MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

CHIBANE RIMA

THEME

Mouvement Brownien et Intégrale stochastique

Soutenu devant le jury composé de :

Mme.	F.	TALBI	M.C.A	U. de Béjaia	Présidente
Mme.	L.	BOURAINE	M.C.A	U. de Béjaia	Rapporteure
Mlle.	L.	BAICHE	M.A.B	U. de Béjaia	Examinatrice

Année 2015/2016

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma promotrice Madame L. Bouraine. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je suis honoré de pouvoir remercier les membres de mon jury, d'avoir évalué ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi, « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».

Je remercie mes frères (hakim et yassine), et a toute mes sœurs pour leur encouragement.

Je remercie très spécialement celui qui m'a toujours soutenue et crue en moi mehdi.

Enfin, je remercie tous mes Ami(e)s que j'aime tant.

Table des matières

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des réels positifs
Ω	un ensemble
$\mathcal{F}$	une tribu sur Ω
P	est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$	tribu borélienne sur $\mathbb{R}$.
B	Mouvement brownien
$\mathbb{E}(Y)$	L'espérance d'une variation aléatoire Y
$p.s$	presque sûrement
$\int_a^b X_s(w)\, dB_s(w)$	Intégrale stochastique
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	une famille croissante de $\sigma -$ algèbre $(\mathcal{F}_t) \in \mathcal{F}$.
1_A	fonction indicatrice de l'ensemble A

Introduction générale

Pendant les cinquante dernière années, l'étude des phénomènes stochastiques a pris un intérêt croissant. De nombreuses recherches ont été réalisées dans ce domaine stimulées par le besoin de prendre en compte les aspects "aléatoires" dans les systèmes physique. Ainsi l'un des buts principaux de la théorie des probabilités est la description de comportement macroscopique de systèmes de particules gouvernées par leurs interactions locales. L'exemple est fourni par le mouvement brownien qui est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une "grosse" particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les "petites" molécules du fluide environnant il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particules qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown en observant des mouvements de particules à l'intérieur de grains de pollen de clarkia pulchella (une espèce de fleur sauvage nord-américaine), puis de divers autres plantes [[4]].

La description physique la plus élémentaire du phénomène est la suivante:

- Entre deux chocs, la grosse particule se déplace en ligne droite avec une vitesse constante.

- La grosse particule est accélérée lorsqu'elle rencontre une molécule de fluide ou une paroi.

Le mouvement brownien et donc le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau. Le champs d'application du mouvement brownien est beaucoup plus vaste que l'étude des particules microscopiques en suspension et inclut la modélisation du prix des actions, du bruit thermique dans les circuits électriques, du comportement limite des problèmes de files d'attente et des perturbation aléatoires dans un grand nombre de systèmes physique, biologique ou économique.

Brown n'est pas exactement le premier à avoir observé ce mouvement. Il signale lui-même que plusieurs auteurs avaient suggéré l'existence d'un tel mouvement en lieu avec les théories vitalistes de l'époque, parmi ceux ci, certains l'avaient effectivement décrit, on peut mentionner en particulier L'abbé John Turberville Nedham (1713,1781). Célèbre à son époque pour sa grande maîtrise du microscope, qui attribua ce mouvement à une activité vitale.

La réalité des observations de Brown a été discutée tout au long du xx^{e} siècle compte tenu de la mauvaise qualité de l'optique dont il disposait, certains ont contesté qu'il ait pu voir véritablement le mouvement brownien qui intéresse des particules de quelques micromètres au plus. Les expériences ont été refaites par l'Anglais Brown Ford au début des années 1990, avec le matériel employé par Brown et dans les conditions les plus semblables possibles. Le mouvement a bien été observé dans ces conditions, ce qui valide les observations de Brown.

En 1901, Louis Bachelier propose un premier modèle mathématique du mouvement brownien et l'applique à la finance.

En1905, Albert Einstein donne une description quantitative du mouvement brownien et indique notamment que des mesures faites sur le mouvement permettent d'en déduire leur dimension moléculaire, il a obtenu la densité de probabilité de transition du mouvement brownien à partir de la théorie moléculaire de la chaleur. Jean Perrin réalise ce programme et publie en 1909 une valeur du nombre d'Avogadro ce qui lui vaut un prix Nobel en 1926. Il décrit également l'extrême irrégularité des trajectoires qui n'ont de tangente en aucun point.

Le 1er traitement mathématique rigoureux est dû à N. Wiener (1923, 1924) , qui a prouvé l'existence du brownien.

En 1933, Paul Lévy démontre que le mouvement brownien a été réalisé par nombreux auteurs. Citons Volker strasses ainsi que Kiyoshi Itô, lequel développe un calcul différentiel spécifique au mouvement brownien, le calcul stochastique.

L'avantage de travailler avec le mouvement brownien réside dans le fait que nous comprenons son comportement grâce à des outils qui ne sont valides que pour les fonctions continues.

Il est certainement le temps de discuter un peu du sujet développé principalement par Itô et dont les ignobles applications l'ont rendu célèbre "le calcul stochastique d'Itô" terme qui ressemble à la fois la théorie de l'intégration stochastique par rapport au mouvement brownien, et plus généralement à la somme d'une martingale et d'un processus à variation bornée, ainsi que la théorie des équations différentielles stochastique (EDS) introduite par Itô et le mouvement brownien.

Ce mémoire est comme suit : après cette introduction générale, le premier chapitre donne quelques rappels et compléments de la théorie des probabilistes qui nous seront indispensables pour la suite, et aussi quelques résultats importants concernant les processus stochastiques.

Le deuxième chapitre est consacré à la définition du mouvement brownien, ses propriétés et sa construction.

Le troisième chapitre décrit l'intégrale d'Itô, la construction de cette dernière et quelques propriétés associées.

Dans le dernier chapitre, on étudie la formule d'Itô unidimensionnelle et multidimensionnelle, et la représentation des martingales, et on introduit à la fin de ce chapitre les équations différentielles stochastiques. On termine par une conclusion qui synthétise notre travail.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Introduction

Ce chapitre regroupe quelques notions éssentielles de la théorie des probabilités et les processus stochastiques, qui sont indispensables pour la suite. Pour un exposé bien complet, nous renvoyons, par exemple, le lecteur à [1] et [3]

1.1 Espace de probabilité

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où :

Ω est un ensemble

$\mathcal{F}$ est une tribu (où $\sigma -$ algèbre) sur Ω

P est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Définition 1.1.1 *une tribu* $($*où* $\sigma -$ *algèbre*$)$ *sur* Ω *est une famille* $\mathcal{F}$ *de sous ensembles de* Ω $($*appelés "événements "*$)$ *tels que*

$$\begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F} \\ A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ (A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{cases}$$

En particulier : $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$, de même $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

Exemple 1.1.1 *Soit* $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, *on peut définir pleusieurs tribus sur* Ω.

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{1, 2\}, \ldots, \Omega\} =$ *tribu complète* $($*la plus grande*$)$

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} =$ *tribu triviale* (*la plus petite*)

($\emptyset =$ *événement impossible,* $\Omega =$ *événement certain*)

$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, \ldots, 6\}, \Omega\}$

$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ ... *etc*

Soit $\Omega = [0, 1]$ *et* $I_1, \ldots, I_n$ *une famille d'intervalles formant une partition de* Ω*. La famille de sous ensembles définie par*

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, I_1, I_2, \ldots, I_1 \cup I_2, \ldots, I_1 \cup I_2 \cup I_3, \ldots, \Omega\}.$$

est une tribu sur Ω.

Définition 1.1.2 *soit* $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ *une famille de sous ensembles de* Ω*. la tribu engendrée par* $\mathcal{A}$ *est la plus petite tribu sur* Ω *qui contient tous les sous ensembles* $A_i, i \in I$*. Elle est notée* $\sigma(\mathcal{A})$ (*NB: l'ensemble* I *n'est pas forcèment dénombrable*).

Exemple 1.1.2 *Reprenons l'exemple 1.1.1*

Soit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, *si* $\mathcal{A}_1 = \{\{1\}\}$, *alors* $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{F}_1$.

Si $\mathcal{A}_2 = \{\{1, 3, 5\}\}$, *alors* $\sigma(\mathcal{A}_2) = \mathcal{F}_2$

Pour $\Omega = [0, 1]$, *si* $\mathcal{A} = \{I_1, \ldots, I_n\}$, *alors* $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{G}$.

Définition 1.1.3 *Soit* $\Omega = [0, 1]$*. La tribu borélienne sur* $[0, 1]$ *est la tribu engendrée par la famille de sous ensembles*

$$A = \{]a, b[: 0 \leq a < b \leq 1\} = \{\textit{intervalles ouverts dans } [0, 1]\}.$$

Elle est notée $\mathcal{B}_{[0,1]}$*. Elle contient un trés grand nombre de sous ensembles de* $[0, 1]$, *mais pas tous .*

Remarque 1.1.1 *Pour* Ω *un ensemble fini, on choisit souvent* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *Pour* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *ou* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *on choisit souvent* $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\Omega}$.

Définition 1.1.4 *Une sous tribu de* $\mathcal{F}$ *est une tribu* $\mathcal{G}$ *telle que si* $A \in \mathcal{G}$ *alors* $A \in \mathcal{F}$*. On note* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Exemple 1.1.3 *Reprenons l'exemple 1.1.1. On a*

$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ *mais pas* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, *ni* $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$

Remarque 1.1.2 *Il est toujours vrai que* $A \in \mathcal{G}$ *et* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow A \in \mathcal{F}$.

Mais il est faux de dire que $A \subset B$ *et* $B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \in \mathcal{F}$.

Contre exemple:

$\{1\} \subset \{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 5\} \in \mathcal{F}_2$ mais $\{1\} \notin \mathcal{F}_2$.

Définition 1.1.5 *Soit* $\mathcal{F}$ *une tribu sur* Ω. *Une mesure de probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une application* $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *telle que*

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \text{ ; } \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Et si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ *sont disjoints deux à deux, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

En particulier, si $A, B \in \mathcal{F}$ *et* $A \cap B = \emptyset$, *alors*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

De plus

1. Si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, $A_n \subset A_{n+1}$ et $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.
2. Si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1}$ et $\cap_{,n=1}^{\infty} A_n = A$, alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$.

Exemple 1.1.4 *Soit* $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. *On définit*

$\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $\forall i$ (*mesure de Probabilité associée à un dé équilibré*).

Dans ce cas, on voit par exemple que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{1, 3, 5\}) &= \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{5\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}_1(\{i\}) = 0,\ \forall i \leq 5,\ \mathbb{P}_2(\{6\}) = 1\ .$$

(*mesure de probabilité associée à un dé pipé*).

Définition 1.1.6 *Soient* $\Omega = [0,1]$ *et* $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, *on appelle mesure de Lebesgue sur* $[0,1]$ *la mesure de probabilité définie par*

$$\mathbb{P}(]a,b[) = b - a, \forall\ 0 \leq a < b \leq 1\ .$$

P n'est pas définie a priori que sur les intervalles mais elle est uniquement extensible à tout ensemble borélien

$$B \in \mathcal{B}_{[0,1]}.$$

Elle est notée par

$$\mathbb{P}(B) = |B|\ \ , B \in \mathcal{B}_{([0,1])}.$$

En utilisant la propriété ci-dessus, on déduit que pour tout $x \in [0,1]$

$$|\{x\}| = \lim_{n\to\infty} \left| \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0\ .$$

Généralisation à la dimension n.

Soit $\Omega = [0,1]^n$

1. Tribu boréliènne

$$\mathcal{B}_\Omega = \sigma(A), \text{ou } A = \{]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \ldots \times]a_n, b_n[,\ 0 \leq a_i < b_i \leq 1\}.$$

2. Mesure de Lebesgue

$$\mathbb{P}(]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \ldots \times]a_n, b_n[) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n).$$

Comme dans le cas uni-dimensionnel. $\mathbb{P}$ n'est définie a priori que pour certains ensembles (le rectangles), mais elle est uniquement extensible à tout $B \in \mathcal{B}_\Omega$ (par exemple $B =$ disque, oval...)

Notation

$$\mathbb{P}(B) = |B|,\ \text{pour } B \in \mathcal{B}_\Omega.$$

1.2 Variable aléatoire

Définition 1.2.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité.*

Une variable aléatoire (souvent abrégé v.a par la suite) est une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

telle que

$$X^{-1}(B) = \{w \in \Omega : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}, \ \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Proposition 1.2.1 X *est aussi dite une fonction (ou v.a)* $\mathcal{F}-$*mesurable.*

Si $\Omega = \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, *alors* X *est dite fonction borèlienne .*

Définition 1.2.2 *Pour* $A \subset \Omega$, *on pose*

$$1_A(w) = \begin{cases} 1 \ si \ w \in A \\ 0 \ sinon \end{cases}.$$

On vérifie que la v.a . 1_A *est* $\mathcal{F}-$*mesurable si et seulement si* $A \in \mathcal{F}$.

Exemple 1.2.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *l'espace probabilisé du dé équilibré .*

$$X_1(w) = \{w : \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X_1(w) = i\})\} = \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}.$$
$$X_2(w) = \left\{1_{\{1,3,5\}}(w) : \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X_2(w) = 1\}) = \mathbb{P}(\{1,3,5\})\right\} = \frac{1}{2}.$$

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. X_1 *et* X_2 *sont toutes les deux* $\mathcal{F}-$*mesurables.*

Soit

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}.$$

Seule X_2 *est* $\mathcal{F}_2-$*mesurable;* X_1 *ne l'est pas. En effet*

$$\{w \in \Omega : X_2(w) = 1\} = \{1,3,5\} \in \mathcal{F}_2$$

et

$$\{w \in \Omega : X_2(w) = 0\} = \{2,4,6\} \in \mathcal{F}_2.$$

Tandis que

$$\{w \in \Omega : X_1(w) = 1\} = \{1\} \notin \mathcal{F}_2.$$

Définition 1.2.3 *La tribu engendrée par une famille de v.a*

$$\{X_i, i \in I\} \ \textit{sur} \ (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

est définie par

$$\begin{aligned}\sigma\{X_i, i \in I\} &= \sigma\left(\{X_i \in B\},\ i \in I,\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right) \\ &= \sigma\left(\{X_i \leq t\}, i \in I,\ t \in \mathbb{R}\right).\end{aligned}$$

Exemple 1.2.2 *Reprenons l'exemple 1.2.1*

$$\sigma(X_1) = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega),\ \sigma(X_2) = \mathcal{F}_2 \neq \mathcal{P}(\Omega)\ .$$

Proposition 1.2.2 *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a, alors $g(X)$ est une v.a .*

Preuve. Soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. On a

$$\{w \in \Omega : g(X(w)) \in B\} = \left\{w \in \Omega : X(w) \in g^{-1}(B)\right\}.$$

Or

$$g^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}, g(x) \in B\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

car g est borélienne comme X est une v.a, on en déduit que

$$\left\{w \in \Omega : X(w) \in g^{-1}(B)\right\} \in \mathcal{F}$$

donc $g(X)$ est une v.a . ■

Proposition 1.2.3 *Toute fonction continue est borélienne.*

1.3 Espérance conditionnelle

Définition 1.3.1 *L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ est une variable aléatoire $Y \in \mathcal{B}$ telle que*

$$\mathbb{E}[1_A X] = \mathbb{E}[1_A Y] \qquad \forall A \in \mathcal{B} \tag{1.3.1}$$

L'assertion 1.3.1 est en fait équivalente à

$$\mathbb{E}[ZX] = \mathbb{E}[ZY] \qquad \forall Z \in \mathcal{B} \ \textit{bornée.}$$

Conditionnement par rapport à un événement $B \in \mathcal{F}$

Soit
$$A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}; \text{ si } \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

Soit X une variable aléatoire intégrable (i.e $\mathbb{E}(|X|) < \infty$)
$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{\mathbb{E}(X\ 1_B)}{\mathbb{P}(B)}; \text{ si } \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

Conditionnement par rapport à une v.a Y (à valeur dans D dénombrable)

Soit X une v.a intégrable
$$\mathbb{E}(X|Y) = \psi(Y).$$

où
$$\psi(y) = \mathbb{E}(X|Y = y), \ y \in D.$$

Exemple 1.3.1 *Soient (X_1, X_2) deux jets de dés indépendants*
$$\mathbb{E}(X_1 + X_2|X_2) = \psi(X_2).$$

On a
$$\begin{aligned}\psi(y) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2/X_2 = y)\\ &= \frac{\mathbb{E}\left((X_1 + X_2)\, 1_{\{X_2 = y\}}\right)}{\mathbb{P}(\{X_2 = y\})}\\ &= \frac{\mathbb{E}\left((X_1 + y)\, 1_{\{X_2 = y\}}\right)}{\mathbb{P}(\{X_2 = y\})}\\ &= \frac{\mathbb{E}(X_1 + y)\,\mathbb{P}(\{X_2 = y\})}{\mathbb{P}(\{X_2 = y\})}\\ &= \mathbb{E}(X_1) + y\end{aligned}$$

donc
$$\mathbb{E}(X_1 + X_2|X_2) = \mathbb{E}(X_1) + X_2.$$

Conditionnement par rapport à une tribu G

Soit X une v.a (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et G une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.3.2 *Il existe une v.a Z telle que $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$ et*

i) *Z est une v.a G-mesurable*

ii) $\mathbb{E}(XU) = \mathbb{E}(ZU), \forall U$ *v.a G-mesurable et bornée.*

Z est notée $\mathbb{E}(X|G)$ et est appelée espérance conditionnelle de X par rapport à G.

Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soit X, Y deux v.a intégrables.

1. Linéarité
$$\mathbb{E}(cX + Y|G) = c\mathbb{E}(X|G) + \mathbb{E}(Y|G) \text{ p.s.}$$
2. Si $X \perp G$ alors
$$\mathbb{E}(X|G) = \mathbb{E}(X) \text{ p.s.}$$
3. Si X est G-mesurable, alors
$$\mathbb{E}(X|G) = X \text{ p.s.}$$
4. Si Y est G-mesurable et bornée , alors
$$\mathbb{E}(YX|G) = Y\mathbb{E}(X|G) \text{ p.s.}$$

1.4 Convergences de suites de variables aléatoires

Soient $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de v.a et X une autre v.a définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il y a pleusieurs façons de définir la convergence de la suite (X_n) vers X, car $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Convergence en Probabilité

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X \text{ si } \mathbb{P}(\{w \in \Omega : |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Convergence presque sûre

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.s}{\to}} X \text{ , si } \mathbb{P}\left(\left\{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\right\}\right) = 1.$$

Convergence en moyenne (ou convergence dans L^1)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^1\right) = 0.$$

Convergence en moyenne quadratique (ou convergence dans L^2)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^2\right) = 0.$$

1.5 Processus stochastiques

Pour représenter l'état d'un système dépendant du temps et du hasard. Le modèle mathématique se présente naturellement sous la forme d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et d'une fonction $(t, w) \to X_t(w)$ représentant l'état du système. Pour t fixé, l'état du systéme est une variable aléatoire $X_t(w)$, en revanche pour une évolution particulière du système (i.e à w fixé) les états successifs sont représentés par la fonction $t \to X_t(w)$ que l'on nomme par abus de langage une trajectoire .

Définition 1.5.1 *(Filtration) Une filtration $\{\mathcal{F}_t,\ 0 \leq t \leq +\infty\}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$:*

$$\textit{pour } 0 \leq s \leq t < +\infty;\ \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.5.2 *On appelle processus stochastique (resp.processus stochastique adapté), la donnée*

$$X = \left(\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\right),$$

$$\left(\textit{resp.}\quad X = \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\right)\right),$$

où

T est un sous ensemble de $\mathbb{R}_+$ (qui représente le temps).

$(X_t)_{t\in T}$ *une famille de variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{F})$, *à valeurs dans un espace topologique* E *muni de sa tribu des boréliens* $\mathcal{B}_E$

$$\left(\begin{array}{c} \text{resp. qu'on suppose de plus adaptée à la filtration } (\mathcal{F}_t)_{t\in T} \text{ i.e. telle que pour tout } t \in T,\ X_t \\ \text{est } \mathcal{F}_t \text{ -mesurable} \end{array}\right).$$

Remarques 1.5.1 *1. Un processus stochastiques modélise l'état d'un système aléatoire au cours du temps. L'espace* E *dans lequel les variables aléatoires* X_t *prennent leurs valeurs, est appelé l'espace des états du processus. La variable aléatoire* X_t *représente l'état du processus à l'instant* t.

2. *Dans la plupart des cas, l'espace des états* $(E, \mathcal{B}_E)$ *est l'espace numérique* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ *de dimension* d *et l'ensemble des temps* T *est un intervalle* $[0, a]$ *ou* $[0, +\infty[$. *Dans ce cas le processus* X *est dit à temps continu. Lorsque* T *est l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers, le processus est à temps discret.*

3. *La filtration d'un processus est un objet important qui contient l'essentiel des propriétés probabilistes du processus .*

4. *L'application* $t \longmapsto X_t(w)$ *de* T *dans* E *est la trajectoire du processus correspondant à l'éventualité* $\omega \in \Omega$.

5. *On désignera souvent le processus* X *par* $X = (X_t)_{t\in T}$ *quand le reste de la donnée est fixé ou n'a pas besoin d'être précisé.*

1.5.1 Martingale

Définition 1.5.3 *(Martingale) Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\right)$ *un espace probabilisé filtrée. Une martingale par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *est un processus stochastique* $(M_t)_{t\in T}$ *tels que :*

i) (M_t) *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable pour tout* t.

ii) $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

iii) $\mathbb{E}(M_s|\mathcal{F}_t) = M_t$ *pour tout* $s \geq t$.

Remarque 1.5.2 *Si la dernière condition est remplacée par* $\mathbb{E}(M_s | \mathcal{F}_t) \leq M_t$ *on dit que* (M_t) *est sur-martingale, et si elle est remplacée* $\mathbb{E}(M_s | \mathcal{F}_t) \geq M_t$ *on dit que c'est une sous-martingale.*

1.5.2 Processus équivalents

Définition 1.5.4 i) *Deux processus* $(X_t)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *sont dits équivalents si et seulement si ,*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \ldots, t_n) \in T^n, \ \ (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \underset{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) .$$

On dit également que les processus ont même marginales fini-dimensionnelles .

ii) *Un processus* $X = \left(\Omega, \mathcal{F}\ , (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\right)$ *est une modification d'un processus*

$$Y = \left(\Omega, \mathcal{F}\ , (Y_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\right)$$

si et seulement si

$$\forall t \in T \ , \ X_t = Y_t \ \mathbb{P} - ps.$$

iii) *Deux processus* $X = \left(\Omega, \mathcal{F}\ , (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\right)$ *et* $Y = \left(\Omega, \mathcal{F}\ , (Y_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\right)$ *sont dits indiscernables si et seulement si*

$$\mathbb{P}\left(\{w \ / \ \forall t \in T, \ X_t(w) = Y_t(w)\}\right) = 1.$$

Définition 1.5.5 *On dit que les trajectoires d'un processus sont càdlàg (continue à droite, limite à gauche)*

si et seulement si pour $\mathbb{P}$ *presque tout* w, $t \in T \to X_t(w)$ *.*

est continue à droite et admet une limite à gauche.

Pour simplifier les choses nous supposerons désormais que $T = \mathbb{R}_+$. Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus. Fixons un nombre fini d'instants $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$. On note $P_{t_1,\cdots,t_n}$ la loi du vecteur $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$. Remarquons très simplement que pour toute famille $(A_1, \cdots, A_n)$ de Boréliens, pour $t_{n+1} \geq t_n$, on a

$$P_{t_1,\cdots,t_n}\ (A_1 \times \cdots \times A_n) = P_{t_1,\cdots,t_n,t_{n+1}}(A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{R}) . \tag{1.5.1}$$

Le théorème suivant dû à Kolmogorov assure l'existence d'un processus stochastique associé à une famille de marginales fini-dimensionnelles pour vu qu'une condition de comptabilité naturelle de type 1.5.1 soit vérifiée. Ce théorème se révèle utile pour démontrer de manière abstraite l'existence d'un processus en particulier

Théorème 1.5.1 *Soit une famille de probabilités*

$$\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n};\ n \geq 1,\ 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$$

telle que

(a) $\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}$ *est une probabilité sur* $\mathbb{R}^n$.

(b) *Si* $\{0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_m\} \subset \{0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n\}$ *alors*

$$\pi * P_{t_1,\ldots,t_n} = P_{s_1,\ldots,s_n}$$

où π *est la projection naturelle de* $\mathbb{R}^n$ *sur* $\mathbb{R}^m$.

Alors il existe alors un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *dont les marginales fini-dimensionnelles sont exactement les* $\{P_{t_1,\ldots,t_n}\}$.

Un processus étant une fonction de deux variables, on a une définition naturelle de la mesurabilité.

Définition 1.5.6 *[4] Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$*est dit mesurable si la fonction*

$$(t,w) \in \left(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}\right) \times (\Omega, \mathcal{F}) \to X_t(w) \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

est mesurable i.e $\forall s \in \mathbb{R}_+,\ \forall A \in \mathcal{F}$

$$\{(t,w), 0 \leq t \leq s,\ X_t(w) \in A\ \} \in \mathcal{B}_{([0,s])} * \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Remarque 1.5.3 *Notons si* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est mesurable , si* $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *la variable aléatoire*

$$Y_t = \int_0^t f(X_s)\, ds$$

est bien définie .

Définition 1.5.7 *L'espace*

$$L^2(\Omega)\times[0,s]=\left\{(X_t)_{t\in[0,s]}\ \textit{mesurable; }\mathbb{E}\left[\int_0^s X_u^2du\right]<\infty\right\}.$$

muni de la norme naturelle associée, est un espace de hilbert .

Construction d'un processus stochastique

Si I et J sont des parties finies de l'espace des temps T telles que $J\subset I$, on note $\Phi_{I,J}:E^I\to E^J$ la projection canonique définie par

$$\Phi_{I,J}\left((x_i)_{i\in I}\right)=(x_j)_{j\in J}.$$

(Par exemple si $I=\{1,2,3\}$ et $J=\{2,3\}$, $\Phi_{I,J}(x_1,x_2,x_3)=(x_2,x_3)$).

1.6 Processus gaussiens

Définition 1.6.1 *Le vecteur* $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ *est gaussien si pour tous* $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, *la variable aléatoire réelle*

$$\sum_{i=1}^n a_iX_i$$

est de loi normale.

Définition 1.6.2 *Un processus aléatoire à valeurs dans* $E=\mathbb{R}^d$ *est dit gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes.*

Soit $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un processus gaussien réel* $(i.e\ E=\mathbb{R})$. *Pour tous* $s,t\in\mathbb{R}_+$, *on pose*

$$m(t)=\mathbb{E}(X_t) \tag{1.6.1}$$

$$\Gamma(s,t)=cov(X_s,X_t)=\mathbb{E}\left((X_t-m(t))(X_s-m(s))\right). \tag{1.6.2}$$

Définition 1.6.3 *La fonction* $m:T\to\mathbb{R}$ *définie en 1.6.1 s'appelle la moyenne du processus gaussien* X.

La fonction $\Gamma : T \times T \to \mathbb{R}$ *définie en 1.6.2 est appelée la covariance du processus gaussien* X.

Conclusion

Les processus stochastique sont à la base de la définition de la plupart des phénomènes réels. Dans le chapitre suivant, on va décrire un processus dont, les trajectoires, sont continues nulles part dérivable appelé “mouvement brownien”

CHAPITRE 2

Le Mouvement Brownien

Introduction

En 1827, grâce aux progrès qui viennent d'être réalisés dans la fabrication des microscopes, le botaniste écossais R. Brown observe des minuscules particules de pollen qui placées dans l'eau, au lieu de tomber régulièrement, se trouvent animées d'un mouvement vif et parfaitement désordonné qui se prolonge indéfiniment dans les même conditions quelle que soit la durée de l'observation .

Nous allons maintenant présenter la description générale du mouvement brownien

Pour plus de détails voir [4]

2.1 Généralités

2.1.1 Les accroissements du mouvement brownien

Il y a plusieurs présentations possibles du mouvement brownien. Nous avons choisi de privilégier l'aspect processus à accroissement indépendants. On obtient aussitôt que le mouvement brownien est une martingale.

Définition 2.1.1 *Un processus* $B = \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *à valeurs réelles est appelé mouvement brownien si*

$$B_0 = 0 \qquad \mathbb{P} - ps. \tag{2.1.1}$$

$$\forall\ 0 \leq s \leq t, \quad \textit{la variable aléatoire } B_t - B_s \textit{ est indépendante de } \mathcal{F}_s. \tag{2.1.2}$$

$$\forall\ 0 \leq s \leq t, B_t - B_s \textit{ est de loi } \mathcal{N}(0, t-s). \tag{2.1.3}$$

Autrement dit, le processus B part de 0, ses acroissements sont indépendants du passé et sont de loi normale centrée et de variance égale a la longueur de l'intervalle de temps.

Définition 2.1.2 *Lorsque $(\mathcal{F}_t = \sigma(B_s),\ 0 \leq s \leq t)$ est la filtration naturelle de $(B_t)_{t\geq 0}$, on dit que B est un mouvement brownien naturel.*

Remarques 2.1.1 *1. On considère parfois des mouvements browniens sur un intervalle de temps compact $T = [0, a]$. La définition est la même que celle donnée ci-dessus en remplaçant $T = [0, +\infty[$ par $T = [0, a]$.*

2. Le point 2.1.2 de la définition implique que les variables aléatoires $B_t - B_s$ et $B_{u_1} \cdots B_{u_n}$ sont indépendantes pour tous $u_1, \cdots, u_n \leq s$.

3. On peut affaiblir la condition 2.1.3 en demandant seulement que les variables aléatoire $\frac{1}{\sqrt{t-s}}(B_t - B_s)$, pour $0 \leq s < t$, soient toutes de même loi centrée avec un mouvement d'ordre deux. En effet en écrivant

$$\frac{B_t - B_s}{\sqrt{t-s}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{B_t - B_{\frac{(s+t)}{2}}}{\sqrt{\frac{t-s}{2}}} + \frac{B_{\frac{(s+t)}{2}} - B_s}{\sqrt{\frac{t-s}{2}}}\right).$$

On voit que

$$X = \frac{B_t - B_{\frac{(s+t)}{2}}}{\sqrt{\frac{t-s}{2}}} \textit{ et } Y = \frac{B_{\frac{(s+t)}{2}} - B_s}{\sqrt{\frac{t-s}{2}}}.$$

sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$, et que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Proposition 2.1.1 *Tout mouvement brownien est une martingale relativement à sa filtration i.e:*

$$\textit{pour tout } s < t,\ \mathbb{E}(B_t \,|\mathcal{F}_s) = B_s.$$

Preuve. Si $s < t$, l'indépendance de $B_t - B_s$ et$\mathcal{F}\ _s$ implique que

$$\mathbb{E}(B_t - B_s \,|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0,$$

puisque B est centré. D'où le résultat. ■

Proposition 2.1.2 *Tout mouvement brownien est un processus à accroissements indépendants i.e:*

$$\textit{Pour tous } s = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n,$$

les variables aléatoires $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ $(k = 1, \cdots, n)$ *sont indépendantes et indépendantes de la tribu* $\mathcal{F}_s$.

Preuve. Soient $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ des boréliens de $\mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{F}_s$. Comme pour tout

$$k = 1, \cdots, n, \; B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

est indépendante de $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$, on voit facilement par récurrence descendante que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \in \Gamma_n, \cdots, B_{t_1} - B_s \in \Gamma_1, A\right) \\
&= \mathbb{P}\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \in \Gamma_n\right) \mathbb{P}\left(B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}} \in \Gamma_{n-1}\right) \cdots \mathbb{P}\left(B_{t_1} - B_s \in \Gamma_1\right) \mathbb{P}(A) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \in \Gamma_k\right)\right) \mathbb{P}(A).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve en même temps que les variables aléatoires $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ sont indépendantes (prendre $A = \Omega$) d'où le résultat. ■

Le résultat précédent a pour conséquence l'intéressante propriété suivante du mouvement brownien.

Corollaire 2.1.1 *Si* B *est un mouvement brownien, le processus* $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-martingale.*

Preuve. Soit $t > s$. Comme $\mathbb{E}(B_t B_s | \mathcal{F}_s) = B_s^2$ (car B est une martingale) et

$$\mathbb{E}\left((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left((B_t - B_s)^2\right)$$

(voir la proposition 2.1.2) , on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(B_t^2 - t \,|\mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left((B_t - B_s)^2 + B_s^2 - t \,|\mathcal{F}_s\right) \\
&= t - s + B_s^2 - t \\
&= B_s^2 - s.
\end{aligned}$$

■

Il est important de signaler que cette propriété est une caractéristique du mouvement brownien parmi les martingales continues. Plus précisément on a le résultat suivant de P.Lévy.

Théorème 2.1.1 (*Caractérisation de P.Lévy du mouvement brownien*)

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$- martingale continue avec $M_0 = 0$.Si le processus $(M_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est aussi une $\mathcal{F}_t$-martingale, alors M est un mouvement brownien .

2.1.2 Caractère gaussien du mouvement brownien

Théorème 2.1.2 *1. Soit $B = \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un mouvement brownien. Alors il satisfait les propriétés suivantes:*

$$B_0 = 0 \quad \mathbb{P} - ps. \tag{2.1.4}$$

$$\forall\ 0 \leq t_1 < \cdots < t_n, \qquad (B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}) \text{ est un vecteur gaussien centré.} \tag{2.1.5}$$

$$\forall\ s, t \geq 0,\ \mathbb{E}\,(B_s B_t) = \min\,(s, t)\,. \tag{2.1.6}$$

C'est à dire B est un processus gaussien réel centré et de fonction de covariance $\Gamma\,(s, t) = \min\,(s, t)$.

2. Inversement, si un processus B vérifie (2.1.4), (2.1.5) et 2.1.6 et si on note $\left(\widetilde{\mathcal{F}_t}\right)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de la famille $(B_t)_{t\geq 0}$, alors

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\widetilde{\mathcal{F}_t}\right)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$$

est un mouvement brownien (naturel).

Preuve. Partie 1: Supposons que B soit un mouvement brownien. Il n'y a que 2.1.5 et 2.1.6 à prouver. Soient

$$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq t_1 < \cdots < t_n.$$

Montrons par récurrence sur n que

$$a_1 B_{t_1} + \cdots + a_n B_{t_n}$$

est une variable aléatoire normale.

Si $n = 1$ cela résulte de 2.1.3 car $a_1 B_{t_1} = a_1 (B_{t_1} - B_0)$.

Si on suppose l'assertion démontrée pour $n - 1$, la variable aléatoire

$$a_1 B_{t_1} + \cdots + a_n B_{t_n}.$$

est alors normale comme somme des deux variables aléatoires

$$a_1 B_{t_1} + \cdots + (a_n + a_{n-1}) B_{t_{n-1}}$$

et $a_n \left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$ qui sont normales et indépendantes, 2.1.5. Prenons maintenant $0 \leq s \leq t$. Grâce à 2.1.2 et à 2.1.3, on a

$$\mathbb{E}\left(B_s \left(B_t - B_s\right)\right) = \mathbb{E}\left(B_s\right) \mathbb{E}\left(B_t - B_s\right) = 0.$$

On obtient alors aussitôt 2.1.6 puisque

$$\mathbb{E}\left(B_s B_t\right) = \mathbb{E}\left(B_s \left(B_t - B_s\right) + B_s^2\right) = \mathbb{E}\left(B_s^2\right) = s = \min(s, t).$$

Partie 2: Supposons que le processus B vérifie 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6. Les conditions 2.1.1 et 2.1.4 sont identiques. Soit $0 \leq s \leq t$.D'après 2.1.5, $B_t - B_s$ est une variable normale et centrée car chaque B_t est centrée. De plus 2.1.6 implique que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(B_t - B_s\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(B_s^2\right) + \mathbb{E}\left(B_t^2\right) - 2\mathbb{E}\left(B_s B_t\right) \\ &= t + s - 2s \\ &= t - s.\end{aligned}$$

Donc $B_t - B_s$ est de loi $\mathcal{N}(0, t - s)$. Finalement pour tous $0 \leq r \leq s \leq t$, d'aprés 2.1.6, on a

$$\mathbb{E}\left(\left(B_t - B_s\right) B_r\right) = \min(t, r) - \min(s, r) = 0.$$

Comme le processus B est gaussien, les variables aléatoires $B_t - B_s$ et B_r sont indépendantes pour tout $r < s$, ce qui prouve que la variable $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu $\widetilde{\mathcal{F}_s} = \sigma(B_r; r \leq s)$. Cela montre que B est un mouvement brownien pour sa filtration naturelle. ■

Il résulte alors de la partie1 du théorème, l'important fait suivant :

Corollaire 2.1.2 *D'aprés (1.5.4) le mouvement brownien est unique à équivalence près .*

Remarque 2.1.2 *Le résultat précédent justifie l'abus de langage qui consiste à parler du mouvement brownien au lieu d'un mouvement brownien.*

2.2 Construction du mouvement brownien

Plusieurs construction ont été faites

1. Kolmogorov (1933 et 1956) : Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ et un processus stochastique
$$W = \left\{W_t, \mathcal{F}_t^W, t \geq 0\right\}$$
sur le même espace, tels que sous $\mathbb{P}, W$ est un mouvement brownien. Construction utilisant la notion de consistance et un critère de continuité.

2. Wiener (1923), Lévy (1948), Ciesielski (1961) : Construction basée sur la théorie des espaces de Hilbert et sur le caractère gaussien du mouvement brownien.

3. Donsker(1951): construction sur l'ensemble $C([0, \infty[)$ d'une mesure, appelée mesure de Wiener, utilisant la notion de convergence faible de variable aléatoire.

Existence du mouvement brownien

Théorème 2.2.1 *Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace $\mathbb{R}^+$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes[0,+\infty[}$ tel que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ des applications coordonnées, soit un mouvement brownien naturel.*

Preuve. On vient de voir qu'un processus réel, gaussien centré, partant de 0 et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$ est un mouvement brownien. ■

Il suffit donc d'aprés(le théorème 1.2.1 p.19 voir ([4])) de prouver le résultat suivant

Lemme 2.2.1 *Pour tout entier n et tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, la matrice*

$$\Gamma = (\min(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

est du type positif .

Preuve. Par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est trivial. Si $n = 2$, on a

$$\Gamma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$$

et pour un vecteur $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, on a facilement

$$\langle u \,|\Gamma_u \rangle = t_1 u_1^2 + 2t_1 u_1 u_2 + t_2 u_2^2 \geq t_1 u_1^2 + 2t_1 u_1 u_2 + t_1 u_2^2 = t_1 (u_1 + u_2)^2 \geq 0,$$

d'où le résultat dans ce cas. On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante:
Pour $n - 1$ instants, la matrice Γ correspondante est telle que pour tout vecteur

$$v = (v_1, \cdots, v_{n-1}) \text{ de } \mathbb{R}^{n-1}$$

on a

$$\langle v \,|\Gamma v \rangle \geq t_1 (v_1 + \cdots + v_{n-1})^2 .$$

Pour vérifier cette hypothèse à l'ordre n, remarquons que la matrice Γ a sa première ligne et sa première colonne composées uniquement de la valeur t_1 et que le reste constitue une matrice Γ_{n-1} correspondant aux valeurs

$$t_2 \leq \cdots \leq t_n$$

Pour tout vecteur $u = (u_1, \cdots, u_n)$ on obtient alors

$$\langle u \,|\Gamma u \rangle = t_1 u_1^2 + 2t_1 u_1 (u_2 + \cdots + u_n) + \langle v \,|\Gamma_{n-1} v \rangle .$$

où $v = (u_2, \cdots, u_n)$. Mais on a

$$\langle v \,|\Gamma_{n-1} v \rangle \geq t_2 (u_2 + \cdots + u_n)^2 \geq t_1 (u_2 + \cdots + u_n)^2 ,$$

et l'hypothèse de récurrence est aussitôt vérifiée. D'où le résultat. ■

2.3 Mouvement brownien multidimensionnel

On peut généraliser la définition 2.1.1 comme suit

Définition 2.3.1 *Un processus* $B = \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est appelé mouvement brownien* $d-$*dimensionnel si*

$$B_0 = 0 \ \mathbb{P} - ps.$$

$$\forall \ 0 \leq s \leq t, \ \textit{le vecteur aléatoire } B_t - B_s \textit{ est indépendant de } \mathcal{F}_s.$$

$$\forall \ 0 \leq s \leq t, \ B_t - B_s \textit{ est de loi gaussienne } \mathcal{N}_d\left(0, (t-s)\, I_d\right), \ \textit{ où } I_d \textit{ est la matrice identité de } \mathbb{R}^d.$$

La structure du mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ est très simple comme l'indique le résultat suivant:

Proposition 2.3.1 *Soit* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *.*

Ecrivons $B_t = \left(B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(d)}\right)$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^d$*. Alors* B *est un mouvement brownien d-dimensionnel si et seulement si les processus*

$$B^{(i)} = \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \left(B_t^{(i)}\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$$

sont des mouvement brownien indépendants $(1 \leq i \leq d)$ *.*

Preuve.

i (conditions nécessaire) supposons que B est un mouvement brownien $d-$dimensionnel.

Il est facile de vérifier avec la définition 2.1.1, que le processus réel $B^{(i)}$ sont des mouvements browniens réels.

Comme ils sont tous issus d'une même famille gaussienne, pour montrer qu'ils sont indépendants, il suffit de vérifier que pour $i \neq j$ et pour $t_1 \leq t_2$, on a

$$\mathbb{E}\left(B_{t_1}^{(i)} B_{t_2}^{(j)}\right) = 0.$$

Mais

$$\mathbb{E}\left(B_{t_1}^{(i)} B_{t_2}^{(j)}\right) = \mathbb{E}\left(\left(B_{t_1}^{(i)} - B_{t_2}^{(i)}\right) B_{t_2}^{(j)}\right) + \mathbb{E}\left(B_{t_2}^{(i)} B_{t_2}^{(j)}\right) = 0.$$

En effet

$$\mathbb{E}\left(\left(B_{t_1}^{(i)} - B_{t_2}^{(i)}\right) B_{t_2}^{(j)}\right) = 0$$

car les variables aléatoires $B_{t_1}^{(i)} - B_{t_2}^{(i)}$ et $B_{t_2}^{(j)}$ sont indépendantes (car $B_{t_1} - B_{t_2}$ et $\mathcal{F}_{t_2}$ le sont)

et

$$\mathbb{E}\left(B_{t_2}^{(i)} B_{t_2}^{(j)}\right) = 0$$

car la matrice des covariances de B_{t_2} est diagonale

ii (condition suffisante): (voir [4]) .

■

Conclusion

Le mouvement brownien n'est pas à variation bornée et presque toutes ses trajectoires ne sont nulle part différentiable. Ceci nous amène à définir l'intégrale stochastique dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 3

Intégrale stochastique

Introduction

Le calcule différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire, qui sert de modèle pour de phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été gêné par le non différentiabilité du mouvement brownien. Dans ce chapitre on construit une intégrale par rapport au mouvement brownien. Il s'agit de donner un sens à l'expression du type

$$\int_a^b X_s(w)\, dB_s(w). \tag{3.0.1}$$

où $(X_s)_{s\in T}$ est un processus aléatoire et (B_s) est un mouvement brownien continu.

Intégrale par rapport au mouvement brownien

La construction est dûe à K. Itô $(1942, 1944)$ dans le cas du mouvement brownien et a été généralisée au cas d'une martingale de carré intégrable par Kunita et Watanabe (1967) ([9]).

On suppose donné un mouvement brownien B avec sa filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On définit deux classes de processus:

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ H = (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}\,,\ \text{processus adapté, tel que } \forall t,\ \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] < \infty \right\},$$

et $\mathcal{M}_c^2$ l'ensemble des martingales (par rapport à la filtration du brownien), de carré intégrable, continues et nulles à l'instant 0.

3.1 Construction de l'intégrale d'Itô

Dans cette partie, On essaye de donner un sens, pour certaines fonctions à l'expression

$$\int_s^t f(s,w)\,dB_s(w).$$

Pour cela, on va tout d'abord définir cette intégrale pour une certaine classe de fonctions, dites élémentaires puis on étendra cette définition par " densité" à un ensemble plus large de fonctions.

On considéra dans presque toute cette partie un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}_t$ la sous tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les B_s pour $s \leq t$ et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur $[0,+\infty[$.

Définissons enfin l'ensemble des fonctions pour lesquelle on va pouvoir construire l'intégrale d'Itô.

Définition 3.1.1 *Soient $s,u \in \mathbb{R}^+ (s<u)$ et $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$. On définit $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}(s,u)$ comme l'ensemble des fonctions*

$$f:[0,+\infty[\,\to f(t,w)$$

vérifiant les trois conditions suivantes:

1. *$(t,w)\longmapsto f(t,w)$ est $\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}-$mesurable .*

2. *(B_t) est une martingale relativement à $(\mathcal{H}_t)$ et le processus*

$$w \to f(t,w)$$

   est $\mathcal{H}_t-$adapté .

3. *$\mathbb{E}\left[\int_s^T f^2(t,w)\,dt\right] < \infty.$*

On a toujour $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$ et dans la plupart des cas on pourra prendre $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t$ pour définir les intégrales qui nous intéressent. Dans les parties qui suivent, on pourra de fait supposer que $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t$.

On notera par suite $\mathcal{V}(s,u)$ plutôt que $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}(s,u)$.

L'intégrale d'Itô pour les fonctions élémentaires

Définition 3.1.2 *Une fonction $\Phi \in \mathcal{V}(s,u)$ est dite élémentaire s'il existe une subdvision*

$$s = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = u$$

et des fonctions

$$e_0, \ldots, e_{N-1} : \Omega \to \mathbb{R}$$

telle que

$$\Phi(t,w) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(w)\, \chi_{[t_j, t_{j+1}[}(t)$$

où $\chi_{[t_j, t_{j+1}[}$ est la fonction caractéristique d'intervalle $[t_j, t_{j+1}[$.

Ces fonctions élémentaires sont l'équivalent en stochastique des fonctions étagées qui servent à définir l'intégrale de Lebesgue. On remarque que chacun des e_j est $\mathcal{H}_{t_j}-$mesurable .

Pour les fonctions élémentaires, on pose toujours par analogie avec la construction de l'intégrale de Lebesgue

$$\int_s^u \Phi(t,w)\, dB_t(w) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(w)\left[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right](w).$$

De plus, pour les fonctions élémentaires on a:

Théorème 3.1.1 (*Isométrie d'Itô:forme élémentaire*) *[8]*

Soit Φ une fonction élémentaire bornée. Alors

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^u \Phi(t,w)\, dB_t(w)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^u \Phi^2(t,w)\, dt\right].$$

Preuve. Posons, pour simplifier les notations

$$\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}.$$

Alors en utilisant l'indépendance de

$$e_i e_j \Delta B_i \text{ et de } \Delta B_j \text{ pour } i < j.$$

$$\mathbb{E}\left[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j. \\ \mathbb{E}\left[e_j^2\right](t_{j+1} - t_j) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_s^u \Phi dB\right)^2\right] &= \sum_{i,j} \mathbb{E}\left[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j\right] \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[e_j^2\right](t_{j+1} - t_j) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_s^u \Phi^2 dt\right]. \end{aligned}$$

■

Pour définir l'intégrale d'Itô pour une fonction f de $\mathcal{V}(s,u)$, on va approcher f par une suite (ϕ_n) de fonctions élémentaires au sens suivant :

$$\mathbb{E}\left[\int_s^u (f(t,w) - \phi_n(t,w))^2 dt\right] \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

La démonstration, en utilisant les lemmes suivants :

Lemme 3.1.1 *Soit $f \in \mathcal{V}(s,u)$. Alors il existe une suite de fonctions (h_n) de $\mathcal{V}(s,u)$ telle que h_n est bornée pour tout n et*

$$\mathbb{E}\left[\int_s^u (f - h_n)^2 dt\right] \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Preuve. Posons

$$h_n(t,w) = \begin{cases} -n & \text{si } f(t,w) < -n. \\ f(t,w) & \text{si } -n \le f(t,w) \le n. \\ n & \text{si } f(t,w) > n. \end{cases}$$

On a $(f-h_n)^2 \le 4f^2$ et f^2 est intégrable par rapport à t donc le théorème de convergence dominée donne que, $p.s$ en w

$$\int_s^u (f-h_n)^2\, dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On réaplique ensuite le théorème de convergence dominée à la suite des intégrales qui sont majorées par $4\displaystyle\int f^2$ qui est intégrable en w car $f \in \mathcal{V}(s,u)$, ce qui donne

$$\mathbb{E}\left[\int_s^T (f-h_n)^2\, dt\right] \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

La suite (h_n) étant dans $\mathcal{V}(s,T)$ par construction, elle convient. ■

Lemme 3.1.2 *Soit $h \in \mathcal{V}(s,u)$ une fonction bornée. Alors il existe une suite (g_n) de fonctions*

bornées de $\mathcal{V}(s,u)$ telle que $g_n(.,w)$ est continue pour tout n et pour tout w et :

$$\mathbb{E}\left[\int_s^u (h-g_n)^2\, dt\right] \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Preuve. On procéde par convolution. On considére (ρ_n) une approximation de l'identité à support dans $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et on pose

$$g_n(t,w) = \int_0^t \rho_n(t-s)\, h(s,w)\, ds.$$

On sait que $g_n(.,w)$ est continue pour tout n et pour tout w et que (g_n) converge dans $L^2(dt)$ vers h. De plus, si h est bornée par $M > 0$, alors pout tout n, $|g_n(t,w)| \le M$.

Par le théorème de convergence dominée, on conclut

$$\mathbb{E}\left[\int_s^u (h-g_n)^2\, dt\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il reste maintenant à voir que les g_n sont dans $\mathcal{V}(s,u)$ pour tout n.seul le fait que $g_n(t,.)$ soit $\mathcal{H}_t-$mesurable pose le probléme. ■

Lemme 3.1.3 *Soit $g\in\mathcal{V}(s,T)$ une fonction bornée et telle que $g(.,w)$ est continue pour tout w. Alors il existe une suite de fonctions élémentaires (φ_n) dans $\mathcal{V}(s,u)$ telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\int_s^u (g-\varphi_n)^2\, dt\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Il s'agit de somme de Riemann. On pose pour tout n

$$\varphi_n(t,w)=\sum_{j=1}^{n} g\left(s+(j-1)\frac{(u-s)}{n},w\right)\chi_{\left[s+(j-1)\frac{(u-s)}{n},s+j\frac{(u-s)}{n}\right]}(t).$$

Les φ_n sont élémentaires car $g\in\mathcal{V}(s,u)$ et en utilisant l'uniforme continuité de $g(.,w)$ sur $[s,u]$, on prouve que

$$\int_s^u (g-\varphi_n)^2\, dt \overset{p.p}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0.$$

Comme $g\in\mathcal{V}(s,u)$ et donc les φ_n sont bornées, le théorème de convergence dominée permet de passer à l'espérance . ■

On obtien ainsi la définition suivante

Définition 3.1.3 (*Intégrale d'Itô*)

Soit $F\in\mathcal{V}(s,u)$. L'intégrale d'Itô de f sur l'intervalle $[s,u]$ est définie par

$$\int_s^u f(t,w)\, dB_t(w)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_s^u \phi_n(t,w)\, dB_t(w). \tag{3.1.1}$$

où $\{\phi_n\}$ est une suite de fonctions élémentaires telle que la limite suivante existe et est satisfaite

$$\mathbb{E}\left[\int_s^u (f(t,w)-\phi_n(t,w))^2\, dt\right]\longrightarrow 0 \textit{ lorsque } n\longrightarrow 0. \tag{3.1.2}$$

La valeur de l'intégrale ne dépend pas de choix de ϕ tant que (3.1.2) est vérifiée.

Théorème 3.1.2 (*Isométrie d'Itô : formule finale*)

pour tout $f \in \mathcal{V}(s,u)$, nous avons la relation suivante :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^u f(t,w)\,dB_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^u f^2(t,w)\,dt\right].$$

Corollaire 3.1.1 *Si $f(t,w) \in \mathcal{V}(a,b)$ et $f_n(t,w) \in \mathcal{V}(s,u)$ pour $n \geq 1$ et*

$$\mathbb{E}\left(\int_s^u f_n(t,w) - f(t,w)^2\,dt\right) \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Alors on a

$$\int_s^u f_n(t,w)\,dB_t(w) \longrightarrow \int_s^u f(t,w)\,dB_t(w) \text{ dans } L^2(\mathbb{P}) \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

L'intégrale d'Itô d'une fonction $f \in \mathcal{V}(s,u)$ peut être calculée en utilisant la définition directement. C'est à dire :

1. Trouver une suite $\{\Phi_n\}$ de fonctions élémentaires qui approximent f.
2. Utiliser (3.1.1) pour trouver la limite dans $L^2(\mathbb{P})$ de l'intégrale Φ dans le membre de droite.

On illustre le calcul de cette intégrale avec l'exemple suivant:

Exemple 3.1.1 *On souhaite calculer l'intégrale*

$$\int_0^u B_s dB_s.$$

Pour cela on suppose que $B_0 = 0$ et on pose

$$\phi_n(s,w) = \sum_j B_j(w)\,\chi_{[t_j,t_{j+1}[}(s), \text{ où } B_j = B_{t_j}.$$

Alors

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (\phi_n - B_s)^2\, ds\right) = \mathbb{E}\left(\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2\, ds\right)$$
$$= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j)\, ds$$
$$= \sum_j \frac{1}{2}(t_{j+1} - t_j)^2 \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \Delta t_j \longrightarrow 0.$$

Ainsi d'aprés le corollaire (3.1.1)

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \longrightarrow 0} \int_0^t \phi_n dB_s = \lim_{\Delta t_j \longrightarrow 0} \sum_j B_j \Delta B_j.$$

Maintenant pour calculer la somme, on remarque que

$$\Delta\left(B_j^2\right) = B_{j+1}^2 - B_j^2$$
$$= (B_{j+1} - B_j)^2 + 2B_j(B_{j+1} - B_j)$$
$$= (\Delta B_j)^2 + 2B_j \Delta B_j$$

Puis que

$$B_t^2 = \sum_j \Delta\left(B_j^2\right) = \sum_j (\Delta B_j)^2 + 2\sum_j B_j \Delta B_j.$$

ou en isolant le terme qui nous intéresse

$$\sum_j B_j \Delta B_j = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_j (\Delta B_j)^2.$$

Comme $\sum_j (\Delta B_j)^2 \longrightarrow t$ *dans* $L^2(\mathbb{P})$ *car* $\Delta B_j \longrightarrow 0$ *on obtient finalement que*

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Le terme supplémentaire $-\frac{1}{2}t$ *montre que l'intégrale d'Itô ne se comporte pas comme les intégrales ordinaires.*

3.2 Quelques propriétés de l'intégrale d'Itô

Théorème 3.2.1 *Soient $f, g \in \mathcal{V}(0,u)$,soit $0 \leq s \leq v < u$ et soit c une constante alors*

i) $\int\limits_s^u f dB_t = \int\limits_s^v f dB_t + \int\limits_v^u f dB_t$ *pour presque tout w.*

ii) $\int\limits_s^u (cf+g)\, dB_t = c\int\limits_s^u f dB_t + \int\limits_s^u g dB_t$ *pour presque tout w.*

iii) $\mathbb{E}\left(\int\limits_s^u f dB_t\right) = 0$

iv) $\int\limits_s^u f^2 dB_t$ *est $\mathcal{F}_u$ -mesurable.*

Une propriété importante et que l'intégrale d'Itô est une martingale. (voir 1.5.3)

Exemple 3.2.1 *Le mouvement brownien B_t dans $\mathbb{R}$ est une martingale par rapport à la $\sigma-$algébre $\mathcal{F}_t$ générée par $\{B_s, s < t\}$. Clairement B_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable et $\mathbb{E}(|B_t|) < \infty$ d'aprés l'inégalité de Jensen avec*

$$\mathbb{E}(|B_t|)^2 \leq \mathbb{E}\left(|B_t|^2\right) = \mathbb{E}\left(B_t^2\right) = B_0^2 + \sigma^2 t < \infty.$$

Maintenant, on a que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_{t+s}\,|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t + B_t\,|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}[B_{t+s} - B_t\,|\mathcal{F}_t] + E[B_t\,|\mathcal{F}_t] \\ &= 0 + B_t \\ &= B_{t.}\end{aligned}$$

Car $B_{t+s} - B_t$ est indépendant de $\mathbb{E}(B_{t+s} - B_t) = 0$.

Théorème 3.2.2 (*L'intégrale d'Itô est une martingale*)

Si $f \in L_f^2$, l'intégrale stochastique

$$X(t) = \int_0^t f(s,w)\, dB_s(w).$$

est une martingale par rapport à la filtration $\{M_t\}_{t \geq 0}$.

Théorème 3.2.3 *Soit $f \in \mathcal{V}(0,u)$. Alors il existe une version continue sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de*

$$X(t) = \int_0^t f(s,\Omega)\, dB_s(w) \quad \textit{pour tout } 0 \leq t \leq u.$$

A partir de maintenant, on suppose que $\int_0^t f(s,w)\, dB_s$ signifie la version continue de cette intégrale.

Théorème 3.2.4 *Soit $f(t,w) \in \mathcal{V}(0,u)$ pour tout u alors*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,w)\, dB_s(w).$$

est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ le fait, qu'une intégrale d'Itô soit une martingale, est l'une des raisons pour laquelle elle est le plus utilisée.

Conclusion

Toute intégrale stochastique est une martingale (par rapport à la tribu brownienne) continue et de carré intégrable.

Dans le chapitre suivant, on va montrer qu'en fait toutes les martingales (par rapport à la tribu brownienne) continues et de carré intégrables sont écrites sous forme d'une intégrale stochastique qui définit les équations différentielles stochastiques.

CHAPITRE 4

Formule de Itô et théorème de représentation des martingales

4.1 Formule d'Itô en dimension 1

La formule d'Itô est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Cette formule offre un moyen de manipuler les solutions d'équations différentielles stochastiques et aussi vraiment utile pour évaluer des intégrales stochastiques comme on va le voir par exemple

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t. \tag{4.1.1}$$

On voit que l'image de l'intégrale stochastique

$$B_t = \int_0^t dB_s \quad \text{par l'application } g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

n'est plus une intégrale stochastique de la forme

$$\int_0^t f(s,w)\,dB(s,w)$$

mais une combinaison d'intégrales en dB_s et ds

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \frac{1}{2}t + \int_0^t B_s dB_s.$$

On introduit maintenant une nouvelle classe de processus appelés processus d'Itô comme somme d'intégrales en dB_s et ds.

Définition 4.1.1 *Soit B_t un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ adapté à une filtration $\mathcal{H}_t$. Un processus d'Itô est un processus stochastique X_t sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,w)\,ds + \int_0^t v(s,w)\,dB_s \tag{4.1.2}$$

où $\mathcal{V}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t v^2(s,w)\,ds < \infty \text{ pour tout } t \geq 0\right) = 1.$$

on suppose de plus que u $\mathcal{H}_t-$adapté et

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t |u(s,w)|\,ds < \infty \text{ pour tout } t \geq 0\right) = 1.$$

Si X_t est un processus d'Itô de la forme (4.1.2), l'équation (4.1.2), s'écrit souvent sous la forme différentielle

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

par l'exemple (4.1.1) peut s'écrire

$$d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) = \frac{1}{2}dt + B_t dB_t.$$

On est maintenant en mesure de donner le premier résultat de ce chapitre

Théorème 4.1.1 (*Formule d'Itô*)

Soit (X_t) *un processus d'Itô donné par*

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

soit $g(t, X) \in C^2([0, \infty[, \mathbb{R})$ *alors*

$$Y_t = g(t, X_t).$$

est aussi un processus d'Itô, et

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,(dX_t)^2. \tag{4.1.3}$$

où $(dX_t)^2$ *se calcule suivant les formules*

$$dt.dt = dt.dB_t = dB_t.dt = 0, dB_t.dB_t = dt. \tag{4.1.4}$$

Avant de démontrer la formule d'Itô, on va donner quelques exemples :

Exemple 4.1.1 *On prend l'intégrale*

$$I = \int_0^t B_s dB_s.$$

on choisit $X_t = B_t$ *et* $g(t, X) = \frac{1}{2}X^2$*. Alors*

$$Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2.$$

Alors par la formule d'Itô

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial X}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(dX_t)^2 \\ &= B_t dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 \\ &= B_t dB_t + \frac{1}{2}dt. \end{aligned}$$

Ainsi

$$d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt$$

En d'autres termes

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t.$$

Exemple 4.1.2 *Que vaut?*

$$\int_0^t s dB_s$$

Il semble raisonnable que le terme tB_t devrait apparaitre, posons alors

$$g(t, X) = tX \quad \text{et } Y_t = g(t, B_t) = tB_t.$$

Alors la formule d'Itô

$$dY_t = B_t dt + tB_t + 0$$

c-à-d

$$d(tB_t) = B_t dt + tB_t$$

où

$$tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$$

où

$$\int_0^t s dB_s = t dB_t - \int_0^t B_s ds$$

qui apparait comme une intégration par parties .

Plus généralement, la même méthode donne :

Théorème 4.1.2 (*Intégration par parties*)

Supposons que $f(s, w) = f(s)$. dépend pas de s et que f est continue à variation finie sur $[0, u]$. Alors

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t) B_t - \int_0^t B_s df(s).$$

Il faut bien insister sur le fait que f ne dépend de w sinon on obtient une autre formule (*aussi appelé intégration par parties*) *.*

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s dY_s.$$

Preuve. (sommaire de la formule d'Itô)

On peut observer d'abord que si on substitue

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

dans (4.1.3) et en utilisant(4.1.4) on trouve

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\,dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,(dX_t)^2 \\ &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\,dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\,(udt + vdB_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,(udt + vdB_t)^2 \\ &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\,dt + u\frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\,dt + v\frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\,dB_t + u^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,(dt)^2 \end{aligned}$$
$$+v^2\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,(dB_t)^2 + uv\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,dtdB_t.$$

et d'aprés (4.1.4) on trouve

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\,dt + u\frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\,dt + v\frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t)\,dB_t + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\,dt$$

d'où on obtient l'expression suivantes

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u_s\frac{\partial g}{\partial X}(s, X_s) + \frac{1}{2}v_s^2\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(s, X_s)\right) ds + \int_0^t v_s\frac{\partial g}{\partial X}(s, X_s)\,dB_s \tag{4.1.5}$$

où

$$u_s = u(s, w),\, v_s = v(s, w)$$

Notons que (4.1.5) est bien un processus d'Itô on peut supposer que

$$g,\ \frac{\partial g}{\partial t},\ \frac{\partial g}{\partial X},\ \text{et}\ \frac{\partial^2 g}{\partial X^2}$$

sont bornées, car si c'est prouvé dans ce cas,

le cas général s'obtient en les approximant par des fonctions g_n de classe C^2 tels que g_n, $\frac{\partial g_n}{\partial t}$, $\frac{\partial g_n}{\partial X}$et $\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}$ sont bornées et convergent uniformément sur tout compact de $[0, \infty[\times\mathbb{R}$ vers g, $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial X}$et $\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}$ respectivement .

De plus on peut supposer que u et v sont élémentaires, la formule de taylor donne: $(\forall\ 0 \leq j \leq N-1)$

$$\begin{aligned} g\left(t, X_t\right) &= g\left(0, X_0\right) + \sum_j \Delta g\left(t_j, X_j\right) \\ &= g\left(0, X_0\right) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial X} \Delta X_j + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \left(\Delta t_j\right)^2 + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial X} \left(\Delta t_j\right)\left(\Delta X_j\right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \left(\Delta X_j\right)^2 + \sum_j R_j \end{aligned}$$

où $g, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial X}$et $\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}$ sont évalués aux points $\left(t_j, X_{t_j}\right)$

$\Delta t_j = t_{j+1} - t_j,\quad \Delta X_j = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$ et $\Delta g\left(t_j, X_{t_j}\right) = g\left(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}\right) - g\left(t_j, X_{t_j}\right)$

et

$R_j = o\left(\left|\Delta t_j\right|^2 + \left|\Delta X_j\right|^2\right)$ pour tout j si $\Delta_{t_j} \rightarrow 0$.

Alors

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_j = \sum \frac{\partial g}{\partial t}\left(t_j, X_{t_j}\right) \Delta t_j \rightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}\left(s, X_s\right) ds.$$

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial X} \Delta t_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial X}\left(t_j, X_j\right) \Delta X_j \rightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial X}\left(s, X_s\right) dX_s.$$

De plus puisque u et v sont élémentaires on obtient

$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial X^2}\left(\Delta X_j\right)^2 = \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} u_j^2 \left(\Delta t_j\right)^2 + 2 \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} u_j v_j \left(\Delta t_j\right)\left(\Delta B_j\right) + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} v_j^2 \left(\Delta B_j\right)^2$$

où $u_j = u\left(t_j, w\right), v_j = v\left(t_j, w\right)$

les deux premiers terme tendent vers 0 quand $\Delta t_j \rightarrow 0$. Par exemple

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} u_j v_j \left(\Delta t_j\right)\left(\Delta B_j\right)\right)^2\right] = \sum_j \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial X^2} u_j v_j\right)^2\right]\left(\Delta t_j\right)^3 \rightarrow 0 \text{ quand } \Delta t_j \rightarrow 0$$

il reste à montrer que le dernier terme tend vers

$$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} v^2 ds \text{ dans } L^2(\Omega) .\text{quand } \Delta t_j \rightarrow 0$$

pour prouver cela, posons

$$a(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t)\, v^2(t, w)\,, \;\; a_j = a(t_j)\,.$$

et considérons

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_j a_j (\Delta B_j)^2 - \sum_j a_j \Delta t_j\right)^2\right] = \sum_{i,j} \mathbb{E}\left[a_i a_j \left((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i\right)\left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)\right]$$

$$\text{Si } i < j \text{ alors } a_i a_j \left((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i\right) \text{ et } (\Delta B_j)^2 - \Delta t_j$$

sont indépendants et ces termes s'annulent dans ce cas, de même si $i > j$, il ne reste donc plus que

$$\begin{aligned} \sum_j \mathbb{E}\left[a_j^2 \left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)^2\right] &= \sum_j \mathbb{E}\left[a_j^2\right].\mathbb{E}\left[(\Delta B_j)^4 - 2(\Delta B_j)^2(\Delta t_j) + (\Delta t_j)^2\right] \\ &= \sum_j \mathbb{E}\left[a_j^2\right].\left(3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2\right) \\ &= 2\sum_j \mathbb{E}\left[a_j^2\right](\Delta t_j)^2 \to 0 \text{ quand } \Delta t_j \to 0. \end{aligned}$$

En d'autre termes, on a établit que

$$\sum_j a_j (\Delta B_j)^2 \to \int_0^t a(s)\, ds \text{ dans } L^2(P) \text{ quand } \Delta t_j \to 0$$

et qui peut s'écrire sous la forme abrégée par la formule

$$(dB_t)^2 = dt.$$

L'argument qu'on vient d'utiliser permet de prouver que

$$\sum R_j \to 0 \text{ quand } \Delta t_j \to 0.$$

Ainsi s'achéve la preuve de la formule d'Itô. ■

Exemple 4.1.3 *Soit* $f(t, w) = e^{aX - \frac{a^2}{2}t}, X_t = B_t$ *et* $Y_t = e^{aB_t - \frac{a^2}{2}t}$

appliquant la formule d'Itô ,on obtient

$$Y_t = 1 + a \int_0^t Y_s dB_s.$$

à cause de

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0. \tag{4.1.6}$$

Cet important exemple nous conduit aux remarques suivantes

1. Si la filtration $f(t, X)$ de classe $C^{1,2}$,vérifie l'égalité 4.1.6 alors le processus stochastiques $f(t, B_t)$ est une intégrale indéfinie plus un terme constant, de plus $f(t, B_t)$ est une martingale à condition que f satisfasse

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial X}(s, B_s)\right)^2 ds\right] < \infty, \text{pour tout } t \geq 0.$$

2. La solution de l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = aY_t dB_t$$

n'est pas

$$Y_t = e^{aB_t} \text{ mais } Y_t = e^{aB_t - \frac{a^2}{2}t}.$$

4.2 Formule d'Itô multidimensionnelle

L'application de la formule d'Itô dans le cas d'un processus multi-dimensionnel (plusieurs dimensions) est trés utile .

Soit

$$B(t, w) = (B_1(t, w), \ldots, B_d(t, w))$$

un d-mouvement brownien. Si les processus $u_i(t, w)$ et $v_{i,j}(t, w)$ satisfant les conditions données dans la définition 4.1.1

$(1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq d)$ alors on peut former les n processus d'Itô suivant

$$\begin{cases} dX_1 = u_1 dt + v_{11} dB_1 + \cdots + v_{1d} dB_m \\ \vdots \\ dX_n = u_n dt + v_{n1} dB_1 + \cdots + v_{nd} dB_m \end{cases}$$

ou, en écriture matricielle

$$dX(t) = udt + vdB(t).$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_{11} \cdots v_{1d} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ v_{n1} \cdots v_{nd} \end{pmatrix}; dB(t) = \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_d(t) \end{pmatrix}.$$

un tel processus est appelé processus d'Itô. Mais quel est le résultat quand on applique une fonction régulière? la réponse est donnée par le résultat suivant

Théorème 4.2.1 *Soit*

$$dX(t) = udt + vdB(t)$$

un processus d'Itô en dimension n.

Soit

$$g(t,x) = (g_1(t,x), \ldots, g_p(t,x))$$

une application C^2 de $[0, \infty[* \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, alors le processus

$$Y(t,w) = g(t, X(t))$$

est encore un processus d'Itô tels que ses k composantes Y_k sont données par

$$dY_k(t) = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X)\,dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial X_i}(t,X)\,dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial X_i X_j}(t,X)\,dX_I dX_j.$$

où

$$dB_i.dB_j = \delta_{ij} dt, \quad dB_i dt = dt dB_i = 0.$$

La preuve est similaire à la dimension une.

4.3 Théorème de représentation des martingales

Un intérêt de l'intégrale stochastique est contenu dans le théorème suivant :

Théorème 4.3.1 (*Martingales browniennes*)

Soit $\left\{B_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right\}$ un mouvement brownien. Soit $M = \left\{(M_t)_{t\geq 0}\right\}$ une martingale brownienne, c-à-d une martingale par rapport à la filtration du mouvement brownien, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$. Alors il existe un processus $H \in \mathbb{H}^2$ tel que pour tout $t \geq 0$

$$M_t = \int\limits_0^t H_s dB_s.$$

De plus si $\widetilde{H}$ est un autre représentant de M p.s

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|\widetilde{H_t} - H_t\right|^2 dt = 0.$$

Dans certaine manières, toute martingale de carré intégrable stochastique par rapport à un mouvement brownien.

Théorème 4.3.2 (*Représentation des martingales, Doob, 1955*)

Supposons que

$$\left\{M_t = \left(M_t^{(1)}, \cdots, M_t^{(d)}\right),\ \ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right\}$$

Soit définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et que $M^{(i)}$ soit une martingale continue, de carré intégrable pour $1 \leq i \leq d$. Supposons aussi pour $1 \leq i, j \leq d$, les cochets $\left\langle M^{(i)}, M^{(j)}\right\rangle$ soient tous des fonctions absolument continues en t, $\mathbb{P}-$p.s. Alors il existe une extension $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}\right)$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur laquelle sont définis un mouvement brownien $d-$dimensionnel

$$W = \left\{W_t = \left(W_t^{(1)}, \cdots, W_t^{(d)}\right), \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)_{t\geq 0}\right\}$$

et une matrice

$$X = \left\{\left(X_t^{(i,k)}\right)_{1\leq i,k\leq d}, \left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)_{t\geq 0}\right\}$$

de processus mesurables et adaptés avec

$$\widetilde{\mathbb{P}}\left[\int_0^t \left(X_s^{(i,k)}\right)^2 ds < \infty\right] = 1; \quad 1 \leq i,k \leq d, \ \ 0 \leq t < \infty$$

tels que l'on a, $\widetilde{\mathbb{P}} - p.s$*, les représentations suivantes :*

$$M_t^{(i)} = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t X_s^{(i,k)} dw_s^{(k)}; \ \ 1 \leq i \leq d, \ 0 \leq t < \infty;$$

$$\left\langle M^{(i)}, M^{(j)} \right\rangle_t = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t X_s^{(i,k)} X_s^{(j,k)} ds; \quad 1 \leq i,j \leq d, \ 0 \leq t < \infty.$$

4.4 Equation différentielle stochastique

Soit T un réel strictement positif. On considère deux fonctions $b : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, mesurables. On se donne également une variable aléatoire, de carré intégrable et indépendante du mouvement brownien. On cherche à résoudre l'´equation différentielle stochastique

$$dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \text{ avec } X_0 = \zeta$$

En fait cette équation doit être interpretée au sens d'une équation intégrale, à savoir

$$X_t = \zeta + \int_0^t b\left(r, X_r\right) dr + \int_0^t \sigma\left(r, X_r\right) dB_r, \ 0 \leq t \leq T. \tag{4.4.1}$$

Le coefficient b s'appelle la dérive tandis que la matrice $\sigma\sigma^*$ s'appelle la matrice de diffusion.

Définition 4.4.1 (*solution forte d'une EDS*)

Une solution de l'EDS (4.4.1), X *est un processus continu tel que*

1. X *est mesurable et adapté à la filtration* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$.

2. $\mathbb{P}$*-p.s* $\displaystyle\int_0^T \left\{\left|b\left(r, X_r\right)\right| + \left\|\sigma\left(r, X_r\right)\right\|^2\right\} dr < \infty$

3. On a : $X_t = \zeta + \int_0^t b(r, X_r)\, dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)\, dB_r,\ 0 \leq t \leq T\ \ \mathbb{P}\text{-}p.s$

où la filtration est définie pour tout t positif par

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\sigma\{\zeta,\ B_s,\ s \leq t\} \cup \mathcal{N}\}.$$

Le théorème suivant est dû à Itô

Théorème 4.4.1 (*Existence et unicité de la solution*)

On suppose qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in [0, T]$ x, y dans $\mathbb{R}^n$.

1. *Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K|x - y|.$$

2. *Croissance linéaire*

$$|b(t, x)| + \|\sigma(t, x)\| \leq K(1 + |x|)$$

3. $\mathbb{E}|\zeta|^2 < \infty.$

Alors l'EDS (4.4.1) posséde une unique solution. De plus cette solution vérifie

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2\right) < \infty.$$

On retrouve donc le résultat classique des EDO (prendre $\sigma = 0$). Depuis on a montré des résultats d'éxistence et d'unicité avec des conditions plus faibles sur b et σ.

Un exemple classique d'EDS est lié à la finance. Le prix d'une action S_t à un instant t est supposé suivre l'EDS suivante

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_r dr + \int_0^t \sigma S_r dB_r,\ 0 \leq t \leq T$$

S_0 est donnée et σ est appelé volatilité de l'action (c'est le paramétre important ici). On montre facilement à l'aide la formule d'Itô que

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right\}.$$

Conclusion

L'objectif de notre travail est l'étude du mouvement brownien et l'intégrale stochastique.

Nous avons tout d'abord présenté les notions suivantes : quelques rappels de la théorie des probabilités, processus stochastique, et ensuite la construction du mouvement brownien, et enfin on présente le calcul stochastique qui est établit par le mathématicien japonais Kiyoshi Itô qui décrit l'intégrale d'Itô et les formules associées.

En perspective l'étude pourra être complétée par une étude détaillée des équations différentielles stochastiques qui est une généralisation de la notion d'équations différentielles ordinaires prenant compte un terme de bruit blanc, et une application à la finance ou à la physique.

.

Bibliographie

[1] P. Billingsley. *Probability and measure*, Wiley, 1995.

[2] N. Bouleau, *Probabilités de l'ingénieur*, Hermann, 1986.

[3] D. Foata, A. Fuchs. *Processus stochastique: Processus de Poisson, Chaînes de Markov et Martingales*, Dunod, 2002.

[4] L. Gallardo, *Mouvement brownien et calcul d'Itô,* Hermann, 2008.

[5] I. Karatzas, S. Shreve. *Brownian notion and stochastic calculs,* Springer, 1990.

[6] B. Ksendal. Stochastic differential Equations. An introduction with applications, springer, 2002.

[7] D. Lamberton, B.Lapeyre. I*ntroduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* Ellipses, 1997.

[8] F. Pierrret. *Modélisation de systémes dynamiques déterministes, stochastiques ou discrets*, Mathématiques appliqués, Ecole doctorale d'astronomie et d'astrophysique d'Ile De france, Paris, 2015.

[9] Ph. Protter. *Stochastic integration and differential equations.* A new approach, Springer, 1990.

[10] D. Revuz, M. Yor. *continuons Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1991.

Résumé

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressées au mouvement brownien et l'intégrale stochastique.

On introduit ce mouvement qui désigne à la fois un phénomène naturel et un objet mathématique, et ensuite on s'intéresse aux principaux résultats de la théorie de calcul stochastique, au cours de cette étude on a commencé par la construction de l'intégrale d'Itô et la formule associée en dimension 1 et multidimensionnelle, suivie la représentation des martingales et la définition des équations différentielles stochastiques.

Mots clés: Processus stochastiques, Mouvement brownien, Martingale, intégrale stochastique.

Abstract

In this work, we are interested to Brownian motion and stochastic integrals.

We introduced this movement which refers to both a natural phenomenon and a mathematical object, and then we look at the main results of the theory of stochastic calculus, during this study was begun by a building the Ito integral and the associated formula with dimension 1 and multidimensional, followed by martingales representation and definition to stochastic differential aquations.

Key Words:Stochastic Processes, Brownian motion, Martingale, Stochatic integral