

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université A. Mira de Bejaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématique



MEMOIRE DE FIN DE CYCLE

*En vue de l'obtention d'un Master en
Mathématiques*

Option : Statistique et Analyse Décisionnelle

Thème

Sur les mesures de risque

Présenté par:

M^{me} BELKHIAR Nadjat

M^{me} BRAHMI Chahrazad

Soutenu devant le jury composé de :

Président	M^{me} S.Hocine	M.A.A	U.A/Mira, Bejaïa
Rapporteur	M^{me} A. Bareche	M.C.A	U.A/Mira, Bejaïa
Examinatrice	M^r A. Touazi	Doctorant	U.A/Mira, Bejaïa

Promotion 2015/2016

Remerciements

Merci à Dieu de nous avoir donné la force et le courage de mener à bout ce travail.

Nous ne remercierons jamais assez nos parents Dieu qu'il les garde-pour tout ce qu'ils nous ont fait pour pouvoir travailler dans des bonnes conditions possibles ainsi que tous les membres de nos famille.

Nous remercions vivement Madame Bareche A, pour le grand plaisir que nous avons eu à travailler avec elle, pour nous avoir proposé ce sujet, dirigé ce travail. Sans ses conseils, sa disponibilité et ses nombreuses suggestions, ce travail n'aurait jamais abouti. Á travers les nombreuses discussions toujours enrichissantes que nous avons eu avec elle, nous avons pu aussi apprécier ses qualités scientifiques et humaines.

Nous remercions les membres de jury : S.Hocine, A. Touazi de nous avoir fait l'honneur de participer au jury de notre mémoire.

Nous tenons à remercier tous les membres de département Monsieur : M S .Boukhelifa, enseignants, étudiants, ainsi que nos camarades et amis de près comme de loin.

Dedicace

Je dédie ce modeste travail : Aux deux êtres humains qui sont les plus chères dans ma vie

À

Ma lumière, celle qui m'a donnée la vie, l'amour, la tendresse et le courage, toi chère
Maman Taous

Celui qui m'a soutenu et guidé afin que je puisse arriver à cette étape de ma vie, toi chère
père Bouzid

Mes beaux-parents et leurs fils Yacine, Manel, Zaki et Younes

Ma sœur Imane

Mes frères : Imad, Yasser, Dhia-Eddine, Loukmane

Tous mes cousins et cousines

Mes amis : Chahrazad, Fadila, Nassima, Nassima, Feyrouz, Zoubida, Sabrina, Chiraz

et

Toute la promotion SAD

À tous ceux qui sont chers je dédie ce mémoire.

Et toute personne qui m'aime

À la fin j'aimerais bien remercier l'homme qu'était toujours derrière moi, celui qui m'a
donné tous, et celui que j'adore plus que moi-même mon cher mari Abdelhak et ma petite
princesse Safa

NADJAT

Dedicace

Je dédie ce modeste travail : Aux deux êtres humains qui sont les plus chères dans ma vie

À

Ma lumière, celle qui m'a donnée la vie, l'amour, la tendresse et le courage, toi chère
Maman Zohra

Celui qui m'a soutenu et guidé afin que je puisse arriver à cette étape de ma vie, toi chère
père Hachemi

L'occasion m'est donnée de remercier mon mari qu'était toujours derrière moi, c'est celui
Que j'aime plus que moi-même " Smail " ainsi sa famille Latreche

Mes beaux-parents et leurs fils et filles : Malika, Fadila, et Fouzia.

Mes sœurs Sabrina et Chihia
Mes frères : Nassim, Fatah, Ghani, et Massi
Tous mes cousins et cousines
Surtout
Lidia et Karim
Mes amis : Nadjat, Dalila, Kafia, Fatima, et Sihem.

et

Toute la promotion SAD
À tous ceux qui sont chers je dédie ce mémoire.
Et toute personne qui m'aime

Chahra

Table des matières

Liste des figures	6
Liste des abréviations	7
Introduction générale	8
1 Synthèse sur les mesures de risques	10
Introduction	10
1.1 Rappel sur les risques	10
1.1.1 Types de risque	11
1.2 Définitions et propriétés	11
1.2.1 Chargement de sécurité	13
1.3 Propriétés d'une mesure de risque	13
1.3.1 L'équivalent certain	16
1.4 La Value-at-Risk (VaR)	16
1.4.1 Historique	16
1.4.2 Accords de Bâle	17
1.4.3 Présentation générale	17
1.5 Définition de la Value-at-Risk	18
1.5.1 Quantile d'ordre α	18
1.5.2 Représentation graphique de la VaR	19
1.6 Utilisation de la Value-at-Risk	20
1.6.1 Avantage de la Value-at-Risk :	21
1.6.2 Inconvénients de la Value-at-Risk	21
1.7 Au delà de la VaR	21
1.8 La Tail-Value-at-Risk	22
1.9 Espérance conditionnelle de queue	23
1.9.1 Valeur en risque conditionnel (CVaR)	23
1.9.2 Expected shortfall	25
1.10 La transformée d'Esscher (Es)	25
1.11 Les mesures de risque de Wang	26
1.12 Les mesures de risque par distorsion	27
1.13 Conclusion	27

2	Comparaison entre risques et mesures de risque	28
2.1	Ordre induit par la Value-at-Risk	28
2.2	Rapport de vraisemblance et principe d'Esscher	29
2.3	Comparaison uniforme des TVaR	30
2.3.1	Tail-VaR (TVaR) et primes stop-loss	31
2.3.2	Tail-VaR et fonctions convexes	32
2.4	De la value-at-Risk à la probabilité de ruine	33
2.4.1	Du paradoxe de Saint-Pétersbourg aux mesures de risques	33
2.5	La probabilité de ruine	34
2.5.1	L'approche moyenne-variance ou la variance comme unique mesure de risque	34
2.6	Le modèle classique de la théorie de la ruine	36
2.6.1	Le modèle de Cramér-Lundberg	36
2.6.2	Renouvellement et équation intégrale	38
2.6.3	Généralisation du modèle de base	39
2.7	Dividendes	40
2.7.1	Versement de dividende au-delà d'une barrière	40
2.8	Conclusion	41
3	Estimation de la Value-at-Risk : Application en finance	42
3.1	Introduction	42
3.2	Les différentes méthodes d'estimation de la Value-at-Risk	42
3.3	Les méthodes d'estimation paramétriques.	43
3.4	Estimation non paramétrique	46
3.4.1	Simulation historique notée HS pour Historical Simulation	46
3.4.2	Méthode Bootstrap de Simulation Historique	48
3.4.3	Weighted Historical Simulation (WHS)	49
3.5	Estimation semi-paramétrique	50
3.5.1	Théorie des valeurs extrêmes	50
3.6	Application en finance	55
3.6.1	Présentation de la compagnie d'assurance AXA	55
3.6.2	Données	55
3.7	Conclusion	60
	Bibliographie	61
	Annexe A	65
	Annexe B	66

Table des figures

1.1	Fonction de répartition de rendements sous l'hypothèse gaussienne.	19
1.2	La <i>VaR</i> , un fractile de la distribution des <i>P&L</i>	19
3.1	Densités des distributions standards de valeurs extrêmes.	52
3.2	Rendements quotidiens du cours d'AXA sous Excel.	56
3.3	Fractiles AXA sous Excel.	56
3.4	Cours de l'action AXA.	57
3.5	Rendements quotidiens AXA.	58
3.6	QQ Plot des rendements du cours de l'action AXA.	59

Liste des abréviations

$CVaR$:	Conditional Value-at-Risk.
Ω :	L'espace fondamental.
\mathcal{F} :	La tribu des évènements ou l'ensemble des parties de Ω .
\mathbb{P} :	Mesure de probabilité sur Ω .
(Ω, \mathcal{F}) :	Espace mesurable.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:	Espace probabilité.
\mathbf{F} :	La distribution de la perte X d'un investissement.
F^{-1} :	La fonction inverse de F .
$\mathbb{E}[X]$:	Espérance mathématique ou moyenne de la <i>v.a.</i> X .
Var :	Variance mathématique.
\mathbf{B} :	L'ensemble des mesures bornées.
\mathcal{M} :	Ensemble de variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
\mathbf{M} :	La boule unité de \mathbf{B} .
$M_X(h)$:	Fonction génératrice des moments.
\mathbf{r} :	Mesure de risque.
F_X :	La fonction de répartition de la variable aléatoire X .
F_n :	La fonction de répartition empirique.
\mathbf{MDA} :	Domaine d'attraction du maximum.
R_g :	Mesure de risque de Wang.
$TVaR$:	Tail-Value-at-Risk.
VaR :	Value-at-Risk.
\widehat{VaR} :	Estimateur convergent de la VaR.
$\mathbf{v.a}$:	Variable aléatoire définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
\preceq :	Un pré ordre.
\mathbf{POT} :	Domaine Pics au-delà d'un seuil.
\mathbf{X} :	variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
\xrightarrow{P} :	Convergence en probabilité.
$\xrightarrow{p.s.}$:	Convergence presque sûr.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$:	Convergence en loi.
$\stackrel{\mathcal{L}}{=}$:	Egalité en loi.
g^* :	Produit de convolution d'une fonction g .

Introduction générale

Au cours des siècles, de nombreux évènements (risques), qu'il s'agisse de catastrophes naturelles ou d'accidents liés à l'activité humaine, sont inhérents dans notre vie. Donc, il est impératif de prendre en compte et d'anticiper les possibilités de survenance de tels phénomènes, afin d'en limiter les impacts humains, environnementaux et économiques. Pour cela aussi les institutions financières (les banques et les compagnies d'assurance) cherchent toujours à trouver des nouvelles règles pour gérer et évaluer ses risques et leurs potentiels et pour équilibrer un investissement risqué.

Pour la gestion de ces risques, plusieurs mesures de risque ont été proposées. Chacune a ses avantages et ses inconvénients. Il est reconnu que l'approche standard de moyenne-variance, qui a été introduite par *Markowitz* ([31]) est généralement inadéquate pour le contrôle de risque. Pour cela, d'autres mesures de risque ont été considérées. Par exemple, depuis 1996, le comité de Bâle a proposé d'employer la Value-at-Risk (VaR), qui est un quantile de la distribution de profits et pertes ($P&L$). Depuis lors, beaucoup d'efforts ont été consacrés à l'étude des applications de la VaR dans le domaine de la gestion du risque. Cependant, de meilleures mesures de risque sont désirées pour la gestion des risques robustes. Ces mesures doivent tenir compte non seulement de la probabilité d'un mauvais évènement, mais également de sa grandeur (ampleur). Artzner et al ([6]) suivent une approche systématique qui définit des mesures de risque cohérentes. Une mesure de risque est cohérente si elle satisfait des axiomes tels que la monotonicité, l'invariance par translation, l'homogénéité positive et la sous-additivité. La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle ne satisfait pas la condition de la sous additivité. La convenance de ces axiomes est toujours un sujet pour la discussion, néanmoins, ils établissent un critère pour présenter de nouvelles mesures de risque. En littérature, les auteurs ont proposé en particulier de remplacer la VaR standard par des mesures de risque alternatives telles l'Expected Shortfall (ES), la Conditional Tail Expectation (CTE) et la Tail Value-at-Risk (TVaR)(voir, par exemple, Kass et al. ([25]), Dhaene et al.([11]), Acerbi ([1]), Acerbi et Tasche ([2]) et ([3]), Rockafellar et Uryasev ([38]) et [39]), Wirch et Hardy ([47]) et Yamai et Yoshihara ([48]), où ces mesures de risque permettent de prendre en compte l'ampleur des pertes au-delà de la VaR. L'application de ces mesures alternatives a gagné un intérêt croissant dans la littérature et dans l'industrie.

La VaR et ses alternatives sont étroitement liés aux mesures de risque par distorsion considérées dans la littérature d'assurance (Wang ([46]), Wang Young ([49])).

Lorsque les risques sont majeurs et extrêmes (tels les tempêtes, les cyclones, les inondations, . . .), ils se caractérisent par une énorme gravité malgré leur faible fréquence. Leurs impacts représentent une menace réelle à l'homme, son économie et son environnement. Pour cela chaque institution doit surveiller les valeurs extrêmes (minimum ou maximum) pour pouvoir prévoir l'occurrence des crises et, si possible, leurs intensités afin d'éviter les faillites retentissantes.

Dans ce mémoire, qui s'articule autour de trois chapitres, nous avons étudié quelques unes des mesures de risques les plus connues et leurs estimations classiques qui permettent de traiter les situations de risques dangereux.

Dans le premier chapitre, nous effectuons une synthèse sur les différentes mesures de risque. Nous donnons quelques rappels sur les propriétés et les caractérisations d'une mesure de risque. Nous détaillons une mesure particulière : la Value-at-Risk en donnant ses différentes variantes et les liens entre elles.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons différents ordres de comparaison entre risque et mesure de risque, en illustrant les propriétés des ordres induits par les mesures de risque. Puis nous faisons un lien entre la Value-at-Risk et la probabilité de ruine.

Le troisième chapitre, est consacré à synthétiser les différentes méthodes d'estimation de la mesure de risque particulière : Value-at-Risk. Nous avons choisi l'une des méthodes d'estimation non paramétrique, à savoir la simulation historique pour estimer la *VaR* la VaR sur des données réelles relevées dans le domaine de la finance.

Chapitre 1

Synthèse sur les mesures de risques

Introduction

Au cours des siècles, de nombreux événements extrêmes à travers le monde, tels les catastrophes naturelles (tremblements de terre, inondations, violents orages, . . .) ou les accidents liés à l'activité humaine (circulation routière, guerres, incendies, pollution industrielle ou nucléaire, . . .), ont représenté une menace réelle à l'homme, son économie et son environnement. Par conséquent, il est impératif de prendre en compte et d'anticiper les possibilités de survenance de tels phénomènes, afin d'en limiter les effets négatifs. Un risque est défini par la probabilité d'apparition d'un événement rare et par l'ampleur de ses conséquences (probabilité et impact). Un plan d'atténuation du risque s'attachera donc à maîtriser leur probabilité de survenance mais aussi à réduire leur impact.

Historiquement, la notion de risque était liée à celle de probabilité. Apparue au XVII^e siècle dans l'analyse des jeux de hasard, elle fut appliquée au XVIII^e-siècle par les assureurs maritimes, pour devenir ensuite une partie intégrante des schémas de prise de décision rationnelle associée à toute alternative de probabilités de succès ou d'échec.

En 1921, Frank Knight ([27]) introduisit dans son livre « Risk, Uncertainty and Profit » la distinction entre risque (pouvant être calculé) et incertitude.

Ce chapitre a pour but de synthétiser les connaissances principales sur les mesures de risque utilisées pour le calcul des réserves de solvabilité, qui sont par excellence la Value-at-Risk (VaR) et la Tail Value-at-Risk (TVaR). Afin d'étudier ces mesures de risque à proprement parler, nous commençons par aborder le concept de mesure de risque cohérente, comonotone, et monétaire. L'essentiel des développements présentés dans ce chapitre proviennent du livre de Charpentier([9]) et Ruszczynski ([41]).

1.1 Rappel sur les risques

Nous reprenons ici la définition de risque telle qu'elle est formalisée dans Saidane.Hadda([50])

Définition 1.1.1. (Risque) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, dans lequel Ω représente des états de la nature w , la \mathcal{F} la σ -algèbre des événements et \mathbb{P} la probabilité induite. Un risque X est une variable aléatoire (*v.a.*) réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow X(w). \end{aligned}$$

La convention dans les opérations bancaires est d'employer des variables aléatoires de gain X positives. Les résultats de la perte seraient alors des variables aléatoires négatives. Dans le domaine de l'assurance, il est habituellement approprié (cependant non essentiel) de supposer que la perte X est non négatif (c.-à-d. $X > 0$).

1.1.1 Types de risque

Le risque est généralement classé en trois grandes catégories :

Risque de marché :

Il s'agit du risque de perte lié à l'évolution des niveaux ou à la volatilité des prix du marché. Les différents facteurs de risques liés au marché sont les taux, les cours de change, les cours des actions et les prix des matières premières. Toute variation de ces données a un impact sur les positions et les portefeuilles. Il s'agit du principal champ d'utilisation de la VaR.

Risque de liquidité :

Il est composé du risque de liquidité d'actifs (asset liquidity risk) et du risque de liquidité de financement (cash flow risk).

-L'Asset Liquidity Risk est le risque de ne pouvoir vendre à son prix un titre financier. Il peut se traduire, soit par une impossibilité effective de le vendre, soit par l'abaissement de la valeur de marché d'une société par rapport à ses filiales.

-Le Cash Flow Risk est lié au fait que les banques reçoivent majoritairement des dépôts à court terme de leurs clients et font des prêts à moyen et long terme. Il peut donc se créer un décalage entre les sommes prêtées et les sommes disponibles, car ces dernières peuvent être insuffisantes. Dans ce cas on parle de manque de liquidités.

Risque de crédit :

Il résulte de l'incertitude quant à la possibilité ou la volonté des contreparties ou des clients de remplir leurs obligations. Il existe un risque pour une banque, dès qu'elle se met en situation d'attendre une entrée de fonds de la part d'un client ou d'une contrepartie du marché.

1.2 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1. (Fonction $P\&L$ et fonction de perte) Considérons P_t comme la valeur d'un portefeuille ou d'une position à la date t . Alors la variation de la valeur de ce

portefeuille pour une période $[t, t + T]$, appelée fonction $P\&L$ (profit and loss), est :

$$\Delta P_t = P_{t+T} - P_t.$$

et

$$X_i \equiv -\Delta P_t.$$

est appelé la fonction de perte. En pratique, on décide de fixer la durée T (Un jour, une semaine... par exemple), et puis $\Delta P_t = P_{t+1} - P_t$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit X_i une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur Ω .

Soit $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires X_i définies sur Ω telles que

$$\|X_i\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X_i| < \infty.$$

Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}^\infty$ un cône convexe, c'est à dire que pour $X_1 \in \mathcal{M}$ et $X_2 \in \mathcal{M}$ on a $X_1 + X_2 \in \mathcal{M}$ et $\lambda X_1 \in \mathcal{M}$ pour tout $\lambda > 0$.

\mathcal{M} est l'ensemble de variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On interprète \mathcal{M} comme un ensemble de pertes à horizon fixé.

Nous reprenons ici la définition d'une mesure de risque telle qu'elle est formalisée dans Charpentier A. Denuit M. ([8])

Définition 1.2.2. Mathématiquement, une mesure de risque ou un besoin en capital, d'une (*v.a.*) de perte X , est définie comme une fonction d'une perte aléatoire à un nombre réel.

Définition 1.2.3. (Définition d'une mesure de risque) Une mesure de risque est une fonction $r : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, faisant correspondre à un risque X un nombre réel noté par $r(X)$.

$$\begin{aligned} r : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow r(X). \end{aligned}$$

Une mesure de risque $r(X)$ est interprétée comme le montant minimum qui, additionné à la perte X en début de période rend la couverture de X « acceptable ». C'est donc le capital dont doit disposer la compagnie pour faire face à une perte financière de montant X . Alors une mesure de risque, basée sur une *v.a.* de perte, est conçue pour indiquer à quel point la perte aléatoire est risquée.

Remarque 1.2.1. Dans le contexte actuariel, une mesure de risque est définie comme une fonction faisant correspondre à une perte aléatoire non négative une valeur réelle non négative.

On considère que la position de perte X est « dangereuse » si $r(X)$ est grand. On va interpréter $r(X)$ comme le cash à ajouter à une position de perte X pour qu'elle devienne acceptable pour le régulateur (i.e. pour que $r(X) \leq 0$).

1.2.1 Chargement de sécurité

La notion de chargement de sécurité est étroitement liée à celle de tarification : un principe de prime contient un chargement de sécurité s'il conduit à exiger une prime supérieure à celle qu'est exigée si la mutualisation des risques est parfaite (voir [35]).

Définition 1.2.4. Une mesure de risque r contient un chargement de sécurité si pour tout risque X , on a $r(X) \geq \mathbb{E}(X)$.

Nous verrons dans la suite qu'une Tail-Value-at-Risk ($TVaR$), lorsque elle existe, contient un chargement de sécurité ce qui n'est pas le cas d'une Value-at-Risk (VaR).

1.3 Propriétés d'une mesure de risque

◇ Mesure de risque cohérente

Le concept de mesure de risque cohérente a été abordé pour la première fois par Artzner et al. dans ([6]). Ce concept a été reformulé par la suite par différents auteurs. Nous utilisons la formulation proposée par Shapiro et Ruszczynski ([41]) pour des variables aléatoires mesurant des pertes. Ainsi, plus la variable aléatoire est grande, plus la mesure de risque est grande, plus le risque financier est important.

On dit que la mesure de risque r est :

- (A_1) **Invariante par translation** si :

$$\forall X \in \mathcal{M} \text{ et } \forall k \in \mathbb{R} : r(X + k) = r(X) + k.$$

- (A_2) **Sous-additive** si :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M} : r(X + Y) \leq r(X) + r(Y).$$

L'agrégation ne crée pas de risque supplémentaire, la diversification réduit le risque, on peut décentraliser la gestion des risques.

- (A_3) **Positivement homogène** si :

$$\forall X \in \mathcal{M}, \forall \lambda \geq 0 : r(\lambda X) = \lambda r(X).$$

Si r est sous-additive et positivement homogène alors elle est convexe sur \mathcal{M} :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}, \lambda \in [0, 1] : r(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda r(X) + (1 - \lambda)r(Y).$$

- (A_4) **Monotone** si :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}, \mathbb{P}(X \leq Y) = 1 \Rightarrow r(X) \leq r(Y).$$

Si r est sous-additive et positivement homogène alors r est monotone si et seulement si $r(X) \leq 0 \forall X \leq 0$ presque sûre.

– (A_5) *Cohérente si* : Elle est sous-additive, positivement homogène et monotone.

Ces conditions correspondent aux conditions évidentes intuitives d'une mesure de risque.

- (A_1) : Par l'ajout d'un investissement X sans risque, avec les pertes connues k ($k \leq 0$, lorsque l'investissement k des paiements fixes), à un portefeuille, le risque change par exactement k .
- (A_2) : Le risque d'un portefeuille comprenant des investissements en X et Y est aussi plus grand que la somme des risques individuels (diversification du risque).
- (A_3) : Lorsque l'investissement est multiplié, par conséquent le risque est également multiplié.
- (A_4) : Lorsque la perte de l'investisseur X est toujours plus grande que celle de l'investisseur Y , alors le risque de l'investisseur X est également plus grand.

Remarque 1.3.1. En science actuarielle, les réflexions sur les mesures de risque sont arrivées plus tôt qu'en finance, lors des réflexion sur les principes de valorisation, dont Goovaerts M G ([18]) propose une revue de littérature, mise à jour par la suite dans Reich A ([37]) par exemple). La propriété d'invariance par translation est discutée dans Reich A ([36]), celle d'homogénéité dans Schmidt K S ([42]) et celle de convexité dans Olivier D ([34]). Un parallèle entre les mesures de risque et les primes en sciences actuarielles a été étudié dans Landsman Z ([28]). On notera là aussi que Finetti B ([14]) avait initié cette axiomatique sur les mesures de risque, dans un contexte actuariel, dès 1940.

Proposition 1.3.1. *Si r est invariante par translation $r(X - r(X)) = 0$.*

◇ **Mesure de risque comonotone additive**

Définition 1.3.1. Le vecteur aléatoire $(X_1; X_2)$, de fonctions de répartition marginales F_1, F_2 (resp), est un vecteur comonotone s'il existe une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$; telle que $(X_1; X_2)$ a la même loi que $(F_1^{-1}(U); F_2^{-1}(U))$.

Définition 1.3.2. On appelle mesure de risque comonotone additive toute mesure de risque r telle que : $r(X_1 + X_2) = r(X_1) + r(X_2)$ pour tout vecteur comonotone $(X_1; X_2)$.

◇ **Mesure de risque monétaire**

Le concept de mesure de risque monétaire (monetary measure of risk) donne une interprétation concrète aux mesures de risque. Nous allons tout d'abord définir cette notion de mesure de risque monétaire, elle admet une interprétation simple : c'est la quantité d'actif sans risque qui, ajouté à une position, permet de rendre celle-ci acceptable par le régulateur.

Définition 1.3.3. Soit une mesure de risque r de : $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$,

- r est dite monétaire si elle est monotone et invariante par translation,
- r est dite convexe si elle est monétaire,
- r est dite cohérente si elle est monétaire, homogène et sous-additive.

Corollaire 1.3.1. [9] Si r est une mesure de risque monétaire et homogène, et normalisée à 0 (i.e. $r(0) = 0$) alors la convexité et la sous-additivité sont des notions équivalentes.

Définition 1.3.4. (Région de risques acceptables)

r est une mesure de risque, on définit la région de risques acceptables pour la mesure r comme :

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{M}, r(X) \leq 0\}.$$

Réciproquement, si \mathcal{A} est une région de risques acceptables, la mesure de risque induite r est

$$r(X) = \inf\{m, X - m \in \mathcal{A}\}$$

Proposition 1.3.2. r est une mesure de risque monétaire de région des portefeuilles acceptables \mathcal{A} , alors :

- \mathcal{A} est non-vide et satisfait :
- $X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{M}, Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}$
- r peut être reconstituée par la donnée de \mathcal{A}

$$r(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}, m + X \in \mathcal{A}\}.$$

Proposition 1.3.3. Si r est une mesure de risque monétaire alors r est convexe si et seulement si \mathcal{A} est convexe.

Proposition 1.3.4. Si r est une mesure de risque monétaire alors r est positivement homogène si et seulement si \mathcal{A} est un cône.

Proposition 1.3.5. Si r est une mesure de risque convexe, les trois propriétés suivantes sont équivalentes

r est fortement cohérente si pour tout X et Y , $\sup\{r(\tilde{X} + \tilde{Y})\} = r(X) + r(Y)$, pour $\tilde{X} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$ et $\tilde{Y} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$;

- r est additive pour des risques comonotones si, pour tout X et Y comonotones, $r(X + Y) = r(X) + r(Y)$;
- r est une mesure de corrélation maximale, (par rapport à une mesure μ) si pour tout X , $r(X) = \sup\{\mathbb{E}(X.U) \text{ ou } U \sim \mu\}$.

Proposition 1.3.6. Une mesure de risque cohérente r est additive pour des risques monotones si et seulement s'il existe une fonction décroissante positive g sur $[0, 1]$ telle que :

$$r(X) = \int_0^1 g(t)F^{-1}(1-t)dt, \quad (1.1)$$

Avec : F est la fonction de répartition de X

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1.3.1 L'équivalent certain

La notion d'utilité : Une fonction d'utilité u mesure la satisfaction du consommateur. Cette fonction reflète les préférences du consommateur. Elle dépend des quantités de biens consommés dans le panier :

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Définition 1.3.5. Soit u une fonction d'utilité concave, strictement croissante, alors l'équivalent certain $r(X)$ associé à une perte X vérifie :

$$u(r(X)) = \mathbb{E}[u(X)] \text{ soit } r(X) = u^{-1}(\mathbb{E}[u(X)]).$$

1.4 La Value-at-Risk (VaR)

1.4.1 Historique

La Value-at-Risk (Valeur en risque) est apparue (sous ce nom) dans les années 90, en réponse à de nombreux désastres qui ont touché les marchés de capitaux à cette période. Jorion P dans [23] (propose un historique intéressant de cette naissance).

En fait, on peut remonter beaucoup plus tôt pour voir apparaître cette mesure de risque pour la première fois. Par exemple, lors des débats sur l'inoculation, avant l'invention de la vaccination (par Edward Jenner en 1796), étant donné qu'alors c'était la maladie elle-même qui était inoculée (et non une forme atténuée, comme ce fut le cas avec la vaccine), les résultats étaient assez inégaux, parfois pires que la maladie elle-même. D'Alembert disait clairement qu'il ne faut pas seulement prendre en compte le gain « en moyenne » (dû au fait qu'un grand nombre de personnes développeront des anticorps) mais également le risque "Ce n'est donc ni la longueur de la vie moyenne, ni la petitesse du risque qui doit déterminer à admettre l'inoculation ; c'est uniquement le rapport entre le risque d'une part, et de l'autre l'augmentation de la vie moyenne" (repris dans Charpentier A [9]). Il rappelle encore plus précisément que le risque est la probabilité de mourir des suites d'une inoculation ou, plus généralement, la probabilité de survenance d'un événement désagréable. On le retrouve dans un cadre financier évoqué par Arthur Roy, l'année où Harry Markowitz H [31] propose au contraire d'utiliser la variance comme mesure de risque Roy A D ([40]).

En 1993, la banque JP Morgan introduit une nouvelle mesure du risque : la Value-at-Risk (VaR). Cette mesure permet d'évaluer le risque de baisse des valeurs de portefeuille. Elle correspond au montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné. La VaR est devenu incontournable en 1997, à travers les accords de Bâle II, puisque c'est cette mesure que préconise le Comité pour mesurer le risque de marché.

1.4.2 Accords de Bâle

Afin d'améliorer la stabilité et de renforcer le système bancaire international, les dirigeants des principales banques centrales ont créé en 1974 le Comité de Bâle consacré au contrôle bancaire. Ce comité, composé des banques centrales et des organismes de réglementation des principaux pays industrialisés, se réunit à la Banque des Règlements Internationaux (BRI) située à Bâle. Il est principalement chargé d'établir des normes et des recommandations pour aider les banques dans leur gestion des risques.

Après avoir constaté qu'une part importante des défaillances bancaires était due à une mauvaise gestion du principe de diversification des risques, le Comité a préparé un ensemble de recommandations rendu publique en 1988. Connu sous le nom d'Accord de Bâle de 1988 (ou Accord de Bâle I), ce document fixe une quantité minimale de fonds propres dont doivent disposer les banques. Cette quantité est définie par le ratio Cooke : le ratio des fonds propres d'un établissement de crédit par rapport à l'ensemble des engagements de crédit de cet établissement ne peut être inférieur à 8%. De manière plus pratique, ce ratio stipule que pour 100 euros investis sur le marché, la banque doit disposer de 8 euros en fonds propres.

Un des principaux défauts de l'Accord de Bâle I réside dans le fait que celui-ci ne tient pas compte de la qualité de l'emprunteur, et donc du risque de crédit qu'il représente. Pour pallier ce problème, le Comité a proposé en 2004 un nouvel ensemble de recommandations, dans lequel le ratio Cooke laisse place au ratio McDonough, plus fin, définit comme tel : Les fonds propres d'un établissement de crédit ne peuvent être inférieurs à (8%) des (risque de crédit (85%)+ risques de marché (5%)+ risque opérationnel (10%).

C'est dans ce nouveau document, appelé Nouvel Accord de Bâle ou Accord de Bâle II, que le Comité définit la Value-at-Risk comme méthode de mesure des risques de marché. Plus précisément, elle préconise l'utilisation d'une VaR sur 10 jours avec un intervalle de confiance de 99%.

En résumé, l'accord de Bâle II repose sur 3 piliers : une exigence minimale en fonds propres (ratio de McDonough), une surveillance par les autorités prudentielles, et une discipline de marché.

1.4.3 Présentation générale

« Combien, au maximum, je peux perdre sur cet investissement ? » est la question que chaque investisseur s'est probablement posé en investissant dans un ou plusieurs actifs risqués. Pour y répondre, le concept de la VaR semble être une bonne alternative. Simple et utilisée par tous, elle offre également l'avantage d'être une mesure prospective du risque. La définition générale utilisée par les praticiens est la suivante : « *La Value-at-Risk correspond*

au montant des pertes qui ne devrait pas être dépassé pour un niveau de confiance donné et sur un horizon temporel fixé. »

1.5 Définition de la Value-at-Risk

1.5.1 Quantile d'ordre α

Définition 1.5.1. Soient X est une v.a.r et F sa fonction de répartition. On appelle quantile ou fractile d'ordre α , le nombre x_α défini par :

$$x_\alpha = \text{Inf}\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq \alpha\}, \text{ avec } \alpha \in [0, 1].$$

Remarque 1.5.1. Si F est strictement croissante et continue, alors x_α est l'unique nombre réel tel que

$$F(x_\alpha) = \alpha$$

Statistiquement, la *VaR* se définit pour un taux de couverture de niveau $\alpha \in (0, 1)$ comme étant le quantile de niveau α , de la distribution de profits et de pertes (*P&L*) relatif à un portefeuille d'actifs pour une période donnée. Plusieurs formulations ont été proposées.

Nous reprenons la formulation la plus usuelle proposée par Charpentier dans ([9]) portant sur des variables aléatoires mesurant des pertes.

Définition 1.5.2. (VaR) La Value-at-Risk correspondante au portefeuille d'actifs, notée $VaR(X; \alpha)$, est le quantile d'ordre α du montant du portefeuille X .

$$VaR(X; \alpha) = x_\alpha. \tag{1.2}$$

Où, $F(x_\alpha) = \mathbb{P}(X \leq x_\alpha) = \alpha$.

D'où :

$$VaR(X; \alpha) = \inf\{x, P(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha) = Q(\alpha). \tag{1.3}$$

Pour un calcul de risques financiers, on est intéressé par de grandes valeurs de α Typiques : $\alpha = 0,05$ ou $\alpha = 0,01$

1.5.2 Représentation graphique de la VaR

Nous avons utilisé les cours quotidiens de la compagnie d'assurance d'AXA (présenté dans l'annexe B) qui sont observés sur la période du 25/10/2007 au 23/10/2009.

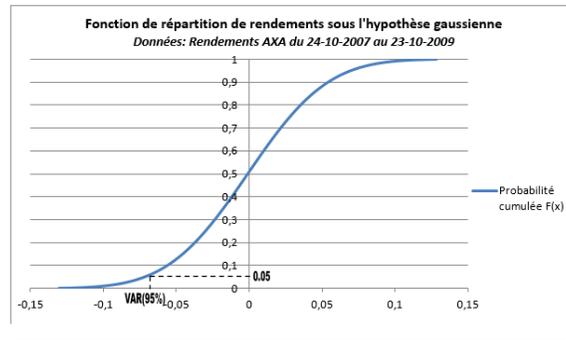


FIG. 1.1: Fonction de répartition de rendements sous l'hypothèse gaussienne.

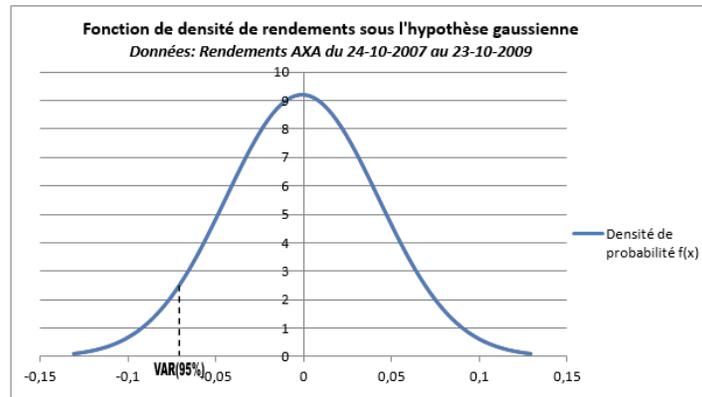


FIG. 1.2: La VaR , un fractile de la distribution des $P\&L$.

Remarque 1.5.2. On notera que $VaR[X; \alpha]$ est une fonction croissante en α , contrairement à certains auteurs qui notent $VaR[X; \alpha]$ le quantile d'ordre $1 - \alpha$.

Commençons par noter que la VaR est stable par transformation croissante (non-linéaire) : quel que soit le niveau de probabilité $\alpha \in (0, 1)$ et la fonction croissante et continue g ,

$$VaR[g(X); \alpha] = g(VaR[X; \alpha]).$$

La VaR d'un portefeuille dépend essentiellement de 3 paramètres :

- • La distribution des profits et des pertes ($P\&L$) du portefeuille ou de l'actif :

Souvent cette distribution est supposée gaussienne, mais beaucoup d'acteurs financiers utilisent des distributions historiques. La difficulté réside alors dans la taille de l'échantillon historique : s'il est trop petit, les probabilités de pertes élevées sont peu précises, et s'il est trop grand, la cohérence temporelle des résultats est perdue, car on compare des résultats non comparables. Les données de ($P&L$) à partir desquelles on calcule une VaR sont généralement exprimées sous forme de rendements.

- • **Le niveau de confiance choisi (95% ou 99 % en général) :**
C'est la probabilité que les pertes éventuelles du portefeuille ou de l'actif ne dépassent pas la VaR .
- • **L'horizon temporel choisi (période de détention de l'actif) :**
Ce paramètre est très important car plus l'horizon est long plus les pertes peuvent être importantes.

Lemme 1.5.1. [9] *Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, si g est une fonction strictement croissante et continue à gauche,*

$$VaR(g(X); \alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(\alpha)) = g(VaR(X; \alpha)),$$

alors que si g est une fonction strictement décroissante, continue à droite, et si F_X est bijective,

$$VaR(g(X); \alpha) = F_{g(X)}^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(1 - \alpha)) = g(VaR(X; 1 - \alpha)).$$

Proposition 1.5.1. *La VaR est comonotone additive.*

Proposition 1.5.2. *La VaR n'est pas cohérente car elle n'est pas sous-additive*

Remarque 1.5.3. La Value-at-Risk est une mesure de risque monétaire et positivement homogène mais elle ne vérifie pas la propriété de sous-additivité au sens de P. Artzner et al ([6]), donc elle n'est pas cohérente.

1.6 Utilisation de la Value-at-Risk

La VaR est utilisé aussi bien par les institutions financières et les régulateurs, que par les entreprises non financières. Les institutions financières ont été les premières à utiliser cet outil. En effet, la diversification des risques financiers, la complexité des nouveaux instruments financiers et l'évolution de la régulation ont poussé les institutions financières à mettre en place des systèmes centralisés de surveillance et de management des risques. De leur côté, les réglementations doivent évaluer ces risques financiers afin d'imposer aux institutions financières un niveau minimal de capitaux disponibles.

Par ailleurs, le management centralisé des risques est utile à toute entreprise exposée à des risques financiers. Les entreprises non financières, comme les multinationales par exemple, utilisent quant à elles la VaR pour se prémunir contre le risque de change.

La Value-at-Risk permet de mesurer différents risques, sur différents marchés (marché des changes, marché financier, marché des produits dérivés), et pour différents actifs à risque (change, actions, obligations, options, etc.).

L'objectif de la *VaR* est de fournir une mesure du risque total de portefeuille. Par conséquent, la *VaR* doit tenir compte des effets de levier et de diversification. En effet, la diversification d'un portefeuille de titres ou d'actifs permet en variant les types de placements, soit de réduire le risque pour un niveau de rentabilité donné, soit d'améliorer la rentabilité pour un niveau de risque donné. Pour un groupe la diversification permet de réduire le risque de volatilité des résultats. La *VaR* mesure donc différents risques financiers.

1.6.1 Avantage de la Value-at-Risk :

1- Elle tend à devenir un indicateur de risque largement utilisée par les établissements financiers car elle résume en un seul numéro tous les risques d'un portefeuille, quelle que soit leur nature (taux de change, actions, ...). Elle présente l'avantage d'être plus facile à comprendre par des investisseurs qui ne sont pas spécialistes en techniques de gestion de portefeuille ou de gestion de risque.

2- Les mesures traditionnelles du risque comme la déviation standard et le degré de sensibilité ne donnent pas une perception de l'ampleur des pertes possibles mais simplement une information sur le pourcentage de la déviation du prix ou du rendement de l'actif par rapport à sa moyenne. Par contre la VaR permet d'évaluer de manière quantitative la perte potentielle maximale qu'une entité financière peut subir à un niveau de probabilité donné et dans un laps de temps donné.

3- Elle est probabiliste, et fournit à un gestionnaire des risques l'information utile sur les probabilités associées avec montants spécifiques de perte.

1.6.2 Inconvénients de la Value-at-Risk

- La *VaR* n'est pas une mesure sous-additive. Si un portefeuille est composé de 2 sous-portefeuilles A et B, alors la VaR du portefeuille total est inférieure à la somme des *VaR* des portefeuilles qui le compose. Cette inégalité est notamment expliquée par la prise en compte de la diversification.
- La *VaR* correspond à un quantile donné, elle ne prend pas en compte les risques au-delà de ce quantile.

1.7 Au delà de la VaR

Pour remédier à ces défauts de la *VaR*, d'autres mesures ont été proposées. Nous en présentons trois très proches, dont l'idée commune est de quantifier le risque lorsque la

VaR est dépassé.

- La Tail Value-at-Risk ou TVaR est la moyenne des VaR de niveau supérieur à α ;
- La Conditional Tail Expectation ou CTE représente la perte attendue sachant que la VaR est dépassée ;
- L'Expected Shortfall, ou ES au niveau α , c'est la prime stop-loss dont la rétention (ou franchise, ou la priorité) est fixé à VaR_α .

Nous définissons précisément ces mesures ci-dessous.

1.8 La Tail-Value-at-Risk

Beaucoup d'auteurs et d'articles dans la littérature définissent la Tail Value-at-Risk (TVaR). C'est cependant l'approche de Charpentier dans ([9]) que nous retiendrons.

Définition 1.8.1. (TVaR) La Tail-Value-at-Risk notée $TVaR(X; \alpha)$ est définie par :

$$TVaR(X; \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR(X; t) dt.$$

\Rightarrow la Tail-VaR est la moyenne des VaR de niveau supérieur à α .

Notons que la TVaR est plus grande que la VaR correspondante.

Remarque 1.8.1. Il existe une fonction de répartition \tilde{F}_X (transformée de Hardy-Littlewood de F_X) ([21]), telle que : $\forall \alpha$,

$$\tilde{F}_X^{-1}(\alpha) = TVaR(X; \alpha).$$

Si \tilde{X} a pour loi \tilde{F}_X ,

$$TVaR(X; \alpha) = VaR(\tilde{X}; \alpha).$$

La $TVaR$ est donc la VaR de la transformée de Hardy-Littlewood de X . Notons que : $TVaR[X; 0] = \mathbb{E}[X]$. Et comme

$$TVaR[X; \alpha] = \frac{1}{1 - \alpha} \left\{ \mathbb{E}[X] - \int_0^\alpha VaR[X; \xi] d\xi \right\}. \quad (1.4)$$

On en déduit que la TVaR est une fonction croissante en α . De plus

$$TVaR[X; \alpha] \geq TVaR[X; 0] = \mathbb{E}[X].$$

\Rightarrow la Tail-VaR contient toujours un changement de sécurité.

Proposition 1.8.1. *La TVaR est cohérente.*

Proposition 1.8.2. *La TVaR est comonotone additive.*

1.9 Espérance conditionnelle de queue

Définition 1.9.1. (CTE) L'espérance conditionnelle de queue (conditional Tail Expectation) d'un portefeuille d'actifs au niveau α , est définie par l'espérance conditionnelle de la perte X_i sachant que celle-ci dépasse la VaR , notée $CTE[X, \alpha]$, telle que :

$$CTE[X; \alpha] = \mathbb{E}[X | X > VaR(X; \alpha)].$$

la CTE est la perte attendue sachant que la VaR au niveau α est dépassée, i.e. « perte moyenne dans les pires $(1 - \alpha)\%$ des cas. »

1.9.1 Valeur en risque conditionnel (CVaR)

La principale critique de la VaR est qu'elle n'est pas une mesure de risque additive. Artzner ([6]) énonce un ensemble d'axiomes qu'une mesure de risque dite cohérente doit vérifier. Il montre ainsi que la VaR ne respecte pas l'axiome d'additivité. La VaR de la somme des deux portefeuilles est supérieur à la somme des VaR de chaque portefeuille. Cette caractéristique est contraire au principe de diversification en finance.

Une seconde critique de la VaR est due à sa définition même. C'est la mesure d'une perte maximale potentielle avec un certain niveau de confiance. Une VaR à 95% ne donne aucune idée de l'ampleur de la perte si cette perte potentielle dépasse le quantile fixé à 5%.

Définition 1.9.2. (CVaR) La valeur en risque conditionnel (conditional-VaR) au niveau α , notée $CVaR[X, \alpha]$, est :

$$\begin{aligned} CVaR[X; \alpha] &= \mathbb{E}[X - VaR[X; \alpha] | X > VaR[X; \alpha]] \\ &= e_X(VaR[X; \alpha]) \\ &= CTE[X; \alpha] - VaR[X; \alpha]. \end{aligned}$$

avec $e_X(s) = \mathbb{E}[X | X > s]$.

La CVaR est la valeur moyenne des pertes qui excèdent la VaR , i.e. il s'agit de l'excédent moyen de sinistre au-delà de la VaR.

En fait, ces trois mesures sont très liées, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.9.1. *Quel que soit le niveau de probabilité $\alpha \in (0, 1)$, les identités suivantes sont vérifiées :*

$$TVaR[X; \alpha] = VaR[X; \alpha] + \frac{1}{1 - \alpha} ES[X; \alpha]. \quad (1.5)$$

$$CTE[X; \alpha] = VaR[X; \alpha] + \frac{1}{F_X(VaR[X; \alpha])} ES[X; \alpha]. \quad (1.6)$$

$$CTE[X; \alpha] = TVaR[X; F_X(VaR[X; \alpha])] \quad \forall \alpha \in]0, 1[. \quad (1.7)$$

La 3^{ème} égalité montre qu'en particulier, la TVaR et la CTE coïncident pour des risques de distributions continues.

Avec \bar{F}_X est la fonction de survie

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x).$$

Proposition 1.9.2. *La CTE et la TVaR coïncident pour les risques dont la fonction de répartition est continue, i.e.*

$$CTE[X; \alpha] = TVaR[X; \alpha], \quad \alpha \in (0, 1). \quad (1.8)$$

La TVaR est invariante par translation et homogène.

De la même manière, l'homogénéité de la VaR garantit l'homogénéité de la TVaR.

Lemme 1.9.1. (Charpentier A [9]) *Soient le risque X et le niveau de perte x tels que $\bar{F}_X(x) > 0$.*

Quel que soit l'événement aléatoire E tel que, $\mathbb{P}[E] = \bar{F}_X(x)$, on a $\mathbb{E}[X|E] \leq \mathbb{E}[X|X > x]$. Cette proposition garantit que la TVaR est sous-additive lorsque les risques sont continus.

$$\begin{aligned} TVaR[X + Y; \alpha] &= \mathbb{E}[X|X + Y > VaR[X + Y; \alpha]]. \\ &+ \mathbb{E}[Y|X + Y > VaR[X + Y; \alpha]]. \\ &\leq \mathbb{E}[X|X > VaR[X; \alpha]] + \mathbb{E}[Y|Y > VaR[Y; \alpha]]. \\ &= TVaR[X; \alpha] + TVaR[Y; \alpha]. \end{aligned}$$

De la même manière, la TVaR est monotone, puisque lorsque $\mathbb{P}[X \leq Y] = 1$.

$$\begin{aligned} TVaR[Y; \alpha] &= \mathbb{E}[Y|Y > VaR[Y; \alpha]]. \\ &\geq \mathbb{E}[Y|X > VaR[X; \alpha]]. \\ &\geq \mathbb{E}[X|X > VaR[X; \alpha]]. \\ &= TVaR[X; \alpha]. \end{aligned}$$

Proposition 1.9.3. *La TVaR est cohérente pour les risques continus, et coïncide alors avec la CTE.*

Proposition 1.9.4. *La TVaR est la plus petite mesure de risque majorant la VaR qui soit cohérente.*

Définition 1.9.3. (prime stop-loss) La prime stop-loss pour une rétention $t > 0$ d'un risque X est définie par $\pi_X(t) = \mathbb{E}[(X - t)_+]$.

La fonction π_X est appelée transformée stop-loss de la variable X .

$$\pi_X(t) = \int_t^{+\infty} \bar{F}(x) dx.$$

π_X est décroissante et convexe.

1.9.2 Expected shortfall

Définition 1.9.4. (ES) l'Expected shortfall au niveau de probabilité α , notée $ES[X; \alpha]$, n'est autre que la prime stop-loss dont la rétention est fixée à $VaR[X; \alpha]$:

$$ES[X; \alpha] = \mathbb{E}((X - VaR[X; \alpha])_+)$$

Le résultat suivant détaille les liens qui peuvent exister entre ces différentes mesures de risque.

Proposition 1.9.5.

Quel que soit le niveau de probabilité $\alpha \in (0, 1)$, les identités suivantes sont vérifiées :

$$TVaR[X; \alpha] = VaR[X; \alpha] + \frac{1}{1 - \alpha} ES[X; \alpha]; \quad (1.9)$$

$$CTE[X; \alpha] = VaR[X; \alpha] + \frac{1}{\overline{F}_X(VaR[X; \alpha])} ES[X; \alpha]; \quad (1.10)$$

1.10 La transformée d'Esscher (Es)

La mesure de risque d'Esscher consiste à prendre la prime pure, i. e. l'espérance de la transformée d'Esscher du risque initial.

Définition 1.10.1. La mesure de risque d'Esscher de paramètre $h > 0$ du risque X , notée $Es[X; h]$, est

$$Es[X; h] = \frac{\mathbb{E}[X \exp(hX)]}{M_X(h)} = \frac{d}{dh} \ln M_X(h).$$

avec $M_X(h)$ est la fonction génératrice des moments,

$$M_X(h) = \mathbb{E}(e^{hX}) \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.10.1. $Es[X; h]$ est la valeur espérée de la transformée d'Esscher X_h de X ,

$$Es[X; h] = \mathbb{E}[X_h] = \int_{\xi \in \mathbb{R}^+} \xi dF_{X,h}(\xi).$$

Proposition 1.10.1. *la mesure de risque d'Esscher contient un changement de sécurité, car on a $Es[X; h]$ est une fonction croissante de h , d'ou $\forall h > 0, Es[X; h] \geq Es[X; 0] = \mathbb{E}[X]$.*

Proposition 1.10.2. *La mesure de risque d'Esscher n'est pas cohérente car elle n'est ni homogène (sauf dans le cas trivial $h = 0$), ni monotone.*

Proposition 1.10.3. *La mesure de risque d'Esscher est invariante par translation.*

1.11 Les mesures de risque de Wang

Les mesures de risque de Wang utilisent l'opérateur espérance sur des transformations de la distribution de la variable aléatoire d'intérêt. L'idée est en effet d'alourdir la queue de la distribution de la variable d'intérêt afin d'engendrer un chargement par rapport à la prime pure. Cette transformation de la fonction de répartition sera effectuée à l'aide d'une fonction de distorsion.

Définition 1.11.1. (Fonction de distorsion) Nous appellerons fonction de distorsion toute fonction croissante $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que :

$$g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 1.$$

Définition 1.11.2. (Mesure de risque de Wang) La mesure de risque de Wang associée à la fonction de distorsion g , notée r_g , est définie par

$$r_g(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x))dx = \int_0^\infty g(\bar{F}_X(x))dx.$$

Remarque 1.11.1. On notera que la fonction de distorsion $g(q) = q$ correspond à l'espérance mathématique $\mathbb{E}[X]$. De plus, si $g(q) \geq q$ quel que soit $q \in [0, 1]$, on a alors $R_g[X] \geq \mathbb{E}[X]$, de sorte que les mesures de risque de Wang associées à de telles fonctions de distorsion contiennent un changement de sécurité. Enfin, il est intéressant de remarquer que lorsque $g_1(q) \leq g_2(q)$ quel que soit $q \in [0, 1]$ nous avons alors

$$r_{g_1}[X] \leq r_{g_2}[X].$$

Proposition 1.11.1. Quel que soit le risque X , la mesure de risque de Wang associée à la fonction de distorsion g peut s'écrire :

$$r_g[X] = \int_0^1 VaR[X; 1 - \alpha]dg(\alpha).$$

Ainsi, les mesures de risque de Wang sont des moyennes pondérées de VaR.

Proposition 1.11.2. Les mesures de risque de Wang sont homogènes, invariantes par translation et monotones.

Si la fonction de distorsion g est concave, la fonction $x \mapsto g(\bar{F}_X(x))$ est continue à droite et est donc la fonction de survie d'une certaine variable aléatoire. Alors $r_g[X]$ est effectivement une espérance mathématique, d'une variable Y dont la fonction de survie vaut $\bar{F}_Y(y) = g(\bar{F}_X(y))$.

Proposition 1.11.3. Lorsque la fonction de distorsion est concave, la mesure de risque correspondante est sous-additive.

Corollaire 1.11.1. Les mesures de risque de Wang correspondant à des fonctions de distorsion concaves sont cohérentes.

Proposition 1.11.4. Quel que soit le niveau de probabilité $0 < \alpha < 1$ et le risque X , nous avons :

$$TVaR[X; \alpha] = \min\{r_g[X] \mid g \text{ est concave et } r_g[X] \geq VaR[x; \alpha]\}.$$

1.12 Les mesures de risque par distorsion

Les mesures de Wang sont un cas particulier de mesure de risque par distorsion.

Définition 1.12.1. On appelle mesure de risque par distorsion la quantité

$$r(X) = \int_0^1 F^{-1}(1-u)dg(u)$$

où g est une fonction de répartition sur $[0, 1]$, appelée fonction de distorsion.

Proposition 1.12.1. $r(X)$ peut se réécrire

$$r(X) = \int_0^{+\infty} g(1-F(x))dx - \int_{-\infty}^0 [1-g(1-F(x))]dx.$$

Remarque 1.12.1. Si $g(q) = q \forall q \in [0, 1]$,

$$r(X) = \int_0^{+\infty} [1-F(x)]dx - \int_{-\infty}^0 F(x)dx = \mathbb{E}(X).$$

Exemple

Considérons la fonction de répartition $G(x) = x^k$. On appellera mesure de risque à hasard proportionnel la mesure induite par cette transformation,

$$r(X; k) = \int_0^1 F^{-1}(1-u)ku^{k-1}du.$$

Lorsque $k < 1$, la fonction G est concave.

Remarque 1.12.2. Les mesures spectrales [1] : une fonction spectrale (ou fonction d'aversion pour le risque) est $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, décroissante, telle que $\int_0^1 \phi(t)dt = 1$.

La mesure de risque spectrale induite est :

$$r(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(t)\phi(t)dt.$$

Ces mesures de risque sont cohérentes. Les mesures de distorsion de fonction de distorsion g concave sont des mesures spectrales, avec $\phi = g'$.

1.13 Conclusion

Le premier chapitre, nous avons présenté la base axiomatique des mesures de risque, en présentant les mesures de risque usuelles, en particulier la Value-at-Risk (VaR, discutée dans la section 1.4), la Tail-Value-at-Risk (TVaR) (section 1.8) et les mesures associées (CTE, CVaR, ES, discutées dans la section 1.9), la transformée d'Esscher (section 1.10), les mesures dites de Wang (section 1.11). et plus généralement les mesures par distorsion (section 1.12). Nous avons défini le concept de mesure de risque cohérente et nous avons montré que la VaR ne l'est pas et que la TVaR l'est. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresseront à la comparaison entre risques et mesures de risque.

Chapitre 2

Comparaison entre risques et mesures de risque

2.1 Ordre induit par la Value-at-Risk

Il existe un lien fondamental entre la comparaison des risques, et les mesures des risques. Le but de ce chapitre est de présenter les outils permettant de comparer les risques et d'apprécier leur dangerosité.

Définition 2.1.1. Etant donnés deux risques X et Y , X sera considéré moins dangereux que Y sur base de la comparaison des VaR , ce qui se notera : $X \preceq_{VaR} Y$, lorsque :

$$VaR[X; \alpha] \leq VaR[Y; \alpha] \text{ pour tout } \alpha \in (0, 1).$$

La relation \preceq_{VaR} a été introduite par Lehmann ([29]).

Elle est davantage connue sous de dominance stochastique à l'ordre 1, et elle est parfois notée \preceq_{st}, \preceq_1 ou \preceq_{FSD} ([43] et [33]) Nous établissons ci-dessous plusieurs conditions équivalentes pour avoir \preceq_{VaR} entre deux risques X et Y .

Proposition 2.1.1. Etant données deux variables aléatoires X et Y , $X \preceq_{VaR} Y$.

$$\begin{aligned} X \preceq_{VaR} Y &\Leftrightarrow F_X(t) \geq F_Y(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Proposition 2.1.2. Etant données deux variables aléatoires X et Y ,

$$X \preceq_{VaR} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$$

pour tout fonction croissante g , pour autant que les espérances existent.

Proposition 2.1.3. Etant données deux variables aléatoires X et Y ,

$$X \preceq_{VaR} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$$

pour toute fonction g telle que $g' \geq 0$, pour autant que les espérances existent.

Proposition 2.1.4. *Quels que soient les risques X et Y , si $f_X(t) \geq f_Y(t)$ pour tout $t < c$ et $f_X(t) \leq f_Y(t)$ pour tout $c > t$ alors $X \preceq_{VaR} Y$.*

Nous pourrions nous intéresser à la comparaison des risques sachant qu'ils excèdent un certain niveau t , i.e. $[X|X > t] \preceq_{VaR} [Y|Y > t]$ pour tout t quel que soit le niveau t .

Cela n'est pas forcément vrai lorsque $X \preceq_{VaR} Y$.

$$X \preceq_{VaR} Y \not\Rightarrow [X|X > t] \preceq_{VaR} [Y|Y > t]$$

Proposition 2.1.5. *Etant donnés deux risques X et Y , quel que soit $t \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} [X|X > t] \preceq_{VaR} [Y|Y > t] &\Leftrightarrow \frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)} \text{ est croissante.} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{F}_Y(t)}{\overline{F}_X(t)} \text{ quels que soient } u \leq v. \end{aligned}$$

$$\overline{F}_X(u) = \mathbb{P}(X \geq u) \text{ et } \overline{F}_Y(u) = \mathbb{P}(Y \geq u).$$

Proposition 2.1.6. *Etant donnés deux risques X et Y , quel que soit $t \in \mathbb{R}$*

$$[X|X > t] \preceq_{VaR} [Y|Y > t] \Leftrightarrow r_X(t) \geq r_Y(t)$$

Remarque 2.1.1. La méthode de comparaison de lois de probabilité dont il est question dans ces propriétés est souvent appelée l'ordre du taux de hasard (hasard rate order) et notée \preceq_{hr} .

2.2 Rapport de vraisemblance et principe d'Esscher

Nous pourrions encore songer à imposer

$$[X|a \leq X \leq a + h] \preceq_{VaR} [Y|a \leq Y \leq a + h]$$

quel que soit le niveau a et l'accroissement $h > 0$.

Ceci correspond à la situation d'un réassureur qui aurait à couvrir la tranche $(a; a + h]$ d'un risque X , i.e. qui s'exposerait à une perte de :

$$X_{a,a+h} = \begin{cases} 0 & \text{si } X < a \\ X - a & \text{si } X < a + h \\ h & \text{si } a + h \leq X \end{cases}$$

Où a est la rétention et h la portée.

Proposition 2.2.1. *Considérons les variables aléatoires X et Y , toutes deux continues ou discrètes, possédant les fonctions de densités f_X et f_Y .*

Si

$$\frac{f_X(t)}{f_Y(t)} \text{ dcroit sur l'union des supports de } X \text{ et de } Y$$

ou, de manière équivalente, si

$$f_X(u)f_Y(v) \geq f_X(v)f_Y(u) \text{ pour tout } u \leq v.$$

Alors $[X|a \leq X \leq a + h] \preceq_{VaR} [Y|a \leq Y \leq a + h]$ quel que soit le niveau a et l'accroissement $h > 0$.

Remarque 2.2.1. La méthode de comparaison de lois de probabilité dont il est question dans la Proposition précédente est encore appelée *ordre du rapport de vraisemblance*, et notée \preceq_{lr} .

Notons X_h la transformée d'Esscher de X . Le rapport des densités de probabilités associées à X et X_h est proportionnel à $\exp(-hx)$, qui est clairement décroissant en x . Ceci indique que

$$[X|a \leq X \leq b] \preceq_{VaR} [Y|a \leq Y \leq b]$$

quels que soient $a < b$. Le résultat suivant montre sous quelles conditions les mesures de risque d'Esscher relatives à deux risques X et Y sont uniformément ordonnées.

Proposition 2.2.2. *Si $[X|a \leq X \leq b] \preceq_{VaR} [Y|a \leq Y \leq b]$ quels que soient $a < b$ alors :*

$$Es[X; h] \leq Es[Y; h] \text{ pour tout } h > 0$$

.

2.3 Comparaison uniforme des TVaR

Nous introduisons ici une nouvelle méthode de comparaison des risques, basée sur les Tail-VaR.

Définition 2.3.1. Quelles que soient les variables aléatoires X et Y de moyenne finie, X sera considéré moins dangereux que Y sur base de la comparaison des *TVaR*, ce qui se notera dorénavant

$$X \preceq_{TVaR} Y, \text{ lorsque } TVaR[X; \alpha] \leq TVaR[Y; \alpha] \text{ pour tout } \alpha \in [0; 1].$$

La restriction à des risques de moyenne finie garantit l'existence des *TVaR*, et donc la correction de la définition de \preceq_{TVaR} .

Nous utiliserons encore la relation notée \preceq_{CX} , qui restreint \preceq_{TVaR} aux couples de variables aléatoires de même moyenne.

Définition 2.3.2. Quelles que soient les variables aléatoires X et Y ,

$$\begin{aligned} X \preceq_{CX} Y &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y], \\ X \preceq_{TVaR} Y, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} TVaR[X; 0] = TVaR[Y; 0]. \\ TVaR[X; \alpha] \leq TVaR[Y; \alpha] \text{ pour tout } \alpha \in (0, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

La relation \preceq_{CX} est connue sous le nom d'**ordre convexe** parmi les probabilités (noté \preceq_{cx}).

Remarque 2.3.1. Notons que \preceq_{TVaR} ne permettait pas de comparer des variables aléatoires de même moyenne. En effet,

$$\left. \begin{array}{l} X \preceq_{TVaR} Y \\ \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] \end{array} \right\} \Rightarrow X =_{loi} Y.$$

avec $X =_{loi} Y \Leftrightarrow$ Pour tout x : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = F_Y(x)$

2.3.1 Tail-VaR (TVaR) et primes stop-loss

Les relations \preceq_{TVaR} et \preceq_{CX} introduites ci-dessus peuvent encore être interprétées en termes de primes stop-loss, comme le montrent les résultats suivants.

Proposition 2.3.1. Soient deux variables aléatoires X et Y de même moyenne finie. Alors chacune des deux inégalités suivantes est équivalente à

$$\mathbb{E}[(X - t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y - t)_+] \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

$$\int_0^p f_X^{-1}(u) du \geq \int_0^p f_Y^{-1}(u) du \text{ pour tout } p \in [0; 1]. \quad (2.1)$$

et

$$\int_p^1 f_X^{-1}(u) du \leq \int_p^1 f_Y^{-1}(u) du \text{ pour tout } p \in [0; 1]. \quad (2.2)$$

Avec : $(X - t)_+ = \max(X - t, 0)$ et $(Y - t)_+ = \max(Y - t, 0)$

Corollaire 2.3.1. Soient X et Y deux risques de même moyenne finie. Alors,

$$X \preceq_{cx} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[(X - t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y - t)_+] \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On peut montrer qu'un résultat du même type vaut pour \preceq_{TVaR} , à savoir :

$$X \preceq_{TVaR} Y \text{ si et seulement si } \mathbb{E}[(X - t)_+] \leq \mathbb{E}[(Y - t)_+] \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

2.3.2 Tail-VaR et fonctions convexes

Tout comme \preceq_{VaR} était liée aux fonctions *croissantes*, les relations \preceq_{cx} et \preceq_{TVaR} sont liées aux fonctions *convexes et convexes croissantes*, comme le montrent les résultats suivants.

Proposition 2.3.2. *Etant données deux variables aléatoires X et Y de moyennes finies, on a :*

(i) $X \preceq_{CX} Y$ si et seulement si $\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ pour toute fonction convexe g , pour autant que les espérances existent.

(ii) $X \preceq_{CX} Y$ si et seulement si $\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ pour toute fonction g telle que $g'' \geq 0$. Pour autant que les espérances existent.

Proposition 2.3.3. *Etant données deux variables aléatoires X et Y de moyennes finies, on a :*

(i) $X \preceq_{TVaR} Y$ si et seulement si $\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ pour toute fonction convexe croissante g , pour autant que les espérances existent.

(ii) $X \preceq_{TVaR} Y$ si et seulement si $\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ pour toute fonction g telle que $g' \geq 0$ et $g'' \geq 0$, pour autant que les espérances existent.

Proposition 2.3.4. *Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. S'il existe une constante c telle que :*

$$F_Y(x) \geq F_X(x) \text{ pour tout } x < c. \quad (2.3)$$

et

$$F_Y(x) \leq F_X(x) \text{ pour tout } x > c. \quad (2.4)$$

Alors, $X \preceq_{TVaR} Y$.

Remarque 2.3.2. De manière heuristique, les fonctions convexes sont celles qui prennent leurs valeurs les plus élevées dans des régions de la forme $] - \infty; a[] b; +\infty[$;

Proposition 2.3.5. *Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$. S'il existe une constante c telle que :*

$$F_Y(x) \geq F_X(x) \text{ pour tout } x < c. \quad (2.5)$$

et

$$F_Y(x) \leq F_X(x) \text{ pour tout } x > c. \quad (2.6)$$

alors, $X \preceq_{CX} Y$.

2.4 De la value-at-Risk à la probabilité de ruine

Pourtant, les réflexions sur les mesures de risques sont anciennes, et on peut remonter, par exemple, aux débats sur l'inoculation, avant l'invention de la vaccination (par Edward Jenner en 1796. Étant donné qu'alors c'est la maladie elle-même qui était inoculée (et non une forme atténuée, comme ce fut le cas de la vaccine), les résultats étaient assez inégaux, parfois pires que la maladie elle-même.

D'Alembert dit clairement qu'il ne faut pas seulement prendre en compte le gain " en moyenne ", dû au fait qu'un grand nombre de personnes développeront des anticorps, mais également le risque : " Ce n'est donc ni la longueur de la vie moyenne, ni la petitesse du risque qui doit déterminer à admettre l'inoculation ; c'est uniquement le rapport entre le risque d'une part, et de l'autre l'augmentation de la vie moyenne". Il rappelle encore plus précisément que le risque est la probabilité de mourir des suites d'une inoculation ou, plus généralement, la probabilité de survenance d'un événement désagréable.

Nous verrons que l'idée de Value-at-Risk est en effet très ancienne, et que si le concept a souvent été mentionné comme mesure de risque, ce sont des outils plus simples (comme la variance) qui se sont imposés, pour des raisons le plus souvent techniques. Dans un monde gouverné par la loi gaussienne, cela n'a pas grande importance, mais dès lors que l'on traite de " grands risques ", cela induit malheureusement beaucoup d'idées fausses.

Nous reviendrons ici sur l'histoire de cette mesure de risque, que nous introduirons avec d'Alembert, et qui a été remise à la mode par le banquier d'affaires J. P. Morgan voilà une quinzaine d'années dans un contexte financier, tout en notant qu'elle existait depuis plus d'un siècle en science actuarielle, cachée sous la notion de " *probabilité de ruine* ".

2.4.1 Du paradoxe de Saint-Pétersbourg aux mesures de risques

Du paradoxe de Saint-Pétersbourg posé par Nicolas Bernoulli en 1713 on retient généralement les réponses de Daniel Bernoulli, Gabriel Cramer ou Georges-Louis Leclerc de Buffon, qui ont été formalisées quelques dizaines d'années plus tard par John Von Neumann et Oskar Morgenstern, basées sur l'utilisation d'une " espérance morale " ou d'une " utilité morale de l'argent ".

Pour D'Alembert, "les règles de probabilité sont en défaut lorsqu'elles proposent, pour trouver l'enjeu, de multiplier la somme espérée par la probabilité du cas qui doit faire gagner cette somme ; parce que, quelque que soit la somme espérée, la probabilité de gagner peut être si petite qu'on serait insensé de jouer à un pareil jeu". Aussi, il conviendrait de négliger les petites probabilités de très forts gains.

D'Alembert préfère : " un tiens à deux tu l'auras, " qu'il traduit sous la forme " mille probabilités ne feront jamais une certitude". D'Alembert met ainsi en évidence ce que la terminologie contemporaine appelle sous-additivité des probabilités, ou "préférence pour la sécurité " pour reprendre les termes de Maurice Allais, ou d'"effet de certitude" dans les travaux de Daniel Kahneman et Amos Tversky.

C'est à partir de cette réflexion qu'il se propose de répondre au paradoxe de Saint-Pétersbourg. "Il n'y a point de joueur qui voulût donner cette somme (50 écus) en pareil cas ; car il faudrait, pour qu'il rattrapât cette somme en jouant, que croix ne vînt qu'au septième coup ; et assurément, Pierre croirait trop risquer d'attendre que ce cas arrivât. Une probabilité de 127 contre 1 est si petite qu'on ne doit point risquer une somme d'argent vis-à-vis de cette probabilité, quand même le gain qui en pourrait résulter serait immense."

2.5 La probabilité de ruine

La réponse de D'Alembert est basée sur le fait que la probabilité de "ne pas rentrer dans ses frais" est de 127/128. Dans une terminologie actuarielle, d'Alembert notait tout simplement qu'il y avait "ruine" avec une probabilité de 1/128.

Ces travaux sur la probabilité de ruine ont été pour suivi pendant des années, dans le contexte du calcul de la marge de solvabilité. Et ce sont les difficultés analytiques pour calculer ces grandeurs qui ont principalement freiné le développement de ces notions Fölmmer H ([16], Holton G [22], Jorion P [24]).

Comme le notait Condorcet par exemple, dans le cas de n opérations identiques, le nombre de succès (ou d'échecs) suit une loi binomiale, dont le calcul de la fonction de répartition est lourd et complexe. Inverser cette fonction (nécessaire pour connaître le nombre de succès possibles à probabilité donnée) l'est encore davantage. Quand Condorcet décrit explicitement un problème de ruine, il montre malheureusement très clairement que si sa théorie est intéressante, sa complexité analytique la rend inutilisable.

Il faudra attendre les travaux de Filip Lundberg en 1903, prolongés par ceux de Bruno de Finetti dans les années 1940, puis ceux de Jules Dubourdieu et Harald Cramér dans les années 1950.

2.5.1 L'approche moyenne-variance ou la variance comme unique mesure de risque

Étrangement, il y a quinze ans encore, la seule mesure de risque enseignée était la variance, avec comme unique référence les travaux d'Harry Markowitz : on opposait alors rendement et risque, c'est-à-dire espérance et variance. Mais en parallèle, dans les

cours d'assurance, on nous imposait de comprendre les modèles de théorie de la ruine sans jamais établir de liens entre les outils dans le monde de la finance et ceux dans le monde de l'assurance.

On fait souvent remonter à Francis Edgeworth, à la fin du *XIX^e* siècle, l'idée de mesurer le risque par l'écart type. Mais à y lire de plus près, il n'oppose pas profitabilité et risque en comparant moyenne et variance (ou écart type), mais "profit" et "solvabilité" (se reliant ainsi directement aux travaux de Laplace et Condorcet sur la probabilité de ruine). Francis Edgeworth essaye ainsi, en appliquant des théorèmes de convergence en probabilité à des problèmes économiques, d'obtenir la probabilité qu'une grandeur dépasse un certain seuil ou, pour reprendre les termes initiaux, la "probabilité qu'il ne soit pas appelé à rembourser d'un coup plus d'un tantième de son passif".

Irving Fisher a davantage essayé d'approfondir ce risque d'insolvabilité, c'est-à-dire la "probabilité que les bénéfices tombent au-dessous de la ligne de paiement des intérêts" et pour cela, en utilisant des hypothèses de loi de Gauss, il fait référence à l'écart type, suite à des travaux récents de Karl Pearson. La justification de cette simplification est liée aux réflexions contemporaines de Frank Knight car, selon Irving Fisher, "bien qu'il soit possible de calculer mathématiquement les risques de certains jeux de hasard, la plupart des risques économiques ne sont pas aisément mesurés". Ce qui explique la simplification du problème lié à l'insolvabilité par la seule recherche d'un écart type.

En 1952, l'année de parution de l'article initial d'Harry Markowitz, Andrew Roy revient sur l'utilisation de la probabilité d'insolvabilité, insistant sur le caractère naturel et rudimentaire du concept. Il montre clairement que le but de maximiser un revenu avec une contrainte de "sécurité" correspond au niveau atteint avec une très grande probabilité (e.g. 95%). Le principe énoncé par Condorcet est renommé ici "safety first principle", sauf qu'enfin un seuil de sécurité est ici explicitement exprimé. En utilisant l'inégalité de Binaymé-Tchbechev, Roy simplifie les calculs de probabilité de ruine, pour retomber sur les résultats que Markowitz vient de publier.

Le concept de ruine doit alors se comprendre comme la souvenance d'un scénario défavorable, pouvant conduire à l'impossibilité, pour la compagnie, faire face à certaines de ces engagements, aussi bien envers ses assurés que ses actionnaires.

Le premier but de la théorie ruine a donc logiquement été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, D'évaluer la probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que les scénarios traduisant un échec se réalise, et D'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette probabilité suffisamment faible.

La théorie du risque également appelé théorie de la ruine, concerne d'une manière générale l'évaluation des probabilités de réalisations d'évènements défavorables pour les compagnies d'assurances. Au-delà des calculs de probabilités dans un modèle fixé, des branches de cette théorie s'intéresse aussi à des différents problèmes d'optimisation : d'allocation de réserves, de stratégie de versement dividendes (au sens de la fiscalité), d'investissement dans des actifs risqués, de programme de réassurance . . . Plus généralement ce types de modèle lié au modèle de file d'attente et de recherche opérationnelle (gestion des stocks avec entrée et sortie), avec des applications diverses dans le champ de l'hydraulique, de l'informatique, de la gestion ou encore la santé et des risques alimentaires.

l'objectif de ce qui suit :

- De rappeler les bases de la théorie de la ruine, nous rappellerons le modèle de Cramér-Lundberg.
- De donner les bases de calcul approché de la ruine en Horizon fini et infini.
- Donner un aperçu sur les généralisations de ce modèle et les résultats obtenus selon les hypothèses faites sur les composantes du modèle.

Les ouvrages suivants : Gerber (1979)[17], Grandell (1991)[19], Asmussen (2000)[5], Goovaerts et al (1990) [18], et d'Asmussen [5] et Albrecher (2010) [4] donnent un aperçu général des principaux résultats de cette théorie.

2.6 Le modèle classique de la théorie de la ruine

Le modèle classique de la théorie de la ruine dit modèle de Cramér(1930)-Lundberg(1903) représente le fonctionnement simplifié d'une compagnie d'assurance. Nous supposons que la compagnie d'assurance reçoit des cotisations de ses assurés, appelées primes, de façon déterministe et continue, à raison de c unités de compte par unité de temps. Elle dispose d'une réserve initiale u pour absorber un éventuel excès de sinistralité, et doit indemniser ses assurés pour les sinistres qui la concernent.

2.6.1 Le modèle de Cramér-Lundberg

Le montant cumulé des sinistres au temps $t \geq 0$ est représenté par les processus stochastiques :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} W_i$$

Avec la convention selon laquelle la somme est nulle si $N(t) = 0$.

Le nombre de sinistres $N(t)$, survenus jusqu'au temps t , est dans ce modèle décrit par un processus de poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Le montant du i^e sinistre survenant à une date T_i est modélisé par une variable aléatoire W_i à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Les $\{W_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ forment une suite de variable aléatoire indépendantes, identiquement distribuées d'espérance $\mathbb{E}(W_i) = \mu$, et indépendantes du processus de poisson $N(t)$.

F_W désignera leur fonction de répartition.

Le montant des réserves de la compagnie d'assurance au temps t est alors décrit par le processus :

$$R(t) = u + ct - S(t). \quad (2.7)$$

Qui pourra également être noté R_t au lieu de $R(t)$ (idem pour S_t au lieu de $S(t)$)

La probabilité de ruine :

-au temps fini t avec réserve initiale u correspond à la probabilité que le réserve devienne strictement négative à un instant précédent t , et se note traditionnellement :

$$\psi(u, t) = \mathbb{P}(\exists s \in [0, t], R(s) < 0).$$

-En temps infini, définissons la probabilité de ruine en horizon infini par :

$$\psi(u) = \psi(u, +\infty) = \mathbb{P}(\exists s \geq 0, R(s) < 0).$$

La probabilité de non ruines correspondantes sera notée :

$$\bar{\psi}(u, t) = 1 - \psi(u, t) \text{ et } \bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u).$$

$$\mathbb{E}S(t) = \mathbb{E}(W_i)\mathbb{E}(N(t)) = \mu\lambda t,$$

et donc :

$$\mathbb{E}R(t) = u + (c - \lambda\mu)t.$$

Nous définissons le **chargement de sécurité relatif (safety loading)** par :

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1.$$

- si $\rho > 0$ alors $\mathbb{E}R(t) \rightarrow \infty$. L'activité est dite rentable. En effet la loi des grand nombre assure que, R_t tend vers $+\infty$ presque sûrement vers l'infini. La probabilité de non ruine est alors non nulle.
- si $\rho < 0$ alors R_t tend vers $-\infty$ presque sûrement quant t tend vers l'infini, et par conséquent $\psi(u) = 1$.
- si $\rho = 0$ la théorie des marches aléatoire montre que :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (R_t) = +\infty.$$

et

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (R_t) = (R_t) = -\infty.$$

De sorte que l'on a aussi dans ce cas : $\psi(u) = 1$.

2.6.2 Renouvellement et équation intégrale

Ce modèle se trouve son origine dans les processus de renouvellement (voir par exemple Asmussen ([5])). Ceux-ci modilisent des occurrences d'évènements arrivant à des instants T_i , les temps inter-arrivés $\Delta T_i = T_i - T_{i-1}$ correspond ici aux durées entres sinistre, avec la convention $T_0 = 0$ étant eux-mêmes indépendants de loi donné F_Δ . Nous avons alors le nombre d'occurrences d'évènements donnés par :

$$N(t) = \max(n \geq 0, \sum_{i=1}^n \Delta T_i \leq t).$$

Les instants T_i sont aléatoires. Un cas particulier intéressant est obtenu lorsque $N(t)$ est un processus de poisson d'intensité $\lambda(t)$.

Une autre manière de décrire le modèle de Cramèr-Lundberg est alors de remarquer que les durées $\Delta T_{i=1, \dots, \infty}$ forment une suite de variables exponentielles $\varepsilon(\lambda)$, $N(t)$ est un processus de poisson d'intensité constante $\lambda(t) = \lambda$. Nous pouvons alors écrire $R(t)$, sous la forme d'une marche aléatoire :

$$R(t) = u + ct - S(t) = u - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i.$$

Avec : $Z_i = W_i - c \Delta T_i$.

L'un des objets les plus importants de ces modèles est la fonction de renouvellement m :

$$m(t) = \mathbb{E}(N(t)) + 1,$$

vue comme une mesure de comptage positive :

$$m([t, t + h]) = \mathbb{E}(N(t + h) - N(t)).$$

De manière générale, si $\mathbb{E}(\Delta T_i) = \lambda^{-1} < \infty$, le théorème de renouvellement dans sa forme la plus simple assure que $m(t)/t \rightarrow \lambda$ quant $t \rightarrow \infty$ et sur un intervalle de temps $[t, t + h]$, le nombre moyen de renouvellements (de sinistres) est proportionnel à λh pour $t \rightarrow \infty$

Le modèle de Cramèr-lundberg avec arrivées poissoniennes des sinistres est asymptotique de modèle de renouvellement.

L'équation de renouvellement apparait naturellement dans la théorie de renouvellement. C'est une équation dans laquelle, $u(t)$ est une fonction connue et $U(t)$ une équation à déterminer qui satisfait l'équation intégrale :

$$U(t) = u(t) + \int_0^t U(t - v) F_\Delta(dv).$$

Avec : F_Δ est la loi des temps des inter-arrivées.

La solution de cette équation est donnée par le théorème de Smith (1955), qui établit que si $u(t)$ est une fonction bornée sur tout intervalle fini, alors la solution unique (parmi les fonctions bornées sur tout intervalle) est donnée par :

$$U(t) = \int_0^t u(t-s)m ds.$$

Où m est une mesure de comptage associée à des temps inter-arrivées de loi F_Δ . Si de plus $u(t)$ est fonction intégrable au sens de Riemann sur \mathbb{R}^+ alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (U(t)) = \lambda \int_0^\infty u(s)ds.$$

Proposition 2.6.1. *La probabilité de non ruine $\bar{\psi}(u)$ est continue sur \mathbb{R}^+ et admet comme dérivées à gauche et à droite respectivement $\bar{\psi}'_-(u)$ et $\bar{\psi}'_+(u)$, qui vérifient les équations integro-différentielles respectives :*

$$c\bar{\psi}'_+(u) = \lambda(\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y)dF_W(y)), \quad (2.8)$$

$$c\bar{\psi}'_-(u) = \lambda(\bar{\psi}(u) - \int_0^{u-} \bar{\psi}(u-y)dF_W(y)). \quad (2.9)$$

Proposition 2.6.2. Formule de Pollackzek-Khinchine(Droesbeke J J [12]) *Pour tout $u \geq 0$ la probabilité de survie partant de u vérifie :*

$$\bar{\psi}(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^n \bar{F}_w^{s*n}(u).$$

Cette formule fournit un premier moyen d'obtenir numériquement la probabilité de ruine en temps infini et est particulièrement intéressante lorsque les W_i sont des sinistres à queue lourde. avec :

- F_w représente la fonction de répartition de W .
- F_w^s représente la fonction de survie de W
- $\bar{F}_w^s = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}_w dy$, représente la fonction de survie intégrale de W .
- $\bar{F}_w^{s*n}(u)$ représente le $n^{\text{ème}}$ produit de convolution de la fonction F_w^s .

2.6.3 Généralisation du modèle de base

La première généralisation possible du modèle classique est le modèle dit de Sparre Andeersen, dans lequel $N(t)$ n'est plus un processus de poisson, mais un processus de renouvellement stationnarisé, donné par des temps inter-sauts Δ_i i.i.d, indépendant des w_i , et de fonction de répartition F_Δ . Lorsque u est grand, nous disposons dans ce modèle de renouvellement de résultats asymptotiques. Ces résultats sont utilisables pour des montants de réserve initiale très grands.

Le modèle classique de la théorie de la ruine, décrit précédemment, peut être généralisé sous diverse formes, que nous pouvons classer en deux rubriques, suivant que nous nous intéressons aux hypothèses portant sur le passif de la compagnie (sur la modélisation des sinistres) ou sur son actif (sur les hypothèses modélisant la stratégie de versement de dividendes ou l'investissement de la réserve et la prise en compte du taux d'intérêt.

Au niveau du passif, les modifications concernent principalement la prise en compte des corrélations et des changements éventuels de régime. Les modifications plutôt financières consistent à introduire un taux d'intérêt instantané (déterministe ou stochastique), et dans le processus des réserves une composante Brownienne ou de type Lévy.

La plus importante de ces modifications prend en compte une politique de versements de dividendes aux actionnaires dès que la richesse devient aussi élevée. Les modèles avec dividendes et taxes sont devenus un champ de recherche à part entière de la théorie de ruine.

2.7 Dividendes

2.7.1 Versement de dividende au-delà d'une barrière

Outre le fait que le versement de dividendes aux actionnaires au-delà d'une barrière supérieure est un phénomène réaliste, il "présente l'énorme avantage " de conduire à une probabilité de ruine en temps infini égale à 1, même si le chargement de sécurité est positif. Cela permet de rapprocher la théorie de la ruine avec celle de risque de défaut, selon laquelle aucune compagnie n'est éternelle.

La probabilité de ruine en temps infini est donc toujours 1 en risque de défaut, alors que la théorie de la ruine avait pour but initial de déterminer le niveau de réserve nécessaire pour rendre cette probabilité inférieure à ϵ . Nous attribuons traditionnellement les premières études de ce type de modèle à de Finetti [1975]([14]), dès lors, nous pouvons nous poser des problèmes de politique de versement de dividendes optimale.

Nous pouvons également ajouter une composante brownienne ou Lévy, et utiliser des méthodes du type Hamilton-Jacobi-Bellmann, ou utiliser les méthodes du contrôle impulsif, c'est-à-dire réagir à un excès de capital par un versement de dividendes traduit par un saut.

La méthode la plus simple consiste à considérer une barrière horizontale de niveau $b \geq u$, et à verser instantanément aux actionnaires l'excès ou une fraction de l'excès de réserve par rapport à ce niveau b . Cela correspond soit à faire stagner le processus en b

jusqu'au prochain sinistre, soit à créer une sorte d'angle de réfraction lors de la traversée de la barrière en b .

Avec cette stratégie de dividendes, le processus $U_b(t)$ représentant la richesse de la compagnie au temps t , se déduit de processus classique $R(t)$. Soit $b > u$ et :

$$X(t) = S(t) - ct.$$

2.8 Conclusion

L'objet de ce chapitre est de présenter des outils permettant de classer les risques selon leur dangerosité. Il reviendra sur les ordres de comparaison, en discutant les propriétés des ordres induits par les mesures de risque. Le chapitre suivant est chargé d'informer le lecteur sur les différentes méthodes d'approximation de la VaR.

Chapitre 3

Estimation de la Value-at-Risk : Application en finance

3.1 Introduction

La VaR (Value-at-Risk) est très utilisé dans les milieux financiers. Elle permet de mesurer la perte maximale lié à une position de marché, sur une fenêtre de temps particulière (par exemple une période de temps de t à $t + h$) et pour un niveau de probabilité donné en supposant que l'on connaisse la loi du rendement du portefeuille, dans le cadre d'une probabilité égale à 95%. Cela signifie simplement que dans 95% des cas, la perte ne devrait pas dépasser cette mesure de risque.

De plus la VaR repose sur l'idée de coupler le montant des pertes (quantification brute) et la fréquence des pertes (prise en compte du risque (Temame([45]))).

3.2 Les différentes méthodes d'estimation de la Value-at-Risk

Dans cette section nous allons nous intéresser aux différentes méthodes d'estimation de la *Value - at - Risk*. Le but est donc ici de présenter les méthodes les plus utilisées et de choisir une méthode appropriée à notre problématique. De manière générale, les facteurs de risque du marché (i.e. indices boursiers, taux d'intérêt, cours des titres, etc.) ou de crédit (i.e. probabilités de défaut) sont des variables qui vont déterminer les risques effectivement portés par l'investisseur. Il faut donc tenir compte de la linéarité (actions) ou non (options, futures, etc.) du prix des actifs.

Maintenant, nous présentons quelques méthodes pour estimer la *VaR*, voir C. Marinelli ([30]) et le livre de J. A. McNeil et al ([32]) pour plus de détails. Dans cette partie,

nous allons présenter différentes techniques d'estimation de la Value-at-Risk. Ces différentes méthodes se répartissent en trois catégories :

- Estimation paramétrique.
- Estimation non paramétrique.
- Estimation semi-paramétrique.

3.3 Les méthodes d'estimation paramétriques.

Les méthodes d'estimation paramétrique de la VaR reposent sur trois hypothèses simplificatrices :

1. Les distributions des rendements des actifs qui composent le portefeuille suivent une loi normale ;
2. La relation entre les variations de valeur du portefeuille et les variations des variables du marché sont linéaires ;
3. Les produits dérivés (Futures, Swaps, . . .) sont linéaires.

Nous allons donc décrire dans cette partie trois approches d'estimation paramétrique de la VaR :

- l'approche univariée.
- l'approche variance-covariance.
- la méthode d'indicateurs de risque (ou de RiskMetrics).

a) Approche univariée

On considère le rendement global du portefeuille comme celui d'un actif particulier et on calcule la VaR directement sur ce rendement agrégé.

(H1) On suppose que la distribution des $P\&L$ à la date t est une distribution normale d'espérance μ et de variance σ^2 .

$$R_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

On cherche donc la valeur de la VaR à la date t pour un taux de couverture de α telle que :

$$\mathbb{P}[R_t \leq -VaR_t(\alpha)] = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\frac{R_t - \mu}{\sigma} \leq \frac{-VaR_t(\alpha) - \mu}{\sigma}\right] = \alpha.$$

D'après l'hypothèse (H1) :

$$\frac{R_t - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Et par conséquent, si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale $N(0, 1)$, on obtient :

$$\Phi\left(\frac{-VaR_t(\alpha) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha \Leftrightarrow VaR_t(\alpha) = -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\alpha).$$

Sous l'hypothèse (H1), la VaR associée à un taux de couverture de α est définie par :

$$VaR_t(\alpha) = -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\alpha), \quad (3.1)$$

où :

- μ est l'espérance de la distribution des $P\&L$.
- σ^2 variance de la distribution des $P\&L$.

Remarque 3.3.1. En réalisant ces calculs sur une distribution journalière des rendements, on exprime une VaR_1 à horizon d'un jour. Pour passer d'un horizon d'un jour à un horizon de X jours, on utilisera la formule suivante : $VaR_X = VaR_1\sqrt{X}$.

b) Approche variance-covariance

Il s'agit d'une approche multi variée de la VaR . Au lieu de considérer le rendement global du portefeuille comme celui d'un actif particulier, on prend en compte explicitement les corrélations entre les actifs du portefeuille. On considère un portefeuille de N actifs corrélés entre eux. Soit $R_t(P)$ le rendement du portefeuille d'actifs à la date t ,

$$R_t(P) = \sum_{i=1}^N x_t^i R_t^i. \quad (3.2)$$

Avec :

- x_t^i représente le $i^{\text{ème}}$ poids de $i^{\text{ème}}$ rendement dans le portefeuille ;
- R_t^i représente la $i^{\text{ème}}$ réalisation de $i^{\text{ème}}$ rendement dans le portefeuille ;

L'hypothèse principale est donc que les distributions des rendements des actifs qui composent le portefeuille suivent une *loi normale*, i.e.

$$\forall i \ R_t^i \sim \mathcal{N}(\mu_t^i, \sigma_t^i).$$

On définit donc la **rentabilité** espérée du portefeuille, i.e. son espérance par :

$$\mathbb{E}(R_t(P)) = \sum_{i=1}^N x_t^i \mathbb{E}(R_t^i) = \sum_{i=1}^N x_t^i \mu_t^i = x_t' \mu_t x_t, \quad (3.3)$$

Où :

- $\mu_t = (\mu_t^1, \mu_t^2, \dots, \mu_t^N)'$.
- $x_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^N)'$.

On définit ensuite la **volatilité** du portefeuille, i.e. sa variance par :

$$Var[R_t(P)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_t^i x_t^j cov(R_t^i, R_t^j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_t^i x_t^j \gamma_t^{ij} = x_t' \Gamma_t x_t, \quad (3.4)$$

Où :

- Le vecteur x_t représente poids des actifs dans le portefeuille ;
- Le vecteur μ_t représente l'espérance des rendements des actifs du portefeuille ;
- La matrice $\Gamma_t = (\gamma_t^{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ est la matrice de covariance des actifs du portefeuille.

On aboutit donc à la définition suivante :

Dans le cas d'un portefeuille d'actifs corrélés entre eux, la formule de calcul de la *VaR* associée à un taux de couverture de α est la suivante :

$$VaR_t(\alpha) = -E[R_t(P)] - \sqrt{Var[R_t(P)]} \Phi^{-1}(\alpha). \quad (3.5)$$

$$= -x_t' \mu_t - (x_t' \Gamma_t x_t)^{1/2} \Phi^{-1}(\alpha). \quad (3.6)$$

Où :

- le vecteur x_t' représente le poids des actifs dans le portefeuille ;
- le vecteur μ_t représente l'espérance des rendements des actifs du portefeuille ;
- la matrice Γ_t est la matrice de covariance des actifs du portefeuille.

En pratique, on estime μ_t et Γ_t sur les données.

c) L'indicateurs de risque (Méthode riskMetrics)

Ce modèle a été développé par la banque JP Morgan au début des années 90. Il diffère de l'approche Variance-covariance au niveau du calcul de la volatilité des rendements du portefeuille. La volatilité est estimée en utilisant ses valeurs passées ainsi que celles des rendements en accordant plus de poids aux valeurs les plus récentes. Ceci permet de pouvoir s'adapter plus facilement aux changements de conditions de marché et de pouvoir mieux tenir compte des événements extrêmes. On note v_t la volatilité des rendements du portefeuille à la date t :

$$v_t = Var[R_t(P)]. \quad (3.7)$$

La volatilité conditionnelle des rendements du portefeuille va être une combinaison linéaire de l'innovation passée et de la valeur passée de la volatilité :

$$v_t = v_{t-1} + (1 - h)(r_{t-1}(P))^2, \quad (3.8)$$

où

h est un paramètre de lissage (par exemple, $h = 0,97$).

On aboutit donc à la définition suivante :

Dans le cas d'un portefeuille d'actifs corrélés entre eux, la VaR issue de RiskMetrics définie

pour un taux de couverture de α peut s'écrire sous la forme :

$$VaR_t(\alpha) = -\mathbb{E}[R_t(P)] - (v_t)^{1/2}\Phi^{-1}(\alpha).$$

Où :

- r_{t-1} est la réalisation associée à la v.a.r R ;
- v_t est estimée à partir de la formule $v_t = v_{t-1} + (1 - h)(r_{t-1}(P))^2$;
- h paramètre de lissage (on fixe souvent $h = 0,97$).

Avantages et limites des méthodes d'estimation paramétriques

Le principal avantage des méthodes d'estimation paramétriques est que les calculs sont simples et rapides, et nécessitent de connaître uniquement la matrice de variance-covariance des rendements du portefeuille.

Cependant, ces méthodes restent inadaptées aux portefeuilles " non linéaires ", aux queues de distribution épaisses et aux distributions non normales de rendements.

3.4 Estimation non paramétrique

Dans cette partie, nous allons présenter différentes méthodes d'estimation non paramétrique de la Value-at-Risk. Dans le cas de l'estimation non paramétrique, on n'impose a priori aucune distribution paramétrique de pertes et profits. Dans cette section, on considèrera une approche un peu variée de la VaR , i.e. le portefeuille est considéré comme un actif particulier possédant un rendement global.

3.4.1 Simulation historique notée HS pour Historical Simulation

Il s'agit de la méthode la plus simple à réaliser, et certainement la plus utilisée actuellement.

a) Principe et définition

Le principe de cette méthode est d'estimer la VaR par le fractile empirique des rendements passés.

Soit $\{R_1, R_2, \dots, R_T\}$ une suite de rendements d'un actif ou d'un portefeuille observés aux instants t allant de 1 à T . On dispose d'une série de T réalisations $\{r_1, r_2, \dots, r_T\}$ associée à cette suite de variables aléatoires.

a) Problème :

On ne dispose que d'une seule réalisation r_i pour chaque variable aléatoire R_i . Il est donc impossible d'estimer la densité associée à chaque variable R_i et par conséquent la VaR . La méthode de simulation historique va donc reposer sur l'hypothèse suivante :

(H1) On suppose que les rendements $(R_t)_{t=1,\dots,T}$ sont indépendants et identiquement distribués i.e.

$$\forall t = 1, \dots, T : f_{R_t}(x) = f_R(x).$$

$$\forall t : VaR_t(\alpha) = VaR(\alpha).$$

Grâce à cette hypothèse, on dispose maintenant d'un échantillon de T réalisations $\{r_1, r_2, \dots, r_T\}$ d'une variable aléatoire R de densité $f_R(\cdot)$.

On peut donc estimer la VaR . Sous l'hypothèse (H1), un estimateur convergent de la VaR pour un taux de couverture de α est défini par le fractile empirique d'ordre α associé aux T réalisations historiques des rendements $\{r_1, r_2, \dots, r_T\}$

$$\widehat{VaR}(\alpha) = \text{percentile}(\{r_j\}_{j=1}^T, \alpha). \quad (3.9)$$

On a le résultat suivant :

$$\widehat{VaR}(\alpha) \xrightarrow{P} VaR(\alpha) \text{ quand } T \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Ce qui justifie l'utilisation d'une telle approche.

Remarque 3.4.1. La fonction « centile » (ou percentile en anglais) définit sous excel et elle renvoie le $k^{\text{ème}}$ centile des valeurs d'une plage de données.

syntaxe :

CENTILE(Matrice;k),

avec :

matrice : Obligatoire. Représente la matrice ou la plage de données.

k : Obligatoire. Représente le centile, celui-ci doit être compris entre 0 et 1 inclus.

c) Les limites de la Simulation Historique La VaR HS est l'estimateur d'une VaR associée à une distribution de $P\&L$ non conditionnelle. En d'autres termes, cette distribution n'est pas calculée sachant un ensemble d'informations disponibles à la date t . Par conséquent la prévision de la VaR selon la méthode de Simulation Historique sera invariante aux modifications de l'environnement économique. On qualifie donc les prévisions de la VaR selon la méthode de Simulation Historique de « plates » ou « pratiquement plates ».

d) Prévision de la VaR selon la méthode de Simulation Historique

d.1) Principe : Utiliser le fractile empirique associé aux observations passées. En effet, puisque les rendements sont iid, R_{T+1} a la même distribution que R_1, \dots, R_T et donc un estimateur de sa VaR peut être obtenu à partir de l'estimateur de la VaR des rendements passés. Le backtesting consiste à construire une suite de prévisions de la VaR . Pour ce faire, il existe 2 solutions :

d.2) Prévision Glissante :

Construction d'un estimateur glissant (rolling estimate) de la VaR en $T + 1$, à partir d'un ensemble d'informations récentes de taille fixe T_e appelée largeur de fenêtre. Les prévisions

glissantes de la VaR pour un taux de couverture de α par la méthode HS correspondent au fractile empirique d'ordre α de la chronique des rentabilités passées observées sur une fenêtre de largeur T_e .

$$VaR_{t/(t-1)}(\alpha) = \text{percentile}((r_j)_{j=t-T_e}^{t-1}, 100\alpha)$$

Plus la largeur de fenêtre T_e est petite, plus les prévisions sont volatiles.

Plus la largeur de fenêtre T_e est grande, plus les prévisions sont rigides. La VaR prévue convergera vers la VaR non conditionnelle et tendra donc vers une valeur constante dans le temps.

d.3) Prévision non Glissante :

Construction d'une succession d'estimateurs de la VaR conditionnellement à toute l'information disponible. L'ensemble des observations connues croît donc au fur et à mesure du temps. Généralement, on utilise la prévision glissante afin d'introduire un minimum de conditionnement et de limiter le poids des rendements plus anciens.

3.4.2 Méthode Bootstrap de Simulation Historique

C'est une méthode stochastique alternative à la simulation historique. L'idée consiste à construire plusieurs échantillons de rendements suivant la même loi que l'échantillon historique. Pour construire ces échantillons, on va tirer au hasard et avec remise des observations dans l'échantillon historique.

A partir de chaque nouvel échantillon ainsi constitué, on estime alors la VaR par la méthode du percentile utilisée dans la Simulation Historique standard. Au final, on dispose de S estimations de la VaR et on définit une estimation en faisant la moyenne de ces estimations.

Soit $\{(\tilde{r}_j^s)\}_{j=1}^T$ une suite de rendements tirés au hasard avec remise dans l'échantillon des rendements historiques, et soit $\widehat{VaR}^s(\alpha)$ la $VaR - HS$ associée à cet échantillon de rendements bootstrappés (pour un taux de couverture de α). L'estimateur BHS de la VaR correspond à la moyenne empirique des $VaR - HS$ obtenues à partir des S échantillons bootstrap :

$$\widehat{VaR}(\alpha) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \widehat{VaR}^s(\alpha). \quad (3.11)$$

avec $s = 1, \dots, S$

$$\widehat{VaR}^s(\alpha) = \text{percentile}(\{\tilde{r}_j^s\}_{j=1}^T, 100\alpha). \quad (3.12)$$

Par ailleurs, on peut bâtir un intervalle de confiance pour la VaR pour un risque β donné :

$$IC_{1-\beta}(VAR) = \left[\widehat{VAR}_{[\beta/2]}, \widehat{VAR}_{[1-\beta/2]} \right] \quad (3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} - \widehat{VAR}_{[\beta/2]} &= \text{percentile} \left(\left\{ \widehat{VaR}^s(\alpha) \right\}_{s=1}^S, 100 * (\beta/2) \right) \\ - \widehat{VAR}_{[1-\beta/2]} &= \text{percentile} \left(\left\{ \widehat{VaR}^s(\alpha) \right\}_{s=1}^S, 100 * (1 - \beta/2) \right) \end{aligned}$$

Remarque 3.4.2. On peut combiner la méthode de Bootstrap avec d'autres méthodes d'estimation de la VaR. Une fois les échantillons bootstrap constitués, on calcule la VaR avec la méthode désirée à partir des nouvelles distributions générées, et on définit une estimation de la VaR en faisant la moyenne des différentes estimations basées sur le ré-échantillonnage

3.4.3 Weighted Historical Simulation (WHS)

a) Les différentes pondérations possibles

Dans la méthode de Simulation Historique, si l'on considère une estimation de la VaR pour un taux de couverture de 1% à partir d'une fenêtre glissante de 500 réalisations, cela revient à sélectionner le 5^{ème} rendement le plus faible parmi les 500 réalisations les plus récentes. Parmi ces 500 réalisations, tous les rendements ont donc le même poids : le rendement de la veille va avoir la même importance que celui d'il y a 500 jours.

Une approche alternative consiste donc à attribuer aux rendements des poids en fonction soit de leur ancienneté, soit de la volatilité observée des marchés, ou de tout autre facteur. Cette méthode de Simulation Historique " Pondérée " s'appelle la *Weighted Historical Simulation (WHS)* et recouvre différentes variantes selon le facteur de pondération utilisé :

- La méthode **Aged-weighted HS** où les poids dépendent de l'ancienneté des observations ;
- La méthode **Volatility-weighted HS** où les poids dépendent de la volatilité. L'objectif est de prendre en compte les changements récents de volatilité ;
- La méthode **Correlation-weighted HS** où l'on ajuste les rendements passés de façon à ce qu'ils reflètent les changements entre les corrélations passées et futures.

b) Aged-weighted HS ou Méthode Hybride

On exploite dans cette méthode une information supplémentaire, à savoir le caractère plus informatif des rentabilités les plus proches de l'horizon de prévision.

Méthodologie de calcul de la VaR Hybride

On considère une largeur de fenêtre T_e .

1. On associe à chacune des T_e rendements les plus récents $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_{t-T_e}$ une pondération décroissante avec le temps, i.e. plus la rentabilité est ancienne, plus la pondération est faible. Les pondérations sont donc de la forme suivante :

$$\frac{1-h}{1-h^{T_e}} \text{ pour } r_{t-1}, \left(\frac{1-h}{1-h^{T_e}} \right) h \text{ pour } r_{t-2},$$

$$\left(\frac{1-h}{1-h^{T_e}} \right) h^2 \text{ pour } r_{t-3}, \dots, \left(\frac{1-h}{1-h^{T_e}} \right) h^{T_e-1} \text{ pour } r_{t-T_e}.$$

Avec $0 < h < 1$.

2. On ordonne ensuite les rentabilités (et les pondérations qui leur sont associées) dans l'ordre croissant.
3. On somme les poids ordonnés suivant les niveaux de rentabilité croissants jusqu'à atteindre le taux de couverture de α désiré. La *VaR* hybride est alors égale à la rentabilité correspondant au dernier poids utilisé dans la sommation.

3.5 Estimation semi-paramétrique

3.5.1 Théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes mesure le risque extrême directement à partir des queues de distribution, contrairement aux autres méthodes qui estiment la distribution dans son ensemble.

Cadre d'analyse

On considère un n-échantillons X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires iid de fonction de répartition F .

Soit $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ représentant la plus grande perte observée sur les n pertes observées X_1, \dots, X_n .

Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n étant iid, on peut facilement calculer la fonction de répartition de M_n :

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F_n(x). \quad (3.14)$$

Cependant, si on considère right-end point de F , i.e. le point x_F tel que :

$$x_F = \sup\{x | F(x) < 1\}$$

On remarque que :

$$\forall x \leq x_F : \mathbb{P}(M_n \leq x) = F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ car } F(x) < 1. \quad (3.15)$$

$$\forall x > x_F : \mathbb{P}(M_n \leq x) = F^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ car } F(x) = 1 \quad (3.16)$$

La loi de M_n converge donc vers une loi dégénérée (prenant seulement les valeurs 0 ou 1) lorsque n tend vers l'infini.

Le principe de la théorie des valeurs extrêmes va donc être d'identifier la famille de loi vers laquelle M_n va converger et d'estimer F par cette fonction, lorsque n tend vers l'infini.

On veut donc trouver les distributions limites telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H(x), \quad (3.17)$$

non dégénérée.

Avec : $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$

Théorème 3.5.1. (Bruno Portier M [7])(limite de Fisher-Tippett) Il s'agit du théorème fondamental de la théorie des valeurs extrêmes. On considère des variables aléatoires $(X_n)_n$ iid. S'il existe des constantes $c_n > 0$ et $d_n \in \mathbb{R}$ et H une fonction de distribution non dégénérée telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H(x). \quad (3.18)$$

non dégénérée. alors H appartient à l'un des 3 types suivants de distribution :

– **Type 1 Fréchet** : Soit $\alpha > 0$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \text{sinon.} \end{cases}$$

– **Type 2 reverse Weibull** : Soit $\alpha > 0$

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}), & \text{si } x \leq 0; \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

– **Type 3 Gumbel** : $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$

Les fonctions Φ_α, Ψ_α et Λ sont appelées les distributions standards de valeurs extrêmes.

Définition 3.5.1. On dit que la variable aléatoire X (ou la fonction de répartition F) appartient au MDA (Maximum Domain of Attraction) de H , si

$$\exists c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H(x) \quad (3.19)$$

Dans la pratique, la majorité des lois usuelles appartiennent à l'un des 3 MDA de Gumbel, Fréchet ou Weibull.

Exemple :

– Les distributions exponentielles, Gamma et Log-normale appartiennent au MDA Gumbel (distributions à queues fines).

- Les distributions de Pareto, Log-Gamma et de Student appartiennent au MDA Fréchet (distributions à queues lourdes).
- Les distributions uniformes appartiennent au MDA Weibull (distributions sans queue).

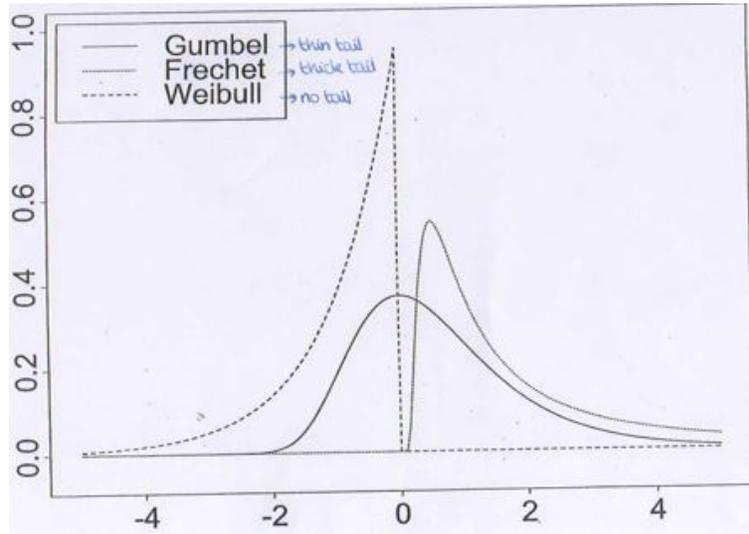


FIG. 3.1: Densités des distributions standards de valeurs extrêmes.

Proposition 3.5.1. (*Jenkinson–Von Mises*) Les distributions Φ_α, Ψ_α et Λ sont des cas particuliers de la distribution

$$H_\xi(x) = \exp \left[- \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{-1}{\xi}} \right] \quad (3.20)$$

Où μ est un paramètre de localisation et σ un paramètre de dispersion. Cette fonction de distribution correspond à la loi de probabilité des valeurs extrêmes généralisée, appelée " *Generalized Extreme Value distribution* " (GEV). On a les correspondances suivantes :

- Fréchet : $\xi = \alpha^{-1} > 0$.
- Weibull : $\xi = \alpha^{-1} < 0$.
- Gumbel : $\xi \rightarrow 0$.

Remarque 3.5.1. En pratique, on ne connaît pas les valeurs de μ, σ et ξ . Il faut donc les estimer à partir des données (par exemple par la méthode du maximum de vraisemblance) et les remplacer par leur estimation. Le paramètre ξ est couramment appelé " indice de queue " ou " indice de valeur extrême ". Plus cet indice est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important. On parle alors de distributions à " queues épaisses ".

Méthode des excès et distribution de Pareto généralisée La méthode des excès est également connue sous le nom de Peaks Over Threshold (POT). Elle permet de modéliser les queues de distribution d'une série de données. A partir de cette distribution, on peut alors estimer la probabilité d'occurrence d'évènements rares, au-delà des plus grandes valeurs observées.

Définition 3.5.2. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et μ un réel suffisamment grand appelé seuil. On définit les excès au-delà du seuil μ comme l'ensemble des variables aléatoires Y telles que :

$$y_i = x_i - \mu, \quad x_i > \mu. \quad (3.21)$$

On appelle right-end point de F , le point x_F tel que :

$$x_F = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{x \mid F(x) < 1\}$$

On cherche donc à partir de la distribution F de X , à définir une distribution conditionnelle F_μ par rapport au seuil μ pour les variables aléatoires dépassant ce seuil. On définit alors la *distribution conditionnelle des excès* F_μ par :

$$F_\mu(y) = P[X - \mu < y \mid X > \mu] = \frac{F(y + \mu) - F(\mu)}{1 - F(\mu)}. \quad (3.22)$$

pour $0 \leq y \leq x_F - \mu$.

$$F_\mu(x) = \mathbb{P}[X < x | X > \mu] = \frac{F(x) - F(\mu)}{1 - F(\mu)}. \quad (3.23)$$

Pour $x \geq \mu$.

L'objectif de la méthode POT est de déterminer par quelle loi de probabilité il est possible d'estimer cette distribution conditionnelle des excès. Le théorème de Picklands, Balkema et Haan est le résultat théorique central de la théorie des valeurs extrêmes :

Théorème 3.5.2. (Picklands, Balkema et Haan) *Si F appartient à l'un des 3 MDA de Gumbel, Fréchet ou Weibull, alors il existe une fonction de répartition des excès au-delà du seuil μ , notée F_μ qui peut être approchée par une loi de Pareto Généralisée (GPD) telle que :*

$$\lim_{\mu \rightarrow x_F} \sup |F_\mu(y) - H_{\sigma,\xi}(y)| = 0 \quad (3.24)$$

La loi de Pareto généralisée $H_{\sigma,\xi}$ s'écrit sous la forme : $H_{\sigma,\xi}(y) = 1 + \log H_\xi(y)$ où $H_\xi(y)$ est la loi de probabilité des valeurs extrêmes généralisée.

En considérant le modèle GEV avec le paramètre de localisation $\mu = 0$ (car pour les excès, l'effet de ce paramètre est pris en compte dans la suite (d_n) , on montre que la loi GPD correspond à :

$$H_{\sigma,\xi}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{y}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{si } \xi \neq 0; \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\sigma}), & \xi = 0. \end{cases}$$

Avec

$$- y \in [0; x_F - \mu] \text{ si } \xi \geq 0$$

$$- y \in [0; -\frac{\sigma}{\xi}] \text{ si } \xi < 0$$

On a vu que plus l'indice de queue ξ est élevé, plus la distribution considérée a des queues épaisses. Par conséquent, $\xi > 0$ signifie que la probabilité d'occurrences de rentabilités extrêmes et notamment le risque de pertes extrêmes est plus importante que ce que prévoit la loi normale. Ainsi, le risque d'investissement, i.e. des pertes extrêmes est d'autant plus important que l'indice de queue correspondant à ses plus faibles rentabilités (queue de gauche) est élevé. A partir de ces résultats, il est possible d'évaluer la perte maximale pour une probabilité donnée et sous des conditions extrêmes de marché. Un estimateur de la distribution conditionnelle des excès et donc un estimateur de la VaR avec N_μ le nombre d'excès au-delà du seuil μ sont ainsi donnés par :

$$\widehat{F}(x) = 1 - \frac{N_\mu}{n} \left(1 + \widehat{\xi} \frac{x - \mu}{\widehat{\sigma}} \right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}}. \quad (3.25)$$

et donc :

$$\widehat{VaR}_\alpha = \mu + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \left[\left(\frac{n}{N_\mu} (1 - \alpha) \right)^{-\widehat{\xi}} - 1 \right] \quad (3.26)$$

3.6 Application en finance

3.6.1 Présentation de la compagnie d'assurance AXA

Axa est un groupe international français spécialisé dans l'assurance depuis sa création (Paris, France.), et dans la gestion d'actifs depuis 1994. En 2015, il est le numéro deux de l'assurance dans le monde en termes de chiffre d'affaires.

AXA a été créée par Claude Bébéar en 1817.

3.6.2 Données

Les cours quotidiens (présentés sous excel dans l'annexe) sont observés sur la période du 25/10/2007 au 23/10/2009.

L'objectif principal de cette étude est d'appliquer la simulation historique HS pour le calcul de la VaR .

pour ce faire, on a suivi les 3 étapes suivantes :

1^{ère} étape :

Nous avons téléchargé les cours de bourse sur Internet au format TXT.

(URL : <http://www.abcbourse.com>).

2^{ème} étape :

Nous avons enregistré ces données au format CSV afin de pouvoir exploiter les données sous Excel ou R.

3^{ème} étape :

Exploitation des données.

On dispose donc du cours de clôture de l'action AXA du 25/10/2007 au 23/10/2009.

À partir de ces valeurs, on calcule le rendement associé :

Soit P_t la valeur de l'actif à la date t , le rendement associé est défini par :

$$R_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right). \quad (3.27)$$

Ensuite, nous pouvons exploiter ces données sous Excel ou R. Le logiciel R met à notre disposition des outils utiles pour réaliser l'analyse descriptive de AXA et de calculer la VaR .

✓ 1) À l'aide d'Excel

Nous pouvons ainsi visualiser le graphe des rendements quotidiens d'AXA du 25/10/2007 au 23/10/2009, (voir Fig 3.2).

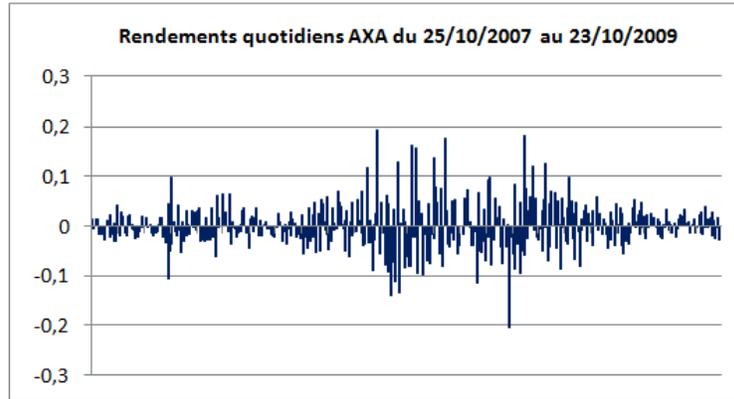


FIG. 3.2: Rendements quotidiens du cours d'AXA sous Excel.

Nous classons ensuite les valeurs des rendements par ordre croissant et on obtient alors le graphe des fractiles de la distribution des rendements. Pour obtenir la VaR , il suffit de prendre en abscisse le taux de couverture souhaité (par exemple 5%) et on obtient en ordonnée le fractile correspondant i.e. la Value-at-Risk pour le taux de couverture considéré, (voir Fig 3.3)

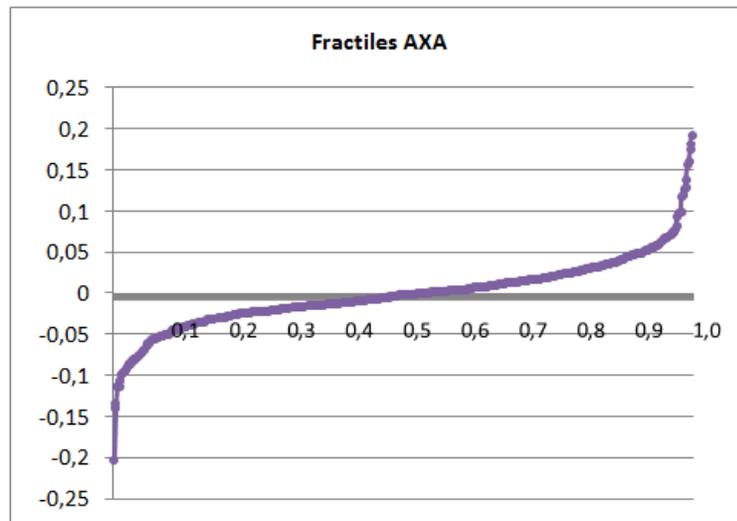


FIG. 3.3: Fractiles AXA sous Excel.

✓ 2) À l'aide du logiciel R

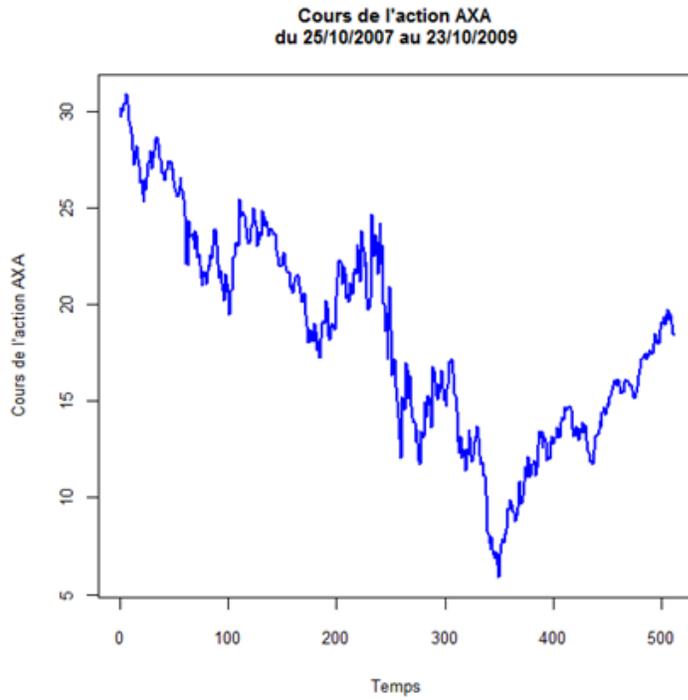


FIG. 3.4: Cours de l'action AXA.

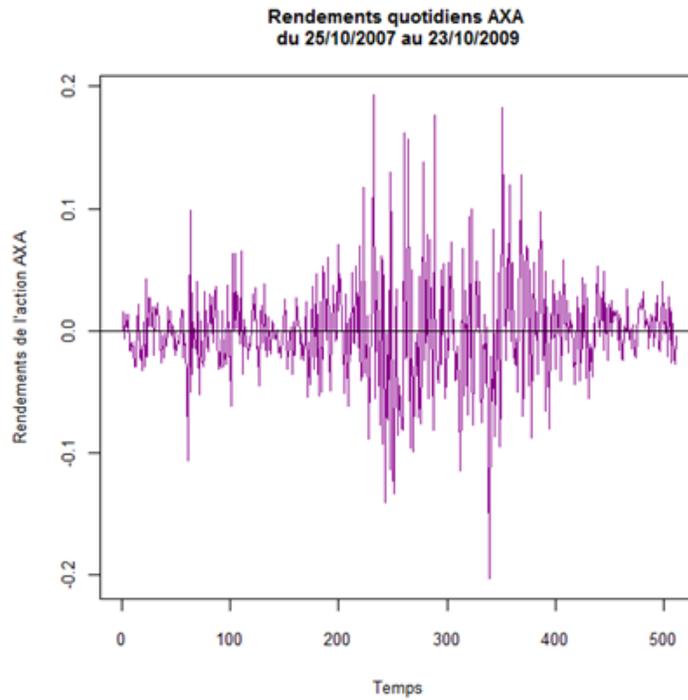


FIG. 3.5: Rendements quotidiens AXA.

Le test de Shapiro-Wilk et le QQ plot permettent de déterminer si les rendements du cours de l'action AXA satisfont l'hypothèse de normalité. La tendance clairement non linéaire du QQ plot nous permet à première vue de rejeter l'hypothèse de normalité.

Le test de Shapiro-Wilk permet de donner une réponse plus précise : en effet, la p-value de $1.55e - 12$ est inférieure à 0.01 et 0.05, donc on rejette l'hypothèse de normalité aux risques 1% et 5%.

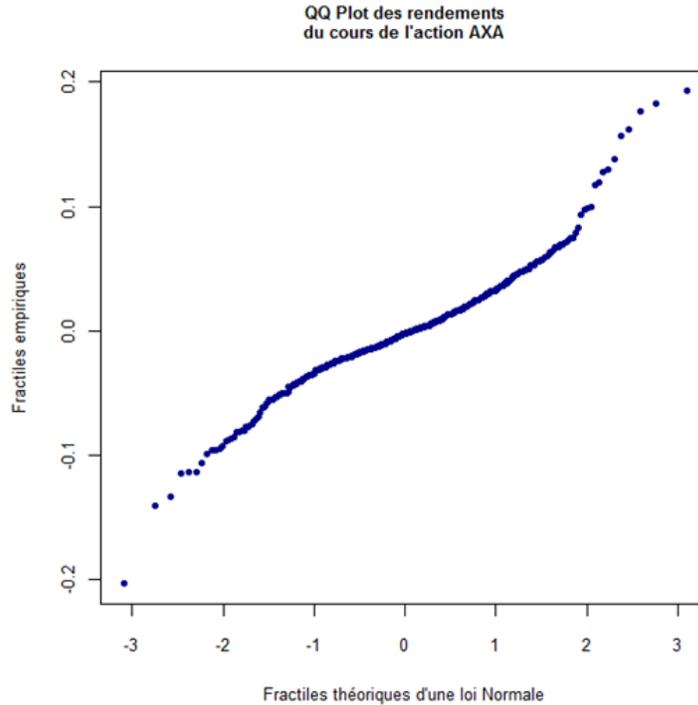


FIG. 3.6: QQ Plot des rendements du cours de l'action AXA.

On dispose dans ce cas d'un échantillon de 510 réalisations r_1, r_2, \dots, r_{510} . Pour un taux de couverture $\alpha = 1\%$, la $\widehat{VAR}_t(1\%)$ va correspondre à la 6^{ème} valeur de la suite des $(r_i)_i$ ordonnée par ordre croissant :

$$\widehat{VAR}_t(1\%) = -0,113307885.$$

i.e. si l'on dispose d'un portefeuille d'actions AXA d'un montant total d'1 million d'euros, si l'on détient ce portefeuille d'actions pendant 1 journée, il y a 1% de risque de réaliser une perte au moins égale à 113 308 euros. Pour un taux de couverture $\alpha = 5\%$, la $\widehat{VAR}_t(5\%)$ va correspondre à la 26^{ème} valeur de la suite des $(r_i)_i$ ordonnée par ordre croissant :

$$\widehat{VAR}_t(5\%) = -0,070793052.$$

i.e. si l'on dispose d'un portefeuille d'actions AXA d'un montant total d'1 million d'euros, si l'on détient ce portefeuille d'actions pendant 1 journée, il y a 5% de risque de réaliser une perte au moins égale à 70 793 euros.

3.7 Conclusion

Dans ce troisième chapitre, on a présenté les trois méthodes pour estimer la VaR : estimation paramétrique, estimation non paramétrique, et estimation semi-paramétrique. Nous avons ensuite présenté une application en finance afin d'illustrer comment estimer la VaR par la méthode non paramétrique (simulation historique HS).

Conclusion générale

Un des problèmes fondamentaux rencontrés en finance et en assurance concerne la nécessité de mettre en place une évaluation journalière du risque. Pour cela les mesures de risque prennent aujourd'hui une part importante, et de plus en plus prépondérante dans la gestion des investissements. Ce mémoire est consacré à l'analyse de quelques unes des mesures de risque les plus utilisées telles la *VaR*, la *CTE*, la *TVaR* et plus généralement les mesures de risque par distorsion. L'objectif principal était d'estimer ces mesures de risque par la méthode empirique (non-paramétrique et semi-paramétrique). L'étude des propriétés asymptotiques des estimateurs proposés, dont notamment la normalité asymptotiques, permis de construire les bornes de confiance pour les différentes mesures à laquelle on s'est intéressé.

Un certain nombre de risques peuvent être qualifiés de « risques extrêmes » car ils présentent une probabilité d'occurrence très faible (ou un temps de retour très élevé). Ils correspondent à des événements rares. Les mesures de risque prennent aujourd'hui une part importante. L'estimation de telles mesures devient donc une tâche centrale dans le processus de gestion du risque. Un accent particulier est mis sur la méthode de simulation historique HS, ainsi que à la prévision de la VaR selon la méthode de simulation historique.

Au terme de ce travail, on peut conclure que chaque mesure de risque offre ses propres avantages et inconvénients. En outre, on peut dire qu'il n'existe pas de mesure de risque universelle qui soit meilleure que toutes les autres ou qui soit pertinente à toutes les situations.

- Parmi les perspectives de ce travail, nous pouvons dégager les points suivants :
- Il est intéressant d'approfondir l'étude de prévision de la VaR selon la méthode de simulation historique.
 - Essayer de développer d'autres résultats théoriques et pratiques en utilisant d'autres méthodes d'estimation de la VaR.
 - La comparaison des VaR calculées par les différentes méthodes d'estimation présentées dans ce mémoire pour pouvoir mieux maîtriser le risque.
 - Etudier et Faire apparaître le lien s'il existe entre la VaR et la probabilité de ruine.

Bibliographie

- [1] Acerbi C. *Spectral measures of risk : a coherent representation of subjective risk aversion. Journal of Banking and Finance*, 2(7) :1505-1518, 2002.
- [2] Acerbi C and Tasche D. *Expected Shortfall : A Natural Coherent Alternative to Value-at-Risk. EconomicNotes* 31 (2), 379-388.2002.
- [3] Acerbi C and Tasche D. *On the Coherentof Expected Shortfall. Journal of Banking and finance* 26.1487-1503. 2002.
- [4] Albrecher. Gerber H U et Yang H. *Dividends end Gerber-shiu functions : canadized.*
- [5] Asmussen S. *Ruin probabilities, vol. 2 of Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. World Scienti Publishing Co. Inc, River Edge, NJ, 2000.*
- [6] Artzner P. Delbaen F. Eber J – M and Heath D. *Coherent measures of risk, Mathematical Finance*, 9 :203-228,1999.
- [7] Bruno Portier M. *Rapport de PFE. Etude des méthdes d'estimation de la Value-at-Risk. Insa Pauline Requena Rouen. 2009-2010*
- [8] Charpentier A. Denuit M. *Mathématiques de l'assurance non-vie. Tome 1 : principes fondamentaux de théorie du risque. Economica, 2004.*
- [9] Charpentier A. *Value at risk et probabilitée de ruine, entre vaccination et banque d'affaires. Risques*, 76 :103-106, 2008.
- [10] Delbaen F. *Coherent risk measures on general probability spaces, Essays in Honour of Dieter Sondermann, Sandmann K and P J Schonbucher editors, 1–37, Springer Verlag Publisher, 2000.*
- [11] Dhaene j. Vanduffel S. Tang Q. Goovaerts M J. Kaas R and Vyncke D. *SolvencyCapital, Risk Measures and Comonotonicity : Areview, Research Report OR 0416. Departement of Applied Economics K. U. Leuven. 2003.*
- [12] Dreesbeke J J, Maumy-Bertrand M, Saporta G et Thomas-Agan. *Approches statistiques du risque. Edition Technip 1rue du Bac, 75007 Paris, France, 2014*
- [13] Ekeland I, Galichon A, and Henry M. *Comontonic Measures of Multivariate Risks. Available at SSRN : <http://ssrn.com/abstract=1115729>,2009.*
- [14] Finetti B. *Il problema dei " pieni". Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 11(1) :1-8, 1940.

- [15] Follmer H. Schied A. *Convex measures of risk and trading constraints*. 14 décembre 2000
- [16] Follmer H. Schied A. *Stochastic finance. An Introduction in Discrete Time, de Gruyter Studies in Mathematics, 2004. Finance and Stochastics, 6 :429-447, 2002*
- [17] H.U. Gerber and E.S.W. Shiu. *Option pricing by esscher transforms (with discussions). Transactions of the society of actuaries, 46, 1994.*
- [18] Goovaerts M J, De Vylder F, and Haezendonck J. *Insurance premiums. North-Holland, 1984.*
- [19] Grandell J. *Aspects of risk theory. Springer Series in Statistics. Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York, (1991).*
- [20] Hans U. Gerber. *An introduction to mathematical risk theory, volume 8 of S.S. Heubner foundation monograph series. University of pennsylvania wharton school S.S. Huebner foundation for insurance education, philadelphia pa. With a foreword by James C. Hickman, 1979*
- [21] Hardy G H and Littlewood J E. *A maximal theorem with function-theoretic applications. Acta Math. 54(1) :81-116, 1930.*
- [22] Holton G. *History of Value at Risk : 1922-1998, Working Paper, 2002.*
- [23] Jorion P. *Value-at-Risk. McGraw-Hill, Oxford, 2007.*
- [24] Jorion P. *Value at Risk, McGraw-Hill, 2001*
- [25] Kaas R. Goovaerts M. Dhaene J and Denuit M. (2008) *Modern actuarial risk theory, using R. Springer-Verlag, Berlin.*
- [26] Kabui Ali. *Value at risk et expected shortfall pour des données faiblement dépendantes : estimations non-paramétriques et théorèmes de convergences. Mathématiques générales math.GM. Université du Maine, 2012.*
- [27] Knight F H. *Risk, uncertainty, and Profit. Houghton Mifflin Company, Boston, 1921*
- [28] Landsman Z and Sherris M. *Risk measures and insurance premium principles. Insurance : Mathematics and economics, 29(1) :103 - 115, 2001.*
- [29] Lehmann E L. *Ordered families of distributions. Ann. Math. Statist. 26 :399-419, 1955.*
- [30] Marinelli C. *A comparison of some univariate models for value-at-risk and expected shortfall. Int. J. Theor. Appl. Finance 10, 2007.*
- [31] Markowitz H *portfolio selection. Journal of finance 7, 77-91, 1952*
- [32] Mcneil J. A .J. Frey R. Embrechts P. *Quantitative risk management. Concepts, techniques and tools. Princeton Series in Finance. Princeton university press, princeton, NJ, 2005. xvi+538 pp*
- [33] Müller A and Stoyan D. *Comparison methods for stochastic models and risks. Wiley series in probability and statistics, 2002.*

- [34] Olivier D and Gerber H.U. *On convex principles of premium calculation. Insurance : Mathematics and Economics*, 4(3) :179 - 189, 1985.
- [35] Partray Ch. Besson J.L. *Assurance non-vie. Modélisation, simulation. Economica*, 2004.
- [36] Reich A. *Premium principles and translation invariance. Insurance : Mathematics and Economics*, 3(1) :57 - 66, 1984.
- [37] Reich A. *Properties of premium calculation principles. Insurance : Mathematics and Economics*, 5(1) :97 - 101, 1986.
- [38] Rockafellar R T and Uryasev S. *Optimisation of conditional Value-at-Risk, the journal of risk* 2 (3),21-41. 2000.
- [39] Rockafellar R T and Uryasev S. *Conditional Value-at-Risk for general loss distribution. journal of Banking and Financy* 26, 1442-1471. 2002.
- [40] Roy A D. *Safety first and the holding of assets. Econometrica*, 20 3 :pp.431 449, 1952.
- [41] Ruszczyński A and Shapiro A. *Conditional risk mappings. Mathematics of Operations Research*, 31(3) :544-561, August 2006.
- [42] Schmidt K S. *Positive homogeneity and multiplicativity of premium principles on positive risks. Insurance : Mathematics and economics*, 8(4) :315- 319, 1989.
- [43] Shaked M. and Shanthikumar J.G. *Stochastic orders. Springer*, 2006.
- [44] Shigeo Kusuoka. *On law invariant coherent risk measures. In Advances in mathematical economics, Vol. 3, volume 3 of Adv. Math. Econ., pages 83-95. Springer, Tokyo, 2001*
- [45] Temame N. *Estimation du quantile extrême et de la VaR. Mémoire de magistère spécialité : mathématiques, option probabilités statistique , université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2011.*
- [46] Wang S, *Premium calculation by transforming the layer premium density. ASTIN* 26 (1), 71-92. 1998
- [47] Wirch J Land Hardy M R. *A synthesis of risk measures for capital adequacy. Insurance : mathematics economics* 25, 337-347. 1999.
- [48] Yamai Y and Yoshida T. *Comparative analyses of expected shortfall and Value-at-Risk(2) : expected utility maximization and tail risk. Monetary and economic studies* 20 (2), Bank of Japan.2002
- [49] Young V R and Wang S. *Ordering Risks : expected utility theory versus yaari's Dual theory of risk. Insurance : mathematics and economics* 22. 1998
- [50] Saidane hadda. *sur l'estimation des mesures de risque, Mémoire de magistère (école doctorale) spécialité : mathématiques, option : statistique, université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, mai 2012.*

Annexe A : logiciel R

R est un système, communément appelé langage et logiciel, qui permet de réaliser des analyses statistiques. Plus particulièrement, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les calculs et les représentations graphiques. R a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fichiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques appelées paquets. Ces derniers permettent de traiter assez rapidement des sujets aussi variés que les modèles linéaires (simples et généralisés), la régression (linéaire et non linéaire), les séries chronologiques, les tests paramétriques et non paramétriques classiques, les différentes méthodes d'analyse des données, . . . Plusieurs paquets, tels *evd*, *evir*, *extRemes*, sont destinés pour le traitement des problèmes d'assurance. le plus important est le paquet *actuar* qu'est nécessaire au déroulement de tous les programmes.

Annexe B : les cours quotidiens de la compagnie d'assurance d'AXA qui sont observés sur la période du 25/10/2007 au 23/10/2009.

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
25/10/2007	30,17	0,203500389	-0,203500389
26/10/2007	29,96	0,140606455	-0,140606455
29/10/2007	30,35	0,133914051	-0,133914051
30/10/2007	30,45	0,114514778	-0,114514778
31/10/2007	30,86	0,113309556	-0,113309556
01/11/2007	30,37	0,113307885	-0,113307885
02/11/2007	30,04	0,106264266	-0,106264266
05/11/2007	29,52	0,099116434	-0,099116434
06/11/2007	29,25	0,096209865	-0,096209865
07/11/2007	28,83	0,095802912	-0,095802912
08/11/2007	28	0,09476866	-0,09476866
09/11/2007	27,2	0,093372315	-0,093372315
12/11/2007	27,52	0,088769817	-0,088769817
13/11/2007	27,58	0,08761261	-0,08761261
14/11/2007	28,19	0,086511502	-0,086511502
15/11/2007	27,57	0,085157808	-0,085157808
16/11/2007	27,14	0,081563107	-0,081563107
19/11/2007	26,28	0,081319684	-0,081319684
20/11/2007	26,46	0,080866964	-0,080866964
21/11/2007	25,68	0,080461556	-0,080461556
22/11/2007	25,33	0,07764826	-0,077648267
23/11/2007	26,42	0,077142876	-0,077142876
26/11/2007	25,88	0,076743335	-0,076743335
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
27/11/2007	26,58	0,074753115	-0,074753115
28/11/2007	27,29	0,073570193	-0,073570193
29/11/2007	27,4	0,070793052	-0,070793052
30/11/2007	27,93	0,069851439	-0,069851439
03/12/2007	27,55	0,069460598	-0,069460598
04/12/2007	27,01	0,066127084	-0,066127084
05/12/2007	27,54	0,061983612	-0,061983612
06/12/2007	27,92	0,06131998	-0,06131998
07/12/2007	28,55	0,060956903	-0,060956903
10/12/2007	28,66	0,058159765	-0,058159765
11/12/2007	28,51	0,057281863	-0,057281863
12/12/2007	28,31	0,055811135	-0,055811135
13/12/2007	27,58	0,055704925	-0,055704925
14/12/2007	27,45	0,055036814	-0,055036814
17/12/2007	26,84	0,054996676	-0,054996676
18/12/2007	26,78	0,054904008	-0,054904008
19/12/2007	26,45	0,053441523	-0,053441523
20/12/2007	26,46	0,053054563	-0,053054563
21/12/2007	26,98	0,052140393	-0,052140393
24/12/2007	26,95	0,051791509	-0,051791509
27/12/2007	27,39	0,051526549	0,051526549
28/12/2007	27,29	0,050724027	-0,050724027
31/12/2007	27,39	0,050497885	-0,050497885
02/01/2008	26,98	0,050260717	-0,050260717
03/01/2008	26,96	0,049936033	-0,049936033
04/01/2008	26,42	0,049840439	-0,049840439
07/01/2008	26,06	0,049741436	-0,049741436
08/01/2008	25,84	0,049042085	-0,049042085
09/01/2008	25,56	0,045462374	-0,045462374
10/01/2008	25,65	0,045412255	-0,045412255
11/01/2008	26,11	0,045075658	-0,045075658
14/01/2008	26,55	0,043897592	-0,043897592
15/01/2008	25,96	0,043576817	-0,043576817
16/01/2008	25,91	0,043457317	-0,043457317
17/01/2008	25,46	0,042925045	-0,042925045
18/01/2008	24,6	0,042527856	-0,042527856
21/01/2008	22,12	0,042206335	-0,042206335
22/01/2008	23,15	0,042147862	-0,042147862
23/01/2008	22,01	0,040621519	-0,040621519
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
24/01/2008	24,3	0,040548609	-0,040548609
25/01/2008	23,46	0,040457629	-0,040457629
28/01/2008	23,63	0,040364224	-0,040364224
29/01/2008	23,6	0,03963367	-0,03963367
30/01/2008	23,32	0,038818495	-0,038818495
31/01/2008	22,88	0,038374013	-0,038374013
01/02/2008	23,83	0,038353742	-0,038353742
04/02/2008	23,62	0,037677816	-0,037677816
05/02/2008	22,42	0,036928127	-0,036928127
06/02/2008	22,6	0,036382855	-0,036382855
07/02/2008	22,05	0,036233623	-0,036233623
08/02/2008	21,41	0,036224777	-0,036224777
11/02/2008	20,99	0,036111778	-0,036111778
12/02/2008	21,66	0,035709799	-0,035709799
13/02/2008	21,7	0,035610884	-0,035610884
14/02/2008	21,44	0,035245939	-0,035245939
15/02/2008	21,08	0,035179507	-0,035179507
18/02/2008	21,73	0,035031348	-0,035031348
19/02/2008	22,01	0,03436215	-0,03436215
20/02/2008	21,96	0,033992539	-0,033992539
21/02/2008	22,5	0,032200461	-0,032200461
22/02/2008	22,36	0,032024446	-0,032024446
25/02/2008	23,03	0,031965219	-0,031965219
26/02/2008	23,88	0,031944221	-0,031944221
27/02/2008	23,84	0,031748698	-0,031748698
28/02/2008	23,09	0,031308461	-0,031308461
29/02/2008	22,48	0,030828298	-0,030828298
03/03/2008	22,07	0,030692946	-0,030692946
04/03/2008	21,4	0,03062286	-0,03062286
05/03/2008	21,76	0,029994356	-0,029994356
06/03/2008	21,13	0,02992168	-0,02992168
07/03/2008	20,73	0,029454499	-0,029454499
10/03/2008	20,17	0,029406554	-0,029406554
11/03/2008	20,81	0,02937959	-0,02937959
12/03/2008	21,59	0,029212001	-0,029212001
13/03/2008	21,13	0,028987537	-0,028987537
14/03/2008	20,68	0,028983377	-0,028983377
17/03/2008	19,45	0,027683429	-0,027683429
18/03/2008	20,71	0,027524186	-0,027524186
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
19/03/2008	20,73	0,027504132	-0,027504132
20/03/2008	21,08	0,027385574	-0,027385574
25/03/2008	22,46	0,02695581	-0,02695581
26/03/2008	22,5	0,026907453	-0,026907453
27/03/2008	23,15	0,026773598	-0,026773598
28/03/2008	23,24	0,026469488	-0,026469488
31/03/2008	22,99	0,026202372	-0,026202372
01/04/2008	24,53	0,026124227	-0,026124227
02/04/2008	25,44	0,0259928	-0,0259928
03/04/2008	24,55	0,024945329	-0,024945329
04/04/2008	24,78	0,024637304	-0,024637304
07/04/2008	24,71	0,024547133	-0,024547133
08/04/2008	24,59	0,024375806	-0,024375806
09/04/2008	24,03	0,024147431	-0,024147431
10/04/2008	23,77	0,024147342	-0,024147342
11/04/2008	23,44	0,024133901	-0,024133901
14/04/2008	23,15	0,024097552	-0,024097552
15/04/2008	23,23	0,02396919	-0,02396919
16/04/2008	23,93	0,023953241	-0,023953241
17/04/2008	24,12	0,023295563	-0,023295563
18/04/2008	24,99	0,023036806	-0,023036806
21/04/2008	24,62	0,023032746	-0,023032746
22/04/2008	24,4	0,022834412	-0,022834412
23/04/2008	24,05	0,022654691	-0,022654691
24/04/2008	22,99	0,022557347	-0,022557347
25/04/2008	23,29	0,022472856	-0,022472856
28/04/2008	23,76	0,022472856	-0,022472856
29/04/2008	23,52	0,022462759	-0,022462759
30/04/2008	23,91	0,022369555	-0,022369555
02/05/2008	24,83	0,022326992	-0,022326992
05/05/2008	24,57	0,02223908	-0,02223908
06/05/2008	24,06	0,022071652	-0,022071652
07/05/2008	24,32	0,021819047	-0,021819047
08/05/2008	24,02	0,021536413	-0,021536413
09/05/2008	23,57	0,021526782	-0,021526782
12/05/2008	23,65	0,021493073	-0,021493073
13/05/2008	23,84	0,021283204	-0,021283204
14/05/2008	23,95	0,021096393	-0,021096393
15/05/2008	23,8	0,020975476	-0,020975476
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
16/05/2008	23,64	0,020888488	-0,020888488
19/05/2008	23,65	0,020650829	-0,020650829
20/05/2008	23,25	0,020232987	-0,020232987
21/05/2008	22,83	0,019811969	-0,019811969
22/05/2008	22,51	0,019795368	-0,019795368
23/05/2008	22,01	0,019745404	-0,019745404
26/05/2008	21,94	0,019393391	-0,019393391
27/05/2008	21,94	0,019179344	-0,019179344
28/05/2008	22,51	0,019111905	-0,019111905
29/05/2008	22,71	0,019048195	-0,019048195
30/05/2008	22,71	0,019002947	-0,019002947
02/06/2008	22,01	0,0189121	-0,0189121
03/06/2008	21,75	0,018602716	-0,018602716
04/06/2008	21,65	0,018406805	-0,01840680
05/06/2008	21,71	0,018229671	-0,018229671
06/06/2008	20,94	0,017520401	-0,017520401
09/06/2008	20,82	0,017481165	-0,017481165
10/06/2008	20,97	0,017478597	-0,017478597
11/06/2008	20,56	0,017461827	-0,017461827
12/06/2008	21,12	0,017308124	-0,017308124
13/06/2008	21,39	0,017082266	-0,017082266
16/06/2008	21,49	0,017057983	-0,017057983
17/06/2008	21,52	0,016935206	-0,016935206
18/06/2008	21,03	0,016933613	-0,016933613
19/06/2008	20,98	0,016574965	-0,016574965
20/06/2008	20,62	0,016140229	-0,016140229
23/06/2008	20,12	0,016005568	-0,016005568
24/06/2008	20,11	0,015902034	-0,015902034
25/06/2008	20,59	0,015719571	-0,015719571
26/06/2008	19,49	0,015694624	-0,015694624
27/06/2008	19,05	0,015689057	-0,015689057
30/06/2008	18,86	0,015596646	-0,015596646
01/07/2008	18,05	0,015364364	0,015364364
02/07/2008	18,05	0,015082132	-0,015082132
03/07/2008	18,72	0,014916624	-0,014916624
04/07/2008	18,13	0,014721005	-0,014721005
07/07/2008	18,52	0,014671716	-0,014671716
08/07/2008	18,13	0,014479555	-0,014479555
09/07/2008	18,99	0,014473937	-0,014473937
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
10/07/2008	18,64	0,014463062	-0,014463062
11/07/2008	17,67	0,014461113	-0,014461113
14/07/2008	18,1	0,014448136	-0,014448136
15/07/2008	17,22	0,014146671	-0,014146671
16/07/2008	17,27	0,014121679	-0,014121679
17/07/2008	18,21	0,014115806	-0,014115806
18/07/2008	19,03	0,014069727	-0,014069727
21/07/2008	19,18	0,013980317	-0,013980317
22/07/2008	19,03	0,013818737	-0,013818737
23/07/2008	20,2	0,013723015	-0,013723015
24/07/2008	19,85	0,013719727	-0,013719727
25/07/2008	18,9	0,013698844	-0,013698844
28/07/2008	18,33	0,013605652	-0,013605652
29/07/2008	18,18	0,013181737	-0,013181737
30/07/2008	18,86	0,013094168	-0,013094168
31/07/2008	18,99	0,012833486	-0,012833486
01/08/2008	18,82	0,012449184	-0,012449184
04/08/2008	18,69	0,01241224	-0,01241224
05/08/2008	20,05	0,012399182	-0,012399182
06/08/2008	20,38	0,012382042	-0,012382042
07/08/2008	21,36	0,012053924	-0,012053924
08/08/2008	22,24	0,011935351	-0,011935351
11/08/2008	22,3	0,011911764	-0,011911764
12/08/2008	22,19	0,011883138	-0,011883138
13/08/2008	21,07	0,011368728	-0,011368728
14/08/2008	21,32	0,01121218	-0,01121218
15/08/2008	21,97	0,010925452	-0,010925452
18/08/2008	21,63	0,010895049	-0,010895049
19/08/2008	20,33	0,010878768	-0,010878768
20/08/2008	20,53	0,010876766	-0,010876766
21/08/2008	20,14	0,010815593	-0,010815593
22/08/2008	21,12	0,010664182	-0,010664182
25/08/2008	20,93	0,010526413	-0,010526413
26/08/2008	20,74	0,010152371	-0,010152371
27/08/2008	20,52	0,010023824	-0,010023824
28/08/2008	21,62	0,009347943	-0,009347943
29/08/2008	21,86	0,009188426	-0,009188426
01/09/2008	21,56	0,009119334	-0,009119334
02/09/2008	23,11	0,009036922	-0,009036922
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
03/09/2008	22,86	0,008992391	-0,008992391
04/09/2008	21,95	0,008975988	-0,008975988
05/09/2008	21,18	0,00885148	-0,00885148
08/09/2008	23,82	0,008746966	-0,008746966
09/09/2008	23	0,008477893	-0,008477893
10/09/2008	22,74	0,008297037	-0,008297037
11/09/2008	21,98	0,008216973	-0,008216973
12/09/2008	22,25	0,007851388	-0,007851388
15/09/2008	20,36	0,007164024	-0,007164024
16/09/2008	19,77	0,007084691	-0,007084691
17/09/2008	19,83	0,007043742	-0,007043742
18/09/2008	20,33	0,007039804	-0,007039804
19/09/2008	24,65	0,006984895	-0,006984895
22/09/2008	23,33	0,006931513	-0,006931513
23/09/2008	22,5	0,006745388	-0,006745388
24/09/2008	22,51	0,006648961	-0,006648961
25/09/2008	23,62	0,006485808	-0,006485808
26/09/2008	23,29	0,006282743	-0,006282743
29/09/2008	21,55	0,005747142	-0,005747142
30/09/2008	22,9	0,005247519	-0,005247519
01/10/2008	24,23	0,004944942	-0,004944942
02/10/2008	22,07	0,004935032	-0,004935032
03/10/2008	23,1	0,004868164	-0,004868164
06/10/2008	20,07	0,004724704	-0,004724704
07/10/2008	20,02	0,004608303	-0,004608303
08/10/2008	18,6	0,004598953	-0,004598953
09/10/2008	19,23	0,0041533	-0,0041533
10/10/2008	17,17	0,004037691	-0,004037691
13/10/2008	19,54	0,003657649	-0,003657649
14/10/2008	20,91	0,003405708	-0,003405708
15/10/2008	18,67	0,003284075	-0,003284075
16/10/2008	16,33	0,003185441	-0,003185441
17/10/2008	16,43	0,002828856	-0,002828856
20/10/2008	17	0,002494389	-0,002494389
21/10/2008	17,15	0,002380387	-0,002380387
22/10/2008	15,75	0,002350177	-0,002350177
23/10/2008	15,05	0,002274279	-0,002274279
24/10/2008	14,16	0,002237972	-0,002237972
27/10/2008	13,06	0,002155948	-0,002155948
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
28/10/2008	12,04	0,00210029	-0,00210029
29/10/2008	14,15	0,001927897	-0,001927897
30/10/2008	15,2	0,001676446	-0,001676446
31/10/2008	14,85	0,001388407	-0,001388407
03/11/2008	14,54	0,001385362	-0,001385362
04/11/2008	17	0,001282874	-0,001282874
05/11/2008	16,68	0,001270379	-0,001270379
06/11/2008	15,15	0,001145475	-0,001145475
07/11/2008	15,92	0,001112553	-0,001112553
10/11/2008	16,32	0,000969462	-0,000969462
11/11/2008	14,78	0,000741565	-0,000741565
12/11/2008	14,17	0,000557258	-0,000557258
13/11/2008	13,93	0,000497141	-0,000497141
14/11/2008	13,9	0	0
17/11/2008	12,95	0	0
18/11/2008	13,54	0	0
19/11/2008	12,86	0	0
20/11/2008	11,91	-0,000316606	0,000316606
21/11/2008	11,71	-0,000378	0,000378
24/11/2008	13,44	-0,000422922	0,000422922
25/11/2008	13,12	-0,000444346	0,000444346
26/11/2008	13,17	-0,000965251	0,000965251
27/11/2008	14,25	-0,001147447	0,001147447
28/11/2008	14,95	-0,001246106	0,001246106
01/12/2008	14,15	-0,001292825	0,001292825
02/12/2008	15,25	-0,001395025	0,001395025
03/12/2008	15,2	-0,001561768	0,001561768
04/12/2008	14,81	-0,001745709	0,001745709
05/12/2008	13,65	-0,00177936	0,00177936
08/12/2008	16,28	-0,001845019	0,001845019
09/12/2008	16,8	-0,002033407	0,002033407
10/12/2008	16,58	-0,002177859	0,002177859
11/12/2008	15,99	-0,002383791	0,002383791
12/12/2008	15,31	-0,002614381	0,002614381
15/12/2008	15,09	-0,002694209	0,002694209
16/12/2008	15,85	-0,002767529	0,002767529
17/12/2008	15,42	-0,002899393	0,002899393
18/12/2008	15,7	-0,003030305	0,003030305
19/12/2008	16,58	-0,003047621	0,003047621
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
22/12/2008	15,68	-0,003093583	0,003093583
23/12/2008	15,09	-0,00313972	0,00313972
24/12/2008	14,99	-0,003289477	0,003289477
29/12/2008	14,75	-0,003388398	0,003388398
30/12/2008	15,6	-0,003449766	0,00344976
31/12/2008	15,85	-0,003514942	0,003514942
02/01/2009	17,04	-0,003601985	0,00360195
05/01/2009	17	-0,003657649	0,003657649
06/01/2009	17,15	-0,003803732	0,003803732
07/01/2009	16,47	0,003845486	0,003845486
08/01/2009	15,83	-0,003880151	0,003880151
09/01/2009	15,44	-0,003888534	0,003888534
12/01/2009	15,25	-0,004022679	0,004022679
13/01/2009	14,51	-0,004603482	0,004603482
14/01/2009	12,94	-0,004664188	0,004664188
15/01/2009	12,3	-0,004750603	0,004750603
16/01/2009	13,16	-0,005367022	0,005367022
19/01/2009	12,48	-0,005470243	0,005470243
20/01/2009	12,09	-0,005797118	0,005797118
21/01/2009	12,5	-0,00606752	0,00606752
22/01/2009	12,22	-0,006105025	0,006105025
23/01/2009	11,4	-0,006671139	0,006671139
26/01/2009	12,51	-0,006825965	0,006825965
27/01/2009	12,24	-0,006869248	0,006869248
28/01/2009	13,52	-0,007164024	0,007164024
29/01/2009	13,2	-0,007178782	0,007178782
30/01/2009	12,22	-0,007210782	0,007210782
02/02/2009	11,895	-0,007220248	0,007220248
03/02/2009	12,19	-0,007536672	0,007536672
04/02/2009	12,91	-0,007612069	0,007612069
05/02/2009	12,95	-0,00777488	0,00777488
06/02/2009	13,155	-0,007851388	0,007851388
09/02/2009	13,69	-0,00790847	0,00790847
10/02/2009	13,12	-0,007996489	0,007996489
11/02/2009	12,175	-0,008001727	0,00800172
7 12/02/2009	11,74	-0,00878483	0,00878483
13/02/2009	11,9	-0,00878483	0,00878483
16/02/2009	11,4	-0,008845701	0,008845701
17/02/2009	11,13	-0,00908409	0,00908409
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
18/02/2009	11,165	-0,009325022	0,009325022
19/02/2009	10,145	-0,009778623	0,009778623
20/02/2009	8,277	-0,009789603	0,009789603
23/02/2009	8,101	-0,010253579	0,010253579
24/02/2009	7,65	-0,010628651	0,010628651
25/02/2009	7,362	-0,010748347	0,010748347
26/02/2009	8	-0,011039671	0,011039671
27/02/2009	7,337	-0,011478254	0,011478254
02/03/2009	7,071	-0,01169604	0,01169604
03/03/2009	6,869	-0,011795371	0,011795371
04/03/2009	7,2	-0,01220906	0,01220906
05/03/2009	6,549	-0,012703064	0,012703064
06/03/2009	6,23	-0,012803101	0,012803101
09/03/2009	5,878	-0,012883132	0,012883132
10/03/2009	7,053	-0,012933359	0,012933359
11/03/2009	7,6	-0,012964745	0,012964745
12/03/2009	7,838	-0,013374853	0,013374853
13/03/2009	7,651	-0,013536586	0,013536586
16/03/2009	8,114	-0,013546828	0,013546828
17/03/2009	8,176	-0,013703785	0,013703785
18/03/2009	8,379	-0,013714136	0,013714136
19/03/2009	9,44	-0,013997323	0,013997323
20/03/2009	9,362	-0,014077486	0,014077486
23/03/2009	9,9	-0,014407584	0,014407584
24/03/2009	9,681	-0,014556298	0,014556298
25/03/2009	9,54	-0,015504187	0,015504187
26/03/2009	9,281	-0,015655069	0,015655069
27/03/2009	9,221	-0,015706126	0,015706126
30/03/2009	8,769	-0,015898586	0,015898586
31/03/2009	9,05	-0,01602548	0,01602548
01/04/2009	9,539	-0,016194686	0,016194686
02/04/2009	10,835	-0,016324874	0,016324874
03/04/2009	10,82	-0,016445658	0,016445658
06/04/2009	10,09	-0,0166825	0,0166825
07/04/2009	9,673	-0,016711365	0,016711365
08/04/2009	10,115	-0,016742797	0,016742797
09/04/2009	10,84	-0,016839776	0,016839776
14/04/2009	11,6	-0,016938516	0,016938516
15/04/2009	11,085	-0,017015105	0,017015105
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
16/04/2009	11,515	-0,017615632	0,017615632
17/04/2009	12,1	-0,017774811	0,017774811
20/04/2009	11,085	-0,017995344	0,017995344
21/04/2009	11,125	-0,018262472	0,018262472
22/04/2009	11,765	-0,018923668	0,018923668
23/04/2009	11,725	-0,019158367	0,019158367
24/04/2009	11,91	-0,01924507	0,01924507
27/04/2009	11,55	-0,019432325	0,019432325
28/04/2009	11,15	-0,019461692	0,019461692
29/04/2009	11,565	-0,019742479	0,019742479
30/04/2009	12,745	-0,019979411	0,019979411
04/05/2009	13,42	-0,0200605	0,0200605
05/05/2009	13,1	-0,020280014	0,020280014
06/05/2009	13,44	-0,021283204	0,021283204
07/05/2009	12,58	-0,021417053	0,021417053
08/05/2009	13,205	-0,021707439	0,021707439
11/05/2009	13,09	-0,021876433	0,021876433
12/05/2009	12,935	-0,022313658	0,022313658
13/05/2009	11,935	-0,022819566	0,022819566
14/05/2009	12,11	-0,022956938	0,022956938
15/05/2009	12,025	-0,023530497	0,023530497
18/05/2009	12,41	-0,023588317	0,023588317
19/05/2009	12,935	-0,024043652	0,024043652
20/05/2009	13,2	-0,0244978	0,0244978
21/05/2009	12,785	-0,024525542	0,024525542
22/05/2009	13,105	-0,024643272	0,024643272
25/05/2009	13,145	-0,024721228	0,024721228
26/05/2009	13,225	-0,024815169	0,024815169
27/05/2009	13,65	-0,024901685	0,024901685
28/05/2009	13,11	-0,025117439	0,025117439
29/05/2009	13,11	-0,025623105	0,025623105
01/06/2009	13,895	-0,0256482	0,0256482
02/06/2009	14,165	-0,026361281	0,026361281
03/06/2009	14,065	-0,026530664	0,026530664
04/06/2009	14,35	-0,026688584	0,026688584
05/06/2009	14,715	-0,026873018	0,026873018
08/06/2009	14,46	-0,027398974	0,027398974
09/06/2009	14,665	-0,027644644	0,027644644
10/06/2009	14,7	-0,028097582	0,028097582
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
11/06/2009	14,77	-0,028479471	0,028479471
12/06/2009	14,54	-0,028510703	0,028510703
15/06/2009	13,92	-0,029524066	0,029524066
16/06/2009	13,56	-0,029688355	0,029688355
17/06/2009	13,2	-0,030032287	0,030032287
18/06/2009	13,57	-0,030369071	0,030369071
19/06/2009	13,715	-0,030835452	0,030835452
22/06/2009	13,17	-0,031237288	0,031237288
23/06/2009	12,985	-0,031421108	0,031421108
24/06/2009	13,565	-0,031441526	0,031441526
25/06/2009	13,37	-0,031514783	0,031514783
26/06/2009	13,405	-0,031541983	0,031541983
29/06/2009	13,92	-0,031630544	0,031630544
30/06/2009	13,39	-0,032061034	0,032061034
01/07/2009	13,75	-0,032256088	0,032256088
02/07/2009	13,005	-0,033309979	0,033309979
03/07/2009	12,86	-0,03334998	0,03334998
06/07/2009	12,48	-0,033696767	0,033696767
07/07/2009	12,305	-0,034104412	0,034104412
08/07/2009	11,85	-0,03509132	0,03509132
09/07/2009	11,915	-0,035434373	0,035434373
10/07/2009	11,76	-0,036243575	0,036243575
13/07/2009	12,18	-0,03642588	0,03642588
14/07/2009	12,47	-0,036446786	0,036446786
15/07/2009	13,15	-0,036543798	0,036543798
16/07/2009	13,27	-0,036721188	0,036721188
17/07/2009	13,215	-0,036796604	0,036796604
20/07/2009	13,505	-0,037698883	0,037698883
21/07/2009	13,945	-0,037755818	0,037755818
22/07/2009	13,725	-0,03805769	0,03805769
23/07/2009	14,415	-0,039863725	0,039863725
24/07/2009	14,395	-0,040152874	0,040152874
27/07/2009	14,67	-0,040372455	0,040372455
28/07/2009	14,32	-0,040682125	0,040682125
29/07/2009	14,63	-0,041434216	0,041434216
30/07/2009	14,89	-0,042131835	0,042131835
31/07/2009	14,83	-0,043698101	0,043698101
03/08/2009	15,2	-0,044045788	0,044045788
04/08/2009	15,31	-0,044552479	0,044552479
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
05/08/2009	15,57	-0,044680971	0,044680971
06/08/2009	15,785	-0,045512604	0,045512604
07/08/2009	16,04	-0,045613397	0,045613397
10/08/2009	16,06	-0,0463445	0,0463445
11/08/2009	15,81	-0,046965986	0,046965986
12/08/2009	16,015	-0,047062491	0,047062491
13/08/2009	16,14	-0,047512572	0,047512572
14/08/2009	15,78	-0,047954393	0,047954393
17/08/2009	15,4	-0,048134156	0,048134156
18/08/2009	15,46	-0,048487294	0,048487294
19/08/2009	15,48	-0,049050344	0,049050344
20/08/2009	15,465	-0,049137228	0,049137228
21/08/2009	15,995	-0,049554919	0,049554919
24/08/2009	16,11	-0,049575648	0,049575648
25/08/2009	15,995	-0,051607094	0,051607094
26/08/2009	16,02	-0,052218792	0,052218792
27/08/2009	15,79	-0,0526239	0,0526239
28/08/2009	15,795	-0,053000002	0,053000002
31/08/2009	15,88	-0,053095999	0,053095999
01/09/2009	15,575	-0,054536437	0,054536437
02/09/2009	15,235	-0,055875814	0,055875814
03/09/2009	15,16	-0,055934194	0,055934194
04/09/2009	15,38	-0,056027831	0,056027831
07/09/2009	15,735	-0,056454624	0,056454624
08/09/2009	16,025	-0,057386261	0,057386261
09/09/2009	16,3	-0,058153765	0,058153765
10/09/2009	16,625	-0,058754607	0,058754607
11/09/2009	17,17	-0,059665923	0,059665923
14/09/2009	17,2	-0,060761094	0,060761094
15/09/2009	17,3	-0,062769605	0,062769605
16/09/2009	17,47	-0,063411226	0,063411226
17/09/2009	17,45	-0,064837519	0,064837519
18/09/2009	17,195	-0,067582664	0,067582664
21/09/2009	17,23	-0,067762102	0,067762102
22/09/2009	17,465	-0,067763867	0,067763867
23/09/2009	17,645	-0,069223525	0,069223525
24/09/2009	17,42	-0,069425678	0,069425678
25/09/2009	17,44	-0,070240532	0,070240532
28/09/2009	17,845	-0,071580804	0,071580804
Suite page suivante			

Date	Cours de clôture	Rendement	Rendement or- donnés
Suite ...			
29/09/2009	17,98	-0,072394021	0,072394021
30/09/2009	18,5	-0,074695189	0,074695189
01/10/2009	18,25	-0,074864879	0,074864879
02/10/2009	17,95	-0,078815391	0,078815391
05/10/2009	17,94	-0,083109907	0,083109907
06/10/2009	18,675	-0,092914969	0,092914969
07/10/2009	18,8	-0,097155742	0,097155742
08/10/2009	19,065	-0,098979455	0,098979455
09/10/2009	19,025	-0,099460794	0,099460794
12/10/2009	19,35	-0,117468224	0,117468224
13/10/2009	18,95	-0,119227405	0,119227405
14/10/2009	19,49	-0,127392977	0,127392977
15/10/2009	19,715	-0,129299972	0,129299972
16/10/2009	19,2	-0,137792157	0,137792157
19/10/2009	19,5	-0,156309872	0,156309872
20/10/2009	19,475	-0,161480184	0,161480184
21/10/2009	19,045	-0,176197839	0,176197839
22/10/2009	18,525	-0,18223649	0,18223649
23/10/2009	18,44	-0,192679273	0,192679273
C'est fini			

Résumé

Les entreprises du secteur de la banque et de l'assurance gèrent aujourd'hui des risques importants et de natures diverses. Elles sont soumises à des obligations réglementaires de maîtrise du risque, et cherchent également par elles-mêmes à éviter la faillite. Un des outils intervenant dans cette gestion compliquée est la mesure du risque, qui doit permettre de fournir un indicateur pertinent permettant de générer du profit en limitant le risque de subir des pertes trop importantes. Il est donc important de pouvoir décider du choix de cette mesure, et de savoir comment elle peut être utilisée dans un programme général de maximisation de profit.

L'objectif de ce mémoire consiste à effectuer une synthèse sur les différentes mesures de risque. Un intérêt particulier est accordé à la Value-at-Risk (VaR) et à la probabilité de ruine. Des études basées sur la simulation historique ont été réalisées pour estimer la VaR.

Mots clés : Risque, mesure de risque, value-at-risk, probabilité de ruine, fonction de distorsion, estimation

Abstract

The bank sector companies and insurance now manage significant risks and of various kinds. They are subject to regulatory requirements for risk control, and they also seek by himself to avoid bankruptcy. One of intervening in this complicated management tools is the measure of risk, which should help provide a relevant indicator to generate profit by limiting the risk of excessive losses. It is therefore important to decide on the choice of this measure, and how it can be used in a general program of profit maximization.

The purpose of this document is to make a synthesis of different risk measures. A particular focus is given to the Value-at-Risk (VaR) and the probability of ruin. Studies based on historical simulation are carried out to estimate the VaR.

Key words: Risk, risk measure, Value-at-Risk, probability of ruin, distorsion function, estimation.