [2] J. Blot, *Systèmes hamiltoniens leurs solutions périodiques*. CEDIC, Paris 1982, 2-7124-0721-0.
- [3] G. Christol, *Calcul différentiel*. ellipses, 1997, 2-7298-6751-1.
- [4] I. Ekeland, *Une théorie de Morse pour les systèmes hamiltoniens convexes*, Annales de l'I. H. P. Section C, Tome 1, 1984, 19-78.
- [5] F. Filbert, *Analyse numérique algorithme et étude mathématique*. 2<sup>e</sup> édition, Dunod, 2013, 978-2-10-059910-3.
- [6] A. Guichardet, *Integration analyse hilbertienne*. Grandes école medecine 32,rue Bar-gue75015 Paris, 2-7298-8959-0.
- [7] J. B. Hiriart-Urruty et C. Lemarechal, *Convex Analysis and Minimisation algorithms*, Spinger, 1993.
- [8] P. J. Laurant, *Approximation et Optimisation*, Hermann, 1972.
- [9] M. Marle, *Systèmes dynamiques une introduction*. Ellipses, 2003, 2-7298-1530-9.
- [10] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton u., 1970.
- [11] A. Weinstein, *Periodic orbits for convex hamiltonian système*, Ann. Math. 108, 1987.
- [12] M. Willem, *Oscillations forcées de systèmes hamiltoniens*, Publications Mathématique de la faculté des sciences de Besançon, 1981.