

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université A. Mira de Bejaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématique



MEMOIRE DE FIN DE CYCLE

*En vue de l'obtention d'un Master en
Mathématiques*

Option : Statistique et Analyse Décisionnelle

Thème

Sur l'estimation de quantiles

Présenté par:

M^{elle} KHERRAZ Lamia

M^{elle} SAMER Nouara

Soutenu devant le jury composé de :

Président	M^r M. Bouraine	M.A.A	U.A/Mira, Bejaïa
Rapporteur	M^{me} A. Bareche	M.C.A	U.A/Mira, Bejaïa
Examinatrice	M^{elle} N. Saadi	M.A.A	U.A/Mira, Bejaïa

Promotion 2015/2016

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu le tout-puissant qui nous a donné la force et le savoir afin d'accomplir ce travail.

Un grand merci pour notre encadreur M^{me} BARECHE pour son encouragement et son suivi attentif pour la réalisation de ce travail.

Nous tenons aussi à remercier également tous les membres de jury, M^r M. Bouraine et M^{elle} N. Saadi, pour avoir accepté d'évaluer notre travail.

A nos familles, surtout nos parents qui nous ont épaulés, soutenus et suivis tout au long de ce projet.

A nos chères amis qui ont toujours été présents et fidèles.

Enfin, pour toute personne qui a contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire. Veuillez bien trouver ici l'expression de nos sincères remerciements.

Dédicaces

Ce modeste travail est dédié :

A nos chers parents.

A nos frères et sœurs.

A nos familles.

A nos amis et collègues et tous ceux qui nous ont aidés.

Lamia et Nouara

Table des matières

Liste des figures	iii
Liste des tableaux	iv
Notations et abréviations	v
Introduction générale	1
1 Généralités sur les quantiles et la statistique d'ordre	4
1.1 Introduction	4
1.2 Rappels sur la statistique d'ordre	4
1.2.1 Introduction	4
1.2.2 Densité conjointe de n statistiques d'ordre	5
1.2.3 Densité conjointe de la $K^{\text{ème}}$ statistique d'ordre	5
1.2.4 Densité conjointe de deux statistiques d'ordre	6
1.2.5 Inverse généralisé	6
1.2.6 La fonction de répartition empirique	7
1.2.7 Point terminal	7
1.2.8 Convergence de la fonction de répartition empirique	7
1.2.9 Convergence presque sûre des statistiques d'ordre	8
1.2.10 Le domaine maximal d'attraction (MDA)	8
1.2.11 Méthode du maximum de vraisemblance (EMV)	8
1.3 Quantile	9
1.3.1 Introduction	9
1.3.2 Quantile d'ordre p	10
1.3.3 Fonction quantile de queue	11
1.3.4 Quantile extrême	11
1.3.5 Quantile empirique	11

1.3.6	Comportement asymptotique d'un quantile d'ordre centrale	12
1.4	VaR (Value at Risk)	12
1.5	Conclusion	13
2	Synthèse sur les méthodes d'estimation de quantiles	14
2.1	Introduction	14
2.2	La méthode paramétrique	14
2.3	La méthode semi-paramétrique basée sur la théorie des valeurs extrêmes	15
2.3.1	Théorème de Belkema-Pickands Haan	17
2.4	La méthode non-paramétrique	17
2.4.1	Définitions et notations	18
2.4.2	L'estimateur explicite pour $Q(X,p)$	25
2.4.3	L'estimateur implicite (non explicite) pour $Q(X,p)$	26
2.4.4	Estimateur à noyau beta : estimateur de la densité sur $[0, 1]$	27
2.4.5	Observations transformées	29
2.4.6	La distribution Champernowne généralisée pour modéliser les pertes	29
2.5	Conclusion	30
3	Application numérique : résultats et discussion	31
3.1	Introduction	31
3.2	Description des estimateurs étudiés	32
3.3	Description des distributions utilisées pour la simulation	34
3.4	Etude des cinq distributions	35
3.5	Résultats obtenus	36
3.5.1	Etude des cinq distributions (allure des distributions et quantiles)	36
3.5.2	Comparaison des différents estimateurs de quantiles (boîtes à moustaches)	44
3.6	Conclusion	54
	Conclusion générale	56

Table des figures

1.1	Shéma explicatif de quantile	10
3.1	La fonction de densité de la distribution exponentielle	37
3.2	La fonction de répartition de la distribution exponentielle	37
3.3	La fonction de densité de la distribution normale	38
3.4	La fonction de répartition de la distribution normale	38
3.5	La fonction de densité de la distribution weibull	39
3.6	La fonction de répartition de la distribution weibull	39
3.7	La fonction de densité de la distribution lognormale	40
3.8	La fonction de répartition de la distribution lognormale	40
3.9	La fonction de densité de la distribution 30% pareto 70% lognormale . . .	41
3.10	La fonction de répartition de la distribution 30% pareto 70% lognormale .	41
3.11	La fonction de densité de la distribution 70% pareto 30% lognormale . . .	42
3.12	La fonction de répartition de la distribution 70% pareto 30% log normale .	42
3.13	Les fonctions de densité des 5 distributions	43
3.14	Les fonctions de répartition des 5 distributions	43
3.15	Des boites à moustaches des différents estimateurs de la distribution normale	45
3.16	Des boites à moustaches des différents estimateurs de la distribution lognor- male	47
3.17	Des boites à moustaches des différents estimateurs de la distribution weibull	49
3.18	Des boites à moustaches des différents estimateurs de la distribution 30% pareto 70% lognormale	51
3.19	Des boites à moustaches des différents estimateurs de la distribution 70% pareto 30% lognormale	53

Liste des tableaux

2.1	Noyaux usuels	19
3.1	Les rapports de MSE de la distribution normale	46
3.2	Les rapports de MSE de la distribution lognormale	48
3.3	Les rapports de MSE de la distribution weibull	50
3.4	Les rapports de MSE de la distribution 30% pareto 70% lognormale	52
3.5	Les rapports de MSE de la distribution 30% pareto 70% lognormale	54
3.6	Les rapports de MSE des 5 distributions	55

Notations et abréviations

Abréviations

MDA :	Domaine Maximal d'Attraction.
VaR :	Value at Risk.
EMV :	Méthode du Maximum de Vraisemblance.
GPD :	Distribution de Pareto Généralisée.
i.i.d :	independant et identiquement distribué.
CPS :	Convergence Presque Sûre.
R :	Quantile empirique suggéré par le logiciel R.
E :	Quantile obtenu en inversant l'estimateur à noyau de la fonction de répartition obtenu avec le noyau d'Epanechnikov.
HD :	Estimateur de Harrel-Davis.
PDG :	Estimateur de Padgett.
PRK :	Estimateur de Park.
B1 :	Estimateur utilisant le noyau beta1.
MACRO B1	Estimateur MACRO-beta de Gouriéroux et Montfort (2006) utilisant le noyau beta1.
B2 :	Estimateur utilisant le noyau beta2.
MACRO B2	Estimateur MACRO-beta de Gouriéroux et Montfort (2006) utilisant le noyau beta2.
MSE :	Mean Square Error(Erreur Quadratique Moyenne).
ISE :	Integrated Squared Error (L'erreur quadratique intégrée).
UCV :	Unbiased Cross Validation.
BCV :	Biased Cross Validation.

Notations

Θ :	Espace des paramètres.
\mathbb{R} :	Ensemble des réels.
$\xrightarrow{p.s.}$:	Convergence presque sûre.
\mathbb{N} :	Ensemble des entiers naturels.
\xrightarrow{L} :	Converge en loi.

F^{-1} :	Inverse de la fonction de répartition.
F^{\leftarrow} :	Inverse généralisée de la fonction de répartition.
x_F :	Point terminal.
F_n :	Fonction de répartition empirique.

Introduction générale

Ces quatre dernières décennies, il y a eu une recrudescence d'évènements extrêmes ou atypiques tels que les catastrophes naturelles : inondations, séismes de forte intensité, vents violents, crues de rivières inhabituelles, ou bien les crises financières, etc. Ce sont des évènements rares qui s'écartent fortement de la moyenne ou de la tendance habituelle et aux conséquences désastreuses pour l'être humain et l'environnement.

Etudier l'occurrence de ces évènements est de première importance pour les assurances ou les financiers. La mesure et la gestion des risques sont devenus des enjeux majeurs pour les opérateurs de marchés financiers, des actuaires, etc. Il est évident que la première tâche des gestionnaires est de prévoir et de se prémunir contre de tels risques.

Il est donc dans l'intérêt des gestionnaires de recourir à des modèles mathématiques pour anticiper l'impact de ces risques atypiques. Le cadre théorique correspond est la modélisation par la méthode non paramétrique . Cette modélisation correspond à l'étude de la queue de la distribution qui va nous permettre de calculer ou d'estimer un quantile qui est l'objet de notre étude.

L'estimation du quantile a été intensivement étudié dans la littérature (voir Azzalini (1981) [1], Chen et Tang (2005)[12], Gouriéroux et al. (2000)[16], Harrell et Davis (1982)[17]; McNeil et al. (2005)[18], Nadaraya (1964)[19], Padgett (1986)[20], Park (2006)[21], Parzen (1979)[22], Ralescu et Sun (1993)[23] et Sheather et Marron (1990)[28]). Mais la plupart de ces estimateurs souffrent soit d'un biais ou d'inefficacité pour les niveaux de probabilité élevée. Les trois techniques statistiques d'estimation du quantile utilisées

dans la littérature sont : méthode paramétrique, méthode semi paramétrique et méthode non paramétrique.

Les deux techniques mentionnées auparavant (méthode paramétrique et méthode semi-paramétrique) supposaient respectivement que, soit nous connaissons la forme de la distribution F_x afin que nous puissions supposer qu'elle appartient à une famille paramétrique F , soit nous connaissons bien la forme des distributions et nous pouvons dire sans aucun doute si les queues sont de type exponentiel ou de type pareto. Mais si les deux hypothèses ne sont pas correctes, toutes les conclusions dans un cadre paramétrique ne sont pas pertinentes. Donc afin d'évaluer si les estimations sont correctes ou non, il pourrait être intéressant d'avoir des estimations non paramétriques.

Dans l'approche non paramétrique d'estimation de quantiles, deux classes d'estimateurs sont distinguées. La première classe est dite explicite, plusieurs estimateurs ont été pris en compte dans la littérature sur la base de cette classe, par exemple Harrel et Davis (1982)[17], Park (2006)[21] suggèrent d'utiliser le noyau asymétrique, i.e. le noyau de type beta. La seconde classe est dite implicite (non explicite), ces estimateurs sont très naturel et simple à obtenir. Nadaraya (1964)[19], Azzalini (1981)[1], Ralescu et Sun (1993)[23], Gouriéroux (2000)[16] ou Chen et Tang(2005)[12], ont étudié cette classe d'estimateurs, mais là encore, ces estimateurs souffrent d'un biais pour les grandes valeurs de quantile d'ordre p . L'estimateur à noyau beta peut parfaitement estimer les densités à support compact, car il élimine le biais aux bornes.

L'objectif de ce travail est d'appliquer la méthode non paramétrique pour estimer le quantile, et de comparer les différents estimateurs non paramétrique du quantile en utilisant le critère d'erreur moyenne (MSE).

Ce mémoire est organisé en trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à des rappels sur la statistique d'ordre et définitions du quantile, en particulier la VaR. Une présentation des différentes méthodes d'estimation du quantile utilisées dans la littérature (méthode paramétrique, méthode semi-paramétrique et méthode non paramétrique), et une étude plus détaillé sur la méthode non paramétrique fait l'objet du chapitre 2. Dans le dernier chapitre, nous présentons une étude de simulation pour étudier la performance des

estimateurs basés sur des noyaux beta pour les cinq distributions. Pour chaque distribution, le critère d'erreur sera utilisé afin de comparer les performances de neuf estimateurs du quantile.

Généralités sur les quantiles et la statistique d'ordre

1.1 Introduction

Les quantiles sont fréquemment utilisés en statistique, par exemple, la médiane est un indicateur robuste de la tendance centrale d'une population, l'intervalle interquartile est un bon indicateur de sa dispersion.

Les quantiles représentent également un moyen robuste de prévision. En pratique, ces quantiles sont calculés suivant un critère d'ordre sur l'observation. Le quantile peut être aussi considéré comme une solution de certains problèmes de minimisation.

Dans ce chapitre nous donnons quelques rappels sur la statistique d'ordre et certaines définitions autour des quantiles.

1.2 Rappels sur la statistique d'ordre

1.2.1 Introduction

Soit X une suite de n -variables aléatoires i.i.d de densité commune f , et de fonction de répartition F .

Notons $\bar{F} = 1 - F(x)$ la fonction de survie (ou de queue).

Définition 1.1. [31]

On appelle statistique d'ordre notées $X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)}$, les variables aléatoires ordonnées :

$$\min(X_1, \dots, X_n) = X_{(1,n)} \leq \dots \leq X_{(n,n)} = \max(X_1, \dots, X_n).$$

On note $M_n = X_{(n,n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1.2.2 Densité conjointe de n statistiques d'ordre**Lemme 1.1. [3]**

Soit $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ n variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition F continue, alors la densité de $(X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)})$ est donnée par :

$$f_{X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^{i=n} f(x_i) \text{ avec } x_1 \leq \dots \leq x_n.$$

1.2.3 Densité conjointe de la K^{ème} statistique d'ordre**Lemme 1.2. [3]**

La loi de la variable aléatoire $X_{(k,n)}$, pour $1 \leq k \leq n$ est donnée par :

$$\begin{aligned} F_{X_{(k,n)}}(x) &= P[X_{(k,n)} \leq x] \\ &= \sum_{j=k}^n C_n^j [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j}. \end{aligned}$$

Sa densité est :

$$f_{X_{(k,n)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x).$$

1.2.4 Densité conjointe de deux statistiques d'ordre

Définition 1.2. [3]

La densité conjointe de $(X_{(r,n)}, X_{(s,n)})$ pour $r < s$ est donnée par :

$$f_{(X_{(r,n)}, X_{(s,n)})}(x, y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} [F(x)]^{r-1} f(x) [F(y) - F(x)]^{s-r-1} f(y) [1 - F(y)]^{n-s},$$

avec $-\infty < x < y < +\infty$.

La fonction de répartition $F_{(X_{(r,n)}, X_{(s,n)})}$ est définie par :

- Pour $x \geq y$, on a

$$F_{(X_{(r,n)}, X_{(s,n)})}(x, y) = F_{X_{(s,n)}}(y).$$

- Pour $x < y$,

$$\begin{aligned} F_{(X_{(r,n)}, X_{(s,n)})}(x, y) &= P[X_{i,n} \leq x, X_{j,n} \leq y] \\ &= \sum_{s=j}^n \sum_{r=i}^s P[\text{exactement } r \text{ variables parmi } X_1, \dots, X_n \\ &\quad \text{sont inférieures à } x, \text{ et exactement } s \text{ variables} \\ &\quad \text{parmi } X_1, \dots, X_n \text{ sont inférieures à } y] \\ &= \sum_{s=j}^n \sum_{r=i}^s \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} [F(x)]^{r-1} f(x) \\ &\quad \times [F(y) - F(x)]^{s-r-1} f(y) [1 - F(y)]^{n-s}. \end{aligned}$$

1.2.5 Inverse généralisé

Définition 1.3.

On appelle inverse généralisé de F , l'application notée F^{\leftarrow} définie par :

$$F^{\leftarrow}(p) = \text{Inf}\{x : F(x) \geq p\}, \quad p \in [0, 1].$$

L'inverse généralisé F^{\leftarrow} coïncide avec l'inverse F^{-1} lorsque la fonction F est strictement croissante et continue.

1.2.6 La fonction de répartition empirique

Définition 1.4.

On appelle fonction de répartition empirique associée à un échantillon X_1, \dots, X_n la fonction F_n définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k \leq x\}} = \frac{1}{n} \text{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} : X_k \leq x\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{1,n} \\ \frac{1}{n} & \text{si } X_{1,n} \leq x < X_{2,n} \\ \frac{2}{n} & \text{si } X_{2,n} \leq x < X_{3,n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \frac{k}{n} & \text{si } X_{k,n} \leq x < X_{k+1,n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 1 & \text{si } x \geq X_{n,n}, \end{cases}$$

où 1 est la fonction indicatrice.

1.2.7 Point terminal

Définition 1.5.

Le point terminal d'une distribution F est défini par :

$$x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

1.2.8 Convergence de la fonction de répartition empirique

Théorème 1.1. [13]

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi F , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0 \quad \text{C.P.S.}$$

1.2.9 Convergence presque sûre des statistiques d'ordre

Proposition 1.1. [13]

Soit F une fonction de répartition, telle que $x_F \leq \infty$, et $(k(n), n \in \mathbb{N})$ une suite d'entiers naturels non décroissante telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = c \in [0, 1],$$

alors :

- (a) $X_{(k(n), n)} \xrightarrow{p.s.} x_F$ avec $c = 0$ respectivement ($c = 1$).
- (b) Si $c \in (0, 1)$, alors $x(c)$ est la solution unique de l'équation $F(x) = c$.

1.2.10 Le domaine maximal d'attraction (MDA)

Définition 1.6.

Une variable aléatoire X appartient au domaine maximal d'attraction d'une fonction $H_{\mu, \sigma, \xi}$, et on note $F \in MDA(H_{\mu, \sigma, \xi})$ s'il existe deux suite $(a_n, n \geq 1)$, $a_n > 0$ et $(b_n, n \geq 1)$, $b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{M_n}(a_n x + b_n) = H_{\mu, \sigma, \xi}(x),$$

en tout point x de continuité de $H_{\mu, \sigma, \xi}$.

1.2.11 Méthode du maximum de vraisemblance (EMV)

Cette méthode notée E.M.V est fréquemment utilisée en statistique. L'estimation par le maximum de vraisemblance donne des résultats asymptotiques efficaces, et les estimateurs obtenus convergent sous certaines conditions vers les vraies valeurs des paramètres.

Soit Y_1, \dots, Y_n , un échantillon de n variables aléatoires, supposées i.i.d, de densité h_θ , où $\theta = (\mu, \sigma, \xi)$.

L'expression de la fonction de vraisemblance est donnée par :

$$\ell(\theta = (\mu, \sigma, \xi); (Y_1, \dots, Y_n)) = \prod_{i=1}^n h_\theta(y_i).$$

L'estimateur $\hat{\theta}$ est donné par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\nabla \log \ell}{\nabla \theta} = 0, \\ \frac{\nabla^2 \log \ell(\hat{\theta})}{\nabla^2(\theta)} \geq 0. \end{cases}$$

Dans le cas où $\xi = 0$ (loi de Gumbel), la fonction logarithme de la vraisemblance est égal à :

$$\log \ell((\mu, \sigma, 0); (Y_1, \dots, Y_n)) = -n \log \sigma - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu}{\sigma}.$$

En dérivant cette fonction relativement aux deux paramètres, nous obtenons le système d'équations à résoudre suivant :

$$\frac{\partial \log \ell}{\partial \sigma} = 0 \Leftrightarrow n + \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu}{\sigma} \left[\exp\left(-\frac{y_i - \mu}{\sigma} - 1\right) \right] = 0. \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \log \ell}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow n - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right) = 0. \quad (1.2)$$

1.3 Quantile

1.3.1 Introduction

Les quantiles d'une variable aléatoire discrète (entière) ou continue (réelle) sont les valeurs que prend la variable pour des valeurs de probabilité p ($0 < p < 1$). On les appelle encore fractile, et ce sont les valeurs réciproques de la fonction de répartition de la loi de probabilité considérée.

Les quantiles d'un échantillon statistique de nombres sont les valeurs remarquables permettant de diviser le jeu de ces données ordonnées c'est à dire triées en intervalle consécutifs contenant le même nombre de données.

Exemple

Soit X un retour d'investissement. une mesure possible de risque, appelée quantile (ou Value at Risk), consiste à déterminer la valeur q telle que la vraisemblance que X prenne une valeur plus petite que q est une valeur prédéfinie, soit 0.01.



FIG. 1.1 – Schéma explicatif de quantile

1.3.2 Quantile d'ordre p **Définition 1.7.**

On appelle quantile ou fractile d'ordre p , le nombre x_p défini par :

$$x_p = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}, \text{ avec } p \in [0, 1].$$

Remarque

Si F est strictement croissante et continue, alors x_p est l'unique nombre réel tel que :

$$F(x_p) = p.$$

1.3.3 Fonction quantile de queue

La fonction quantile de queue est définie par :

$$U(t) = F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{t} \right) \quad \text{avec } 1 < t < \infty. \quad (1.3)$$

1.3.4 Quantile extrême

On appelle quantile extrême le quantile d'ordre $(1 - p)$, défini par :

$$\begin{aligned} x_{1-p} &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1 - p\} \\ &= F^{-1}(1 - p). \end{aligned}$$

où p proche de zéro.

1.3.5 Quantile empirique

La fonction quantile empirique de l'échantillon X_1, \dots, X_n , est donnée par :

$$Q_n(p) = F_n^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq p\}, \quad 0 < p < 1. \quad (1.4)$$

La fonction quantile empirique de la queue correspondante est définie par :

$$U_n(t) = F_n^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{t} \right) \quad \text{avec } 1 < t < \infty. \quad (1.5)$$

Définition 1.8.

Soit X_1, \dots, X_n un n -échantillon issu d'une loi F , et $X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)}$ l'échantillon ordonné.

Soit $p \in]0, 1[$, on appelle quantile empirique d'ordre p , la variable aléatoire notée $\widehat{X}_{(np,n)}$ définie par :

$$\widehat{X}_{(np,n)} = \begin{cases} \frac{X_{(np,n)} + X_{(np+1,n)}}{2}, & \text{si } np \in \mathbb{N} \\ X_{([\!np\!] + 1, n)}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $[np]$ désigne la partie entière de np .

En particulier $X_{(\lfloor n/2 \rfloor + 1, n)}$ est la médiane empirique.

Il est facile de vérifier que :

$$\forall p \in \left] \frac{np-1}{n}, \frac{np}{n} \right[, \quad Q_n(p) = F_n^{-1}(p) = \widehat{X}_{(np, n)}. \quad (1.6)$$

1.3.6 Comportement asymptotique d'un quantile d'ordre centrale

Soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n i.i.d de fonction de répartition commune F et de densité f .

Définition 1.9.

La statistique d'ordre $X_{(k(n), n)}$ est dite centrale si $\exists p$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\frac{k(n)}{n} - p \right) = 0.$$

Théorème 1.2. ([4])

Soit $0 < p < 1$ et supposons que F possède une dérivée au voisinage de x_p avec $0 < f(x_p) < \infty$ et f continue au point x_p , alors :

$$\sqrt{n}(\widehat{X}(\lfloor np \rfloor + 1, n) - x_p) \xrightarrow{L} N\left(0, \frac{p(1-p)}{[f(F^{-1}(p))]^2}\right). \quad (1.7)$$

1.4 VaR (Value at Risk)

Le risque du marché correspond à un risque de perte des portefeuilles des investisseurs dû aux variations des marchés financiers : marchés des instruments de base (actions, obligations, devises, matières premières), mais aussi marché des produits dérivés (contrats à terme, options). Pour gérer le risque de marché, il faut donc mesurer de manière précise ce risque extrême. La mesure qui répond à cela est la VaR (Value at Risk).

La Value at Risk (VaR) n'est rien d'autre qu'un quantile, le plus souvent élevé, du risque considéré comme une fonction de perte. Un de ses intérêts est qu'elle donne une idée de la queue de la distribution, qui peut ne pas être négligeable lorsqu'on s'extrait du cadre Gaussien.

Définition 1.10.

Soit F la distribution des pertes sur un horizon de temps donné. Compte tenu d'un niveau de probabilité p ($0 < p < 1$), la valeur à risque X est :

$$VaR(X, p) = Q_X(p) = \inf\{x : F_X(x) \geq p\}.$$

Par conséquent, si F_X est continue et décroissante, donc $VaR(X, p) = F_X^{-1}(p)$.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait un petit rappel sur la statistique d'ordre, nous avons aussi vu les notions des différents quantiles, ainsi nous avons défini la VaR (Value at Risk).

Ces rappels et définitions sont indispensables pour le chapitre suivant où nous nous intéressons aux méthodes d'estimation de quantiles.

Synthèse sur les méthodes d'estimation de quantiles

2.1 Introduction

L'estimation du quantile ou l'estimation de la fonction du quantile a été intensivement étudiée par Azzalini (1981)[1], Chen et Tang (2005)[12], Gouriéroux et al. (2000)[16], Harrrell et Davis (1982)[17]; McNeil et al. (2005)[18], Nadaraya (1964)[19], Padgett (1986)[20], Park (2006)[21], Parzen (1979)[22], Ralescu et Sun (1993)[23] et Sheather et Marron (1990)[28]. Mais la plupart de ces estimateurs souffrent soit d'un biais ou d'inefficacité pour les niveaux de probabilité élevée.

Nous considérons dans ce chapitre les différentes méthodes utilisées dans la littérature :

- La méthode paramétrique.
- La méthode semi-paramétrique (utilisation du théorème des valeurs extrêmes).
- La méthode non-paramétrique.

Nous nous attarderons sur celles qui remédient aux problèmes du biais.

2.2 La méthode paramétrique

Supposons que F_x appartient à une famille de distributions paramétriques $F = \{F_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$. L'idée d'estimation paramétrique est de supposer que toute quantité statistique peut être vu en fonction de θ et donc un estimateur naturel est obtenu

en substituant un estimateur de paramètre $\hat{\theta}$ pour θ , ensuite étant donné que

$$VaR(X, p) = Q(X, p) = F_{\theta}^{-1}(p),$$

donc un estimateur naturel est :

$$\hat{Q}(X, p) = F_{\hat{\theta}}^{-1}(p). \quad (2.1)$$

Cette méthode est pratique pour des raisons pratiques, car il existe plusieurs techniques pour l'obtention $\hat{\theta}$ (maximum de vraisemblance,...). Mais le choix de F est crucial.

2.3 La méthode semi-paramétrique basée sur la théorie des valeurs extrêmes

L'idée générale de la théorie des valeurs extrêmes est de restreindre l'échantillon, sur lequel reposeront les estimations de la distribution de perte, à ses composantes assez grandes. On diminue ainsi tout ou partie du centre de la distribution. La famille de lois qui ajuste le mieux la queue de distribution de perte est donnée par le théorème de Pickands-balkema-de Haan (voir par exemple Embrechts [15](1997), ou Beirlant [5] (2006)) qui donne, pour la distribution conditionnelle, une loi limite appartenant à la classe de Distribution de Pareto Généralisée (GPD).

Le théorème de Pickands-balkema-de Haan prétend que si F_x est dans le domaine maximal d'attraction de la distribution GEV de paramètre ξ alors pour u assez grand $X - u$ étant donné que $X > u$ a une Distribution de Pareto Généralisée (PDG) avec le paramètre de queue ξ et avec un certain paramètre de forme $\beta(\mu)$.

Sur la base de ce résultat, l'idée naturelle est d'utiliser la technique du maximum de vraisemblance pour adapter ces deux paramètres, pour un u donné typiquement $\mu = X_{(n-k)}$ pour un k assez grand. Si $\xi > 0$ et si $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ désignent les estimations du maximum de vraisemblance de la distribution de pareto, sur la base de l'échantillon de $X_{(n-k+1)} - X_{(n-k)}, \dots, X_{(n)} - X_{(n-k)}$, alors :

$$\hat{Q}(X, p) = X_{(n-k)} + \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\xi}_k} \left(\left[\frac{n}{k}(1-p) \right]^{-\hat{\xi}_k} - 1 \right). \quad (2.2)$$

Définition 2.1 : Distribution des valeurs extrêmes (GEV)

Une distribution est dite dans la classe des distributions GEV (μ, σ, ξ) , si et seulement si elle est non-dégénérée et si sa fonction de répartition est de la forme :

$$H_{\mu, \sigma, \xi}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

avec $\mu + \xi \frac{x}{\sigma} > 0$.

Le paramètre $\alpha = \frac{1}{\xi}$ est appelé paramètre forme, les paramètres μ et σ sont des paramètres d'échelle et de normalisation.

La densité GEV est donnée par :

$$f_{GEV}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{x-\mu}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

Remarque

La valeur prise par le paramètre forme ξ définit trois lois connues dans la littérature :

- Si $\xi > 0$, nous obtenons la loi de Fréchet "queue lourde" (heavy tail).
- Si $\xi < 0$, nous obtenons la loi de Weibull "queue légère" (light tail).
- Si $\xi = 0$, nous obtenons la loi de Gumbel "queue moyenne" (bounded).

Définition 2.2 : Distribution de Pareto-Généralisée (GPD)

Une distribution est dite dans la classe des distributions GPD (μ, σ, ξ) , si et seulement si elle est non-dégénérée et si sa fonction de répartition est de la forme :

$$G_{\mu, \sigma, \xi}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

avec

$$\sigma > 0 \text{ et } x \geq \mu \text{ si } \xi \geq 0.$$

$$0 \leq x \leq -\frac{\sigma}{\xi} + \mu \text{ si } \xi < 0.$$

La densité GPD est donnée par :

$$f_{GPD}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} & \text{si } \xi \neq 0, \\ \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

Remarque

La valeur prise par le paramètre forme ξ définit aussi trois lois connues dans la littérature :

- Si $\xi > 0$, nous obtenons la loi de Pareto.
- Si $\xi < 0$, nous obtenons la loi de Pareto de type *II*.
- Si $\xi = 0$, nous obtenons la loi de exponentielle.

2.3.1 Théorème de Belkema-Pickands Haan

Le théorème suivant fait le lien entre le comportement asymptotique de la distribution des excès et la loi de Pareto généralisée.

Théorème 1.2.[2]

Soit F_u la distribution des excès, lorsque le seuil u tend vers le point terminal x_F , on a :

$$\lim_{u \rightarrow x} \sup_{0 \leq x \leq x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0, \quad (2.3)$$

où $\beta(u)$ une fonction positive mesurable.

2.4 La méthode non-paramétrique

Les deux techniques mentionnées dans les sections précédentes supposaient que, soit nous connaissons la forme de la distribution F_x afin que nous puissions supposer qu'elle appartient à une famille paramétrique F , soit nous connaissons bien la forme des distributions et nous pouvons dire sans aucun doute si les queues sont de type exponentiel ou de type pareto. Mais si les deux hypothèses ne sont pas correctes, toutes les conclusions dans un cadre paramétrique ne sont pas pertinentes. Afin d'évaluer si les estimations sont correctes ou non, il pourrait être intéressant d'avoir des estimations non paramétriques.

2.4.1 Définitions et notations

Pour l'estimation quantile non paramétrique, deux classes d'estimateurs ont été dérivées. Une classe dite explicite, qui est liée à statistique d'ordre et une classe implicite (non explicite) fondée sur des techniques d'inversion numérique. Avant d'aller plus loin, rappelons deux estimateurs classiques pour F_x .

Définition 2.3

L'estimation empirique de F_x sur la base de l'échantillon X_1, \dots, X_n est :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{X_i \leq x}.$$

Définition 2.4 : La méthode du noyau

La méthode du noyau est l'une des méthodes d'estimation non paramétrique la plus utilisée. Rosenblatt (1956) [24], suivi de Parzen (1962)[22], ont proposé une classe d'estimateurs à noyau d'une densité de probabilité. Cet estimateur est une fonction de deux paramètres : Le noyau k et le paramètre de lissage h . Le succès rencontré par cet estimateur s'explique par sa simplicité, sa flexibilité et aussi ses propriétés de convergence. Il laisse à l'utilisateur une grande latitude non seulement dans le choix du noyau k , mais aussi dans le choix du paramètre de lissage h .

On appelle estimateur à noyau k de f , l'estimateur donné par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x - x_i}{h}\right),$$

où n est la taille de l'échantillon X , k est la fonction noyau et h est dit paramètre de lissage qui détermine son étendue.

L'estimateur à noyau de $F(x)$ est donné par :

$$\hat{F}(x) = \int_{-\infty}^x \hat{f}(y) dy = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right),$$

où $\int_{-\infty}^{+\infty} k(t) dt = 1$.

$$K(x) = \int k(x) dx$$

Choix du noyau

On donne ici une brève présentation de quelques noyaux usuels de chaque catégorie dans le cas continu.

1. Noyaux symétriques

Les noyaux les plus utilisés dans l'estimation de la densité de probabilité sont donnés dans le tableau suivant :

Noyau	$k(u)$
Uniforme	$\frac{1}{2}, u \leq 1$
Triangulaire	$(1 - u), u \leq 1$
Gaussien	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right), u \in \mathbb{R}$
Epanechnikov	$\frac{3}{4\sqrt{5}} \left(1 - \frac{ u ^2}{5}\right), u \leq \sqrt{5}$

TAB. 2.1 – Noyaux usuels

2. Noyaux asymétriques

Quoique les méthodes précédentes diminuent le biais, aux bornes, elles restent peu efficaces car le biais reste considérable si on le compare aux biais de l'intérieur du support.

Pour obtenir un biais aux bornes de même ordre que celui de l'intérieur, Chen (1999)[11] a proposé d'utiliser des noyaux asymétriques, qui sont respectivement le noyau beta pour les densités à support compact (exemple : $[a, b]$) et le noyau gamma pour les densités à support positif (c'est-à-dire sur $[0, +\infty[$).

- Noyau Gamma

Soit X_1, \dots, X_n , n observations d'une variable aléatoire X de densité de probabilité f , inconnue et définie sur un support $[0, +\infty[$. L'objectif est d'estimer cette densité par un noyau gamma.

La première forme du noyau gamma est définie par : (voir Bouezmarni[6])

$$k_{(\frac{x}{h}+1, h)}(t) = \frac{t^{\frac{x}{h}} \exp(-\frac{t}{h})}{h^{\frac{x}{h}+1} \Gamma(\frac{x}{h} + 1)}, \quad (2.4)$$

avec

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \exp^{-x} x^{a-1} dx, \quad \forall a > 0 \text{ et } t > 0.$$

Donc, l'estimateur à noyau gamma est défini comme suit :

$$f_{G_1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_{(\frac{x}{h}+1, h)}(x_i). \quad (2.5)$$

- Noyau beta

Le noyau beta a été proposé par Chen (1999)[11] pour l'estimation non paramétrique de la courbe de régression et des densités unidimensionnelles définies sur un support compact.

L'idée de Harrell et Davis (1982)[17] et Chen (1999)[11] est d'utiliser le noyau beta pour estimer la densité à support compact $[0,1]$ et de régler ainsi le problème du biais aux bornes.

L'estimateur sera alors de la forme :

$$f_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k(x_i, \frac{x}{h} + 1, \frac{1-x}{h} + 1), \quad (2.6)$$

où $k(\cdot, \alpha, \beta)$ représente la densité de la distribution beta de paramètres α et β ,

$$k(x, \alpha, \beta) = \frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{\mathbf{B}(\alpha, \beta)}, \quad x \in [0, 1],$$

avec

$$\mathbf{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) + \Gamma(\beta)} \quad \text{et} \quad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx, \quad \forall a > 0.$$

Remarque

Le noyau beta a deux avantages, premièrement il peut parfaitement estimer les densités à support compact et deuxièmement il possède une forme flexible qui change le lissage dans le sens naturel quand on s'éloigne des bornes. Par conséquent, le noyau beta élimine le biais aux bornes et fournit une réduction de la variance.

Charpentier et al. [10] ont montré par simulation que l'estimateur à noyau beta est plus performant quand on le compare à d'autres estimateurs avec des noyaux standards.

Le choix de paramètre de lissage

Le paramètre de lissage est le second élément de la méthode d'estimation à noyau. Ce paramètre est indispensable pour la convergence de l'estimateur à noyau et donc l'efficacité du lissage et la qualité de l'estimation. Plusieurs méthodes pour choisir ce paramètre ont été développées dans la littérature et quelques études comparatives ont été effectuées sur

ces méthodes. Ces techniques sont regroupées en deux classes. On présente ici les principales méthodes de chaque classe.

I. Première classe

La majorité des méthodes de cette classe ont été proposées avant 1990. Dans ce qui suit, on cite quelques méthodes les plus connues.

- La méthode de validation croisée non biaisée :

Cette méthode a été proposée par Rudemo (1982)[25]. Le critère consiste à choisir le paramètre de lissage qui minimise un estimateur convenable de :

$$\begin{aligned} UCV(h) &= \int_{\mathbb{R}} [f_h(x) - f(x)]^2 dx - \int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_h^2(x) dx - 2 \int_{\mathbb{R}} f_h(x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Avec $\mathbb{R}(k) = \int (k(x))^2$.

Puisque $\int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx$ ne dépend pas du paramètre de lissage h . On peut choisir le paramètre de lissage de façon à ce qu'il minimise un estimateur de :

$$\int_{\mathbb{R}} f_h^2(x) dx - 2 \int_{\mathbb{R}} f_h(x) f(x) dx.$$

On veut premièrement trouver un estimateur de $\int_{\mathbb{R}} f_h(x) f(x) dx$. Remarquons que

$$\int_{\mathbb{R}} f_h(x) - f(x) dx = \mathbb{E}[f_h(x)]. \quad (2.7)$$

L'estimateur empirique de $\int_{\mathbb{R}} f_h(x) f(x) dx$ est alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_{h,i}(x)$. Le critère à optimiser est alors :

$$UCV(h) = \int_{\mathbb{R}} f_h^2(x) dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f_{h,i}(x_i), \quad (2.8)$$

où $f_{h,i}(x) = \frac{1}{(n-1)h} k\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$ tel que $j \neq i$, est l'estimateur de la densité construit à partir de l'ensemble de points sauf le point x_i .

En remplaçant cet estimateur dans (2.8), pour un noyau k , le critère de la validation croisée est donné par :

$$UCV(h) = \frac{\mathcal{R}(k)}{nh} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(nh)^2} k\left(\frac{x-x_i}{h}\right) k\left(\frac{x-x_j}{h}\right) dx - \frac{2}{n(n-1)h} k\left(\frac{x_i-x_j}{h}\right) \right]. \quad (2.9)$$

Nous noterons h_{ucv} l'estimateur de h qui minimise $UCV(h)$. La popularité de cette méthode est due à la motivation intuitive et au fait que cet estimateur est asymptotiquement optimal sous de faibles conditions.

- La méthode de validation croisée biaisée :

Cette méthode a été proposée par Scott et Terrell (1987)[26] pour remédier aux problèmes de validation croisée non biaisée. Il s'agit d'introduire un biais dans la formule de UCV afin de réduire sa variance.

Lemme 2.1(Scott et Terrell [26]) En supposant que le noyau k satisfait les conditions suivantes :

$$\int k''(u)du = 0, \int uk''(u)du = 0, \int u^2k''(u)du = 2,$$

on obtient le développement asymptotique :

$$\mathbb{E}(\mathcal{R}(f_h'')) = \mathcal{R}(f'') + \frac{\mathcal{R}(k'')}{nh^5} + o(h^2).$$

Proposition 2.2 : (Scott et Terrell [26])

Soit X_1, \dots, X_n n observations d'une variable aléatoire X de fonction de densité f . Pour un noyau k , on obtient :

$$BCV(h) = \frac{h^4}{4} \sigma_2^2(k) [\mathcal{R}(f_h'') - \frac{\mathcal{R}(k'')}{nh^5}] + \frac{\mathcal{R}(k)}{nh}. \quad (2.10)$$

II. Deuxième classe

Beaucoup de méthodes ont été proposées dans cette classe (voir la monographie de Wand et Jones (1994)[32]). On présente ici quelques approches :

- La règle de pouce (Rule of thumb) :

L'idée de cette méthode revient à Deheuvels (1977)[14] avant d'être publiée par Silverman (1986)[29]. Le choix du paramètre de lissage par cette méthode consiste à remplacer la partie inconnue $R(f'')$ dans l'expression suivante $h_{AMISE} = \left[\frac{R(k)}{nR(f'')\sigma^2} (k) \right]^{1/5}$, par une distribution classique afin d'obtenir un estimateur pour h .

Si on choisit f comme étant la distribution normale de moyenne 0 et de variance σ^2 , on a alors :

$$R(f'') = \int (f''(x))^2 dx = \frac{3}{8\sqrt{\pi}} \sigma^{-1/5}. \quad (2.11)$$

De plus, si on utilise un noyau gaussien, alors la valeur de h_{AMISE} que l'on note dans ce cas par h_{rot} et en substituant la valeur obtenue dans (2.11), on aura :

$$h_{rot} = (4\pi)^{-1/10} \left[\frac{3}{8}\pi^{-1/2}\sigma \right] n^{-1/5} = \left(\frac{4}{3} \right)^{1/5} \sigma n^{-1/5} = 1.06\sigma n^{-1/5}. \quad (2.12)$$

Il suffit donc d'estimer σ à partir des données et de le remplacer dans la formule (2.11) de h_{rot} .

- La méthode de ré-injection (plug-in) :

En adoptant le critère de l'Erreur Quadratique Moyenne Intégrée (MISE), Scott et al. (1977)[27] choisissent d'estimer la fonction $R(f'')$ dans l'expression de h_{AMISE} donnée précédemment à l'aide de l'estimateur naturel $\hat{R}_h(f'')$ défini comme suit :

$$\hat{R}_h(f'') = R(f''_h),$$

où f''_h désigne la dérivée seconde de l'estimateur à noyau f_h . Avec un noyau K deux fois dérivable, on a :

$$f''_h(x) = \frac{1}{nh^3} \sum_{i=1}^n k'' \left(\frac{x - x_i}{h} \right).$$

En choisissant par exemple le noyau gaussien :

$$k(u) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

L'estimateur $\hat{R}_h(f'')$ s'écrit comme suit :

$$\hat{R}_h(f'') = \frac{3}{8\sqrt{\Pi}n^2h^9} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[h^4 - (x_i - x_j)^2 h^2 + \frac{1}{12}(x_i - x_j)^4 \right] \exp\left[\frac{(x_i - x_j)^2}{4h^2}\right].$$

Il est important de noter que la largeur de la fenêtre h contrôlant l'estimateur $\hat{R}_h(f'')$ De $R(f'')$ a été choisie identique à la largeur de la fenêtre intervenant dans l'estimateur f_h de f . En supposant que la quantité $R(f'')$ devrait être robuste par rapport à une erreur de spécification sur f , Scott et al. [27] proposent finalement d'injecter l'estimateur $\hat{R}_h(f'')$ dans l'expression de h_{AMISE} , on obtient l'estimateur de h noté h_p :

$$h_p = \left[\frac{R(k)}{n\hat{R}_h(f'')\sigma_2^2(k)} \right]^{1/5}. \quad (2.13)$$

c-La méthode de bootstrap

La méthode bootstrap est une technique de ré-échantillonnage. Les premières versions de cette méthode ont été proposées par Taylor (1989) [37], Faraway et Jhun (1990)[19]. Elle consiste à considérer la fenêtre qui minimise l'approximation de MISE par bootstrap comme un estimateur de paramètre de lissage. Soit h_b le paramètre qui minimise l'erreur quadratique moyenne intégrée par l'une des méthodes précédentes.

Pour calculer la valeur de la fenêtre par la technique de bootstrap on doit ré-échantillonner par cette technique à partir de l'échantillon initial et construire ensuite l'estimateur de bootstrap qui s'écrit sous la forme suivante[19].

$$f_h^j(x) = \frac{1}{nh} \sum k\left(\frac{x - x_j^j}{h}\right), \quad j = 1, 2, \dots, B.$$

où B est le nombre de répliques de bootstrap.

Nous construisons un estimateur initial de la densité f_{h_b} ensuite nous ré-échantillonons par la technique de bootstrap à partir de l'échantillon initial pour construire les estimateurs $f_h^j(x)$, $j = 1, 2, \dots, B$.

À la fin, nous obtenons la fenêtre bootstrapée h_{boot} par la minimisation de $BMISE(h, h_b)$ par rapport à h . La qualité à minimiser, $BMISE$, est donnée par la formule suivante :

$$BMISE(h, h_b) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \int (f_h^j(x) - f_{h_b}(x))^2 dx. \quad (2.14)$$

2.4.2 L'estimateur explicite pour $Q(X, p)$

Afin de comprendre comment cette classe a été dérivée, rappelons que l'estimateur du quantile empirique classique est tout simplement :

$$Q_n(p) = F_n^{-1} \left(\frac{i}{n} \right) = X_i = X_{([np])}. \quad (2.15)$$

L'estimateur est simple à obtenir, mais ne dépend que d'une observation. Une extension naturelle est d'utiliser au moins deux observations, si np n'est pas un entier donc l'estimateur du quantile empirique pondéré est alors défini comme suit :

$$Q_n(p) = (1 - \gamma)X_{([np])} + \gamma X_{([np]+1)}, \quad (2.16)$$

où $\gamma = np - [np]$.

Afin d'augmenter l'efficacité, la statistique d'ordre peut être considérées, i.e.

$$Q_n(p) = \sum_{i=1}^n W_{i,n,p} X_{(i)} = \sum_{i=1}^n W_{i,n,p} F_n^{-1} \left(\frac{i}{n} \right) = \int_0^1 F_n^{-1}(t) k(p, h, t) dt, \quad (2.17)$$

où F_n est la fonction de répartition empirique de F_x , k est un noyau et h le paramètre de lissage.

Cette expression peut être réécrite de manière équivalente comme suit :

$$Q_n(p) = \sum_{i=1}^n \left[\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} k \left(\frac{t-p}{h} \right) dt \right] X_{(i)} = \sum_{i=1}^n \left[K \left(\frac{\frac{i}{n} - p}{h} \right) - K \left(\frac{\frac{i-1}{n} - p}{h} \right) \right] X_{(i)}, \quad (2.18)$$

Plusieurs estimateurs ont été pris en compte dans la littérature sur la base de cette expression. Par exemple, Parzen (1979)[22], Padgett (1986)[20], Sheather et Marron (1990)[28],

Ralescu et Sun (1993)[23] ont considéré des noyaux gaussiens. Mais tous ces estimateurs ont un biais important lorsque p est proche de 1. Afin de corriger ce biais, Harrell et Davis (1982)[17], Park (2006)[20] suggèrent d'utiliser le noyau asymétrique, i.e. le noyau de type beta. Dans le cas d'un noyau beta (2.16) devient :

$$Q_n(p) = \sum_{i=1}^n \left[L_\beta \left(\frac{i}{n}; b; p \right) - L_\beta \left(\frac{i-1}{n}; b; p \right) \right] X_{(i)}, \quad (2.19)$$

où $L_\beta(\frac{i}{n}; b; p)$ désigne la fonction de distribution cumulative beta $\beta(\frac{i}{b}, (1-t)b)$. b peut être vu comme le paramètre de lissage (Chen (1999)[11], Charpentier (2006)[10]).

Harrell et Davis (1982)[17] ont proposé d'utiliser un tel noyau avec $b = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n+1}}$.

2.4.3 L'estimateur implicite (non explicite) pour $Q(\mathbf{X}, \mathbf{p})$

Ces estimateurs sont également très naturel, et sont basés sur la propriété $F_X \circ Q(X, p) = p$. Noter que la même façon avec la notation de (2.14), $F_n \circ Q_n(p) = p$. Si \hat{F}_n représente l'estimateur de F et $\hat{Q}_n(p)$ un estimateur de $Q(p)$ alors $\hat{F}_n \circ \hat{Q}_n(p) = p$.

Nadaraya (1964)[19], Azzalini (1981)[1], Ralescu et Sun (1993)[23], Gouriéroux (2000)[16] ou Chen et Tang(2005)[12], ont étudié cette classe d'estimateurs, mais là encore, ces estimateurs souffrent d'un biais pour les grandes valeurs de p .

Dans le cas où X a une distribution avec un support $[0, 1]$ (i.e. $F_X(0) = 0$ et $F_X(1) = 1$), Chen (1999)[11] a proposé d'utiliser l'estimateur à noyau beta (uniquement pour l'estimation de densité). Ceci est une idée naturelle puisque, dans ce cas, le support du noyau coïncide avec le support des observations. Charpentier et al. (2006)[10] a étendu cette idée, pour estimer la densité d'un copule, étant donné que le support est $[0, 1] * [0, 1]$.

Remarque

En fait, dans Charpentier et al. (2006)[10], deux techniques ont été mentionnés pour estimer une densité de copule, à partir d'observations $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$ dans $[0, 1] \times [0, 1]$: soit en utilisant le noyau beta, ou le noyau transformé (une idée de Devroye et Györfi (1985)[14]). Comme les noyaux standards sont intéressants avec un support non borné seulement, l'idée était de transformer des observations dans $[0, 1] \times [0, 1]$ par des observations dans $\mathbb{R} * \mathbb{R}$ en utilisant une fonction quantile.

2.4.4 Estimateur à noyau beta : estimateur de la densité sur $[0, 1]$

Pour une distribution avec un support $[0, 1]$, l'usage d'un noyau symétrique k engendre un biais multiplicatif $1/2$, à la fois en 0 et 1. Chen (1999)[11] a suggéré d'utiliser un noyau beta asymétrique. Si Y_1, \dots, Y_n est un n -échantillon et f_Y est la densité des Y_i , alors un estimateur de cette densité est donné par :

$$\hat{f}_{n,Y}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_{\beta 1}(Y_i; b; y), \quad (2.20)$$

où $k_{\beta 1}(Y_i; b; y)$ est la densité de la distribution beta suivante :

$$k_{\beta 1}(u; b; t) = k_{\frac{t}{b}+1, \frac{1-t}{b}+1}(u) = \frac{u^{\frac{t}{b}}(1-u)^{\frac{(1-t)}{b}}}{B(\frac{t}{b}+1; \frac{(1-t)}{b}+1)} 1_{\{0 \leq u \leq 1\}}, \quad (2.21)$$

où $0 < t < 1$, et $B(\cdot)$ indique la fonction beta, b étant une largeur de fenêtre choisie de telle sorte que $b \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Afin de réduire le biais, et d'avoir une convergence uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, Chen (1999)[11] a proposé une version modifiée de l'estimateur présenté dans (2.20), qui sera appelé noyau beta modifiée,

$$k_{\beta 2}(u; b; t) \begin{cases} k_{\frac{t}{b}, \frac{1-t}{b}}(u), & \text{si } t \in [2b, 1 - 2b], \\ k_{\rho b(t), \frac{1-t}{b}}(u), & \text{si } t \in [0, 2b], \\ k_{\frac{t}{b}, \rho b(1-t)}(u), & \text{si } t \in [1 - 2b, 1], \end{cases} \quad (2.22)$$

où $\rho b(t) = 2b^2 + 2.5 - \sqrt{4b^4 + 6b^2 + 2.25 - t^2 - \frac{t}{b}}$.

En se basant sur un échantillon Y_1, \dots, Y_n , la fonction de distribution cumulative des Y_i peut être aussi décrite par :

$$\hat{F}_{n,Y}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^y K_{\beta}(Y_i; b; t) dt, \quad (2.23)$$

et le quantile peut alors être obtenu en utilisant une inversion numérique.

L'utilisation d'un noyau symétrique ne convient pas pour estimer une densité avec support borné (voir Charpentier et al. (2006)[10] pour une discussion et une synthèse sur

plusieurs techniques qui peuvent être utilisées). L'utilisation du noyau beta pourrait être une bonne idée lors de l'estimation d'une telle densité car elle évite le biais multiplicatif sur les limites. Mais cet estimateur souffre d'un autre problème lorsque n est assez faible (par exemple 30 ou 50) : la masse totale de la densité n'est pas 1.

Ainsi, afin d'améliorer l'estimation de ce type de densité, Buch-Larsen et al. (2005)[7], Gouriéroux et Montfort (2006)[16] ont suggéré d'utiliser des versions normalisées de l'estimateur à noyau beta. Sur la base de la notation de Gouriéroux et Montfort (2006)[16], nous reprenons les deux façons de normaliser cet estimateur, la MACRO normalisation et la MICRO normalisation.

En utilisant l'approche MACRO-beta, Gouriéroux et Montfort (2006)[16] ont proposé de transformer légèrement la densité dans l'équation (2.19) par :

$$\widehat{f}_{n,Y}^{(MACRO)} = \frac{\widehat{f}_{n,Y}}{\int_0^1 \widehat{f}_{n,Y}(t) dt}, \text{ pour tout } y \in [0,1]. \quad (2.24)$$

La MACRO transformation globale est considérée pour assurer que le poids total est égal à 1. Ensuite, la fonction de répartition F est estimée par :

$$\widehat{F}_{n,Y}(y) = \frac{\sum_{i=1}^n \int_0^y K_\beta(Y_i; b; t) dt}{\sum_{i=1}^n \int_0^1 K_\beta(Y_i; b; t) dt}, \quad (2.25)$$

où le noyau beta est soit de type 1 ou 2.

Gouriéroux et Montfort (2006)[16] ont également suggéré une approche MICRO-beta, qui propose de transformer la densité (2.19) comme suit :

$$\widehat{f}_{n,Y}^{(MICRO)}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k_\beta(Y_i; b; y)}{\int_0^1 k_\beta(Y_i; b; y) dt}, \text{ pour tout } y \in [0,1]. \quad (2.26)$$

La MICRO transformation locale est considérée pour assurer que le poids total est égal à 1. Puis, la fonction de répartition F est estimée par :

$$\widehat{F}_{n,Y}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\int_0^y K_\beta(Y_i; b; y) dt}{\int_0^1 K_\beta(Y_i; b; y) dt}. \quad (2.27)$$

Jusqu'à présent, nous avons donné six estimateurs basés sur le noyau beta : beta1 dans l'équation (2.22), MACRO-beta1 en (2.24), MICRO-beta1 en (2.26), avec le noyau beta

donnée en (2.20), beta2 en (2.22), MACRO-beta2 en (2.24), MICRO-beta2 (2.26) avec le noyau beta donnée dans l'équation (2.21). Mais ces estimateurs peuvent être utilisés que sur les distributions ayant un support $[0,1]$.

Pour pouvoir utiliser les noyaux beta, nous allons transformer les données initiales X_1, \dots, X_n afin d'obtenir un échantillon transformé Y_1, \dots, Y_n .

2.4.5 Observations transformées

Étant donné une variable aléatoire Y , si H est une fonction strictement croissante, le quantile de $H(Y)$ est égal à $H(Q(Y, p))$. Ainsi, une idée peut être de transformer les observations initiales X_1, \dots, X_n par un échantillon $Y_1, \dots, Y_n = H(X_1), \dots, H(X_n)$ prenant des valeurs dans $[0, 1]$, puis d'utiliser un estimateur à noyau beta. Si $H : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, on a :

$$Q_n(X, p) = H^{-1}(Q_n(Y, p)).$$

En théorie, toute transformation $H : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ devrait fonctionner. Mais Buch-Larsen et al. (2005)[7] ont proposé de choisir une transformation H de telle sorte que $H(X)$ soit proche de la distribution uniforme.

Nous avons besoin d'une distribution qui correspond à des pertes et qui peut être estimée facilement. Dans ce but, Buch-Larsen (2005)[7] a suggéré de mettre $Y_i = H(X_i)$ où H est une distribution de Champernowne [8], [9].

2.4.6 La distribution Champernowne généralisée pour modéliser les pertes

La distribution généralisée de Champernowne a été utilisée dans Buch-Larsen et al. (2005)[7] lors de la modélisation des réclamations d'assurance. La fonction de répartition pour tout $y \geq 0$ est :

$$F_{\alpha, M, c}(y) = \frac{(y + c)^\alpha - c^\alpha}{(y + c)^\alpha + (M + c)^\alpha - 2c^\alpha}, \quad (2.28)$$

où $\alpha > 0$, $c \geq 0$ et $M > 0$.

La densité associée est alors,

$$f_{\alpha, M, c}(y) = \frac{\alpha(y+c)^{\alpha-1}((M+c)^\alpha - c^\alpha)}{((y+c)^\alpha + (M+c)^\alpha - 2c^\alpha)^2}.$$

L'idée est de transformer l'échantillon original X_1, \dots, X_n par un échantillon Y_1, \dots, Y_n où $Y_i = H(X_i)$ pour une fonction H .

On remarque que $F_{\alpha, M, c}(M) = \frac{1}{2}$. On estime donc le paramètre M par la médiane empirique de l'échantillon X_1, \dots, X_n . Les estimateurs des deux autres paramètres α et c sont obtenus avec la méthode du maximum de vraisemblance.

$$(\hat{\alpha}, \hat{c}) \in \arg \max \{ \log \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_n; \alpha, \widehat{M}, c) \},$$

où

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_n; \alpha, \widehat{M}, c) &= n(\log(\alpha) + \log((M+c)^\alpha - c^\alpha)) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(Y_i + c) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \log((Y_i + c)^\alpha + (M+c)^\alpha - 2c^\alpha). \end{aligned}$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes méthodes d'estimation de quantiles existant dans la littérature. Un intérêt particulier est accordé aux méthodes non paramétriques.

Application numérique : résultats et discussion

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la performance des estimateurs du quantile basés sur des noyaux beta. Pour cela, des simulations seront réalisées sur cinq distributions (décrites en section 3.3) à queues fines, moyennes et épaisses. Pour chaque distribution, les performances de neuf estimateurs de quantiles (décrits en section 3.2) seront comparées suivant le critère de l'erreur quadratique moyenne (Mean Squared Error).

Pour chacun des estimateurs décrits ci-dessous, on considère :

- X_1, \dots, X_n l'échantillon simulé.
- n la taille de l'échantillon simulé.
- $p = 1 - \alpha$ l'ordre du quantile recherché, ou niveau de confiance.

La partie simulation consiste à implémenter toutes les fonctions précédentes en langage R, tenter de les appliquer et d'interpréter les résultats.

Dans les représentations graphiques de données statistiques, la boîte à moustaches est un moyen rapide de figurer le profil essentiel d'une série statistique quantitative. Elle résume seulement quelques caractéristiques de position du caractère étudié (minimum, maximum, médiane et quantiles).

3.2 Description des estimateurs étudiés

Les estimateurs étudiés sont les suivants :

1. Quantile empirique

Il s'agit du quantile suggéré par le logiciel R (fonction `quantile`).

2. Estimateur de quantile Epanechnikov (E)

Il est obtenu en inversant l'estimateur de la fonction de répartition, obtenu avec le noyau d'Epanechnikov.

$$Q_n(p) = \widehat{F}_n^{-1}(p),$$

où

$$\widehat{F}_n(x) = \int_{-\infty}^x \widehat{f}_n(t) dt,$$

$$\widehat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{t - X_i}{h} \right)^2 \right) 1_{|t - X_i| \leq h}.$$

3. Estimateur de Harrel-Davis (HD)

Il s'agit d'une somme pondérée des statistiques d'ordre.

Le principe de cet estimateur consiste à donner plus de poids aux statistiques d'ordres $X_{(i)}$ où i est proche de np .

Dans le cas de l'estimateur de Harrel-Davis, on utilise un noyau asymétrique beta.

$$\begin{aligned} Q_n(p) &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f_{(n+1)p, (n+1)q}(y) dy \right] X_{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma((n+1)p)\Gamma((n+1)q)} y^{(n+1)p-1} (1-y)^{(n+1)q-1} dy \right] X_{(i)}. \end{aligned}$$

Où

- $f_{(n+1)p, (n+1)q}$ est la densité de la distribution beta ($\alpha = (n+1)p$ et $\beta = (n+1)q$).
- les $X_{(i)}$ pour $i = 1, \dots, n$ sont les statistiques d'ordre.

4. Estimateur de Padgett (PDG)

Tout comme l'estimateur de Harrel-Davis, il s'agit d'une somme pondérée des statistiques d'ordre. Dans le cas de l'estimateur de Padgett, le noyau utilisé pour la pondération est un noyau gaussien donné par la formule (2.17).

5. Estimateur de Park (PRK)

L'estimateur de Park est très similaire à l'estimateur de Harrel-Davis car il s'agit encore d'une somme pondérée des statistiques d'ordre. Le noyau utilisé est un noyau asymétrique beta donné par la formule (2.18).

Remarque

Pour les quatre estimateurs restants il est nécessaire de transformer préalablement l'échantillon initial X_1, \dots, X_n afin d'obtenir un échantillon transformé $Y_1, \dots, Y_n = H(X_1), \dots, H(X_n)$ ayant une distribution proche de la distribution uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

6. Estimateur utilisant le noyau beta1 (B1)

La première étape consiste à estimer la densité de la distribution de l'échantillon transformé, à l'aide d'un estimateur à noyau de la densité. Le noyau utilisé est un noyau asymétrique beta donné par la formule (2.19).

Ensuite, l'estimateur de la fonction de répartition de l'échantillon Y_1, \dots, Y_n est décrite par la formule (2.22)

On obtient le quantile d'ordre p de la distribution de l'échantillon Y_1, \dots, Y_n en inversant l'estimateur de la fonction de répartition $\widehat{F}_{n,Y}$. Pour obtenir le quantile de l'échantillon initial X_1, \dots, X_n , il suffit finalement d'appliquer la transformation inverse H^{-1} au quantile obtenu précédemment.

$$\widehat{Q}(\{X_1, \dots, X_n\}, p) = H^{-1}(\widehat{Q}(\{H(X_1), \dots, H(X_n)\}, p)).$$

7. Estimateur utilisant le noyau modifié beta2 (B2)

Le principe est le même que pour l'estimateur utilisant le noyau beta1, cependant le noyau beta a été modifié afin de réduire le biais sur les bords. On utilise donc le noyau donné par la formule (2.21).

8. Estimateur MACRO-beta en utilisant les noyaux beta1 et beta2 (MACRO-beta1 et MACRO-beta2)

Dans cet estimateur on transforme les 2 densités précédentes (l'une estimée à l'aide du noyau beta1 et l'autre estimée à l'aide du noyau beta2) donné par la formule (2.23) :

3.3 Description des distributions utilisées pour la simulation

Les neuf estimateurs de quantiles décrits précédemment seront utilisés pour les cinq distributions suivantes :

1. Une distribution normale de paramètres $\mu = 5$ et $\sigma = 1$

$$f_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Une distribution de weibull de paramètres $\lambda = 1$ et $k = 1.5$

$$f_W(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

3. Une distribution lognormale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 0.5$

$$f_{LN}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

4. Une distribution 30% pareto et 70% lognormale de paramètres

- $\mu = 0$ et $\sigma = 0.5$ pour la distribution lognormale
- $\lambda = 1$ et $\rho = 1.5$ pour la distribution de pareto

$$f_{PLN}(x) = 0.70 \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} + 0.30 \frac{\rho\lambda^\rho}{(x+\lambda)^{\rho+1}}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

5. Une distribution 70% pareto et 30% lognormale de paramètres

- $\mu = 0$ et $\sigma = 0.5$ pour la distribution lognormale
- $\lambda = 1$ et $\rho = 1.5$ pour la distribution de pareto

$$f_{PLN}(x) = 0.30 \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\Pi}} \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} + 0.70 \frac{\rho\lambda^\rho}{(x+\lambda)^{\rho+1}}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

Etant donné que nous souhaitons estimer la Value-at-Risk, i.e. le montant maximal de pertes atteint avec un risque α , si l'on considère une distribution de pertes uniquement, cela revient à rechercher le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de cette distribution.

Soit L la variable aléatoire correspondant aux pertes subies. On cherche la VaR telle que :

$$\begin{aligned} P[L > VaR] < \alpha &\Leftrightarrow 1 - P[L \leq VaR] < \alpha, \\ &\Leftrightarrow P[L \leq VaR] > 1 - \alpha, \\ &\Leftrightarrow F_L(VaR) > 1 - \alpha, \\ &\Leftrightarrow VaR > F_L^{-1}(1 - \alpha). \end{aligned}$$

Nous nous intéresserons donc aux quantiles d'ordre proche de 1. En particulier dans ce chapitre, les résultats seront donnés pour $1 - \alpha = 0.95$, ce qui correspond à un risque de 5%. Pour chacune des distributions, les estimations sont réalisées sur $m = 2000$ échantillons de $n = 200$ données.

Pour comparer les différents estimateurs, le critère de l'erreur quadratique moyenne (MSE Mean Squared Error) est utilisé.

$$MSE = \mathbb{E}[(\widehat{Q}_n(p) - Q(p))^2] \approx \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\widehat{Q}_n^{(k)}(p) - Q(p))^2.$$

Où

- m est le nombre d'échantillon simulés.
- n est la taille des échantillons simulés.
- $\widehat{Q}_n^{(k)}(p)$ est le quantile estimé d'ordre p obtenu à partir du kème échantillon simulé de la distribution considérée.
- $Q(p)$ est le quantile théorique d'ordre p de la distribution considérée.

3.4 Etude des cinq distributions

Avant de commencer le travail de simulation proprement dit, il est nécessaire d'étudier les 5 distributions. Ce script R permet donc pour chaque distribution de :

- représenter graphiquement la fonction de densité,
- représenter graphiquement la fonction de répartition,

- calculer le quantile d'ordre $p = 0,95$ et le représenter sur le graphe de la fonction de répartition.

Remarque

Pour les lois usuelles le logiciel R donne directement le quantile d'ordre p recherché.

Cependant, pour le cas du "mélange Pareto/Log normale", on ne peut pas utiliser ces fonctions car le quantile d'une somme de distributions est différent de la somme des quantiles des distributions prises séparément. Soit X une variable aléatoire, et F_X sa fonction de répartition :

$$F_X = \mathbb{P}(X \leq x).$$

La fonction quantile est F_X^{-1} .

Si on considère 2 variables aléatoires X et Y alors :

$$F_X^{-1}(p) + F_Y^{-1}(p) \neq F_{X+Y}^{-1}(p).$$

Par conséquent, on utilise la méthode suivante pour approcher le quantile. On considère :

- $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un vecteur de valeurs ordonnées à partir duquel la fonction de répartition est calculée.
- fdr le vecteur contenant les valeurs de la fonction de répartition.

On recherche la plus petite valeur du vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que la valeur de fdr associée soit supérieure à 0.95, i.e. :

$$\inf_{1 \leq i \leq n} \{x_i | fdr(x_i) \geq 0.95\}.$$

3.5 Résultats obtenus

3.5.1 Etude des cinq distributions (allure des distributions et quantiles)

Les figures (3.2), (3.4), (3.6), (3.8), (3.10) et (3.12) représentent la fonction de répartition de chaque distribution dont le quantile d'ordre $p = 0.95$ est indiqué sur les graphes.

Remarque

Afin de distinguer les différentes catégories de queues des distributions précédentes, on a rajouté la présentation de la loi exponentielle comme distribution de référence.

◆ Distribution exponentielle

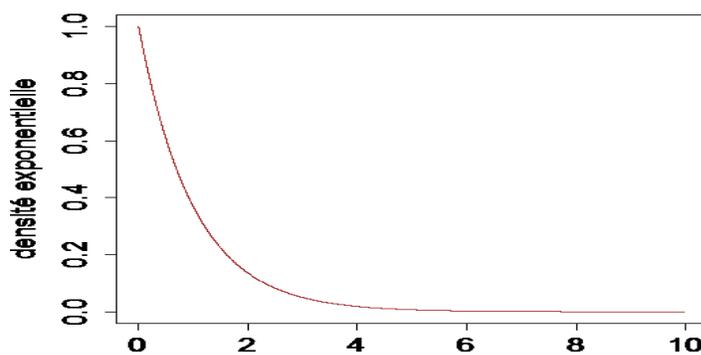


FIG. 3.1 – La fonction de densité de la distribution exponentielle

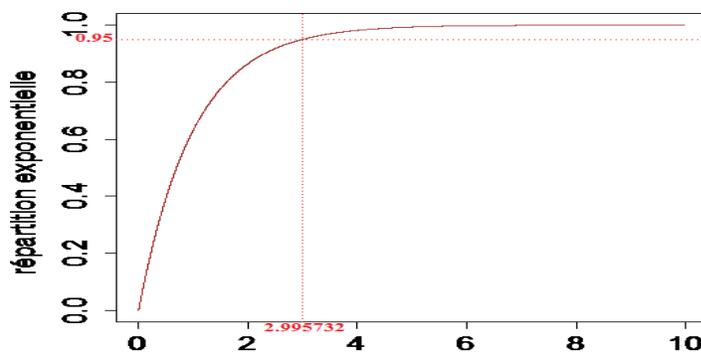


FIG. 3.2 – La fonction de répartition de la distribution exponentielle

◆ Distribution normale

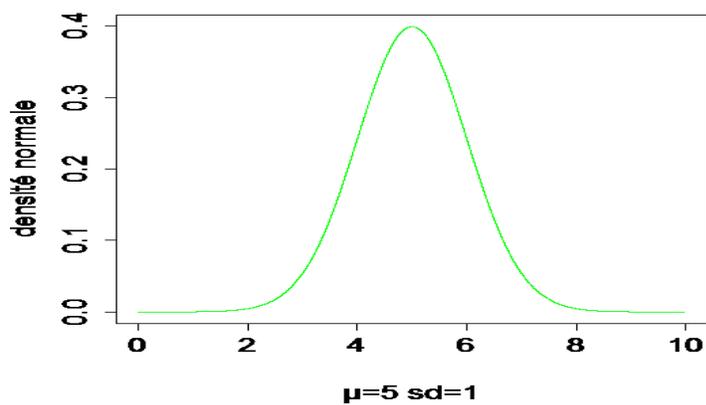


FIG. 3.3 – La fonction de densité de la distribution normale

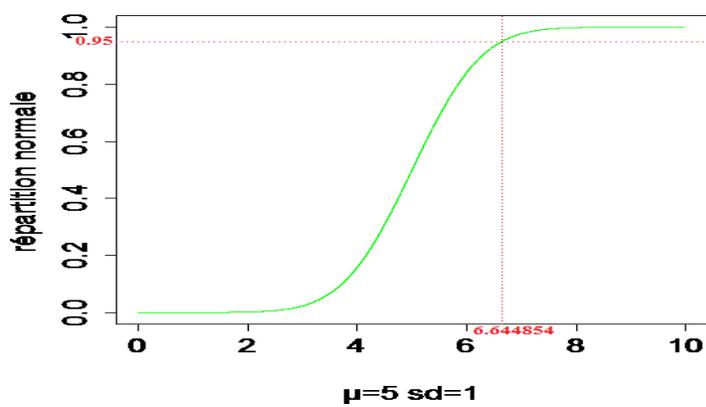


FIG. 3.4 – La fonction de répartition de la distribution normale

◆ Distribution de weibull

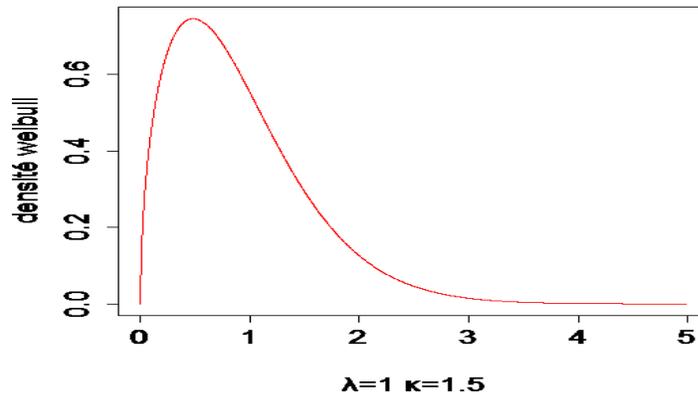


FIG. 3.5 – La fonction de densité de la distribution weibull

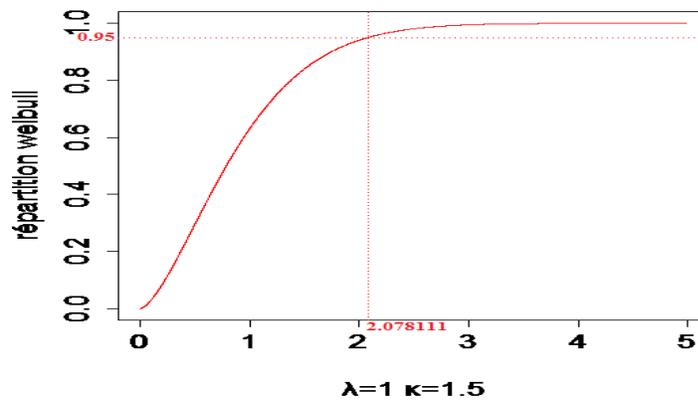


FIG. 3.6 – La fonction de répartition de la distribution weibull

◆ Distribution lognormale

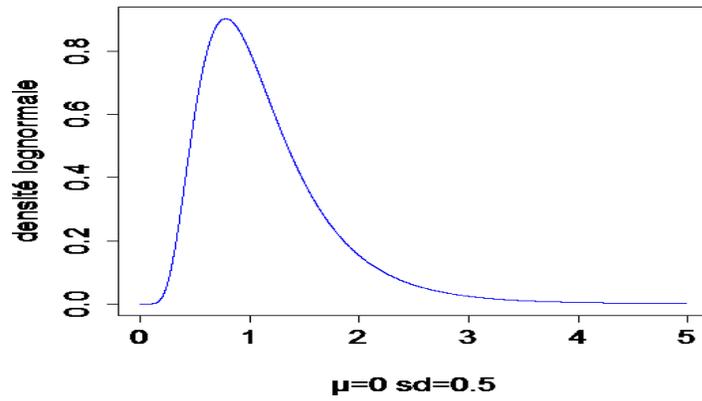


FIG. 3.7 – La fonction de densité de la distribution lognormale

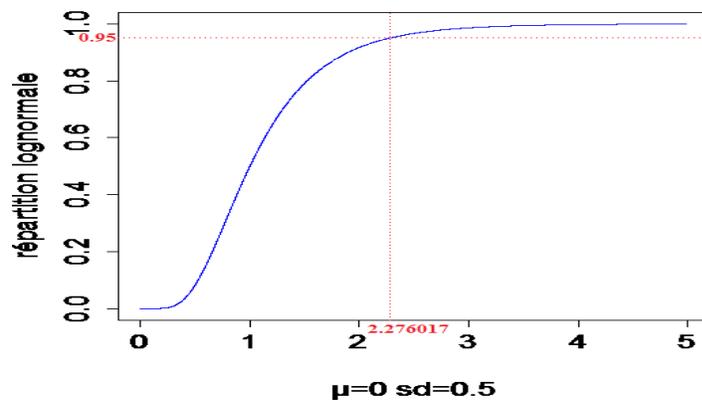


FIG. 3.8 – La fonction de répartition de la distribution lognormale

◆ Distribution 30% pareto 70% lognormale

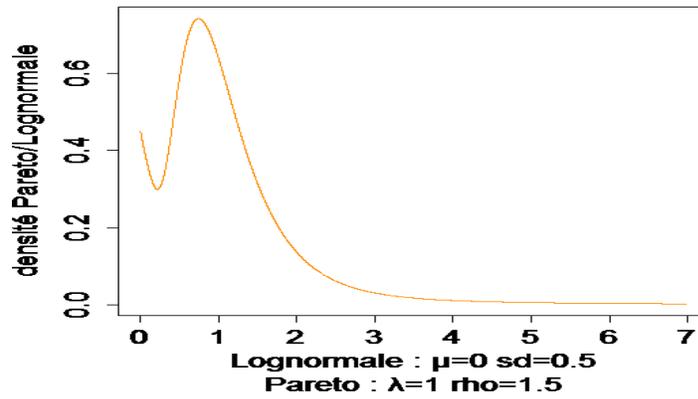


FIG. 3.9 – La fonction de densité de la distribution 30% pareto 70% lognormale

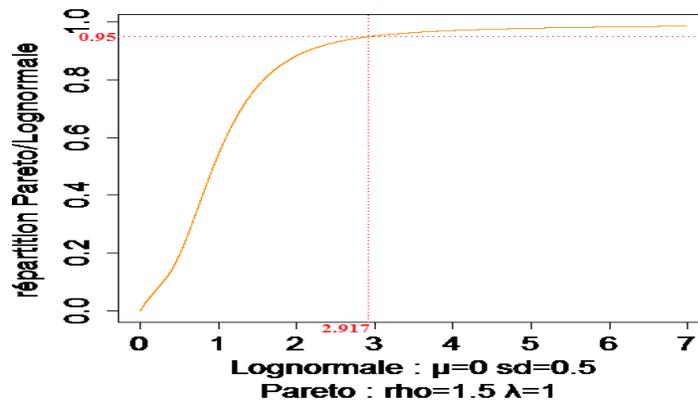


FIG. 3.10 – La fonction de répartition de la distribution 30% pareto 70% lognormale

◆ Distribution 70% pareto 30% lognormale

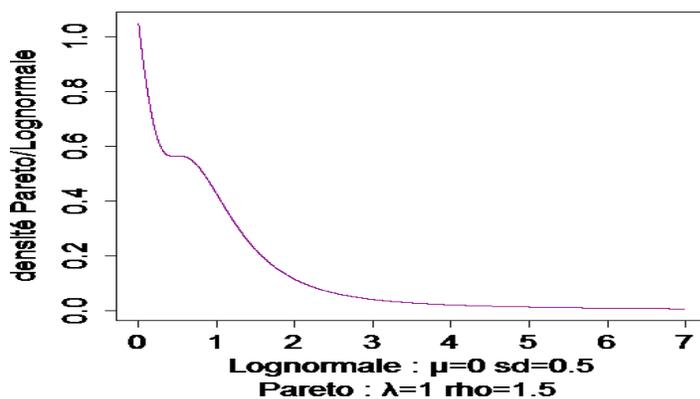


FIG. 3.11 – La fonction de densité de la distribution 70% pareto 30% lognormale

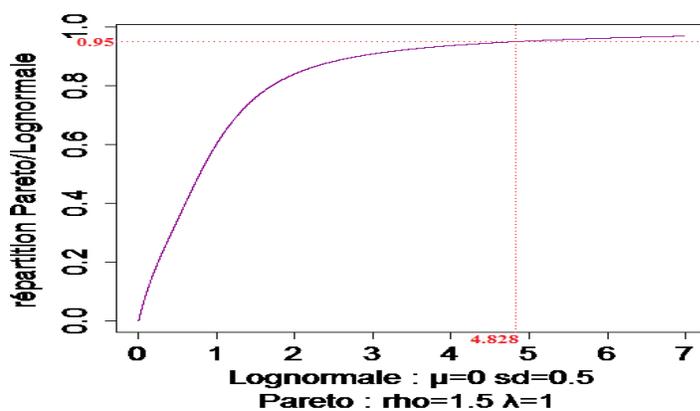


FIG. 3.12 – La fonction de répartition de la distribution 70% pareto 30% log normale

◆ Fonctions de densité des 5 distributions

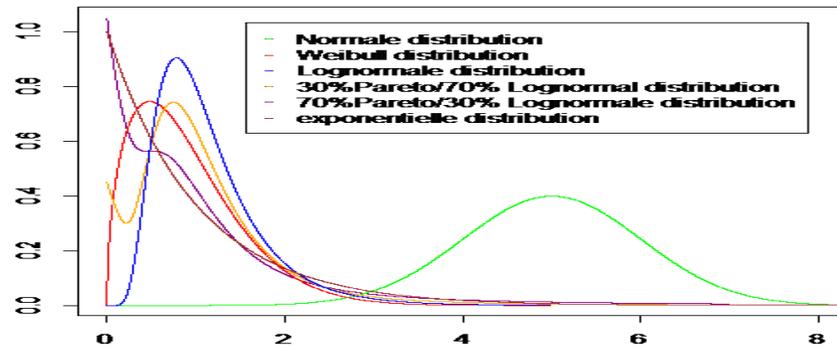


FIG. 3.13 – Les fonctions de densité des 5 distributions

◆ Fonctions de répartition des 5 distributions

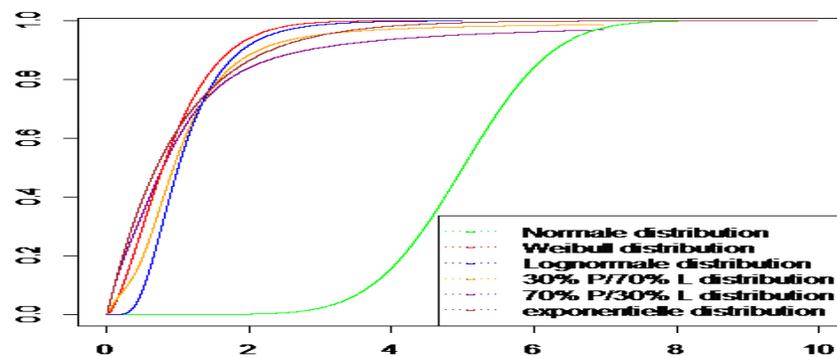


FIG. 3.14 – Les fonctions de répartition des 5 distributions

On peut distinguer trois catégories de distributions :

- Les distributions à queue fine : distribution normale et de weibull.
- Les distributions à queue moyenne : distribution lognormale.
- Les distributions à queue épaisse : distribution pareto/lognormale.

Par ailleurs, les distributions de weibull, lognormale et pareto/lognormale sont asymétriques, tandis que la distribution normale est symétrique.

3.5.2 Comparaison des différents estimateurs de quantiles (boîtes à moustaches)

La première étape du script R consiste à déclarer tous les vecteurs nécessaires au stockage des données. On réalise une simulation sur 2000 échantillons, les quantiles estimés des 2000 échantillons pour chaque type d'estimateur sont stockés dans des vecteurs de dimension (1,2000).

- Les quantiles Q_1 à Q_5 sont estimés directement à partir de l'échantillon original X_1, \dots, X_n .

- Q_1 représente le vecteur des quantiles historiques (fonction quantile de R).
- Q_2 représente le vecteur des quantiles estimés à partir de l'estimateur à noyau de la densité avec le noyau d'Epanechnikov.
- Q_3 représente le vecteur des quantiles estimés avec l'estimateur de Harrel-Davis.
- Q_4 représente le vecteur des quantiles estimés avec l'estimateur de Padgett.
- Q_5 représente le vecteur des quantiles estimés avec l'estimateur de Park.

- Les quantiles Q_6 à Q_9 sont estimés à partir de l'échantillon transformé Y_1, \dots, Y_n , où $Y_i = F_{\hat{\alpha}, \hat{M}, \hat{C}}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$ et $F_{\hat{\alpha}, \hat{M}, \hat{C}}$ est la fonction de répartition de la distribution de Champernowne.

- Q_6 représente le vecteur des quantiles estimés à partir de l'estimateur à noyau de la densité avec le noyau beta1.
- Q_7 représente le vecteur des quantiles estimés à partir de l'estimateur à noyau MACRO-beta1 de la densité.
- Q_8 représente le vecteur des quantiles estimés à partir de l'estimateur à noyau de la densité avec le noyau beta2.
- Q_9 représente le vecteur des quantiles estimés à partir de l'estimateur à noyau MACRO-beta2 de la densité.

◆ Distribution normale

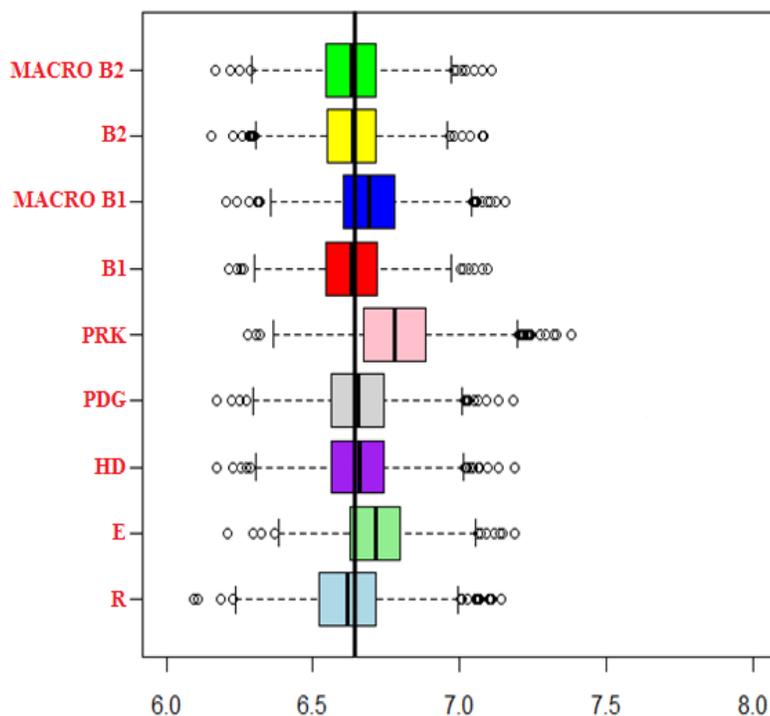


FIG. 3.15 – Des boîtes à moustaches des différents estimateurs de la distribution normale

Sur ce graphique la ligne verticale représente le quantile théorique de la distribution étudiée pour $p = 0.95$. La distribution normale étudiée est de moyenne 5 et d'écart-type 1. Son quantile théorique d'ordre 0.95 est égal à 6.644854. La comparaison des boîtes à moustaches des différents estimateurs montre que les valeurs prises par ces estimateurs s'étalent sur des intervalles similaires (les valeurs des estimateurs des quantiles varient approximativement entre 6 et 7.3) et sont centrées sur le quantile théorique, excepté l'estimateur de Park qui est légèrement excentré. Sa médiane est proche de 6.8, alors que celles des autres estimateurs fluctuent autour de 6.65, valeur très proche de 6.644854. A priori les estimateurs B1, B2 et MACRO B2 semblent les plus performants.

Estimateur	Rapport MSE
E/R	0.9657184
HD/R	0.8751344
PDG/R	0.8640298
PRK/R	2.067519
B1/R	0.752854
MACRO B1/R	0.8831294
B2/R	0.7008016
MACRO B2/R	0.7539837
Meilleur	B2/R

TAB. 3.1 – Les rapports de MSE de la distribution normale

Ce tableau de résultats présente des rapports de MSE. La MSE de chaque estimateur est divisée par la MSE du quantile empirique calculé avec la fonction quantile sous R. Le fait de regarder le rapport et non la MSE va permettre d'homogénéiser les résultats obtenus pour les cinq distributions. En effet, si on considère uniquement la MSE individuelle des estimateurs pour chaque distribution, l'ordre de grandeur va différer d'une distribution à l'autre et il sera difficile de faire des comparaisons. Le critère de la MSE permet d'affirmer que l'estimateur utilisant le noyau beta2 est le plus performant, car le rapport de MSE obtenu égal à 0.7008016 est le plus proche de 0. Les autres estimateurs, excepté l'estimateur de Park, ont des performances très acceptables avec un rapport de MSE compris entre 0.752854 et 0.9657184. On remarque par ailleurs que l'estimateur de Park est un peu moins performant avec un rapport de 2.067519. La MSE confirme donc ce que l'observation des boîtes à moustache avait mis en évidence.

◆ Distribution lognormale

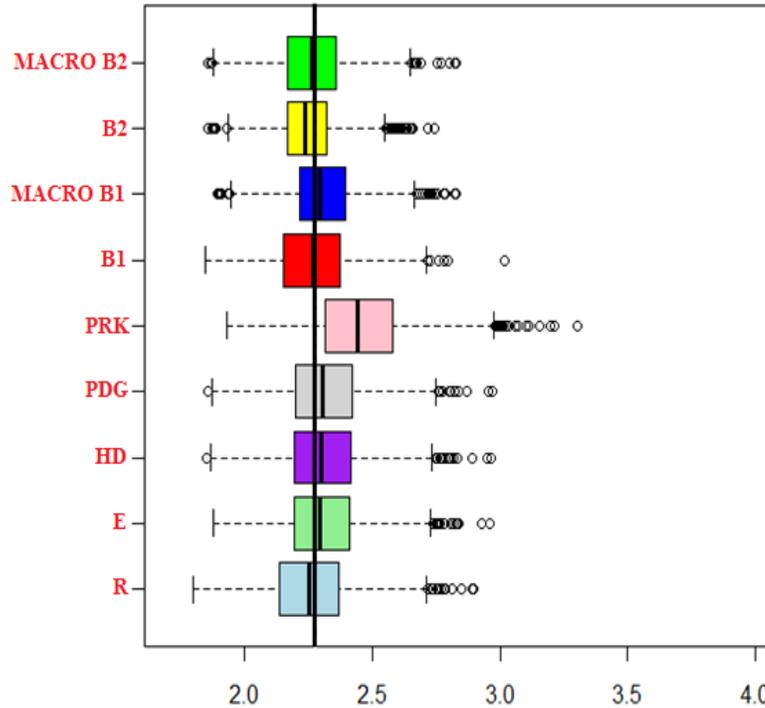


FIG. 3.16 – Des boîtes à moustaches des différents estimateurs de la distribution lognormale

La distribution lognormale étudiée est de moyenne 0 et d'écart-type 0.5. Son quantile théorique d'ordre 0.95 est égal à 2.276017. La comparaison des boîtes à moustaches des différents estimateurs montre que les valeurs prises par ces estimateurs s'étalent sur des intervalles similaires (les valeurs des estimateurs des quantiles varient approximativement entre 1.7 et 3) et sont centrés sur le quantile théorique, excepté l'estimateur de Park qui est légèrement excentré. Sa médiane est proche de 2.5, alors que celles des autres estimateurs fluctuent autour de 2.3, valeur très proche de 2.276017. A priori les estimateurs B2 et MACRO B2 semblent les plus performants.

Estimateur	Rapport MSE
E/R	0.9288698
HD/R	0.9911004
PDG/R	0.995089
PRK/R	2.55509
B1/R	0.911929
MACRO B1/R	0.7464002
B2/R	0.5906554
MACRO B2/R	0.7471264
Meilleur	B2/R

TAB. 3.2 – Les rapports de MSE de la distribution lognormale

Le critère de la MSE permet d'affirmer que l'estimateur utilisant le noyau beta2 est le plus performant, car le rapport de MSE obtenu égal à 0.5906554 est le plus proche de 0. Les autres estimateurs, excepté l'estimateur de Park, ont des performances très acceptables avec un rapport de MSE compris entre 0.7464002 et 0.9911004. On remarque par ailleurs que l'estimateur de Park est un peu moins performant avec un rapport de MSE de 2.55509. La MSE confirme donc ce que l'observation des boîtes à moustache avait mis en évidence.

◆ Distribution de weibull

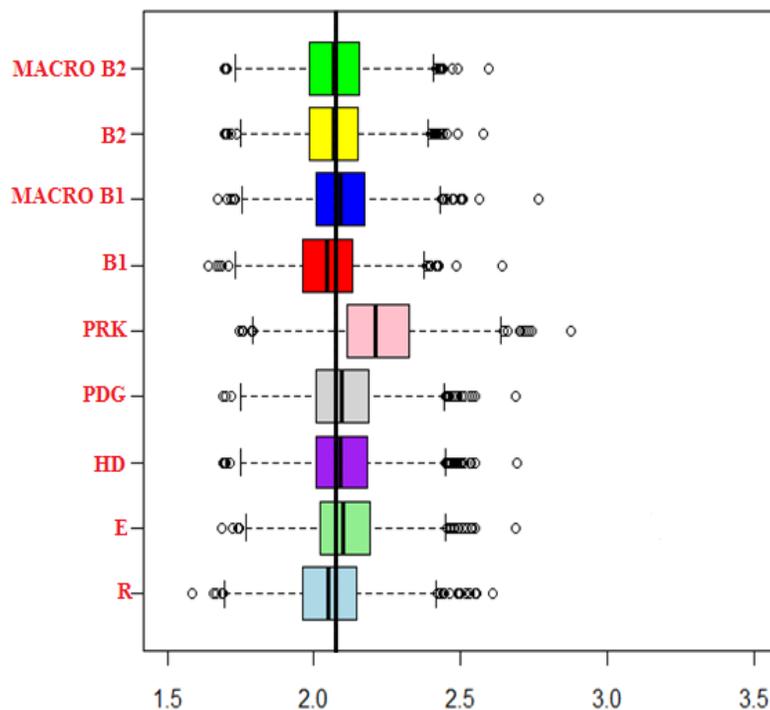


FIG. 3.17 – Des boîtes à moustaches des différents estimateurs de la distribution weibull

La distribution de Weibull étudiée est de paramètres $\lambda = 1$ et $k = 1.5$. Son quantile théorique d'ordre 0.95 est égal à 2.078111. La comparaison des boîtes à moustaches des différents estimateurs montre que les valeurs prises par ces estimateurs s'étalent sur des intervalles similaires (les valeurs des estimateurs des quantiles varient approximativement entre 1.5 et 3) et sont centrées sur le quantile théorique, excepté l'estimateur de Park qui est plus excentré que les autres. Sa médiane est proche de 2.25, alors que celles des autres estimateurs fluctuent autour de 2.8, en restant très proche du quantile théorique égal à 2.078111. A priori les estimateurs B2 et MACRO B2 semblent les plus performants, car leur médiane coïncide quasiment parfaitement avec la valeur théorique du quantile.

Estimateur	Rapport MSE
E/R	0.8860268
HD/R	0.9150579
PDG/R	0.909908
PRK/R	2.268103
B1/R	0.8177963
MACRO B1/R	0.8372592
B2/R	0.7371448
MACRO B2/R	0.7823687
Meilleur	B2/R

TAB. 3.3 – Les rapports de MSE de la distribution weibull

Le critère de la MSE permet d'affirmer que l'estimateur utilisant le noyau beta2 est le plus performant, car le rapport de MSE obtenu égal à 0.7371448 est le plus proche de 0. Les autres estimateurs, excepté l'estimateur de Park, ont des performances très acceptables avec un rapport de MSE compris entre 0.7823687 et 0.9150579. On remarque par ailleurs que l'estimateur de Park est un peu moins performant avec un rapport de MSE de 2.268103. La MSE confirme donc ce que l'observation des boîtes à moustache avait mis en évidence.

◆ Distribution 30% pareto 70% lognormale

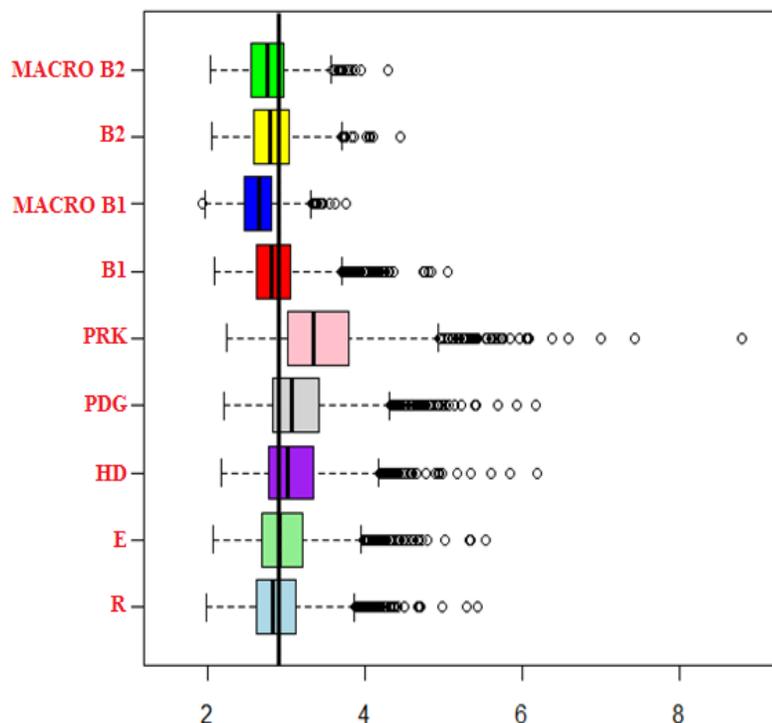


FIG. 3.18 – Des boîtes à moustaches des différents estimateurs de la distribution 30% pareto 70% lognormale

La distribution de pareto/lognormale étudiée est de paramètres $\lambda = 1$ et $\rho = 1,5$ pour la distribution de pareto (30%) et $\mu = 0$ et $\sigma = 0,5$ pour la distribution lognormale (70%). Son quantile théorique d'ordre 0.95 est égal à 2.917. La comparaison des boîtes à moustaches des différents estimateurs montre que les valeurs prises par ces estimateurs s'étalent sur des intervalles similaires (les valeurs des estimateurs des quantiles varient approximativement entre 2 et 6) et sont centrées sur le quantile théorique, excepté l'estimateur de Park qui est plus excentré que les autres et dont l'étendue est plus importante (son maximum est proche de 9). A priori les estimateurs B2 et MACRO B2 semblent les plus performants : ils sont concentrés sur un intervalle plus restreint de valeurs et leur médiane est très proche de la valeur théorique du quantile.

Estimateur	Rapport MSE
E/R	3.792388
HD/R	1.435686
PDG/R	2.766881
PRK/R	4.126024
B1/R	0.7621095
MACRO B1/R	0.7570776
B2/R	0.6684107
MACRO B2/R	0.6098167
Meilleur	MACRO B2/R

TAB. 3.4 – Les rapports de MSE de la distribution 30% pareto 70% lognormale

Le critère de la MSE permet d'affirmer que l'estimateur MACRO-beta utilisant le noyau beta2 est le plus performant, car le rapport de MSE obtenu égal à 0.6098167 est le plus proche de 0. Les autres estimateurs utilisant les noyaux beta1 et beta2 obtiennent également de bons résultats avec des rapports de MSE compris entre 0.6684107 et 0.7621095. Les estimateurs d'Epanechnikov, Harrel-Davis, Padgett et Park obtiennent quant à eux des résultats plutôt médiocres avec un rapport de MSE allant de 1.435686 pour Harrel-Davis à 4.126024 pour Park. Le critère de la MSE confirme donc ce que l'observation des boîtes à moustache avait mis en évidence.

◆ Distribution 70% pareto 30% lognormale

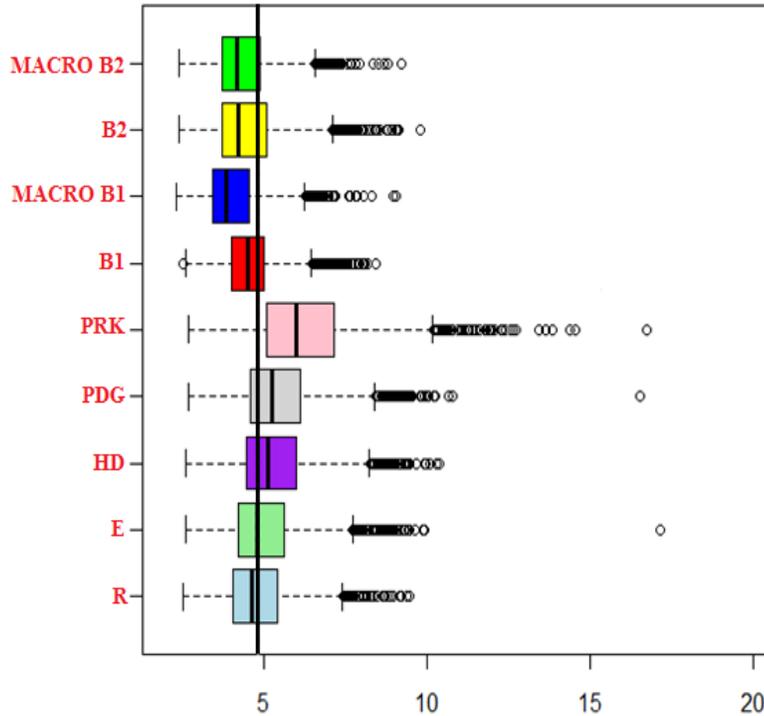


FIG. 3.19 – Des boîtes à moustaches des différents estimateurs de la distribution 70% pareto 30% lognormale

La distribution de pareto/lognormale étudiée est de paramètres $\lambda = 1$ et $\rho = 1,5$ pour la distribution de pareto (70%) et $\mu = 0$ et $\sigma = 0,5$ pour la distribution lognormale (30%). Son quantile théorique d'ordre 0.95 est égal à 4.828. La comparaison des boîtes à moustaches des différents estimateurs montre que les valeurs prises par ces estimateurs s'étalent sur des intervalles similaires (les valeurs des estimateurs des quantiles varient approximativement entre 2 et 10) et sont centrées sur le quantile théorique, excepté l'estimateur de Park qui est plus excentré que les autres et dont l'étendue est plus importante (son maximum est proche de 20). L'estimateur B1 semble à première vue le plus performant : ses valeurs sont concentrées sur un intervalle plus restreint de valeurs et sa médiane est très proche de la valeur théorique du quantile.

Estimateur	Rapport MSE
E/R	1.214980
HD/R	1.443129
PDG/R	1.742604
PRK/R	4.280306
B1/R	0.6804064
MACRO B1/R	1.313138
B2/R	1.412731
MACRO B2/R	1.031424
Meilleur	B1/R

TAB. 3.5 – Les rapports de MSE de la distribution 30% pareto 70% lognormale

Le critère de la MSE permet d'affirmer que l'estimateur utilisant le noyau beta1 est le plus performant, car le rapport de MSE obtenu égal à 0.6804064 est le plus proche de 0. L'estimateur le moins performant est encore l'estimateur de Park avec un rapport de MSE égal à 4.280306. Les résultats des autres estimateurs sont comparables et fluctuent entre 1 et 2.

3.6 Conclusion

- Pour synthétiser, rappelons que :
 - La distribution normale étudiée est de moyenne 5 et d'écart-type 1, a priori les estimateurs B1, B2 et MACRO B2 semblent les plus performants.
 - La distribution lognormale étudiée est de moyenne 0 et d'écart-type 0.5, a priori les estimateurs B2 et MACRO B2 semblent les plus performants.
 - La distribution weibull étudiée est de paramètres $\lambda = 1$ et $k = 1.5$, a priori les estimateurs B2 et MACRO B2 semblent les plus performants.
 - La distribution 30% preto/70%lognormale étudiée est de paramètres $\lambda = 1$ et $\rho = 1.5$ pour la distribution de pareto et $\mu = 0$ et $\sigma = 0.5$ pour la ditribution lognormale, a priori les estimateurs B2 et MACRO B2 semblent les plus performants.
 - La distribution 70%preto/30%lognormale étudiée est de paramètres $\lambda = 1$ et $\rho = 1.5$ pour la distribution de pareto et $\mu = 0$ et $\sigma = 0.5$ pour la ditribution lognormale,

L'estimateur B1 semble à première vue le plus performant.

- Le tableau(3.6) suivant résume les rapports de MSE des cinq distributions :

Estimateur	normale	lognormale	weibull	30% pareto 70% lognormale	70% pareto 30% lognormale
E/R	0.9657184	0.9288698	0.8860268	3.792388	1.214980
HD/R	0.8751344	0.9911004	0.9150579	1.435686	1.443129
PDG/R	0.8640298	0.995089	0.909908	2.766881	1.742604
PRK/R	2.067519	2.55509	2.268103	4.126024	4.280306
B1/R	0.752854	0.911929	0.8177963	0.7621095	0.6804064
MACRO B1/R	0.8831294	0.7464002	0.8372592	0.7570776	1.313138
B2/R	0.7008016	0.5906554	0.7371448	0.6684107	1.412731
MACRO B2/R	0.7539837	0.7471264	0.7823687	0.6098167	1.031424
Meilleur	B2/R	B2/R	B2/R	MACRO B2/R	B1/R

TAB. 3.6 – Les rapports de MSE des 5 distributions

On peut voir que les estimateurs utilisant les noyaux beta1 et beta2 sont les plus performants. Ils donnent de bons résultats à la fois pour les distributions à queues fines, moyennes ou épaisses. Dans tous les cas de figure, l'estimateur de Park est le moins performant. Le rapport de MSE pour cet estimateur varie entre 2.067519 et 4.280306. Par ailleurs, on peut remarquer que les estimateurs de Harrel-Davis, Epanechnikov et Padgett donnent globalement de meilleurs résultats sur les distributions à queues fines ou moyennes. Enfin, on peut également remarquer que l'intervalle de variation des valeurs des estimateurs est beaucoup plus large pour les 2 distributions à queues épaisses, à savoir le mélange 70% pareto/30% lognormale et le mélange 30% pareto/70% lognormale.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons donné, dans un premier temps, quelques rappels sur la statistique d'ordre et les quantiles. Nous avons effectué ensuite une synthèse sur les méthodes d'estimation de quantiles.

Enfin, nous avons mis en pratique la méthode non paramétrique pour l'étude de l'estimation de quantiles.

Dans la première partie, nous avons étudié les cinq distributions en ayant représenté la fonction de répartition dont le quantile d'ordre $p = 0.95$ est indiqué sur les graphes. On a distingué trois catégories de distributions : à queue fine (normale et weibull), à queue moyenne (lognormale) et à queue épaisse (pareto/lognormale).

Neuf différents estimateurs de quantiles sont utilisés pour les cinq distributions. On a utilisé les boîtes à moustaches des différents estimateurs pour la comparaison, on a déduit que les estimateurs B1 et B2 sont les plus performants.

L'étude que nous avons réalisé dans la première étape est nécessaire à l'étude d'estimation de la VaR, i.e. le montant maximal de perte. En particulier, dans cette étape les résultats ont été donnés pour $1 - \alpha = 0.95$, ce qui correspond à un risque de 5%.

Pour comparer les différents estimateurs, le critère d'erreur quadratique moyenne (MSE) est utilisé. Grâce à la comparaison on a conclu que les estimateurs utilisant les noyaux beta1 et beta2 sont les plus performants. Ils donnent de bons résultats à la fois pour les distri-

butions à queues fines, moyennes ou épaisses. L'estimateur de Park est le moins performant.

Les points abordés dans ce mémoire nous ouvrent la voie à d'autres pistes de recherche intéressantes qui méritent d'être considérées :

- Il serait intéressant d'adapter d'autres estimateurs existants de l'indice de queue.
- Proposer de nouveaux estimateurs à noyau (ou double noyau) de l'indice de queue et des quantiles dans le cadre fonctionnel.

Bibliographie

- [1] A.Azzalini (1981), *A note on the estimation of a distribution function and quantiles by a kernel method*. Biometrika 68, pages 326-328.
- [2] A.Balkema, L.Haan (1974). *Residual Life Time at Great Age*. Annals of Probability 2, pages 792-804.
- [3] Barry C.Arnold, N.Balakrishnana, H.N.Nadaraja (1992). *A First Course in Order Statistics*. Siam Society for Industriel and Applied Mathematic .
- [4] Y.Berkoun (2007). *Statistique inférentielle*. Cours de 1ère année école doctorale de statistique. U.M.M.T.O, Tizi Ouzou.
- [5] J.Beirlant, Y.Geogebur, J.Segers, J.Teugel (2006). *Statistics of Extremes*. Wiley Interscience, New York.
- [6] T.Bouezmarni, O.Scaillet (2005). *Consistency of asymmetric kernel density estimators and smoothed histograms with application to income data*. Econom.Theory 21, pages 390-412.
- [7] T.Buch-Larsen, J.P.Nielsen, M.Guillen, C.Bolance(2005). *Kernel density estimation for heavy-tailed distribution using the Champernowne*. Transformation. Statistics 6, pages 503–518.
- [8] D.G.Champernowne (1936). *The Oxford meeting, September 25-29, b Brown P*. Econometrica 5, pages 361-383.
- [9] D.G.Champernowne (1952). *The graduation of income distributions*. Econometrica 20, pages 591-615.

-
- [10] A.Charpentier, J.D.Fermanian, O.Scaillet (2006). *The estimation of copulas : theory and practice*. In : Copula Methods in Derivatives and Risk Management : From Credit Risk to Market Risk. Risk Book .
- [11] S.X.Chen (1999). *A beta kernel estimator for density functions*. Comput. Stat. Data Anal 31, pages 131-145.
- [12] S.X.Chen, C.Y.Tang (2005). *Nonparametric inference of values at risk for dependent financial returns*. J. Financ. Econom. 3, pages 227-255.
- [13] J.F.Delmas, B.Jourdain (2006). *Modèles aléatoires : applications aux sciences de l'ingénieur et du vvant*. Springer, pages 302-341.
- [14] L.Devroye, L.Györfi (1985). *Nonparametric desity Estimation : The L1 Vew*. Wiley. New. York.
- [15] G.S.Embrechts, K.Kluppelberg, T.Micosch (1997). *Modeling Ectremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin .
- [16] C.Gouriéroux, J.P.Laurent, O.Scaillet (2000). *Sensitivity analysis of Values at Risk*. J. Empir. Finance 7, pages 225-245.
- [17] F.E.Harrell, C.E.Davis(1982). *A new distribution-free quantile estimators*. Biometrika 69, pages 635-640.
- [18] A.J.McNeil, R.Frey, P.Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools*. University Press, Princeton.
- [19] E.A.Nadaraya (1964). *On estimating regression*. Theory Probab. Appl.10, pages 186-190
- [20] W.J.Padgett (1986). *A kernel-type estimator of a quantile function from right censored data*. J. Am. Stat. Assoc 81, pages 215-222 .
- [21] C.Park (2006). *Smooth nonparametric estimation of a quantile function under right censoring using beta kernels* . Technical Report (TR 2006-01-CP), Department of Mathematical Sciences, Clemson University.
- [22] E.Parzen (1979). *Nonparametric statistical data modelling*. J. Am. Stat. Assoc 74, pages 105-131.
- [23] S.S.Ralescu, S.Sun (1993). *Necessary and sufficient conditions for the asymptotic normality of perturbed sample quantiles* . J. Stat. Plan. Inference 35, pages 55-64.

-
- [24] M.Rosenblatt (1956). *Remarks on some nonparametric estimates of a density function..* Ann. Math. Stat. 27, page 832-837
- [25] M.Rudemo (1982). *Empirical choice of histograms and kernel density estimators..* Scandinavian Journal of Statistics. 9, pages 65-78.
- [26] D.W.Scott, G.R.Terrell. (1987). *Biased and unbiased cross-validation in density estimation..* Journal of the American Statistical Association. 82, pages 1131-1146.
- [27] D.W.Scott, R.A.Tapia and J.R.Thomson. (1977). *Kernel density estimation revisited.* Nonlinear Analysis, Theory , Methods and Applications. 1 pages 339-372,
- [28] S.J.Sheather, J.S.Marron (1990). *Kernel quantile estimators.* J. Am. Stat. Assoc 85, pages 410-433.
- [29] B.W.Silverman (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis* . Chapman et Hall, London.
- [30] C. Taylor (1989). *Bootstrap choice of smoothing parameter in kernel density estimation* . Biometrika. 76 pages 705-712.
- [31] N.Temame (2011). *Estimation du quantile extrême et de la VaR.* Mémoire magistère. Probabilités Statistique. Université de Mouloud Maameri, TiziOuzou.
- [32] M.Wand, M.C.Jones (1995). *Kernel Smoothing.* Chapman et Hall, London.

Résumé

Dans ce mémoire, nous donnons, dans un premier temps, quelques rappels et définitions sur la statistique d'ordre, les quantiles et la VaR. Dans un second temps, nous effectuons une synthèse sur les différentes méthodes d'estimation de quantiles utilisées dans la littérature (la méthode paramétrique, la méthode semi-paramétrique et la méthode non paramétrique). L'approche non paramétrique d'estimation de quantiles est étudiée plus en détails et deux classes d'estimateurs sont distinguées. La première classe d'estimateurs, appelée classe "explicite", est basée sur la statistique d'ordre. Cette classe contient l'estimateur empirique et les estimateurs de Padgett, Harrell-Davis et Park. La seconde classe d'estimateurs, appelée classe "non-explicite", est basée sur l'estimateur à noyau beta. Une étude de simulation est donnée à la fin de ce mémoire pour illustrer les différents aspects théoriques présentés.

Mots-clés : Quantile, Statistique d'ordre, Noyau asymétrique beta, Méthode du noyau transformée, Distribution Champernowne.

Abstract

In this work, we first recall some definitions on order statistics, quantiles and VaR. Then we provide a review of different estimation methods of quantiles existing in the literature (the parametric method, the semi-parametric method and the nonparametric method). Nonparametric approach of quantile estimation is studied in detail and two classes of estimators are distinguished. The first class of estimators, called "explicit class" is based on the order statistics. This class includes the empirical estimators and Padgett, Harrell-Davis and Park estimators. The second class of estimators, called "non-explicit class", is based on the kernel estimator beta. A simulation study is given at the end of this document to illustrate the different presented theoretical aspects .

Key-words : Quantile, Order statistic, Asymmetric beta kernel, Transformed kernel method, Champernowne distribution.