MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

Benzenati Lyna

Benouaret Hanane

THEME

Sur la théorie du point fixe : somme d'opérateurs et applications

Soutenu devant le jury composé de :

Mr.	A. BERBOUCHA	Professeur	U. de Béjaia	Président
Mme.	S. ALLILI-ZAHAR	M.C.B	U. de Béjaia	Examinatrice
Mme.	F. TALBI-BOULAHIA	M.C.A	U. de Béjaia	Examinatrice
Mme.	K. KHELOUFI-MEBARKI	M.C.A	U. de Béjaia	Promotrice

Année 2015/2016

Remerciements

On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination. Ces cinq années de formation nous ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent de longues heures de travail.

En premier lieu, nous remercions **Dieu**, le tout puissant pour ses faveurs et ses gratitudes, de nous avoir donné le courage et la patience pour avoir mené ce travail durant cette année.

De plus, nous exprimons notre gratitude à Madame **K. KHELOUFI** qui nous a accordé toute l'assistance nécessaire à l'élaboration de ce mémoire. Sa bienveillance nous a accompagné durant toute notre formation. C'est donc avec reconnaissance que nous lui présentons nos remerciements. Nous la remercions aussi pour son aide précieuse et pour sa contribution à la réalisation de ce présent travail.

Nos remerciments sont aussi adressés à Monsieur **A. BERBOUCHA**, Madame **S. ALLILI** et Madame **F. TALBI** qui nous font l'honneur de juger notre travail.

Nous remercions tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont assuré notre formation universitaire.

Dédicaces

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce travail à :

Mes parents, qui m'ont encouragé tout le long de mes études, ma trés chère grand-mère que j'aime énormément.

Mon unique frère Rédha que Dieu le protège.

Mes soeurs : Lamia (son mari et son petit Raouf), Katia et la petite Lynda.

Ma meilleure et trés chère tante Nabila et sa petite famille.

Mes cousins(es), mes meilleurs amis, toute la famille **BENOUARET**.

Tous mes enseignants et toute la promotion mathématique $2015 - 2016$.

Madame **KHELOUFI** pour son aide.

Hanane

Dédicaces

je dédie ce modeste travail à tous ceux et celles qui m'ont aidé de près ou de loin, notamment :

Mes parents, qui ne m'ont jamais laissé tomber dans toutes les circonstances.

Mon frère et mes sœurs que j'aime beaucoup.

Mes cousins, hommes et femmes qu'ils soient.

Tous mes amis qui m'ont toujours soutenue.

Tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

Toute la famille **BENZENATI**.

Tous ceux qui ont le mérite pour que ce travail soit réalisé.

Madame **KHELOUFI** qui a dirigé ce travail.

Lyna

Table des matières

Introduction générale

Plusieurs phénomènes naturels de la vie réelle s'expriment mathématiquement sous forme d'équations différentielles non linéaires. La théorie et les applications des équations non linéaires dans le cadre topologique et algébrique nécessitent naturellement d'investir dans la branche de la théorie du point fixe. De nombreuses questions, liées à l'existence et à l'unicité de solutions de certains types d'équations (par exemple, les équations différentielles, les équations intégrales) peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une application appropriée définie sur un espace métrique.

Les théorèmes du point fixe dans la topologie et l'analyse non linéaire sont souvent basés sur certaines propriétés (telles que la continuité complète, la monotonicité, la contraction,...) que l'application considérée doit satisfaire. Les théorèmes du point fixe les plus importants sont le théorème du point fixe de Banach et celui de Schauder. Rappelons que le principe de Banach affirme qu'une contraction sur un espace métrique complet dans lui même a un point fixe unique, et le théorème de Schauder affirme qu'une application compacte (complètement continue) définie sur un ensemble fermé, borné, convexe d'un espace de Banach dans lui même, a un point fixe.

Plusieurs problèmes en analyse peuvent se mettre sous la forme :

$$T = A + B,$$

où A est une application contractante et B est une application compacte. Cependant, T n'hérite pas de ces propriétés, ce qui empêche l'application des théorèmes du point fixe de Banach et de Schauder, d'où la nécessité de developper des théorèmes du point fixe pour l'opérateur somme T. Le principal théorème dans cette direction est le théorème du point fixe de Krasnoselskii. Selon Smart [11], Krasnoselskii étudia en 1958 un article de Schauder et formula le principe suivant : "L'inversion d'un opérateur différentiel perturbé génère la somme d'une contraction et d'une application compacte". Il combina le théorème du point fixe de Banach et celui de Schauder et établi un théorème du point fixe hybride qui porta son nom. Ce théorème de Krasnoselskii est captivant et il a initié de nombreuses études et a été étendu dans des directions différentes en modifiant certaines de ses hypothèses. Ce théorème possède aussi de nombreuses applications intéréssantes en analyse non linéaire.

Ce travail est réparti en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à quelques définitions et résultats préliminaires indispensables à la compréhension de la suite du travail.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe, à savoir le théorème du point fixe de Banach et le théorème de Schauder. Plusieurs généralisations de ces deux théorèmes sont aussi présentées dans ce chapitre.

Dans le troisième chapitre, on se penche, particulièrement sur l'un des outils importants d'existence de solutions en analyse non linéaire, en l'occurrence le théorème de Krasnoselskii. Finalement, dans le dernier chapitre on donne quelques applications de ces résultats théoriques.

CHAPITRE 1

Préliminaires

1.1 Généralités sur les espaces métriques

On commence par donner des définitions, ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

Définition 1.1.1 (Espace métrique) *Un espace métrique* (X, d) *est un ensemble* X *muni d'une application* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *appelée distance ou métrique, vérifiant :*

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ *(la symétrie).*
3. $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(l'inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1.1

1. Dans $\mathbb{R}$, on peut considérer la distance d suivante dite distance naturelle de $\mathbb{R}$ ou bien la distance usuelle :

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^n$:

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$$

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p \geq 1$$

3. Dans $C^0([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue}\},(a,b \in \mathbb{R}, a < b)$ et pour $f,g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$

   $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$

   $d_1(x,y) = \int\limits_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$

   $d_2(x,y) = \sqrt{\int\limits_a^b (f(t) - g(t))^2\, dt}$

4. On peut définir une métrique sur un ensemble quelconque X, posant pour $x, y \in X$; $d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$ on l'appelle métrique discrète.

Définition 1.1.2 (Espace vectoriel normé) *Un espace* $(E, \|.\|)$ *est dit espace vectoriel normé sur le corps* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *s'il est muni d'une application* $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ *qui vérifie :*

1. $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{k},\ x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *où* $|.|$ *désigne respectivement la valeur absolue si* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou le module si* $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

3. $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(l'inégalité triangulaire).*

Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une norme par $d_{\|.\|}(x,y) = \|x - y\|$.

Exemple 1.1.2

1. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ toutes les normes sont de la forme :

$$\|x\| = k|x|, k > 0.$$

   - En général, on prend $k = 1$.

2. Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| ,$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{(lorsque } p = 2 \text{ c'est la norme euclidienne)},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i|\} .$$

3. Dans $C^0([a,b], \mathbb{R})$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt,$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 \, dt},$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| .$$

Définition 1.1.3 *Soit E un espace vectoriel normé. Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ de E sont dites équivalentes s'il existe c_1, $c_2 > 0$ tels que, pour tout $x \in E$:*

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 .$$

Proposition 1.1.1 *En dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Remarque 1.1.1 *Ce résultat n'est plus valable en dimension infinie.*

Contre exemple en dimension infinie:

Dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ soit $f_\epsilon(x) = \max\left(1 - \frac{x}{\epsilon}, 0\right)$,

On a :

$$\|f_\epsilon\|_1 = \int_0^1 |f_\epsilon(t)| \, dt = \int_0^1 \left|1 - \frac{t}{\epsilon}\right| dt = \int_0^\epsilon \left|1 - \frac{t}{\epsilon}\right| dt + \int_\epsilon^1 \left|1 - \frac{t}{\epsilon}\right| dt = \left[t - \frac{t^2}{2\epsilon}\right]_0^\epsilon = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2\epsilon} = \frac{\epsilon}{2},$$

$$\|f_\epsilon\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_\epsilon(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \left[1 - \frac{t}{\epsilon}\right] = 1.$$

On voit bien que ces normes ne sont pas équivalentes dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Car sinon

$$\alpha\frac{\varepsilon}{2} \leq 1 \leq \beta\frac{\varepsilon}{2},$$

$\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow 0 \leq 1 \leq 0 \Longrightarrow 1 = 0$ absurde.

Définition 1.1.4 (Boule) *Soit (X,d) un espace métrique, a un point de X et $r>0$, on définit la boule (ouverte) de centre a et rayon r par :*

$$B(a,r)=\{x\in X \mid d(a,x)<r\}.$$

Définition 1.1.5 (Sous-ensemble ouvert) *Le sous ensemble U de l'espace métrique (X,d) est dit ouvert si*

$$\forall x\in U,\ \exists r>0 \text{ tel que } B(x,r)\subset U.$$

Définition 1.1.6 (Sous-ensemble fermé) *Le sous ensemble F de l'espace métrique (X,d) est dit fermé si son complementaire C_X^F est ouvert.*

Définition 1.1.7 (Limite d'une suite) *Soient (X,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de X. On dit que cette suite converge vers $a\in X$ si*

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists\ N_\varepsilon \text{ tel que } n\geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon.$$

et on écrit alors : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, ou encore $x_n\to a$ quand $n\to+\infty$.

Théorème 1.1.1 *Soit (X,d) un espace métrique, $F\subset X$, $x\in X$,*

$$F \text{ est fermé} \Leftrightarrow [\forall (x_n)_n\subset F, \lim_{n\to+\infty} x_n=x]\Rightarrow x\in F.$$

Définition 1.1.8 (Limite d'une application) *Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques $f:X\to Y$ une application $a\in X$ et $b\in Y$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a si*

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists\ \delta_\varepsilon \text{ tel que } d_X(x,a)<\delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x),b)<\varepsilon.$$

et on écrit alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, ou encore $f(x)\to b$ si $x\to a$.

Définition 1.1.9 (Suite de Cauchy) *On dit que la suite $(x_n)_n$ dans l'espace métrique (X,d) est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists\ N_\varepsilon>0 \text{ tel que } n,m>N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

on écrit alors

$$d(x_n,x_m)\to 0,\ \text{ quand } n,\ m\to+\infty.$$

Remarques 1.1.2

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.

Définition 1.1.10 (Espace métrique complet) *L'espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.*

Définition 1.1.11 (Espace de Banach) *On appelle espace de Banach, un espace vectoriel normé complet.*

Soit E un espace vectoriel normé, A un sous-ensemble de l'espace vectoriel E.

Définition 1.1.12 (Ensemble borné) *On dit que A est un sous ensemble borné de E si,*

$$\exists M > 0, \ \ \|x\| < M, \ \forall x \in A.$$

Définition 1.1.13 (Ensemble convexe) *On dit que A est convexe si,*

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1], \ \ \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

Définition 1.1.14 (Enveloppe convexe) *Soit $A \subset E$, l'intersection de tous les convexes contenant A est un convexe et c'est le plus petit convexe contenant A. On l'appelle l'enveloppe convexe de A et on le note conv A.*

$$conv\ A = \left\{ x \in E : x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i,\ p \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbb{R}^+\ tq\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.1.15 (Ensemble compact) *Soit (X, τ) un espace topologique séparé, $A \subset X$. On dit que A est compact si de tout recouvrement de A (par des ouverts de A) on peut extraire un sous recouvrement fini.*

$$(A \subset \bigcup_{i \in I} O_i) \Rightarrow (\exists J \subset I, J \text{ fini},\ A \subset \bigcup_{j \in J} O_i),\ O_i \text{ une famille d'ouverts de } A.$$

Remarque 1.1.3 *Dans un espace métrique, on peut caractériser la compacité, qui est une propriété topologique, avec des suites.*

Théorème 1.1.2 *Pour une partie A d'un espace métrique (X, d), les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

a. *A est compacte.*

b. *Propriété de Bolzano-Weierstrass : Toute partie infinie de A admet un point d'accumulation dans A.*

c. *De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergeant dans A.*

Définition 1.1.16 (Ensemble relativement compact) *Une partie Y d'un espace topologique (X, τ) est dite relativement compacte s'il existe un compact K de X tel que $Y \subset K$.*

Remarque 1.1.4 *Lorsque X est séparé, Y est compact si son adhérence $\bar{Y}$ est compact.*

1.2 Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E ; on rappelle que A est (séquentiellement) compacte si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge. Dans le cas où E est un espace de dimension finie,

$$A \text{ est compacte} \Longleftrightarrow A \text{ est fermée bornée}$$

et

$$A \text{ est relativement compacte} \Longleftrightarrow A \text{ est bornée.}$$

Ces deux caractérisations sont fausses si $dim(E) = +\infty$. Le théorème de **Riesz** nous dit que la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.

On s'intéresse ici au cas $E = C([a, b], \mathbb{R})$, espace vectoriel normé de dimension infinie, et on voudrait caractériser les parties relativement compactes ; en particulier, étant donnée une suite de fonctions de $E = C([a, b], \mathbb{R})$, sous quelles hypothèses peut-on en extraire une sous-suite qui converge ? Une condition nécessaire évidente est que la partie considérée soit bornée (une partie relativement compacte est toujours bornée).

Théorème 1.2.1 *Soit (X, d) un espace métrique compact, Y un espace de Banach et H un sous ensemble de $\mathcal{C}(X, Y)$ muni de la norme* sup : $\|.\|_\infty$. *Alors H est relativement compact si et seulement si :*

1. *H est uniformément borné, i.e.*

$$\forall x \in X, \text{ l'ensemble } \{f(x) : f \in H\} \text{ est borné dans } Y.$$

2. *H est équicontinu, i.e. l'ensemble*

$$H(x_0) = \{f(x_0), \ f \in H\}$$

est équicontinu pour tout $x_0 \in H$ c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \subset \mathcal{V}(x_0), \forall x \in X \ , \forall f \in H, x \in V \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.2.1 *Si $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, $H \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est dit équicontinu sur l'intervalle compact $[a, b]$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in H, \forall t_1, t_2 \in [a, b] : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon.$$

Lemme 1.2.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ une suite de fonctions vérifiant :*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée, i.e.*

$$\exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\| \leq K.$$

2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall x, y \in [a, b] : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. (i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte.)

Corollaire 1.2.1 *Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ (i.e. Les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$) alors elle admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Autrement dit : $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ s'injecte d'une façon compacte dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.*

Remarque 1.2.2 *En général* $\mathcal{C}^k([a,b])$ *s'injecte d'une façon compacte dans* $\mathcal{C}^{k'}([a,b])$ *avec* $k > k'$.

Preuve.

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $\mathcal{C}([a,b])$ *implique que la première condition du lemme* 1.2.1 *est satisfaite.*
- $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornées dans* $\mathcal{C}([a,b])$ *donne la deuxième condition du lemme* 1.2.1 *. En effet, pour tout* $x, y \in [a,b]$*, on a*

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &= \left|f_n'(\xi)\right| |x-y|\,,\ \xi \in \,]x,y[\ \text{ et } n \in \mathbb{N} \\ &\leq K|x-y|, \end{aligned}$$

donc, il suffit de prendre $\delta = \frac{\epsilon}{K}$. ■

1.3 Mesure de non-compacité

Introduction

Rappelons qu'un sous-ensemble Ω d'un espace de Banach E est relativement compact, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon ϵ tels que leurs union recouvre Ω. Si Ω est seulement borné, il y a une limite inférieure positive de tel réel ϵ.

1.3.1 Notion de la mesure de non-compacité

Définition 1.3.1 *Soit* E *un espace de Banach et* $\mathcal{A}$ *la famille de tous les sous-ensembles bornés de* E*. Une fonction* ϕ *définie de* $\mathcal{A}$ *dans* $[0,+\infty[$ *est appelée* ***mesure de non-compacité*** *(MNC) sur* E *si elle vérifie les propriétés suivantes:*

1. $\phi(A) = 0 \Longleftrightarrow A$ *est relativement compacte.*
2. $\phi(A) = \phi\left(\overline{A}\right),\ \forall A \in \mathcal{A}$.
3. $\phi(A_1 \cup A_2) = \max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\},\ \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.3.1

1. La fonction $\gamma : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ définie par :

$$\gamma(A) = \inf\{\epsilon > 0 : A \text{ admet un recouvrement fini par des boules de rayon } \leq \epsilon\}$$

   est appelée M.N.C de Hausdorff.

2. La fonction $\phi : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ telle que :

$$\phi(A) = \begin{cases} 0, \text{ si } A \text{ est relativement compact} \\ 1, \text{ sinon} \end{cases}$$

   est une mesure de non-compacité. En effet,

- $\phi(A) = 0 \Longleftrightarrow A$ est relativement compacte (évidente).
- $\phi(A) = \phi\left(\overline{A}\right)$, car A est relativement compact $\Longleftrightarrow \overline{A}$ est compact.
- $(A_1 \cup A_2)$ relativement compact $\Longleftrightarrow \begin{cases} A_1 \text{ est relativement compact;} \\ \text{et} \\ A_2 \text{ est relativement compact.} \end{cases}$

Alors, dans tous les cas on trouve $\phi(A_1 \cup A_2) = \max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\}$.

1.3.2 Mesure de non-compacité de Kuratowski

Définition 1.3.2 (la mesure de non-compacité de Kuratowski) *Soient E un espace de Banach, $\mathcal{A}$ la famille de tous les sous-ensembles bornés de E.* ***La mesure de-non compacité au sens de Kuratowski*** *est l'application $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :*

$$\alpha(A) = \inf\left\{\begin{array}{c} d > 0 \textit{ tel que } A \textit{ admet un recouvrement finie d'ensembles} \\ \textit{de diamètre inférieur ou égal à } d \end{array}\right\},$$

c'est à dire

$$\alpha(A) = \inf\left\{d > 0 \textit{ tel que } \exists\ A_1, A_2, ..., A_n \subset E;\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ diam(A_i) \leq d;\ \forall i = 1, ..., n\right\},$$

où $\quad diam(A_i) = \sup\|x - y\|,\ \forall x, y \in A_i$ *et* $diam(\emptyset) = 0$.

Remarque 1.3.1 *1. La définition de la mesure de non-compacité de Kuratowski est significative non seulement pour les espaces de Banach mais également pour les espaces métriques arbitraires.*

2. $0 \leq \alpha(A) \leq diam(A) < \infty, \forall A \in \mathcal{A}$.

3. A *est fini* $\Longrightarrow \alpha(A) = 0$.

Voici quelques propriétés élémentaires de la mesure de non-compacité de Kuratowski

Proposition 1.3.1 *Soient E un espace de Banach et $\mathcal{A}$ la famille des ensembles bornés de E. Alors, la mesure de non-compacité de Kuratowski α a les propriétés suivantes :*

1. ***Régularité*** : $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A}$ *est compact.*

2. ***Monotonie :*** $A \subset B \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$, *i.e* α *est croissante.*

3. ***Invariance par passage à la fermeture :*** $\alpha\left(\overline{A}\right) = \alpha(A)$.

4. ***Semi-additivité :*** $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}, \forall A, B \in \mathcal{A}$.

5. $\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}, \forall A, B \in \mathcal{A}$.

6. ***Semi-homogénéité :*** $\alpha(\lambda A) = |\lambda| \alpha(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{A}$.

7. ***Semi-additivité algébrique*** : $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B), \forall A, B \in \mathcal{A}$.

8. ***Invariance par translation :*** $\alpha(A + x) = \alpha(A), \forall A \in \mathcal{A}\ \forall x \in E$.

9. ***Invariance par passage à l'enveloppe convexe :*** $\alpha(convA) = \alpha(A), \forall A \in \mathcal{A}$.

10. $|\alpha(A) - \alpha(B)| \leq \alpha(B(0,1)) H_d(A, B)$ *où* $H_d(A, B) = \max\left(\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right)$ *est la distance de Hausdorff entre A et B.*

Remarque 1.3.2 **a.** *Les propriétés de semi-homogénéité et semi-additivité algébrique nous donnent que la MNC de Kuratowski α est une semi-norme sur E.*

b. *Ce n'est pas facile de déterminer la valeur explicite de $\alpha(A)$ pour un ensemble borné A d'un espace de Banach.*

1.4 Quelques classes d'applications

1.4.1 Contractions, contractions non linéaires et applications non-expansives

Définition 1.4.1 (Application continue) *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques* $f : X \to Y$ *une application et* $a \in X$*, on dit que* f *est continue au point* a *si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall x \in X,\ d_X(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Définition 1.4.2 (Application lipschitzienne) *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques,* $f : X \to Y$ *une application. On dit que* f *est lipschitzienne s'il existe* $k \geq 0$ *telle que :*

$$\forall x, y \in X, d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y). \tag{1.4.1}$$

- *Le plus petit réel* k *qui vérifie 1.4.1 est appelé constante de Lipschitz.*
- *Si* $k \in [0, 1[$*, l'application* f *est dite contractante (contraction).*
- *Si* $k = 1$*, l'application* f *est dite non-expansive.*

Définition 1.4.3 (Application Contractive) *Soit* (X, d) *un espace métrique, l'application* $f : X \to X$ *est dite contractive si*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),\ \forall x, y \in X \text{ avec } x \neq y$$

Définition 1.4.4 (Contraction non linéaire) *Soit* E *un espace de Banach,* $f : E \to E$ *une application. L'application* f *est dite* ***contraction non linéaire*** *s'il existe une fonction continue croissante* $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *tels que* $\phi(r) < r, \forall r > 0$ *et*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \phi(\|x - y\|), \forall x, y \in E.$$

a. *Si* $\phi(r) = kr$, $0 < k < 1$, f *est une* **contraction**.

b. *Si* $\phi(r) = r$, f *est une application* ***non-expansive***.

c. *Si* $\phi(r) = r$ *et l'inégalité précédante est stricte,* f *est* **contractive**.

Remarques 1.4.1

- *Une application* ***non-expansive*** *n'admet pas nécessairement un point fixe par exemple l'opérateur de translation dans un espace de Banach* $x \mapsto x + v$ *pour* v *non identiquement nulle.*

- *Le point fixe d'une application* ***non-expansive*** *n'est pas nécessairement unique (exemple l'identité).*

Exemple 1.4.1 (Application contractante) *On considère l'espace de Banach*

$E = \{x : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n;\ x \text{ borné}\}$ *muni de la norme*

$$\|x\|_E = \sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} |x(t)| \quad \text{où } \alpha > 0 \text{ est à choisir.}$$

Soit $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application continue et* $k-$*lipschitzienne. Soit* A *l'application définie par*

$$Ax(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

On voit que $\forall x \in E$, $A(x) \in E$ *et donc* $A : E \to E$.

L'application A *est une contraction si* $0 < k < \alpha$. *En effet, pour* x_1, $x_2 \in E$ *tels que* $x_1 \neq x_2$, *on a*

$$\begin{aligned}
\|Ax_1 - Ax_2\|_E &= \sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} |(Ax_1 - Ax_2)(t)|_{\mathbb{R}^n} \\
&= \sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} \left| \int_0^t (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)))ds \right|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} e^{-\alpha s} k |x_1(s) - x_2(s)|_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\leq \frac{k}{\alpha} e^{-\alpha t}(e^{\alpha t} - 1) \|x_1 - x_2\|_E \\
&\leq \frac{k}{\alpha} \|x_1 - x_2\|_E .
\end{aligned}$$

1.4.2 Applications compactes

Définition 1.4.5 *Soient E un espace de Banach et $\Omega \subset E$, $f : E \to E$ une application.*

a. *On dit que f est **compacte** si $f(\bar{\Omega})$ est compact.*

b. *L'application f est dite **totalement bornée** si $f(A)$ est **relativement compacte** pour tout sous ensemble borné A de E.*

c. *L'application f est dite **complètement continue** si f est **continue** et* **totalement bornée**.

Remarque 1.4.2 *Toute application continue et compacte est complètement continue. La réciproque est vraie si Ω est borné.*

Le résultat suivant est une application immédiate du théorème d'Ascoli-Arzéla.

Proposition 1.4.1 *Soient l'espace de Banach $X = C([0,T], \mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme et $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. L'opérateur F défini par :*

$$\begin{array}{llll} F: & C([0,T], \mathbb{R}) & \to & C([0,T], \mathbb{R}) \\ & y & \longmapsto & Fy(x) = \int\limits_0^x f(t, y(t))dt \end{array}$$

est complètement continue.

Preuve. F est continue sur X. En effet, soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X convergente vers une limite $y \in X$. On a

$$Fy_n(x) = \int\limits_0^x f(t, y_n(t))dt, \ \forall x \in [0,T].$$

D'une part, la continuité de f entraîne que

$$f(t, y_n(t)) \to f(t, y(t)), \ \forall t \in [0,T] \quad \textit{quand } n \to +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $x \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
|Fy_n(x)| &\leq \int_0^x |f(t, y_n(t))|\, dt \\
&\leq \max_{x\in[0,T]} |f(x, y_n(x))| \int_0^T dt \\
&\leq MT \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a vérifié les deux conditions du théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir Annexe), et

$$\|Fy_n - Fy\| \to 0 \text{ } quand \text{ } n \to +\infty.$$

Alors (Fy_n) converge vers Fy, ceci montre la continuité de F dans X.

Montrons que l'image de tout borné par F est un sous ensemble relativement compact, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans X,

$$\exists \delta > 0, \;\; \|y_n\| \leq \delta, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Posons,

$$M = \sup_{0\leq x\leq T, \; \|y\|\leq\delta} \|f(x,y)\|.$$

$\forall x \in [0,T]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
|Fy_n(x)| &\leq \int_0^x |f(t, y_n(t))|\, dt \\
&\leq \max_{x\in[0,T]} |f(x, y_n(x))| \int_0^T dt \\
&\leq MT.
\end{aligned}$$

D'où, $(Fy_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans X.

F est équicontinue. En effet, $\forall (x_1, x_2) \in [0,T]^2$ $(x_1 < x_2)$, on a

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(x_2) - F(y_n)(x_1)| &= \left| \int_0^{x_2} f(t, y_n(t))dt - \int_0^{x_1} f(t, y_n(t))dt \right|, \\
&= \left| \int_0^{x_2} f(t, y_n(t))dt + \int_{x_1}^{0} f(t, y_n(t))dt \right| \\
&= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t, y_n(t))dt \right| \leq M\,|x_2 - x_1|\,.
\end{aligned}$$

Par suite, quand $x_1 \to x_2$, $F(y_n)(x_2) \to F(y_n)(x_1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème d'Ascoli Arzéla, l'application F est complétement continue. ■

1.4.3 Contractions strictes d'ensembles et applications condensantes

Définition 1.4.6 *Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application continue et bornée (i.e. f transforme les bornés de E en des bornés de F).*

a. *On dit que f est une **k-contraction d'ensembles** s'il existe $k \geq 0$, tel que*

$$\alpha\left(f\left(A\right)\right) \leq k\alpha\left(A\right), \forall A \text{ borné de } E.$$

b. *L'application f est appelée **k-contraction stricte d'ensembles** (ou **contraction stricte d'ensembles**) si $0 \leq k < 1$*

c. *L'application f est dite **condensante** si*

$$\alpha\left(f\left(A\right)\right) < \alpha\left(A\right), \forall A \text{ borné non relativement compact } \left(\alpha\left(A\right) > 0\right).$$

Remarque 1.4.3 *Il est évident que toute application f complètement continue, est une k-contraction stricte d'ensembles et toute k-contraction stricte d'ensembles est condensante. De plus on a:*

1. f est $k-$lipshitzienne$\Rightarrow$ f est une $k-$contraction d'ensembles.

2. f est condensante $\Longrightarrow$ f est une 1-contraction d'ensembles.

3. f est complètement continue $\Longleftrightarrow$ f est une 0-contraction d'ensembles.

4. f est $k-$contraction et g est compacte$\Rightarrow$ $(f+g)$ est une $k-$contraction d'ensembles.

Preuve.

a. f est $k-$lipshitzienne$\Rightarrow$ f est une $k-$contraction d'ensembles.

Soit $\alpha_0 = \alpha(A)$ (MNC de Kuratowski de A). Par définition de α_0, on a :

$\forall \epsilon > 0$, $\exists d_0 > 0$, $\exists \{A_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset A : A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\mathrm{diam}(A_i) \leq d_0 < \alpha_0 + \epsilon$.

Donc $\forall i \in [1, n]$, $diam(A_i) \leq \alpha_0 + \epsilon$ et $f(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i)$. Comme f est k-lipshitzienne, on a : $\forall i \in [1, n]$,

$$diam(f(A_i)) \leq kdiam(A_i). \tag{1.4.2}$$

En effet,

$$\forall x_1, x_2 \in A_i, \| f(x_1) - f(x_2) \| \leq k \| x_1 - x_2 \| \leq kdiam(A_i)$$

d'où l'inégalité 1.4.2 par passage au sup.

On en déduit que $\forall i \in [1, n]$, $diam(f(A_i)) \leq k(\alpha_0 + \epsilon)$ avec $\{f(A_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ recouvrement de $f(A)$.

D'après la définition de $\alpha(f(A))$, on en déduit que

$$\alpha(f(A)) \leq k(\alpha_0 + \epsilon), \forall \epsilon > 0$$

et donc

$$(\alpha(f(A)) \leq k(\alpha_0) = k\alpha(A).$$

∎

CHAPITRE 2

Quelques résultats de la théorie du point fixe

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe, à savoir les théorèmes du point fixe de Banach et de Schauder.

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en 1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Notons que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduite par Liouville (en 1837) et développée par la suite par Picard (en 1890). A cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier, dans la branche des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach a connu de diverses généralisations dans différents espaces.

Le théorème du point fixe de Schauder, établi en 1930, est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe, compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir que la fonction est lipschitzienne, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach. Par contre, ce théorème ne donne aucun des avantages du théorème précédent, à savoir l'unicité et l'approximation du point fixe.

Les théorèmes du point fixe les plus importants dans l'analyse non linéaire sont le théorème de Schauder et celui de Banach. Ces deux théorèmes sont complètement indépendants l'un de l'autre. Dans le théorème de Banach, l'opérateur doit diminuer les distances en utilisant la contraction, alors que dans le théorème de Schauder l'opérateur peut agrandir les distances. Il s'avère, cependant, que les deux théorèmes peuvent être considérés comme des cas spéciaux d'un autre théorème du point fixe, "construit comme un pont" entre les deux théorèmes, c'est le célèbre théorème du point fixe de Darbo [9] établi en 1955 dans le cadre de la mesure de non compacité de Kuratowski.

2.1 Théorèmes du point fixe des contractions et alternative non linéaire

2.1.1 Théorèmes du point fixe des contractions de Banach

Théorème 2.1.1 (Principe de contraction de Banach, 1922) *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $f : X \to X$ *une application contractante de constante de contraction* k*. Alors :*

a. f *admet un unique point fixe* $\alpha \in X$.

b. *Pour tout* $x \in X$, $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} f^n(x)$ *où* $f^0(x) = x$ *et* $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$.

c. *La vitesse de convergence peut être estimée par :*

$$d\left(f^n(x), \alpha\right) \leq \frac{k^n}{1-k} d\left(x, f(x)\right).$$

Preuve. i) Existence : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), \; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}$

$$(p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

Soient $p, q \in \mathbb{N}, (p \leq q$ par exemple$)$. On a :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_q) \\ &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + d(x_{p+2}, x_q) \\ &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q) \\ &\leq (k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Donc

$$d(x_p, x_q) \leq (k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}) d(x_0, x_1).$$

Mais

$$k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1} = k^p(\frac{1 - k^{q-p}}{1 - k}) = \frac{k^p}{1 - k}(1 - k^{q-p}).$$

D'où

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p}{1 - k}(1 - k^{q-p}) d(x_0, x_1).$$

On a

$$1 - k^{q-p} < 1,$$

donc

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p}{1 - k} d(x_0, x_1).$$

Supposons que $d(x_0, x_1) \neq 0$, pour que $d(x_p, x_q) < \epsilon$, il suffit que :

$$\frac{k^p}{1 - k} d(x_0, x_1) < \epsilon,$$

ce qui donne

$$p > \ln(\frac{\epsilon(1 - k)}{d(x_0, x_1)}) \frac{1}{\ln k}.$$

Il suffit de prendre :

$$n_0 = \max\left(0,\ E\left(\ln\left(\frac{\epsilon(1 - k)}{d(x_0, x_1)}\right) \frac{1}{\ln k}\right) + 1\right).$$

Alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X et comme (X, d) est complet, donc la suite $(x_n)_n$ est convergente dans X.

Soit $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, $\alpha \in X$. Montrons que α est un point fixe de f.

Montrons que $f(\alpha) = \alpha$. D'après la continuité de f, on a

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \\ \Rightarrow\ & \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \\ \Rightarrow\ & \alpha = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(\alpha). \end{aligned}$$

D'où α est un point fixe de f.

ii) Unicité :

On suppose $\exists\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in X,\ \alpha_1 \neq \alpha_2$, avec $f(\alpha_1) = \alpha_1$ et $f(\alpha_2) = \alpha_2$.

On a

$$\begin{aligned} & d(f(\alpha_1), f(\alpha_2)) \leq kd(\alpha_1, \alpha_2) \\ \Rightarrow\ & d(\alpha_1, \alpha_2) \leq kd(\alpha_1, \alpha_2) \\ \Rightarrow\ & 1 \leq k, \end{aligned}$$

contradiction car $k \in \left]0, 1\right[$.

D'où l'unicité.

Si $d(x_0, x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_0 \Rightarrow f(x_0) = x_0 \Rightarrow x_0$ est le point fixe cherché. ■

Remarque 2.1.1 *Les hypothèses du théorème du point fixe de Banach sont réelement nécessaire si nous en négligeons seulement une, alors il se peut que le point fixe n'existe pas.*

1. Si X n'est pas stable par f : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0,1]$. On a X est fermé dans $\mathbb{R}$ donc il est complet (car $\mathbb{R}$ est complet). De plus $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, ce qui implique que $\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| < 1$, donc f est contractente sur $[0,1]$. Mais X n'est pas stable par f car $f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right] \not\subset [0,1]$. Les conditions suffisantes du théorème de Banach ne sont pas toutes remplies. On vérifie, par l'absurde, que f n'admet pas un point fixe.

2. Si f n'est pas contractante : $f\ (x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = \left[0, +\infty\right[$.

On a $f(\left[0,+\infty\right[) \subset \left[0,+\infty\right[$ et X est un fermé dans $\mathbb{R}$. Alors X est complet (fermé dans un complet est complet). Mais f n'est pas contractante, car $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f'(x)| = 1$.

3. Si X n'est pas complet : $f(x) = \frac{\sin x}{2}$ sur $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   On a $f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $\max\limits_{x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]} \mid f'(x) \mid = \frac{1}{2} < 1$, alors f est contractante. Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc X n'est pas complet. Les conditions suffisantes du théorème de Banach ne sont pas toutes satisfaites. Par l'absurde, on vérifie facilement que f n'admet pas de point fixe.

Il existe diverses versions modifiées (extensions) du théorème de contraction de Banach dans la littérature. Généralement, si l'une des hypothèses est affaiblie les autres doivent être renforcées. La complétude de l'espace est généralement indispensable. Dans ce qui suit, on présente quelques variantes du principe de contraction de Banach.

Théorème du point fixe pour une application dont une itérée est contractante

Si f est une application continue (pas nécessairement une contraction) mais l'une des itérées f^p est une contraction, alors f admet encore un point fixe et un seul.

Exemple 2.1.1 (Exemple de motivation) *Soit $X = C([0, b], \mathbb{R})$. L'application $f : X \to X$ définie par*

$$f(x)(t) = \int_0^t x(s)ds$$

n'est pas contractante, si $b > 1$ alors que l'application

$$x \mapsto f^n(x)(t) = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} x(s)ds$$

est contractante pour n assez grand.

Le théorème suivant étend un peu les possibilités d'applications du théorème de contraction de Banach.

Théorème 2.1.2 *Soient X un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application dont une itérée f^N est contractante. Alors f admet un unique point fixe α et $\forall x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = \alpha$.*

Preuve. En appliquant le théorème de contraction de Banach à f^N, on obtient que f^N possède un unique point fixe α et $\lim\limits_{n\to\infty} f^{\,n}(x) = \alpha$, $\forall x \in X$. Mais on a :

$$f^N(f(\alpha)) = f^{N+1}(\alpha) = f(f^N(\alpha)) = f(\alpha),$$

ce qui entraîne que $f(\alpha)$ est aussi point fixe de f^N, donc $f(\alpha) = \alpha$. Ce point fixe de f est unique, car tout point fixe de f est aussi point fixe de f^N. ■

La version locale du théorème de Banach

Il se peut que f ne soit pas une contraction sur tout l'espace X mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :

Théorème 2.1.3 *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit*

$$B\,(x_0, r) = \{x \in X \,:\, d\,(x, x_0) < r\} \;\; \textit{où } x_0 \in X \textit{ et } r > 0.$$

Supposons que $f : B\,(x_0, r) \to X$ est contractante de constante de contraction k, avec

$$d\,(f\,(x_0)\,, x_0) < (1-k)\,r.$$

Alors f admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$.

Preuve. Il existe r_0 avec $0 \leq r_0 \leq r$, tel que $d\,(f\,(x_0)\,, x_0) \leq (1-k)\,r_0$. On montre que $f : \overline{B\,(x_0, r_0)} \to \overline{B\,(x_0, r_0)}$. Soit $x \in \overline{B\,(x_0, r_0)}$ alors

$$\begin{aligned} d\,(f\,(x)\,, x_0) &\leq d\,(f\,(x)\,, f(x_0)) + d\,(f\,(x_0)\,, x_0) \\ &\leq kd\,(x, x_0) + (1-k)r_0 \\ &\leq kr_0 + (1-k)r_0 \\ &\leq r_0. \end{aligned}$$

Donc l'application $f : \overline{B\,(x_0, r_0)} \to \overline{B\,(x_0, r_0)}$ est contractante avec $\overline{B\,(x_0, r_0)}$ est un espace complet. Par suite, l'application du théorème de contraction de Banach à f assure qu'elle admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$. ■

Extension d'Edelstein

Une autre tentative naturelle d'étendre le théorème de contraction de Banach serait de supposer que f est contractive, c'est à dire $d\left(f(x), f(y)\right) < d(x,y)$, $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$. Dans ce cas f n'admet pas nécessairement un point fixe. Par exemple $f\left(x\right) = \ln\left(1 + e^{x}\right)$ et $X = \mathbb{R}$ d'une part, on a :

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(y)\right| &= \left|\ln\left(1 + e^{x}\right) - \ln\left(1 + e^{y}\right)\right| \\ &= \left|\frac{e^{\xi}}{1 + e^{\xi}}\right| \left|x - y\right|, \ \xi \in \mathbb{R} \\ &< \left|x - y\right|. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f\left(x\right) = x \ &\Leftrightarrow \ln\left(1 + e^{x}\right) = x \\ &\Leftrightarrow 1 + e^{x} = e^{x} \\ &\Leftrightarrow 1 = 0, \ (\textit{impossible}). \end{aligned}$$

Cependant, en compensant par d'autres hypothèses supplémentaires (avec une hypothèse forte sur l'espace) Edelstein a obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.4 (Théorème d'Edelstein) *Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application contractive. Alors*

a. *f admet un unique point fixe $\alpha \in X$.*

b. *Pour tout $x \in X$, $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} f^{n}\left(x\right)$.*

Preuve.

1. L'existence : Soit l'application continue $x \mapsto d\left(x, f(x)\right)$. x point fixe de f est équivalent à dire que $d\left(x, f\left(x\right)\right) = 0$. Comme X est un compact alors l'application $x \mapsto d\left(x, f\left(x\right)\right)$ atteint son minimum. Donc il existe $\alpha \in X$ tel que

$$\forall x \in X, \ d\left(\alpha, f\left(\alpha\right)\right) \leq d\left(x, f\left(x\right)\right).$$

On va montrer par l'absurde que α est un point fixe de f. Si $\alpha \neq f\left(\alpha\right)$ on a $d\left(f\left(\alpha\right), f\left(f\left(\alpha\right)\right)\right) < d\left(\alpha, f\left(\alpha\right)\right)$ ce qui contredit la définition de α. D'où $\alpha = f\left(\alpha\right)$.

2. L'unicité :

Soient α, $\alpha^{'}$deux points fixes de f tels que $\alpha \neq \alpha^{'}$, alors

$$d\left(\alpha, \alpha^{'}\right) = d\left(f\left(\alpha\right), f\left(\alpha^{'}\right)\right) < d\left(\alpha, \alpha^{'}\right),$$

ce qui est impossible. Alors $\alpha = \alpha^{'}$.

3. Pour tout $x \in X$, $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} f^n\left(x\right)$. En effet, soit $x_0 \in X$ et on définit la suite $\left(x_n\right)_n$ dans X par $x_n = f^n\left(x_0\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Comme

$$0 < d\left(x_{n+1}, \alpha\right) = d\left(f\left(x_n\right), f\left(\alpha\right)\right) < d\left(x_n, \alpha\right),$$

alors la suite des nombres réels $\left(d\left(x_n, \alpha\right)\right)_n$ est décroissante et positive. Donc il existe une limite positive, notée l, telle que

$$0 \leq l = \lim_{n\to\infty} d\left(x_n, \alpha\right).$$

Supposons que $l > 0$. Grâce à la compacité de X, la suite $\left(x_n\right)_n$ admet une sous-suite convergente dans X, notée $\left(x_{n_i}\right)_i$, telle que $x_{n_i} \to y \in X$, quand $n_i \to \infty$. Constatons que

$$0 < l = \lim_{n\to+\infty} d\left(x_{n_i}, \alpha\right) = d\left(y, \alpha\right),$$

c'est à dire $y \neq \alpha$. Comme la fonction f est contractive, alors

$$l = \lim_{n\to+\infty} d\left(x_{n_{i+1}}, \alpha\right) = d\left(f(y), \alpha\right) < d\left(y, \alpha\right) = l,$$

ce qui est absurde. Donc $l = 0$ c'est à dire $y = \alpha$. Ce qui montre que toute sous suite de $(x_n)_n$ doit converger vers α. Par conséquent, la suite $(x_n)_n$ converge vers α.

■

Extension de Boyd et Wong

Le théorème des applications contractantes de Banach a connu diverses extensions. On va présenter, maintenant sans démonstration une généralisation de ce théorème, dans laquelle la constante de contraction k est remplacée par une fonction réelle.

Théorème 2.1.5 (Boyd et Wong, 1969 ([2], page 184)) *Soit E espace de Banach, $C \subset E$ un sous ensemble borné fermé convexe et $f : C \to C$ une contraction non linéaire. Alors f admet un unique point fixe dans C.*

2.1.2 Alternative non linéaire

Dans cette sous-section on va voir la propriété d'existence du point fixe pour les applications homotopiques (homotopes) contractantes. Soit (X, d) un espace métrique complet et U un sous-ensemble ouvert de X.

Définition 2.1.1 *Soient $F : \overline{U} \longrightarrow X$ et $G : \overline{U} \longrightarrow X$ deux applications contractantes, où $\overline{U}$ est la fermeture de l'ouvert $U \subset X$. On dit que F et G sont homotopique (homotopes) s'il existe une application $H : \overline{U} \times [0,1] \to X$ qui verifie les propriétés suivantes :*

a. $H(.,0) = G$ *et* $H(.,1) = F$.

b. $x \neq H(x,t)$ *pour* $x \in \partial U$ *avec* $t \in [0,1]$ (∂U *est le bord de* U).

c. *Il existe une constante notée α avec $0 \leq \alpha < 1$ telle que :*

$$d(H(x,t), H(y,t)) \leq \alpha d(x,y), \ \forall x, y \in \overline{U} \ ; \ t \in [0,1].$$

d. *Il existe une constante notée M avec $M \geq 0$ telle que :*

$$d(H(x,t), H(x,s)) \leq M|t-s|, \ \forall x \in \overline{U} \ ; \ t, s \in [0,1].$$

Théorème 2.1.6 *([1])Soient (X,d) un espace métrique complet et U un ouvert de X. Supposons que $F : \overline{U} \longrightarrow X$ et $G : \overline{U} \longrightarrow X$ soient deux applications contractantes homotopes et que G admet un point fixe. Alors F admet un point fixe.*

Maintenant, nous présentons l'alternative de type Leray-Schauder pour les applications contractantes.

Théorème 2.1.7 (Agarwal, Meehan et O'Regan, 2001) *Soit E un espace de Banach, $0 \in \Omega \subset E$ un ensemble ouvert, $f : \bar{\Omega} \to E$ une contraction avec $f(\bar{\Omega})$ borné. Alors*

a. *ou bien, f admet un point fixe dans $\bar{\Omega}$,*

b. *ou bien, il existe $x \in \partial\Omega$, $\lambda \in [0, 1] : x = \lambda f(x)$.*

Preuve. Supposons que (b) n'a pas lieu et f n'a aucun point fixe sur $\partial\Omega$ (sinon la preuve est terminée). Alors

$$u \neq \lambda f(u) \text{ pour tout } u \in \partial\Omega \text{ et } \lambda \in [0, 1] .$$

Soit $H : \overline{U} \times [0, 1] \longrightarrow X$ donnée par : $H(x, t) = tf(x)$, où G est la fonction nulle (voir la définition 2.1.1). L'application G admet un point fixe dans U (en effet, $0 = G(0)$) et f et G sont deux applications contractantes homotopiques. Maintenant, on applique le théorème 2.1.6 pour déduire l'existence de $x \in U$ avec $x = f(x)$, d'où le résultat cherché.

■

Corollaire 2.1.1 *Soit $0 \in \Omega \subset C \subset E$ avec Ω un sous ensemble ouvert d'un ensemble convexe dans un espace de Banach E. Supposons que $f : \bar{\Omega} \to E$ est une contraction bornée ($f(\bar{\Omega})$ est bornée) telle que pour tout $x \in \partial\Omega$ l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

a. $\|f(x)\| \leq \|x\|$,

b. $\|f(x)\| \leq \|x - f(x)\|$,

c. $\|f(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \|x - f(x)\|^2$.

Alors, f admet un point fixe.

Preuve. Montrons le résultat en supposant que (a) est satisfaite.

Si f n'admet pas de point fixe, alors d'après le théorème 2.1.7 il existerait un certain $x \in \partial\bar{\Omega}$ et $\lambda \in]0,1[$ tel que $x = \lambda f(x)$. Si la condition (a) est satisfaite alors :

$$\|f(x)\| \leq \|\lambda f(x)\|,$$

c'est à dire que $\lambda \geq 1$, ce qui est absurde.

Montrons le résultat en supposant que (b) est satisfaite.

Si f n'admet pas de point fixe, alors d'après le théorème 2.1.7 il existerait un certain $x \in \partial\bar{\Omega}$ et $\lambda \in]0,1[$ tel que $x = \lambda f(x)$. Si la condition (b) est satisfaite alors,

$$\|f(x)\| \leq \|\lambda f(x) - f(x)\|$$

et alors,

$$1 \leq (1-\lambda),$$

contradiction avec le fait que :

$$(1-\lambda) < 1, \forall \lambda \in]0,1[\,.$$

Montrons le résultat en supposant que (c) est satisfaite.

Si f n'admet pas de point fixe, alors d'après le théorème 2.1.7 il existerait un certain $x \in \partial\bar{\Omega}$ et $\lambda \in]0,1[$ tel que $x = \lambda f(x)$. Si la condition (c) est satisfaite alors,

$$\|f(x)\|^2 \leq \|\lambda f(x)\|^2 + \|\lambda f(x) - f(x)\|^2$$

et alors,

$$1 \leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2,$$

contradiction avec le fait que :

$$\lambda^2 + (1-\lambda)^2 < \lambda + (1-\lambda) = 1,\ \forall \lambda \in]0,1[\,.$$

■

2.2 Théorème du point fixe de Schauder et alternative non linéaire

Théorème du point fixe de Brouwer (en dimension finie)

En 1912, Brouwer a énoncé son célèbre théorème qui est bien connu dans la théorie du point fixe.

Théorème 2.2.1 *Soient X un espace vectoriel normé de dimension finie, $C \subset X$ un sous ensemble non vide, fermé, borné, convexe et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Une différence fondamentale entre les espaces vectoriel normés de dimension finie et ceux de dimension infinie est donnés par :

Proposition 2.2.1 *Soit B la boule unité ouverte d'un espace vectoriel normé X.*

$$(\dim X < \infty) \Leftrightarrow \big(\textit{toute application continue } f : \bar{B} \to \bar{B} \textit{ admet au moins un point fixe}\big).$$

Preuve.

- L'une des implications n'est rien d'autre que le théorème du point fixe de Brouwer.
- Pour montrer l'implication inverse, il suffit de montrer que si dim $X = \infty$ alors il existe $f : \bar{B} \to \bar{B}$ une application continue et n'admet pas un point fixe dans $\bar{B}$. Soit $X = l_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, .., x_n, ..) : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < \infty \right\}$ muni de la norme $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ et $B = \{x \in l_2 : \|x\| < 1\}$. On définit $f : \bar{B} \to \partial B \subset \bar{B}$ par
$$f(x) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, ..).$$
La fonction f est continue, mais elle n'admet pas de point fixe, car sinon il existerait $x \in \bar{B}$ tel que $x = f(x)$ ce qui entrainerait que $\|x\| = \|f(x)\| = 1, x_1 = \sqrt{1 - \|x\|^2} = 0$ et $x_1 = x_2 = x_3 = ... = 0$, contradiction avec $\|x\| = 1$.

■

De la proposition 2.2.1, nous déduisons que, dans un espace de dimension infinie, la continuité de la fonction f ne suffit pas pour obtenir l'existence du point fixe. Nous avons besoin d'une hypothèse plus forte.

2.2.1 Théorème du point fixe de Schauder

Schauder a prolongé le théorème du point fixe de Brouwer au cas de la dimension infinie, en utilisant le fait qu'une application compacte en dimension infinie est approchable par des applications continues de rangs finis.

Définition 2.2.1 *Soient X, Y deux espaces vectoriels normés. L'application $f : X \to Y$ est dite de rang fini si $f(X)$ est contenue dans un sous espace vectoriel de Y de dimension finie.*

Théorème 2.2.2 (Approximation de Schauder ([1], pages $36, 37$)) *Soient C un sous ensemble convexe d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et $f : E \to C$ une application compact. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq f(E) \subseteq C$ et une application continue de rang finie $f_\epsilon : E \to C$ tel que*

a. $\|f_\epsilon(x) - f(x)\| < \epsilon, \forall\ x \in X.$

b. $f_\epsilon(E) \subseteq conv(A) \subseteq C.$

Avant de prouver le théorème de Schauder, on introduit la notion de $\epsilon-$point fixe. Soient E un espace de Banach, $C \subset E$ une partie non vide, fermé convexe et $f : C \to C$ une application.

Définition 2.2.2 *On dit que f admet un $\epsilon-$point fixe dans C si la condition suivante est satisfaite :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ x_\epsilon \in C : \|f(x_\epsilon) - x_\epsilon\| \leq \epsilon.$$

Proposition 2.2.2 *Soit f une application **non-expansive** alors, f admet un $\epsilon-$point fixe dans $B(0, R)$.*

Preuve. On pose $C = B(0, R)$.

Soit $r \in\ ]0, 1[$, alors l'application rf est une contraction et elle admet un point fixe, noté x_r, dans C. En effet ; $\forall\ x, y \in C$, on a

$\|rf(x) - rf(y)\| = r\,\|f(x) - f(y)\| \leq r\,\|x - y\|$ (car f est non -expansive).

Ce qui entraine que

$0 \leq \|f(x_r) - x_r\| = \|f(x_r) - rf(x_r)\| = (1-r)\|f(x_r)\| \leq (1-r)R.$

Par passage à la limite lorsque $r \to 1^-$, on obtient que f admet un $\epsilon-$point fixe. ■

Proposition 2.2.3 *Soit $F \subset E$ un sous ensemble fermé. Soit $f : F \to E$ une application continue. Supposons que :*

a. *$f(F)$ est compact,*

b. *f admet un $\epsilon-$point fixe dans F.*

Alors, f admet un point fixe dans F.

Preuve. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$, f admet un $\epsilon-$point fixe dans F donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n \in F$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(x_n) - x_n\| = 0.$$

Posons $G := f(F)$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = f(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$.

D'une part, on a G est compact ce qui entraine que, d'après Bolzano Werstress, de toute suite infinie de points on peut extraire une sous suite $(y_{n_k}) = f(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente dans G telle que

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} (y_{n_k}) = y \in G.$$

D'autres part, on a

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{k\to+\infty} \|f(x_{n_k}) - x_{n_k}\| &= \left\| f(\lim_{k\to+\infty} x_{n_k}) - \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} \right\| \\ &= \|f(x_0) - x_0\| \end{aligned}$$

D'où, il existe $x_0 \in F$ avec $x_0 = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$ et $f(x_0) = x_0$ car f est continue. ■

Maintenant, nous somme prêtes à prouver le théorème de Schauder et certaines de ses variantes.

Théorème 2.2.3 (Schauder, 1930) *Soit C un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E. Supposons que $f : C \to C$ une application continue et compacte. Alors f admet un point fixe dans C.*

Preuve. On a $F(C)$ est compact, d'après la proposition 2.2.3 il suffit de montrer que f admet un $\epsilon-$point fixe dans C.

Fixons un $\epsilon > 0$, le théorème d'approximation de Schauder garentit l'existence d'une application continue de rang finie $f_\epsilon : C \to C$ avec $\|f_\epsilon(x) - f(x)\| < \epsilon, \forall\ x \in C$ et $f_\epsilon(C) \subseteq conv(A) \subseteq C$ pour un certain ensemble fini $A \subseteq C$.

$\overline{conv}(A)$ est fermée bornée et $f_\epsilon(\overline{conv}(A)) \subseteq \overline{conv}(A)$, en appliquant le théorème de Brouwer, on déduit l'existence d'un $x_\epsilon \in \overline{conv}(A)$ avec $x_\epsilon = f(x_\epsilon)$. ■

Une conséquence immédiate est donnée par :

Corollaire 2.2.1 *Soient C un ensemble non vide, compact, convexe d'un espace de Banach X et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Corollaire 2.2.2 *Soient C un ensemble non vide, fermé, convexe (non nécéssairement borné) d'un espace de Banach X et $f : C \to C$ une application continue vérifiant*

$$f(C) \text{ est inclu dans un sous-ensemble compact de } C.$$

Alors, f admet au moins un point fixe dans C.

Preuve. Il existe un sous-ensemble compact $A \subset C$ tel que $f(C) \subset A \subset C$. Posons $A_0 = \overline{conv}(A)$. Nous avons A est un ensemble convexe, compact et $f(A_0) \subset A \subset A_0$, donc f admet un point fixe dans A_0.

D'où f admet un point fixe dans C (car $A_0 \subset C$). ■

2.2.2 Alternative non linéaire

Pour appliquer le théorème de Schauder, ou bien l'un des corollaires précédents, on a besoin d'une application définie sur un fermé, convexe dans lui même ; et ceci est difficile à obtenir. Dans cette section on va traiter le cas où cette condition n'a pas lieu.

Théorème 2.2.4 (Alternative non linéaire) *Soient E un espace vectoriel normé et $B := \overline{B(0, R)}$ une boule fermée. Soit $f : B \to E$ une application continue et compacte. Alors*

a. *ou bien, f admet un point fixe dans B,*

b. *ou bien, il existent $\lambda \in [0,1]$ et $x \in \partial B$ tels que $x = \lambda f(x)$.*

Preuve. Soit $r : E \to B$ une retraction, définie comme suit :

$$r(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in B, \\ R\frac{x}{\|x\|} \text{ si } x \notin B. \end{cases}$$

L'application $r \circ f : B \to B$ est compacte (la composition d'une application compacte et d'une application continue est compacte).

D'après le théorème de Schauder $r \circ f$ admet un point fixe dans B, c'est à dire :

$$\exists x \in B,\ (r \circ f)(x) = r(f(x)) = x.$$

On distingue deux cas :

1^{er} Cas : $f(x) \in B$.

Si $f(x) \in B$, alors :

$$x = (r \circ f)(x) = r(f(x)) = f(x).$$

C'est à dire f admet un point fixe dans B.

$2^{ème}$ Cas : $f(x) \notin B$.

Si $f(x) \notin B$, alors :

$$x = r(f(x)) = R\frac{f(x)}{\|f(x)\|}.$$

Ce qui veut dire :

il existent $x \in \partial B$ (car $\|x\| = \left\| R\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right\| = R$) et $\lambda = \frac{R}{\|f(x)\|} \in [0,1]$ tel que $x = \lambda f(x)$.

■

Théorème 2.2.5 (Alternative non linéaire de Leray-Schauder, 1955) *Soient E un espace de Banach et $f : E \to E$ une application continue, compacte. Alors*

a. *ou bien, f admet un point fixe dans E,*

b. *ou bien, Pour tout $\lambda \in [0,1]$, l'ensemble $\{x \in E : x = \lambda f(x)\}$ n'est pas borné.*

Notons que ce théorème est appelé aussi le théorème de Schaefer. La version suivante de ce résultat est très utile dans les applications.

Théorème 2.2.6 *([1], pages 48, 49)Soit $C \subset E$ un sous ensemble fermé, convexe d'un espace de Banach E, $p \in \Omega \subset C$ où Ω est un ensemble ouvert. Soit $f : \bar{\Omega} \to C$ continue, compacte. Alors*

a. *ou bien, f admet un point fixe dans $\bar{\Omega}$,*

b. *ou bien, $\exists\ x \in \partial\Omega$, $\exists \lambda \in [0, 1]$, $x = \lambda f(x) + (1 - \lambda)p$.*

Remarque 2.2.1 *En générale on prend $p = 0 \in \Omega$.*

2.3 Généralisations du théorème de Schauder

Dans cette partie on présente quelques généralisations du théorème du point fixe de Schauder pour de nouvelles classes d'applications définies par la mesure de non compacité de Kuratowski.

Théorème du point fixe de Darbo

Proposition 2.3.1 *Soit E un espace de Banach et $\{A_n\}_n$ une suite de sous-ensembles fermés bornés et non vides de E tels que:*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$$

Si $\alpha(A_n) \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$, alors $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ et A est compact.

En 1955, Darbo a formulé la généralisation suivante du théorème de Shauder.

Théorème 2.3.1 (G.Darbo, [9]) *Soient E un espace de Banach, C un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe de E et $f : C \to C$ une k-contraction stricte d'ensembles, alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Preuve. Soit la suite des ensembles $(C_n)_n$ définie par :

$$C_0 = C \ et \ C_{n+1} = \overline{conv}\ f(C_n), \ \forall n \geq 0.$$

Evidemment, (C_n) est une suite décroissante de sous ensembles, convexes, fermés et vérifiant $f(C_n) \subset C_n \ \forall n$. Par conséquent $\widetilde{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ est un convexe fermé. Alors

$$\alpha(C_{n+1}) = \alpha(\overline{conv}\ f(C_n)) = \alpha(f(C_n)) \leq k\alpha(C_n) \leq ... \leq k^n \alpha(C_0) \to 0 \ quand \ n \to \infty.$$

D'après la proposition 2.3.1, $\widetilde{C}$ est compact. De plus, $f : C \to C$ est continue. Par conséquent, le corollaire 2.2.1 entraîne que f admet un point fixe $x \in \widetilde{C} \subset C$. D'où le résultat. ■

Théorème du point fixe de Sadovski

En 1967, Sadovski a généralisé le théorème de Darbo pour les applications condensantes.

Théorème 2.3.2 (Sadovski, [7]) *Soient C un ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E et $f : C \to C$ une application condensante.*

Alors, f admet un point fixe dans C.

Preuve. Choisissons $m \in C$ et notons par Σ l'ensemble de tous les sous ensembles convexes fermés K de C vérifiant $m \in K$ et $f(K) \subset K$.

Posons $B = \bigcap_{K \in \Sigma} K$ et $Q = \overline{conv}(f(B) \cup \{m\})$. On trouve que

$$B = Q. \tag{2.3.1}$$

En effet,

d'une part, on a $m \in B$ et $f(B) \subset B$, alors $Q = \overline{conv}(f(B) \cup \{m\}) \subseteq \overline{conv} B = B$.

D'autre part, $Q \subseteq B$ implique que $f(Q) \subseteq f(B) \subseteq Q$, donc $Q \in \Sigma$, et par conséquent, $B \subseteq Q$. D'où,

$$\alpha(B) = \alpha(Q) = \alpha(\overline{conv}(f(B) \cup \{m\})) = \max\left(\alpha(f(B)), \underbrace{\alpha(\{m\})}_{=0}\right) = \alpha(f(B)). \tag{2.3.2}$$

Comme f est une application condensante, (2.3.1) et (2.3.2) entraînent que $\alpha(B) = 0$, ce qui implique que B est compacte et convexe.

Par conséquent, le corollaire 2.2.1 entraîne que f admet un point fixe $x \in C$. ■

Théorème 2.3.3 (O'Regan, 1995 **[8])** *Soient E un espace de* ***Banach,*** *$C \subset E$ un fermé, borné et convexe tel que $0 \in C$. Soit $f : C \to E$ une application condensante satisfaisant*

$$(FP)\begin{cases} \textit{Si } \{(x_n, \lambda_n)\}_{n\geq 1} \textit{ est une suite dans } \partial C \times [0,1] \\ \textit{qui converge vers } (x,\lambda) \textit{ avec } x = \lambda f(x) \textit{ et } 0 < \lambda < 1, \\ \textit{alors } \lambda_n f(x_n) \in C \textit{ pour } n \textit{ suffisamment grand.} \end{cases}$$

Alors, f dmet un point fixe dans C.

Remarque 2.3.1 *La condition (FP) est appelée condition de Furi Pera.*

Théorème 2.3.4 (Agarwal, Meehan et O'Regan, 2001) *Soient $C \subseteq E$ un sous-ensemble fermé, convexe d'un espace de Banach E et $0 \in \Omega \subset C$ tel que $f(\bar{\Omega})$ est borné. Soit $f : \bar{\Omega} \to C$ une application condensante. Alors*

a. *ou bien, f admet un point fixe dans $\bar{\Omega}$,*

b. *ou bien, il existent $x \in \bar{\Omega}$ et $\lambda \in]0,1[$ tel que $x = \lambda f(x)$.*

CHAPITRE 3 Somme d'une application compacte et d'une application contractante

3.1 Théorème du point fixe de type Krasnoselskii

Introduction

En 1958, Krasnoselskii (voir [11]) a observé que dans un bon nombre de problèmes, l'intégration d'un opérateur différentiel perturbé donne naissance à une somme de deux applications, une contraction et une application compacte. Pour mieux comprendre cette observation de Krasnoselskii, on considère l'équation différentielle perturbée suivante

$$x^{'}(t) = -a(t)\,x(t) - g(t, x(t)), \tag{3.1.1}$$

où $a(t+T) = a(t)$ et $g(t+T, x) = g(t, x)$ pour un certain $T > 0$. On peut transformer cette équation sous une autre forme en écrivant,

$$x^{'}(t)\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right) = -a(t)\,x(t)\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right) - g(t,x)\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right).$$

Par conséquent,

$$\left(x(t)\exp\int_0^t a(s)\,ds\right)^{'} = -g(t, x(t))\exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right).$$

Une intégration de $t-T$ à t donne

$$\int_{t-T}^{t}\left(x\left(u\right)\exp\int_{0}^{u}a\left(s\right)ds\right)'du=-\int_{t-T}^{t}g\left(u,x\left(u\right)\right)\left(\exp\int_{0}^{u}a\left(s\right)ds\right)du.$$

Ainsi,

$$x\left(t\right)=x\left(t-T\right)\exp\left(-\int_{T-t}^{t}a\left(s\right)ds\right)-\int_{t-T}^{t}g\left(u,x\left(u\right)\right)\exp\left(-\int_{u}^{t}a\left(s\right)ds\right)du \quad (3.1.2)$$

Si on suppose que $\exp\left(-\int_{T-t}^{t}a\left(s\right)ds\right):=\alpha<1$, et si $(X,\|.\|)$ est l'espace de Banach de fonctions $\phi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ continues et $T-$périodiques, alors l'équation (3.1.2) peut se mettre sous la forme

$$\phi\left(t\right)=\left(B\phi\right)\left(t\right)+\left(A\phi\right)\left(t\right),$$

avec B est une contraction de constante $\alpha<1$ et A est une application compacte. Cet exemple montre bien la naissance de l'application $P\phi:=B\phi+A\phi$ qui s'identifie à une somme d'une contraction et d'une application compacte. La recherche d'une solution pour (3.1.2) exige donc un théorème adéquat qui s'applique à cet opérateur hybride P et qui peut donner l'existence d'un point fixe qui sera, à son tour, solution de l'équation initiale (3.1.1). Krasnoselskii trouva la solution en combinant les deux théorèmes de Banach et celui de Schauder en un seul théorème hybride mais puissant qui porte son nom.

Théorème 3.1.1 (Krasnoselskii , 1958) *Soient C un sous ensemble non vide, fermé, convexe d'un espace de Banach E et $f,g:C\rightarrow E$ deux applications telles que :*

a. $\forall\ x,\ y\in C,\ f(x)+g(y)\in C.$

b. *f est continue, compacte.*

c. *g est une contraction de constante $k<1$.*

Alors, il existe un certain $x^{*}\in C$ tel que $(f+g)(x^{*})=x^{*}$.

Remarque 3.1.1 • *Si f est identiquement nulle alors ce théorème coïncide avec le principe de contration de Banach.*

- *Si g est identiquement nulle il coïncide avec le théorème de Schauder.*

Les détails de la preuve reposent sur le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et C un sous ensemble non vide de E. Soit $g : C \to E$ une contraction. Alors $(I-g) : C \to (I-g)(C)$ est un homéomorphisme, où I désigne l'identité.*

Preuve. L'application $I-g$ est continue. En effet, $\forall x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned}\|(I-g)(x)-(I-g)(y)\| &\leq \|x-y\| + \|g(x)-g(y)\| \\ &\leq \|x-y\| + k\|x-y\| \\ &\leq (1+k)\|x-y\|.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\|(I-g)(x)-(I-g)(y)\| &= \|(x-y)-(g(x)-g(y))\| \\ &\geq \|x-y\| - \|g(x)-g(y)\| \\ &\geq \|x-y\| - k\|x-y\| \\ &\geq (1-k)\|x-y\|, \ (0<k<1).\end{aligned}$$

Ceci montre que$(I-g)^{-1}$ existe et est continue . ■

Preuve. (démonstration du théorème de Krasnoselskii)

Soit $y \in C$ fixé, d'aprés le théorème du point fixe de Banach, l'application $\phi : C \to C$ définie par :

$$\phi(x) = g(x) + f(y).$$

admet au moins un piont fixe dans C.

L'application :

$$\begin{array}{rccl} h: & C & \to & C \\ & x & \to & h(x) = (I-g)^{-1} \circ f(x) \end{array}$$

est continue, compacte et envoie C dans lui même. En effet,

h est une composition d'une application continue et compacte avec une application continue ($(I-g)^{-1}$ est continue d'après le lemme précédent), donc compacte.

Par le théorème du point fixe de Schauder, h admet un point fixe dans C :

$x = h(x) \Leftrightarrow x - g(x) = f(x) \Longleftrightarrow x = f(x) + g(x)$. ■

Remarque 3.1.2 *En 1998, Burton (voir [4]) constate que le théorème du point fixe de Krasnoselskii reste valable si on remplace la première condition par :*

$$\forall\, y \in C \quad (x = f(y) + g(x) \Longrightarrow x \in C)\ .$$

Théorème 3.1.2 *Soient E un espace de Banach, $C \subset E$ un fermé, borné et convexe. Supposons que :*

a. *L'application $f : C \to E$, est compacte et continue.*

b. *L'application $g : C \to E$, est une contraction non linéaire.*

c. $\forall\, x, y \in C$, $f(x) + g(y) \in C$. *Alors, $f + g$ admet un point fixe dans C.*

Preuve. $f + g$ est condensante. En effet,

soit A un sous ensemble borné de $C \subset E$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha((f+g)(A)) &\leq \alpha(f(A)) + \alpha(g(A)) \text{ (car } \alpha \text{ est sous-additive)} \\ &= \alpha(g(A)) \text{ (car } f \text{ est compact).} \end{aligned}$$

Montrons que $\alpha(g(A)) \leq \phi(\alpha(A))$, avec (pour $y \in C$ fixé)

$$\begin{array}{rccl} \phi : & C & \to & C \\ & x & \mapsto & \phi(x) = g(x) + f(y) \end{array}$$

Soit $\epsilon > 0$ et $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ avec $diam(A_i) \leq \alpha(A) + \epsilon$. On a $g(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} g(A_i) = \bigcup_{i=1}^{N} Y_i$. Soient y_1, y_2 dans Y_i pour un certain indice i, il existe x_1, $x_2 \in A_i$ tels que $g(x_1) = y_1$ et $g(x_2) = y_2$.

On a

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \phi(\|x_2 - x_1\|) \leq \phi(\alpha(A) + \epsilon),$$

alors

$$diam(Y_i) \leq \phi(\alpha(A) + \epsilon) \Rightarrow \alpha(g(A)) \leq \phi(\alpha(A) + \epsilon), \forall \epsilon > 0,$$

$$\epsilon \to 0, \alpha(g(A)) \le \phi(\alpha(A))$$

donc $\alpha((f+g)(A)) \le \phi(\alpha(A)) < \alpha(A)$, d'après le théorème 2.3.2 $f+g$ admet un point fixe dans C. ■

Théorème 3.1.3 (O'Regan, 1995 [8]) *Soient E un espace de Banach, $C \subset E$ un fermé, borné et convexe tel que $0 \in C$. Supposons que :*

a. *L'application $f : C \to E$ est compacte et continue.*

b. *L'application $g : C \to E$ est une contraction non linéaire.*

c. *Si $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n\ge1}$ est une suite dans $\partial C \times [0,1]$ qui converge vers (x, λ) avec $x = \lambda(f+g)x$ et $0 < \lambda < 1$, alors $\lambda_n(f+g)x_n \in C$ pour n suffisamment grand. Alors, $f+g$ admet un point fixe dans C.*

La démonstrastion de ce théorème découle du théorème 2.3.3, car $(f+g)$ est une application condensante.

3.2 Alternative non linéaire

Corollaire 3.2.1 (Burton, 1998) *Soient E un espace de Banach et f , $g : E \to E$ deux applications telles que f est compacte et g est une contraction. Alors*

a. ou bien, *$f+g$ admet un point fixe,*

b. ou bien, *l'ensemble $\{x \in E \; ; \; x = \lambda f(x) + \lambda g(\frac{x}{\lambda}), \, \lambda \in]0,1[\}$ est non borné.*

Preuve. Il suffit de montrer que si g est une k-contraction, alors $\lambda g\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ est une k-contraction, $\forall \lambda \in]0,1[$. ■

Théorème 3.2.1 (O'Regan, 1995) *Soient E un espace de Banach, $C \subset E$ fermé et convexe et Ω un sous ensemble ouvert de C tel que $0 \in \Omega$. Supposons que*

i. *$f : \bar{\Omega} \to E$ est complètement continue.*

ii. $g : \bar{\Omega} \to E$ *est une contraction non linéaire,*

iii. $(f+g)(\bar{\Omega})$ *est borné dans* E.

Alors :

a. ou bien, $f+g$ admet un point fixe dans $\bar{\Omega}$,

b. ou bien, il existent $x \in \partial\Omega$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que $x = \lambda(f+g)(x)$.

Théorème 3.2.2 (Agarwal, Meehan et O'Regan, 2001) *Soient* E *un espace de Banach,* $C \subset E$ *un convexe, fermé et* $\Omega \subset C$ *un ouvert qui contient* x_0*. Supposons que*

i. $f : \bar{\Omega} \to C$ *est complètement continue.*

ii. $g : \bar{\Omega} \to C$ *est une contraction non linéaire,*

iii. $(f+g)(\bar{\Omega})$ *est borné dans* C.

Alors, on a l'alternative :

a. Ou bien, $f+g$ admet un point fixe dans $\bar{\Omega}$.

b. Ou bien, Il existe $x \in \partial\Omega$ et $\lambda \in (0,1)$ tels que $x = \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)x_0$.

CHAPITRE 4

Applications

4.1 Applications utilisant les théorèmes de type Banach

4.1.1 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale dans L^1

On considère l'espace de Banach $L^1([0,1])$. Soit $K \in L^1([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$. On munit $L^1([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_*$ définie par

$$\|K\|_* = \sup_{y \in [0,1]} \int_0^1 |K(y,x)|\, dx.$$

On définit pour tout u dans $L^1([0,1])$, l'opérateur linéaire A de $L^1([0,1])$ dans lui même par

$$(Au)(x) = \int_0^1 K(y,x)u(y)dy.$$

Montrons que A est continu

$$\begin{aligned}
\|Au\|_{L^1} &= \int_0^1 |(Au)(x)|\, dx \\
&= \int_0^1 \left| \int_0^1 K(y,x)u(y)dy \right| dx \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |K(y,x)|\, |u(y)|\, dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 |K(y,x)|\, |u(y)|\, dxdy \\
&= \int_0^1 |u(y)| \int_0^1 |K(y,x)|\, dxdy \\
&\leq \int_0^1 |u(y)|\, \|K\|_* \, dy \\
&= \|K\|_* \, \|u\|_{L^1} .
\end{aligned}$$

Ceci signifie que A est continu. De plus, A est $\|K\|_*$-lipschitzien. En effet,

$$\|Au - Av\|_{L^1} \leq \|K\|_* \, \|u - v\| \, \forall u, v \in L^1([0,1]).$$

D'après le théorème de contraction de Banach pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > \|K\|_*$, l'équation $Au + \lambda u = f$ avec $f \in L^1$ possède une solution unique. En effet, l'opérateur

$$\begin{array}{llll}
g: & L^1([0,1]) & \to & L^1([0,1]) \\
 & u & \mapsto & g(u) = \frac{1}{\lambda}(f - Au)
\end{array}$$

est une $\frac{\|K\|_*}{|\lambda|}$−contraction.

En partant de $u_0 \in L^1([0,1])$, les approximations successives s'écrivent :

$$u_{n+1}(x) = \frac{f(x) - Au_n(x)}{\lambda}, \forall x \in [0,1] .$$

4.1.2 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale de Fredholm

Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $E = C([a,b], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Soient $\varphi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut trouver une fonction $t \longmapsto u(t)$ dans E telle que

$$\forall t \in [a,b], \; u(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds + \varphi(t).$$

Soit A l'application définie par

$$Au(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds + \varphi(t).$$

On voit que $\forall u \in E$, $A(u) \in E$ et donc $A : E \to E$.

Soient $u, v \in E$ tels que $u \neq v$. Estimons $\|Au - Av\|$:

$$\begin{aligned}
\|Au - Av\| &= \max_{a \le t \le b} |A(u)(t) - A(v)(t)| \\
&= \max_{a \le t \le b} \left| \lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds + \varphi(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)v(s)ds - \varphi(t) \right| \\
&= \max_{a \le t \le b} |\lambda| \left| \int_a^b K(t,s)(u(s) - v(s))ds \right| \\
&\le |\lambda| \max_{a \le t \le b} \int_a^b |K(t,s)| \, |u(s) - v(s)| \, ds.
\end{aligned}$$

Comme K est continue sur le compact $[a,b] \times [a,b]$, alors $\exists M > 0$ tel que

$$|K(t,s)| < M, \; \forall (t,s) \in [a,b] \times [a,b].$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|Au - Av\| &\leq |\lambda| \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t,s)| \, |u(s) - v(s)| \, ds \\
&\leq |\lambda| \, M \, \|u - v\| \int_a^b ds \\
&= |\lambda| \, M(b-a) \, \|u - v\| \, .
\end{aligned}$$

Pour que A soit contractante, il faut que

$$|\lambda| \, M(b-a) < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Dans ce cas l'équation admet une solution unique grâce au théorème de contraction de Banach. De plus, en partant de $u_0 \in E$, les approximations successives s'écrivent :

$$\forall t \in [a,b] : u_{n+1}(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) u_n(s) ds + \varphi(t).$$

Ce qui donne, lorsque $n \to +\infty$, la solution u.

4.1.3 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale de Volterra

Sous les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, on veut trouver u telle que

$$\forall t \in [a,b] \, , \; u(t) = \lambda \int_a^t K(t,s) u(s) ds + \varphi(t)$$

On procède de la même manière que dans l'équation de Fredholm, on obtient

$$\begin{aligned}
\|Au - Av\| &= \max_{a\le t\le b} |A(u)(t) - A(v)(t)| \\
&= \max_{a\le t\le b} \left| \lambda \int_a^t K(t,s)u(s)ds + \varphi(t) - \lambda \int_a^t K(t,s)v(s)ds - \varphi(t) \right| \\
&= \max_{a\le t\le b} |\lambda| \left| \int_a^t K(t,s)(u(s) - v(s))ds \right| \\
&\le |\lambda| \max_{a\le t\le b} \int_a^t |K(t,s)|\, |u(s) - v(s)|\, ds \\
&\le |\lambda|\, M \max_{a\le t\le b} \int_a^t |u(s) - v(s)|\, ds \\
&\le |\lambda|\, M \|u - v\| \max_{a\le t\le b} \int_a^t ds \\
&\le |\lambda|\, M \|u - v\| \max_{a\le t\le b} (t-a) \\
&\le |\lambda|\, M (b-a) \|u - v\| .
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\left\|A^2u - A^2v\right\| &= \max_{a\le t\le b} |\lambda| \left| \int_a^t K(t,s)Au(s) - Av(s)ds \right| \\
&= |\lambda| \max_{a\le t\le b} \int_a^t |K(t,s)|\, |Au(s) - Av(s)|\, ds \\
&\le |\lambda|\, M \int_a^t |Au(s) - Av(s)|\, ds \\
&\le |\lambda|\, M \int_a^t |\lambda|\, M(s-a) \|u - v\|\, ds \\
&\le |\lambda|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \|u - v\| .
\end{aligned}$$

De même on trouve

$$\left\|A^3u - A^3v\right\| \le |\lambda|^3 M^3 \frac{(t-a)^3}{6} \|u - v\| = |\lambda|^3 M^3 \frac{(t-a)^3}{3!} \|u - v\| .$$

Ainsi, par récurrence, on obtient

$$\|A^n(u)(t) - A^n(v)(t)\| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \|u - v\| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \|u - v\|.$$

Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il est possible de choisir un n assez grand pour que

$$\frac{(|\lambda| M(b-a)^n)}{n!} < 1.$$

Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A^n est une contraction et d'après le théorème 2.1.2,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, l'équation intégrale admet une solution unique.

4.1.4 Existence de solutions d'un problème aux limites

Soit le problème de Dirichlet du second ordre suivant :

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} y'' = f\left(t,\ y,\ y'\right),\ t \in [a,b] \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

où $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Nous considérons, pour $\lambda \in \left]0,1\right[$, la famille des problèmes :

$$(\mathrm{P})_\lambda \quad \begin{cases} y'' = \lambda f\left(t, y, y'\right),\ t \in [a,b] \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

On définit l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} F : & C^1([a,b], \mathbb{R}) & \longrightarrow & C^1([a,b], \mathbb{R}) \\ & y & \longmapsto & Fy(t) = \displaystyle\int_a^b G(t,s) f\left(s, y(s), y'(s)\right) ds, \end{array}$$

où la fonction de Green est donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}, a \leq t \leq s \leq b, \\ -\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}, a \leq s \leq t \leq b. \end{cases}$$

On peut montrer que les points fixes de F sont les solutions du problème (P) et inversement.

Théorème 4.1.1 *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, vérifiant*

$$\begin{cases} \text{il existe un sous-ensemble } D \subseteq R^2 \text{ et deux constantes } K_0 \text{ et } K_1 \\ \text{telles que } |f(t,y,y') - f(t,z,z')| \leq K_0|y-z| + K_1|y'-z'|, \ \forall t \in [a,b] \times D \end{cases}$$

et

$$K_0 \frac{(b-a)^2}{8} + K_1 \frac{(b-a)}{2} < 1. \tag{4.1.1}$$

Supposons qu'il existe un ensemble ouvert borné de fonctions, $U \subset C^1[a,b]$ avec $0 \in U$ tel que

$$u \in \overline{U} \text{ implique que tout } (u(t), u'(t)) \in D \text{ pour tout } t \in [a,b] \tag{4.1.2}$$

et

$$y \text{ est solution de } (P)_\lambda \text{ pour un certain } \lambda \in]0,1[\text{ implique que } y \notin \partial U. \tag{4.1.3}$$

Alors le problème (P) admet une unique solution dans $\overline{U}$.

Preuve. Soit $X = C^1([a,b], \mathbb{R})$ muni de la norme :

$$\|y\| = K_0|y|_0 + K_1|y'|_0 \text{ où } |y|_0 = \sup_{t\in[a,b]} |y(t)| \text{ et } |y'|_0 = \sup_{t\in[a,b]} |y'(t)|$$

L'application $F : \overline{U} \to C^1[a,b]$ est cotractante. En effet, d'après les propriétés de la fonction f et la condition (4.1.2), pour tout y et z dans $\overline{U}$ et $t \in [a,b]$ nous avons

$$\begin{aligned} |(Fy - Fz)(t)| &= \left| \int_a^b G(t,s) \left[f(s, y(s), y'(s)) - f(s, z(s), z'(s)) \right] ds \right| \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{8} \|y - z\|, \end{aligned}$$

puisque

$$\max_{t\in[a,b]} \int_a^b |G(t,s)|\, ds = \max_{t\in[a,b]} \frac{(b-t)(t-a)}{8} = \frac{(b-a)^2}{8}.$$

Alors

$$|Fy - Fz|_0 \leq \frac{(b-a)^2}{8} \|y - z\|.$$

Ainsi que, pour tout y et z dans $\overline{U}$, nous avons $|\,(Fy - Fz)'\,|_0 \leq \frac{(b-a)}{2} \|y-z\|$, puisque

$$\max_{t\in[a,b]} \int_a^b |G_t\,(t,s)|\,ds = \max_{t\in[a,b]} \frac{(b-t)^2 + (t-a)^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)}{2}.$$

Par conséquent,

$$\|Fy - Fz\| \leq \left[K_0 \frac{(b-a)^2}{8} + K_1 \frac{(b-a)}{2}\right] \|y-z\|\,, \forall y,\, z \in \overline{U}. \tag{4.1.4}$$

Ensuite, la condition (4.1.1) entraîne la contraction de F. Finalement, la condition (4.1.3) entraîne que la proposition (b) dans le théorème 2.1.7 n'est pas vérifiée. D'où l'existance et l'unicité d'une solution du problème (P). ■

4.2 Applications utilisant les théorèmes de type Schauder

4.2.1 Problème de Dirichlet homogène d'ordre deux

Théorème 4.2.1 *Soit* $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et bornée :*

$$\exists M > 0, |f(x,y,z| \leq M, \forall (x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} y''(x) = f\left(x, y, y'\right) \ ; a < x < b \\ y\,(a) = y\,(b) = 0, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

admet au moins une solution $y \in C^2([a,b])$*. De plus on a les estimations suivantes sur la solution* y *et sa dérivée :*

$$\forall x \in [a,b]\,,\ |y(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}. \tag{4.2.2}$$

$$\forall x \in [a,b]\,,\ \left|y'(x)\right| \leq \frac{M(b-a)}{2}. \tag{4.2.3}$$

Preuve. (Par le théorème du point fixe de Shauder)

Soit $X = C^1([a,b])$ muni de la norme $\|u\|_X = \max(\sup\limits_{x\in[a,b]} |u(x)|\,, \frac{b-a}{4} \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|u'(x)\right|)$. C'est une norme équivalente à la norme du sup; X est donc un espace de Banach pour cette norme aussi.

- Le problème (4.2.1) est équivalent à l'équation intégrale

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s, y(s), y'(s)) ds,$$

où la fonction de Green est donnée par :

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{(x-a)(b-s)}{b-a}, & a \leq x \leq s \leq b \,; \\ -\frac{(s-a)(b-x)}{b-a}, & a \leq s \leq x \leq b. \end{cases}$$

On définit maintenant l'opérateur T par :

$$\begin{array}{rccl} T: & X & \rightarrow & X \\ & y & \longmapsto & Ty(x) = \int_a^b G(x,s) f(s, y(s), y'(s)) ds \end{array}$$

1. T est bien défini car la fonction G est définie de manière unique et f est continue et bornée.

On considère, dans X, la boule fermée de rayon $M\frac{(b-a)^2}{8}$:

$$B = \left\{ u \in X, \ \|u\|_X \leq M\frac{(b-a)^2}{8} \right\}.$$

Montrons que T envoie B dans B : Soit $y \in B$ et $Y = Ty$. Comme f est bornée par M, on a les estimations suivantes :

$$|Y(x)| \leq M\frac{(b-a)^2}{8} \quad et \quad \left|Y'(x)\right| \leq M\frac{(b-a)}{2},$$

donc

$$\|Y\|_X = \max(\sup_{x\in[a,b]} |Y(x)|, \frac{b-a}{4} \sup_{x\in[a,b]} \left|Y'(x)\right|) = M\frac{(b-a)^2}{8}.$$

D'où $Y \in B$ et donc T envoie B dans B (en fait T envoie tout l'espace X dans B).

2. T est continue sur X. En effet, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergente vers une limite $y \in X$ et $Y_n = Ty_n$.

$$Ty_n(x) = \int_a^b G(x,s) f(s, y_n(s), y_n'(s)) ds, \ \forall x \in [a,b].$$

D'une part, la continuité de f entraîne que

$$f(s, y_n(s), y_n^{'}(s)) \to f(s, y(s), y^{'}(s)), \ \forall s \in [a, b] \quad quand \ n \to +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |Ty_n(x)| &\leq \int_a^b |G(x,s)| \left| f(s, y_n(s), y_n^{'}(s)) \right| ds \\ &\leq \max_{x \in [a,b]} \left| f(x, y_n(x), y_n^{'}(x)) \right| \int_a^b |G(x,s)| \, ds \\ &\leq \frac{M(b-a)^2}{8} \in L^1 [a, b] . \end{aligned}$$

Ainsi, on a vérifié les deux conditions du théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir Annexe),

$$\|Ty_n - Ty\| \to 0 \ quand \ n \to +\infty.$$

Alors $(Y_n)_n$ converge vers $Y = Ty$, ceci montre la continuité de T dans X.

3. T est borné sur X. En effet, soit $y \in C^1([a, b])$, alors

$$|Ty_n(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8} < \infty, \ \forall x \in [a, b] .$$

et

$$\left| (Ty_n)^{'} (x) \right| \leq \frac{M(b-a)}{2} < \infty, \forall x \in [a, b] .$$

4. T est compact. En effet, soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de X. T étant bornée, donc $(Ty_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi dans X. Alors la suite $(Ty_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1([a, b])$ et même dans $C^2([a, b])$, car $(Fy_n)^{''} (x) = f(x, y_n, y_n^{'})$ et f est continue.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzéla, la suite $(Fy_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans $C^1([a, b])$, d'où la compacité de l'application T.

Par conséquent, le théorème du point fixe de Schauder entraîne que T admet un point fixe y qui est solution du problème (4.2.1).

- Montrons les estimations (4.2.2) et (4.2.3). On pose

$$M=\max_{x\in[a,b]}\left|f\left(x,y\left(x\right),y^{'}\left(x\right)\right)\right|,$$

alors

$$|y(x)|\leq M\int\limits_a^b|G(x,s)|\,ds.$$

On a

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b|G(x,s)|\,ds&=\int\limits_a^x\frac{\left(s-a\right)\left(x-b\right)}{b-a}ds+\int\limits_x^b\frac{\left(x-a\right)\left(s-b\right)}{b-a}ds\\&=\frac{1}{2}\frac{\left(x-b\right)}{b-a}\left(x-a\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\left(x-a\right)}{b-a}\left(x-b\right)^2\\&=\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{2},\end{aligned}$$

et comme

$$\max_{a\leq x\leq b}\left|\frac{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}{2}\right|=\frac{(b-a)^2}{8}.$$

Alors

$$\int\limits_a^b|G(x,s)|\,ds\leq\frac{(b-a)^2}{8}.$$

On a également l'éstimation suivante :

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right|ds&=\int\limits_a^x\frac{(s-a)}{b-a}ds+\int\limits_x^b\frac{(b-s)}{b-a}ds\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{b-a}\left[\left(x-a\right)^2+\left(b-x\right)^2\right].\end{aligned}$$

Comme le maximum de la fonction $\theta(x)=\left(x-a\right)^2+\left(b-x\right)^2$ est atteint au extrémités a ou b alors

$$\max_{a\leq x\leq b}\left[\left(x-a\right)^2-\left(x-b\right)^2\right]=(b-a)^2.$$

Par conséquant

$$\int\limits_a^b\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right|ds\leq\frac{b-a}{2}.$$

Enfin,

$$\left|y'(x)\right| \leq M \int_a^b \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)\right| ds \leq \frac{M(b-a)}{2}.$$

■

4.3 Application utilisant l'alternative non linéaire de type Krasnoselskii

Soit le problème de Dirichlet du second ordre suivant :

$$\begin{cases} y'' + \mu f\left(t, y, y'\right) = 0, \text{ p.p } t \in [0,1] \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application de Carathéodory et $\mu \in \mathbb{R}^+$.

Théorème 4.3.1 *Supposons que $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une décomposition*

$$f(t,u) = f_1(t,u) + f_2(t,u),$$

où f_1 et f_2 sont deux applications de Carathéodory vérifiant les conditions suivantes :

1. *Pour tout ensemble borné $\Omega \subseteq \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, et pour tout $t \in [0,1]$, l'ensemble :*

$$\left\{(1-t)\int_0^t s f_1(s, y(s)) ds + t \int_t^1 (1-s) f_1(s, y(s)) ds : y \in \Omega\right\} \text{ est relativement compact.}$$

2. *Il existe $q \in (L^1[0,1], \mathbb{R})$, avec $q > 0$ p.p dans $[0,1]$ et une fonction continue, croissante $\phi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ satisfaisant $\phi(z) < z$ pour $z > 0$ tels que*

$$|f_2(t, u_1) - f_2(t, u_2)| \leq q(t)\, \phi(|u_1 - u_2|) \text{ pour } t \in [0,1] \text{ et } u_1, u_2 \in \mathbb{R}$$

et

$$\mu \sup_{[0,1]} \left((1-t)\int_0^t s q(s) ds + t \int_t^1 (1-s) q(s) ds\right) \leq 1. \tag{4.3.2}$$

2. *Il existe une fonction continue croissante* $\psi : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *satisfaisant* $\psi(u) > 0$ *pour* $u > 0$ *et une fonction* $\eta \in (L^1[0,1], \mathbb{R})$ *avec* $\eta > 0$ *p.p dans* $[0,1]$ *tels que*

$$|f(t,u)| \leq \eta(t)\psi(|u|) \text{ dans } [0,1]\times\mathbb{R}.$$

Soit

$$Q_0 = \sup_{[0,1]}\left((1-t)\int_0^t s\eta(s)ds + t\int_t^1 (1-s)\eta(s)ds\right),$$

et μ_0 *tels que*

$$\sup_{x\in[0,+\infty[}\left(\frac{x}{\mu_0 Q_0\psi(x)}\right) > 1.$$

Alors, si $0 \leq \mu \leq \mu_0$*, le problème (4.3.1) admet une solution.*

Preuve. Soient $\mu \leq \mu_0$ et $M_0 > 0$ tels que

$$\frac{M_0}{\mu Q_0 \psi(M_0)} > 1. \tag{4.3.3}$$

Soit y une solution de la famille des problèmes

$$(\mathrm{P})_\lambda \quad \begin{cases} y'' + \lambda\mu f(t,y) = 0, \ t\in[0,1] \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \tag{4.3.4}$$

Pour $0 < \lambda < 1$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$y(t) = \lambda\mu\left((1-t)\int_0^t sf(s,y(s))ds + t\int_t^1 (1-s)f(s,y(s))ds\right),$$

et alors la condition (3) nous donne

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \mu\left((1-t)\int_0^t s\eta(s)\psi(|y(s)|)\,ds + t\int_t^1 (1-s)\eta(s)\psi(|y(s)|)\,ds\right) \\ &\leq \mu\psi(\|y\|_0)\,Q_0,\ \forall t\in[0,1], \end{aligned}$$

où $\|y\|_0 = \sup\limits_{t\in[0,1]} \|y(t)\|$. Par conséquant,

$$\frac{\|y\|_0}{\mu Q_0\psi(\|y\|_0)} \leq 1 \tag{4.3.5}$$

Soit $U = \{u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : \|u\|_0 < M_0\}$, et soit l'opérateur $N : \bar{U} \to C([0,1],\mathbb{R})$ défini par :

$$Ny(t) = \mu\left((1-t)\int_0^t sf(s,y(s))ds + t\int_t^1 (1-s)f(s,y(s))ds\right) = N_1y(t) + N_2y(t),$$

Constatons que toute solution du problème (4.3.1) est un point fixe de l'opérateur N et inversement.

$$N_iy(t) = \mu\left((1-t)\int_0^t sf_i(s,y(s))ds + t\int_t^1 (1-s)f_i(s,y(s))ds\right), i = 1,2$$

N_1 et N_2 sont bien définis et continus car f_1 et f_2 sont deux applications de Carathéodory, la condition (1) combinée avec le

théorème d'Ascoli-Arzéla entraîne que N_1 est complètement continue. Donc l'opérateur $N_1 : \bar{U} \to C([0,1],\mathbb{R})$ est compact.

Pour $u,\ v \in \bar{U}$ et $t \in [0,1]$, de la condition (2), on a

$$|N_2u(t) - N_2v(t)| \leq \mu\left((1-t)\int_0^t sq(s)\phi(|u(s)-v(s)|))ds + t\int_t^1 (1-s)q(s)\phi(|u(s)-v(s)|)ds\right)$$
$$\leq \mu Q(\|u-v\|_0)\sup_{t\in[0,1]}\left((1-t)\int_0^t sq(s)ds + t\int_t^1 (1-s)q(s)ds\right)$$

et d'après l'inégalité (4.3.2)

$$\|N_2u - N_2v\|_0 \leq \phi(\|u-v\|_0).$$

Donc l'opérateur $N_2 : \bar{U} \to C([0,1],\mathbb{R})$ est une contraction non linéaire.

Si la condition (b) du théorème 3.2.2 est satisfaite, alors il existe $\lambda \in]0,1[$ et $y \in \partial U$ avec $y = \lambda Ny$. Donc y est une solution de la famille des probèmes (4.3.4) avec $\|y\|_0 = M_0$. Donc l'inégalité (4.3.5) implique que

$$\frac{M_0}{\mu Q_0\psi(M_0)} \leq 1.$$

Ce qui contredit (4.3.3). Enfin du théorème 3.2.2, l'opérateur N admet un point fixe.

D'où, le problème (4.3.2) admet une solution. ∎

Remarque 4.3.1 *Notons que ce résultat a été démontré par O'Regan, en* 1995, *dans l'article [8] pour $f : [0,1]\times E \to E$ où E est un espace de Banach abstrait.*

Conclusion

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solutions pour les problèmes non linéaires. De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche. Dans notre travail, on a présenté quelques théorèmes du point fixe à savoir les théorèmes classiques de Banach et de Schauder, en combinant ses deux résultats Krasnoselskii a obtenu, en 1958, un résultat hybride. Ce théorème est captivant et possède un domaine d'applications trés vaste. Comme perspectives on pense a appliquer le théorème de Krasnoselskii ou l'une de ses extensions pour établir l'existence de solutions de certains problèmes aux limites.

Annexes

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Soit (X, μ) un espace mesuré où X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et μ la mesure de Lebesgue définie sur la tribu borélienne.

Théorème 4.3.2 (de la convergence dominée de Lebesgue) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$f_n(x) \to f(x), \text{ quand } n \to +\infty, \text{ presque partout dans } X,$$

et telle qu'il existe une fonction g sur X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, intégrable telle que l'on ait

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ presque partout dans } X.$$

Alors f est intégrable et l'on a

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

En particulier

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

Le théorème de convergence dominée existe aussi en version L^p.

Théorème 4.3.3 *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(X, \mu)$ telle que*

$$f_n(x) \to f(x), \text{ quand } n \to +\infty, \text{ presque partout dans } X,$$

et telle qu'il existe une fonction $g \in L^P(X, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que l'on ait

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ presque partout dans } X.$$

Alors $f \in L^P(X,\mu)$ *et l'on a*

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Application de Carathéodory

Définition 4.3.1 *Soit* Ω *un ouvert borné dans* $\mathbb{R}^n$*, on dit que* $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est une fonction* L^q*-Carathéodory si*

a. *L'application* $t \mapsto f(t,x)$ *est mesurable pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$*,*

b. *L'application* $x \mapsto f(t,x)$ *est continue pour tout* $t \in \Omega$*,*

c. *pour tout* $r > 0$*, il existe une fonction positive* $h_r \in L^q(\Omega)$ *telle que si* $\|u\|_{\mathbb{R}^n} \leq r$ *on a* $|f(t,x)| \leq h_r(t)$*, pp* $t \in \Omega$*.*

Equations intégrales

Définition 4.3.2 *Une équation intégrale est une équation dont l'une des indéterminées est une intégrale.*

1. **Equation de Fredholm du premier type**

L'une des équations intégrales les plus simple est l'équation intégrale de Fredholm du premier type :

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt.$$

où ϕ est la fonction inconnue, f est une fonction connue et K une autre fonction connue à deux variables, souvent appelée le noyau de l'opérateur intégral. Les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm.

2. **Equation de Fredholm du second type**

Si la fonction inconnue apparait à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale, alors il s'agit de l'équation intégrale de Fredholm du second type :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt.$$

Le paramètre λ est un facteur inconnu, qui joue le même role que la valeur propre en algèbre linéaire.

3. **Equation de Volterra du premier et du second type**

Si l'une des bornes d'intégration est variable, il s'agit d'une équation intégrale de Volterra. Les équations de Volterra du premier et du second type sont de la forme :

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt,$$

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt.$$

Caractéristiques

Si la fonction connue f est identiquement nulle, l'équation intégrale est alors appelée **"équation intégrale homogène"** et dans le cas contraire l'équation est dite **"équation intégrale non-homogène".**

Ces équations sont classées selon trois dichotomies :

1. Limites d'intégration

   - Les deux fixées : équation de Fredholm.
   - L'une variable : équation de Volterra.

2. Place de la fonction inconnue

   - Seulement à l'intérieur de l'intégrale : premier type.
   - A l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale : second type.

3. Nature de la fonction connue f

- Identiquement nulle : homogène.
- Non identiquement nulle : non-homogène.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press, New York, (2001).

[2] R. P. Agarwal, D. O'Regan and D. R. Sahu, *Fixed point theory for lipschitzian-type mapping with applications*, Vol 6. Cambridge university Press Springer, (2000).

[3] C. Avermescu, *Some remarks on a fixed point theorem of Krasnoselskii*, EJQTDE, 5 (2003), 1-15.

[4] T. A. Burtun, *A fixed-point theorem of Krasnoselskii*, App. Math. Lett. 11(1) (1995) 85-88 .

[5] B. C. Dhage, *Remarks on two fixed-point theorems involving the sum and product of two operators*, Computes and Mathematics with Applications 46 (2003) 1779-1785.

[6] B. C. Dhage, *Local fixed point theory for the sum of two operators,* Fixed Point Theory, 4 (2003) 49-60.

[7] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Verlag-Berlin, Heidelberg New York , 1985.

[8] D. O'Regan, *Fixed point theory for the sum of two operators*, Appl. Math. Lett. 9(1) (1996) 1-8.

[9] D. O'Regan, *Fixed Point Theorems for Nonlinear Operators*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 202 (1996) 413-432.

[10] V. M. Shehgal, S. P. Singh, *A fixed point theorem for the sum of two mappings*, Math Japonica 23 (1978) 71-75.

[11] D. R. Smart, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, (1974).

[12] Tian Xiang, Rong Yuan, *A class of expansive-type Krasnoselskii fixed point theorems*, Nonlinear Analysis 71 (2009) 3229-3239.

Résumé

Dans le vaste champ de la physique relativiste, le groupe de Poincaré qu'on présentera au chapitre 2 occupe une place considérable. Les premiers travaux sur ce groupe sont dus au mathématicien et physicien français, Henri Poincaré. Ce groupe a été introduit pour simplifier les études de l'un des piliers de la physique moderne. En effet dès qu'on parle du changement de référentiels et de la covariance des lois de la physique, toutes les considérations cèdent leurs places à la théorie de la relativité (restreinte où générale). La théorie de la relativité restreinte d'Einstein est venue remplacer la relativité de Galilée-Newton, vu la remise en cause de cette dernière par les observations expérimentales telles que l'expérience de Morley-Michelson et aussi son incompatibilité mathématique avec les équations de Maxwell qui régissent les phénomènes d'électromagnétisme.

Ainsi on a introduit la théorie qui veut régler ces problèmes, qui est la théorie de relativité doublement restreinte qu'on désigne par DSR qui est basée sur le κ-groupe de Lorentz qui est une extension du groupe de Lorentz qu'on verra au chapitre 3.

Le résultat le plus remarquable des théories DSR est la modification des transformations de Lorentz et la relation de dispersion énergie-impulsion $E = mc^2$, cependant une autre approche a vu le jour celle-ci est basée sur une autre extension : le R-groupe de Lorentz qui est la transformation de Fock qu'on verra au chapitre 4.

Ce mémoire consistera à présenter en premier lieu le groupe de Lorentz et plus généralement le groupe de Poincaré, ensuite on présentera deux extensions de ce groupe. On commencera par rappeler quelques notions sur la théorie des groupes et on présentera le groupe de Poincaré au deuxième chapitre. Ensuite nous exposerons la DSR (kappa-algèbre). Le troisième chapitre y est dédié. Et nous présenterons la deuxième extension qui est la transformation de Fock (R-algèbre) au quatrième chapitre. Enfin, nous terminons par une application en deux parties et une conclusion.