

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaïa



**Faculté des Sciences Exactes
Département MI/Mathématiques**

en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Option : Statistique et Analyse Décisionnelle

Thème

Processus de longue mémoire

Réalisé par :

M^r DERGAOUI Ramdane

Soutenu publiquement, le 29/06/2016 devant le jury composé de :

Présidente	M ^{me} L. BOURAINE	M.C.A. U.A.M.Bejaia
Promotrice	M ^{me} K. TIMERIDJINE	M.C.A. U.A.M.Bejaia
Examinatrice	M ^{me} F.AMRI	M.A.A. U.A.M.Bejaia

Année Universitaire 2015 – 2016



Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma promotrice Madame **K.Timeridjine** pour m'avoir guidé, conseillé et soutenu tout au long de l'accomplissement de ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement les membres du jury : Madame **L.Bouraine**, pour l'honneur qu'elle ma fait en acceptant d'être présidente du jury de ce modeste mémoire et Madame **F. Amri** d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je tiens à remercier tous les membres de département de mathématiques de l'université de A. Mira de Béjaia, ainsi que tous mes enseignants pour leur disponibilité et leur savoir-faire durant toutes ces années de formation.

Je remercie aussi mes chers parents, frères et sœurs qui m'ont toujours soutenu et pour tous ce qu'ils ont fait pour pouvoir travailler dans les bonnes conditions possibles.

Dieu merci.



Avec toute mon affection que je leur dédie ce modeste travail la plus totale :

À mes très chers parents, pour leur soutien constant et leurs confiance et qui m'ont donné du courage et de la volonté durant mon cycle d'études.

À mes chers frères et sœurs pour leurs compréhension et encouragement.

À mes chères collègues de travail qui ont su travailler dans la sérénité et la confiance.

À tous les étudiants (es) de mon département, en particulier ma promotion.

À toutes les personnes qui m'ont soutenues et participées de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Liste des figures	iv
Introduction générale	1
1 Préliminaires	3
1.1 Séries chronologiques	3
1.1.1 Description d'une série chronologique	4
1.2 Processus stochastique	5
1.2.1 Processus stationnaire	6
1.2.2 Bruit blanc	7
1.2.3 Opérateur retard	8
1.2.4 Opérateur de différentiation	9
1.2.5 Fonction d'autocovariance	9
1.2.6 Fonction d'autocorrélation	10
1.3 Notion de la mémoire courte et longue	11
1.3.1 Processus stationnaire à courtes mémoires	12
1.3.2 Les processus stationnaires de longue mémoire	17
2 Processus de longue mémoire et caractéristiques d'un processus à mémoire longue de type $FARIMA(0, d, 0)$	18
2.1 Processus de longue mémoire	18
2.1.1 Le modèle autorégressif moyenne mobile fractionnaire (FARIMA)	19
2.1.2 L'opérateur de dérivation fractionnaire	19
2.1.3 Processus de longue mémoire	20
2.1.4 Analyse d'une série temporelle	21
2.1.5 Les méthodes de détection des processus de mémoire longue	23
2.1.6 Test de bruit blanc	25
2.1.7 Test de Student	26

2.2	Caractéristiques d'un processus à mémoire longue pure	27
2.2.1	Le Processus $FARIMA(0, d, 0)$	27
2.2.2	La relation entre l'exposant de Hurst et le paramètre d'intégration fractionnaire	31
3	Analyse temporelle et spectrale	32
3.1	Quelques rappels d'analyse	32
3.1.1	Série de Fourier	33
3.1.2	Intégral de Fourier	34
3.1.3	La fonction Gamma d'Euler	34
3.2	Analyse spectrale des processus stationnaire	34
3.2.1	Densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire	34
3.2.2	Densité spectrale du processus $ARMA(p, q)$	35
3.2.3	Distribution spectrale d'un processus aléatoire stationnaire	36
3.2.4	La densité spectrale d'un processus $FARIMA(0, d, 0)$	36
3.2.5	Décomposition de Wold	37
3.2.6	Densité spectrale d'un processus de longue mémoire	37
4	Le périodogramme	41
4.1	41
4.2	Estimateurs dérivés du périodogramme	42
4.2.1	Périodogramme lissé dans le domaine spectral	42
4.2.2	Pondération dans le domaine temporel	43
4.3	Simulation d'un processus de longue mémoire	43
	Conclusion Générale	45
	Bibliographie	49

Table des figures

1.1	(a) Population des Etats-Unis, 1790-1980	4
1.2	(b) Nombre mensuel de décès accidentels aux Etats-Unis, 1973-1978.	4
1.3	(c) Accroissement relatif mensuel de l'indice des prix.	5
1.4	Nombre annuel de taches salaires observées à la surface de soleil de 1700-1980.	7
1.5	Série temporelle d'un processus de bruit blanc.	8
1.6	Evolution des températures moyennes annuelles à Genève de 1755 à 1993	12
1.7	Graphique d'une série de longueur 400 engendrée par un processus AR(2).	13
1.8	Graphique d'une série de longueur 400 engendrée par un processus MA(1).	14
1.9	Graphique d'un processus ARMA(1,1) et les autocorrélations de cette série.	16
3.1	Chronique du modèle FARIMA (1,0.4,1)	38
3.2	Densité spectrale du modèle FARIMA (1,0.4,1)	39
3.3	Propriété du processus à mémoire longue dans le domaine fréquentiel	40
4.1	Trajectoire du processus FARIMA	44
4.2	Fonction d'autocorrélation du processus FARIMA (0,d,0)	44

Introduction générale

La statistique se préoccupe de porter des jugements sur une population à partir de l'observation d'un échantillon de cette population. Dans le domaine de la statistique dénommée "Analyse des séries temporelles", la dimension temporelle des observations prend une place importante. Une série temporelle étant définie comme une suite d'observations indexées par le temps. Notre attention va se focaliser sur les propriétés d'une variable aléatoire, tant pour sa prévision que dans sa relation avec son passé.

Cependant, l'examen d'une série temporelle montre que la valeur prise au temps t dépend de la valeur prise au temps $t - 1$ et le processus qui les engendre est donc dynamique. A partir de l'information apportée par la série chronologique, le problème est de trouver un modèle mathématique qui approche le plus possible les observations de la série dans le but d'expliquer le processus et prédire son comportement futur. Les types de modèles que l'on peut considérer sont nombreux et les modèles à longue mémoire auxquels nous allons nous intéresser constituent actuellement un des domaines importants de la recherche statistique. Les domaines d'application utilisant les modèles à longue mémoire n'ont cessé de se développer ces dernières années et pour illustrer cette affirmation nous citons les nombreux travaux effectués dans ce domaine : Hurst (1951), Hosking (1984) en hydrologie, Mandelbrot (1962), Lo (1991), Willinger et al (1999) en finance, Hassler et Wolters (1995) en macroéconomie, Graf (1983), Beran et Terrin (1996) en géophysique, Taquu et al (1997) en télécommunication, ainsi que deux domaines d'applications plus récents : la psychologie, Wagenmaker et al (2004), Torre et al (2006) et la démographie, Gil-Alana (2003) et Mishra et Urbain (2005).

La présente introduction est consacrée aux rappels de quelques outils mathématiques et modèles simples employés en statistique des séries temporelles. La branche de la statistique mathématique qui s'intéresse aux séries temporelles a développé plusieurs modèles de représentation des séries temporelles dont nous allons très brièvement rappeler les plus importants. Il s'agira de préciser quelques notions sur les processus aléatoires stationnaires, les modèles AR, MA et ARMA univariés et leurs propriétés.

Notre objectif dans ce travail est une contribution à l'étude des principales caractéristiques des modèles $FARIMA(0, d, 0)$ définis par l'équation :

$$(1 - L)^d Y_t = \varepsilon_t,$$

- $(Y_t, t \in Z)$ est un processus aléatoire.
- ε_t est un bruit blanc (c'est-à-dire une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées) de moyenne 0 et de variance σ^2 .
- L est l'opérateur retard.
- d est le paramètre d'intégration fractionnaire.

Dans le premier chapitre, nous commençons par une définition des processus à mémoire longue ($FARIMA(p, d, q)$) et un rappel des principales caractéristiques du processus à mémoire longue pure ($FARIMA(0, d, 0)$).

Le chapitre 2 présente l'analyse temporelle et spectrale des processus. Le chapitre 3 est consacré à la définition et au rappel des caractéristiques du périodogramme comme estimateur sans biais de la densité spectrale. Au chapitre 4 une étude de simulation d'un processus de longue mémoire avec représentation graphique est proposée pour mieux éclaircir les notions présentées dans les chapitres précédents. Ensuite, nous terminerons par une conclusion et perspectives.

Préliminaires

1.1 Séries chronologiques

Définition 1.1.1. Séries chronologiques

On appelle série chronologique ou chronique une suite $(y_t)_{t \in T}$ d'observations chiffrées d'un même phénomène, ordonnées dans le temps [29].

- Une série chronologique est aussi appelée série temporelle ou chronique.
- t est le numéro de l'observation et représente la date à laquelle est faite l'observation.
- T est appelé espace des temps qui peut être discret ou continu.

Remarque 1.1.1. Les dates d'observations sont généralement ordonnées de manière régulière dans le temps.

On distingue deux types de séries chronologiques :

Série continue : c'est une série où l'observation est faite d'une manière continue dans le temps.

Exemple : résultat d'un électrocardiogramme.

Série discrète : c'est une série où l'observation est faite sur des intervalles de temps fixés à priori. Dans ce cas, $T \in \mathbb{Z}$ et les dates d'observations sont le plus souvent équidistantes : par exemple relevés mensuels, trimestriels, ...

Exemple : évolution du nombre de voyageurs utilisant le train.

Les objectifs de l'étude d'une série sont les suivants :

- Comprendre le passé : expliquer les variations observées.
- Prédire les valeurs futures (proches).
- étudier l'influence du passé sur le futur (proche ou lointaine).

1.1.1 Description d'une série chronologique

On considère qu'une série chronologique $(Y_t)_{t \in T}$ est la résultante de trois (03) composantes fondamentales [29].

- La tendance (ou trend) (f_t) représente l'évolution à long terme de la série étudiée. Elle traduit le comportement moyen de la série.

Par exemple, la série (a) de la Figure 1.1 a tendance à augmenter.

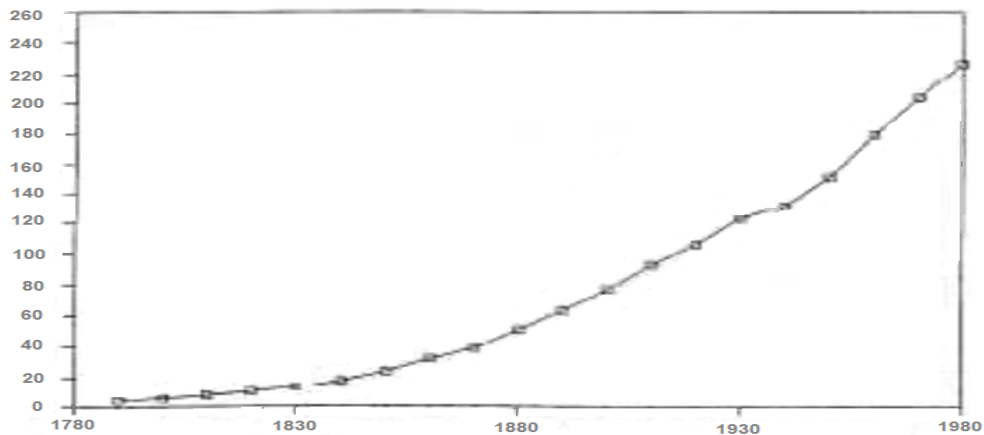


FIGURE 1.1 – (a) Population des Etats-Unis, 1790-1980

- La composante saisonnière notée S_t correspond à un phénomène qui se répète à intervalles de temps réguliers (périodiques). En général, c'est un phénomène saisonnier d'où le terme de variations saisonnières.

Par exemple, la série (b) de la Figure 1.2 présente des cycles réguliers au cours du temps et de même amplitude.

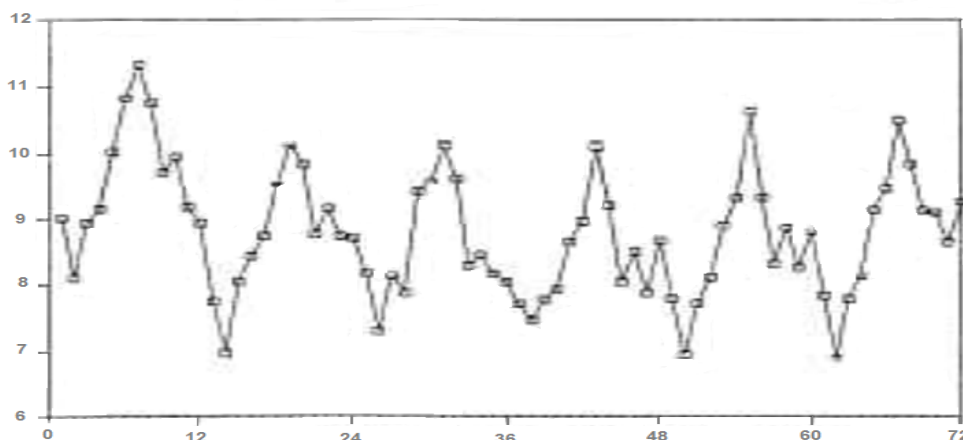


FIGURE 1.2 – (b) Nombre mensuel de décès accidentels aux Etats-Unis, 1973-1978.

- La composante résiduelle (ou bruit ou résidu), notée ε_t correspond à des fluctuations irrégulières, en général de faible intensité mais de nature aléatoire.

Par exemple, la série (c) de la Figure 1.3 a un comportement assez irrégulier : il y a comme une sorte de bruit de faible amplitude qui perturbe les données.

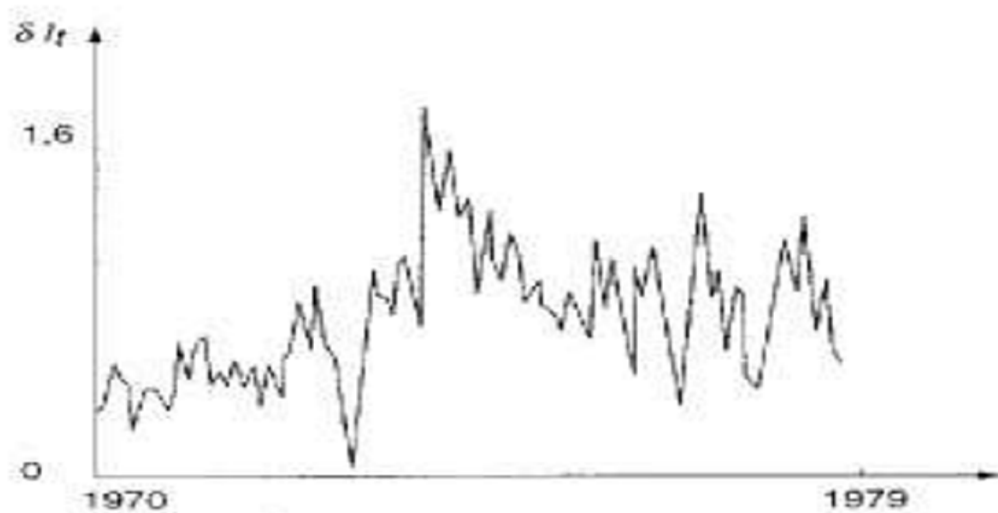


FIGURE 1.3 – (c) Accroissement relatif mensuel de l'indice des prix.

1.2 Processus stochastique

On parle de processus stochastique, dit aussi aléatoire, lorsque l'évolution d'une variable dans le temps est imprévisible, c'est à dire qu'il est impossible, connaissant la position de la variable au temps t de prédire avec exactitude sa position au temps $t + \Delta_t$. Un processus non stochastique est dit déterminé, c'est à dire que l'on peut en rendre compte au moyen d'une fonction du temps [$x = f(t)$] capturant l'ensemble de la variance de la serie. Un processus stochastique comprend généralement une partie déterministe, auquel s'ajoute une partie stochastique également appelé bruit blanc [12].

Définition 1.2.1. Un processus stochastique est une suite de v.a. $(Y_t)_{t \in T}$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace \mathbb{E} .

Si t fixé dans T : $\omega \rightarrow Y_t(\omega)$ est une v.a.

Si ω fixé dans Ω $t \rightarrow Y_t(\omega)$ est une trajectoire.

De façon générale, nous allons donc supposer qu'une série chronologique univariée $\{Y_t\}$ (une seule variable observée) peut être considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire. Plus précisément, la valeur observée y_t est envisagée comme la valeur particulière d'une variable

aléatoire Y_t , dont la distribution de probabilité décrit les valeurs possibles à l'instant t . La série chronologique est donc considérée comme une réalisation finie d'un processus stochastique.

- Si $T \subset \mathbb{Z}$, Le processus est dit discret.
- Si T est un intervalle de \mathbb{R} , Le processus est dit continu.

Remarque 1.2.1. Dans notre étude nous nous sommes limités au cas discret.

1.2.1 Processus stationnaire

Un processus stochastique peut être stationnaire ou non stationnaire. Pour chaque instant du temps, le processus $Y_t, t \in T$ a une distribution de probabilité. Si on ne fait aucune hypothèse particulière sur la nature du processus aléatoire, chaque Y_t est une variable aléatoire avec son espérance (ou moyenne) et sa variance propres. Ainsi, la moyenne ($E(Y_t) = \mu_t$) et la variance ($Var(Y_t) = \delta_t^2$) varient également en fonction du temps, sachant que l'on dispose d'une seule observation y_t de cette variable. Les estimations de son espérance et de sa variance devraient donc se fonder sur une seule observation, ce qui est impossible. On est donc conduit à formuler des contraintes sur les processus aléatoires à prendre en considération.

On étudie donc une classe particulière de processus aléatoires appelés processus aléatoires stationnaires.

Définition 1.2.2. On dit que le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est stationnaire au sens strict (ou fortement stationnaire) si la loi de $\{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}\}$ est la même que la loi de $\{Y_{t_1+h}, \dots, Y_{t_n+h}\}$ pour tout (t_1, t_2, \dots, t_n) avec $t_i \in \mathbb{Z}$, pour $i = 1, \dots, n$ et pour tout $h \in \mathbb{Z}$ avec $t_i + h \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, la stationnarité dite forte exprime qu'il y a invariance dans le temps de toutes les caractéristiques du processus. Mais la stationnarité au sens strict est trop restrictive et on assouplit cette condition en définissant la stationnarité faible ou la stationnarité du second ordre.

Définition 1.2.3. Un processus aléatoire $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit stationnaire du second ordre (ou faiblement stationnaire) s'il remplit les conditions suivantes :

- $E(Y_t) = \mu = Cte, \forall t$
- $Var(Y_t) = \delta^2, \forall t$
- $Cov(Y_t, Y_{t-h}) = \gamma_h, \forall t$ et $\forall h$: Cette hypothèse signifie que la covariance entre les valeurs prises en deux dates distinctes par le processus ne dépend que de la longueur de la période qui les sépare (et pas de la date initiale).

Exemple d'un processus stationnaire

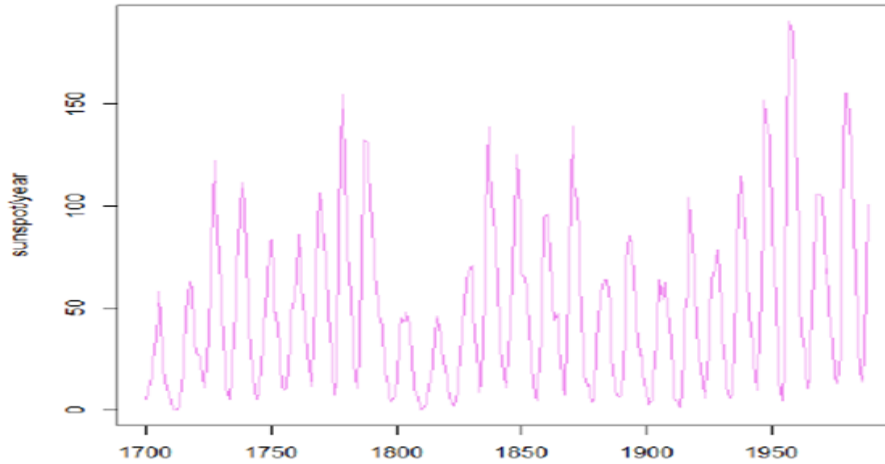


FIGURE 1.4 – Nombre annuel de taches solaires observées à la surface de soleil de 1700-1980.

1.2.2 Bruit blanc

On appelle bruit toute variation imprévisible d'une quantité dans le temps. Le bruit blanc est le plus aléatoire des bruits. Dans ce cas, il n'existe aucune corrélation entre les accroissements successifs de la quantité. Autrement dit, la fonction d'auto-corrélation est donc nulle [12].

Définition 1.2.4. Un processus $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit bruit blanc si $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance nulle et de variance constante.

- $E(\varepsilon_t) = 0, \forall t$
- $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2, \forall t$
- $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, \forall t \neq s$
- $(\varepsilon_t, \varepsilon_s)$: indépendants, $\forall t \neq s$.

Un tel processus n'a ni tendance ni mémoire : la connaissance de la valeur du processus à une date donnée n'apporte aucune information pour la prédiction de sa valeur à une date ultérieure.

Exemple : La figure 1.5, ci-dessous, montre une série temporelle caractéristique du bruit blanc.

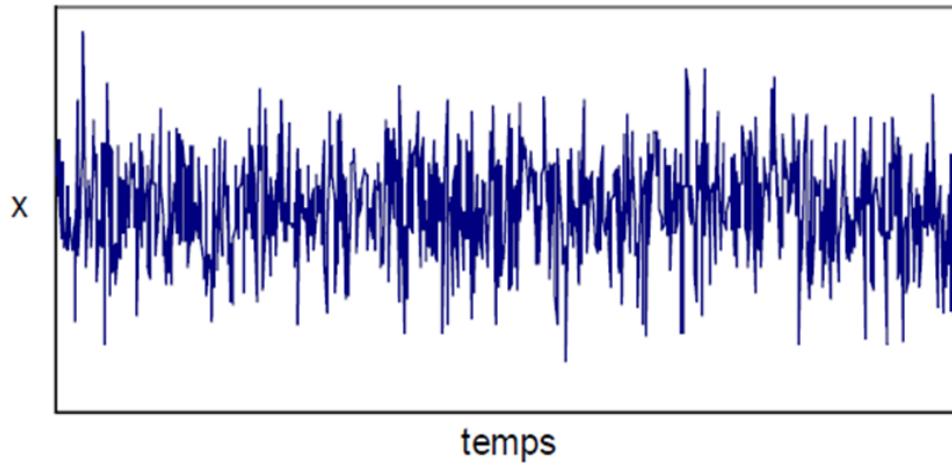


FIGURE 1.5 – Série temporelle d’un processus de bruit blanc.

1.2.3 Opérateur retard

On aura souvent à considérer une variable en fonction de son passé. Il est donc commode de définir un opérateur qui transforme une variable Y_t en sa valeur passée. C’est l’opérateur retard désigné par la lettre L (encore noté B dans la littérature) et tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} LY_t = Y_{t-1} \text{ (L'opération } L \text{ décale le processus d'une unité de temps vers le passé)} \\ L^2Y_t = L(LY_t) = LY_{t-1} = Y_{t-2} \\ \vdots \\ L^dY_t = Y_{t-d} \text{ (Le processus est décalé de } d \text{ unités de temps).} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

- On suppose également que $L^0 = 1$ de sorte que $1Y_t = Y_t$.
- Les opérations usuelles telles que l’addition, multiplication, division et invese sont possibles sur l’ensemble des polynômes de retard avec les mêmes propriétés que sur les séries entières.

1.2.4 Opérateur de différentiation

L'opérateur ∇ fait la différence entre le processus et sa version décalée de une unité de temps. Cet opérateur se construit en utilisant l'opérateur précédant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - LY_t = (1 - L)Y_t \\ \Leftrightarrow \nabla = 1 - L \\ \nabla^2 Y_t = (1 - L)^2 Y_t = (1 - 2L + L^2)Y_t \\ \nabla^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} \\ \vdots \\ \nabla^d Y_t = (1 - L)^d Y_t. \end{array} \right.$$

Propriétés :

Elimination de la tendance :

L'opérateur ∇ élimine les tendances linéaires. Pour un processus de la forme $Y_t = at + b + E_t$ où E_t est stationnaire, on a :

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (at + b + E_t) - [a(t-1) + b + E_{t-1}] = a + (E_t - E_{t-1})$$

De façon générale, l'opérateur ∇^d élimine les tendances polynomiales de degré d .

Par exemple, pour une tendance de degré 2 : $Y_t = at^2 + bt + c + E_t$.

On a $\nabla^2 = (1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$

Et donc $\nabla^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = \dots = 2a + (E_t - 2E_{t-1} + E_{t-2})$.

Il faut bien noter que l'opérateur ∇^d raccourcit la série des y_t de d valeurs puisque $\nabla^d Y_t$ n'est défini que pour $t > d$. Aussi, le recours à des différences d'ordre supérieur à 2 est peu fréquent.

La plupart des modèles supposent que les séries étudiées sont stationnaires. Cependant la plupart des séries que l'on a à traiter croissent dans le temps, ou même si elles ne sont pas croissantes, ont des fluctuations qui ne sont pas régulières. Elles sont non-stationnaires. Il est en général possible d'utiliser l'opérateur de différentiation pour rendre stationnaires les séries non-stationnaires qui admettent une tendance polynomiale.

Opérateur différence saisonnière

On le définit comme : $\nabla_s = 1 - L^s$.

Exemple : $\nabla_{12} y_t = (1 - L^{12})y_t = y_t - y_{t-12}$, on applique l'opérateur ∇_s pour éliminer une saisonnalité de période s d'une série.

1.2.5 Fonction d'autocovariance

Dans un processus $(Y_t, t \in T)$ la variable aléatoire au temps t dépend généralement des observations précédentes $Y_s, s < t$. Les fonctions d'auto-covariance et d'autocorrélation per-

mettent de comprendre les liens qui peuvent exister entre les termes d'une telle série.

Pour les processus univariés (une seule variable observée), on parle indifféremment de covariance ou d'autocovariance, et de corrélation ou d'autocorrélation.

Définition 1.2.5. Soit $(Y_t)_{t \in T}$ un processus stochastique. On appelle fonction d'auto-covariance du processus $(Y_t)_{t \in T}$ la fonction γ suivante [20] :

$$\forall h \in T : \gamma(h) = Cov(Y_t, Y_{t-h}) \quad (1.2)$$

Avec $Cov(Y_p, Y_q)$ est la covariance entre des variables Y_p et Y_q donnée par :

$$Cov(Y_p, Y_q) = E[(Y_p - E(Y_p))(Y_q - E(Y_q))] \quad (1.3)$$

1.2.6 Fonction d'autocorrélation

Définition 1.2.6. On étudie la "mémoire" d'un processus $(Y_t)_{t \in T}$ en calculant son autocorrélation de retard h noté $\rho(h)$:

$$\rho(h) = Corr(Y_t, Y_{t-h}) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-h})}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t-h})}} \quad (1.4)$$

qui mesure le lien entre les valeurs du processus à deux dates distantes de h [11].

La fonction $\rho(h)$ est appelée aussi fonction d'auto-corrélation simple du processus. Pour un processus stationnaire, $\rho(h)$ prend une forme plus simple :

$$\rho(h) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-h})}{Var(Y_t)} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \quad (1.5)$$

(car pour un processus stationnaire, $Var(Y_t) = Var(Y_{t-h}) = Cste \forall h$ et $\forall t$).

La représentation graphique de la fonction $\rho(h)$ est dite corrélogramme. La fonction d'auto-corrélation est constituée par l'ensemble des autocorrélations $\rho(h) = Corr(Y_t, Y_{t-h})$ de la série calculées pour des décalages d'ordre h , $h \in \{1, 2, \dots, h\}$.

Fonction d'autocorrélation partielle

La fonction d'autocorrélation partielle mesure la corrélation entre Y_t et Y_{t-h} l'influence des autres variables $Y_{t-1}, \dots, Y_{t-h+1}$ ayant été retirée.

Définition 1.2.7. On définit l'autocorrélation partielle de retard h , notée $\tau(h)$, la corrélation entre $(Y_t - Y_t^*)$ et $(Y_{t-h} - Y_{t-h}^*)$ où Y_t^* désigne la régression de Y_t sur les $(h - 1)$ valeurs $\{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-h+1}\}$:

$$\tau(h) = Corr(Y_t - Y_t^*, Y_{t-h} - Y_{t-h}^*) = \frac{Cov(Y_t - Y_t^*, Y_{t-h} - Y_{t-h}^*)}{\sqrt{Var(Y_t - Y_t^*)Var(Y_{t-h} - Y_{t-h}^*)}}$$

Avec

$$Y_t^* = \sum_{k=1}^{h-1} \alpha_k Y_{t-k}, \text{ et } Y_{t-h}^* = \sum_{k=1}^{h-1} \beta_k Y_{t-k}$$

où α_k et β_k sont les coefficients de régression [30].

1.3 Notion de la mémoire courte et longue

Comme décrit précédemment, la fonction d'autocovariance $\{\gamma(h)\}_{h \in \mathbb{Z}}$ mesure la covariance entre une variable et cette même variable à des dates différentes, pour un délai h :

$$\gamma(h) = Cov(Y_t, Y_{t-h}) = E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t-h} - E(Y_{t-h}))] \quad (1.6)$$

Ainsi

$$\gamma(0) = Var(Y_t) = E[(Y_t - E(Y_t))^2] = \delta_y^2 \quad (1.7)$$

Cette fonction fournit une information sur la variabilité de la série et sur les liaisons temporelles qui existent entre les diverses composantes de la série Y_t .

On définit également la fonction d'autocorrélation par :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, \quad h \in \mathbb{Z} \quad (1.8)$$

Les fonctions d'auto-covariance et d'autocorrélation peuvent aider à la compréhension des éventuels liens entre les termes de la série et une manière d'étudier la "mémoire" d'un processus consiste à calculer la suite de toutes les auto-corrélations de la série. En d'autres termes, on peut dire que la suite des auto-corrélations (ou des autocovariances) contient toutes les informations sur la mémoire de cette série ou bien que la suite des autocorrélations totale fournit une description de la mémoire du processus et résume entièrement ce dernier.

On peut distinguer trois situations :

- Si les autocorrélations sont nulles ($\rho(h) = 0, \forall h$), cela signifie qu'il n'existe aucun lien entre les valeurs du processus à deux dates distantes de h . On peut donc déduire que les variables Y_t du processus sont indépendantes. Dans ce cas, on dit que le processus est sans mémoire (cas d'un processus bruit blanc).
- Si les autocorrélations (ou les autocovariances) ont tendance à décroître d'une façon exponentielle (donc rapidement) ou qu'elles tendent vers 0 à vitesse géométrique, dans ce cas on dit que le processus a une mémoire courte (cas des processus stationnaires autorégressifs, processus moyenne mobile, processus autorégressif et moyenne mobile).
- Si les autocorrélations ont tendance à décroître d'une façon hyperbolique (donc lentement) ou que la suite des autocorrélations tend vers 0 lentement, dans ce cas on dit que le processus est à longue mémoire, c'est à dire qu'il existe une corrélation à long terme entre

les événements actuels et les événements futurs et que chaque observation porte la mémoire des événements qui l'ont précédé. Dans ce cas, on parle aussi de phénomènes de persistances, c'est-à-dire que l'évolution de la série tend à suivre des tendances. Autrement dit, si la série a augmenté précédemment, la probabilité est forte qu'elle continue à le faire.

Exemple d'un processus stochastique

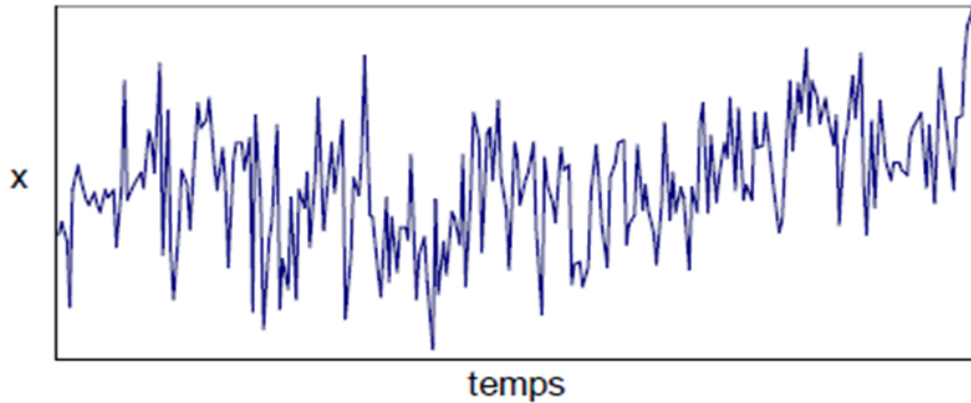


FIGURE 1.6 – Evolution des températures moyennes annuelles à Genève de 1755 à 1993

1.3.1 Processus stationnaire à courtes mémoires

Les modèles ARMA (Auto-Regressive Moving Average) permettent de représenter un grand nombre de processus aléatoires stationnaires. Les travaux de G. Box et G. Jenkins (dans les années 1970) ont beaucoup contribué dans la théorie et la pratique des modèles des séries temporelles. L'objectif auquel ils se proposent de répondre dans leur ouvrage "Time Series Analysis, Forecasting and Control" est de construire un modèle aléatoire de type ARMA permettant de reproduire au mieux les réalisations d'une série temporelle [29].

Processus autorégressif

Dans l'étude d'une série chronologique, il est naturel de penser que la valeur de la série à la date t peut dépendre des valeurs prises aux dates précédentes :

$$Y_t = f(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$$

Il n'est généralement pas nécessaire de prendre en compte tout le passé de la série et on peut le plus souvent se limiter à p valeurs :

$$Y_t = f(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}) + \varepsilon_t \tag{1.9}$$

Où $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc centré et de variance δ^2 .

Définition 1.3.1. On appelle processus autorégressif d'ordre p , noté $AR(p)$ un processus stationnaire $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ vérifiant une relation du type [30] :

$$Y_t - \sum_{i=1}^p \Phi_i Y_{t-i} = \varepsilon_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (1.10)$$

Où Φ_i sont des réels, $\Phi_p \neq 0$ et $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc de variance δ^2 .

$$\begin{aligned} (1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p) Y_t = \varepsilon_t &\iff \Phi(L) = \varepsilon_t \\ &\iff \Phi(L) Y_t = \varepsilon_t \end{aligned} \quad (1.11)$$

Où Φ est un polynôme de degré p .

Le polynôme retard associé à un processus autorégressif $AR(p)$ est défini par :

$$\Phi(L) = 1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p \quad (1.12)$$

- On peut dire qu'un processus autorégressif possède une "mémoire" au sens où chaque valeur est corrélée à l'ensemble des valeurs qui la précède.
- L'équation caractéristique associée à ce polynôme se note :

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - \Phi_2 z^2 - \dots - \Phi_p z^p \quad (1.13)$$

Le processus $AR(p)$ est stationnaire si toutes les racines de cette équation caractéristique sont à l'extérieur du cercle unité, c'est-à-dire plus grande que l'unité en module :

$$|\Phi_i| > 1, \quad i = 1, \dots, p.$$

- La représentation $AR(p)$ est inversible par définition.

Exemple : Série d'un processus $AR(2)$ d'équation $(1 + 0.5L - 0.3L^2)Y_t = \varepsilon_t$, et les auto-corrélations de cette série [26].

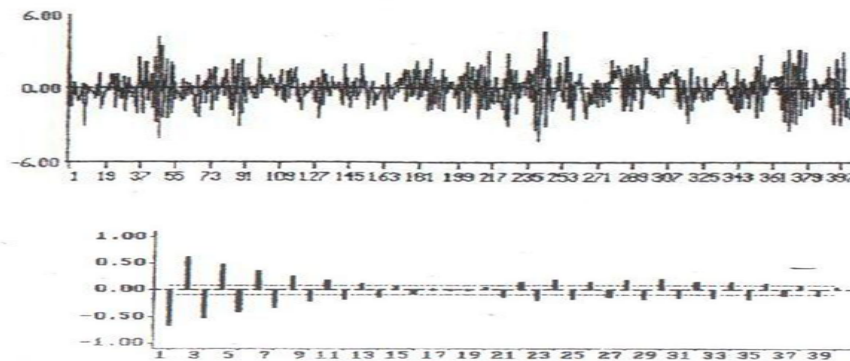


FIGURE 1.7 – Graphique d'une série de longueur 400 engendrée par un processus $AR(2)$.

Processus moyenne mobile $MA(q)$

Un processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit moyenne mobile d'ordre q , noté $MA(q)$ (en anglais moving average) s'il vérifie l'équation stochastique suivante [6] :

$$\begin{aligned} Y_t &= \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ &= \theta(L) \varepsilon_t \end{aligned} \quad (1.14)$$

Où θ est un polynôme de degré q dont les coefficients sont $\{1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q\}$ et ε_t est un processus bruit blanc.

Le polynôme retard associé à un processus moyenne mobile $MA(q)$ est définie par :

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q. \quad (1.15)$$

- Un tel modèle est appelé moyenne mobile d'ordre q car Y_t est une moyenne mobile appliquée aux variables aléatoires $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$. Le terme moyenne est à prendre dans un sens très large dans la mesure où la somme des coefficients θ_k n'est pas nécessairement égale à 1 [11].

- La représentation du processus $MA(q)$ est causale par définition.
- Le polynôme retard θ est inversible si et seulement si $|\theta_i| < 1, i = 1, \dots, q$ [25].

Exemple : Série d'un processus $MA(1)$ d'équation $Y_t = \varepsilon_t - 0.2\varepsilon_{t-1}$ et les autocorrélation de cette série [26].

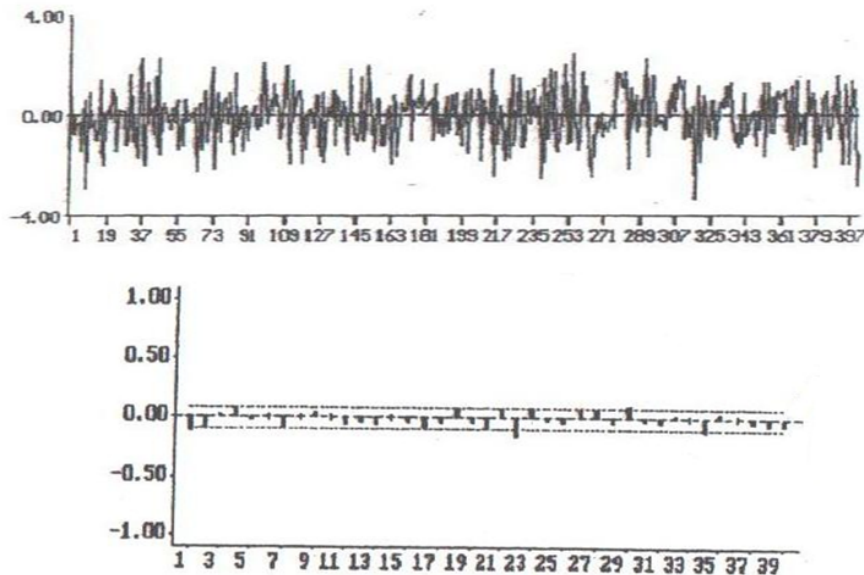


FIGURE 1.8 – Graphique d'une série de longueur 400 engendrée par un processus $MA(1)$.

Processus autorégressif à moyenne mobile

L'analyse des séries chronologiques a connu un grand développement depuis la parution du livre de Box et Jenkins (1970), où les principales propriétés des processus stationnaires autorégressif moyenne mobile (ARMA) ont été décrites avec les méthodes d'identification, d'estimation et de validation.

Définition 1.3.2. Un processus stationnaire Y_t admet une représentation $ARMA(p, q)$ minimale [30]

$$Y_t - \sum_{i=1}^p \Phi_i Y_{t-i} = \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}.$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\Phi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t, \tag{1.16}$$

s'il satisfait les conditions suivantes :

- (i) $\Phi_p \neq 0$, $\theta_q \neq 0$
- (ii) Les polynôme Φ et θ ont toutes leurs racines de module strictement supérieur à 1.
- (iii) Φ et θ n'ont pas de racine commune.
- (iv) ε_t est un bruit blanc, de variance $\delta^2 \neq 0$.

- Ce modèle utilise des valeurs retardées de la variable Y_t (d'où le terme Auto-Regressive) et de chocs aléatoires ε_t qui sont généralement de moyenne nulle, de variance constante et non autocorrélés (bruit blanc) ; lorsque la variable qui représente ces chocs est retardée, on parle de moyenne mobile [23].

- Un tel modèle est caractérisé par le paramètre p de la partie autoregressive et le paramètre q de la partie moyenne mobile.

Pour les détails sur ce paragraphe, on peut se reporter aux ouvrages qui abordent le sujet de façon plus complète, notamment Gourieroux et Monfort [1990], Priestley [1981] et Box-Jenkins [1970].

Exemple : Série d'un processus $ARMA(1, 1)$ simulé [33] :

$$Y_t = 0.4Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1}$$

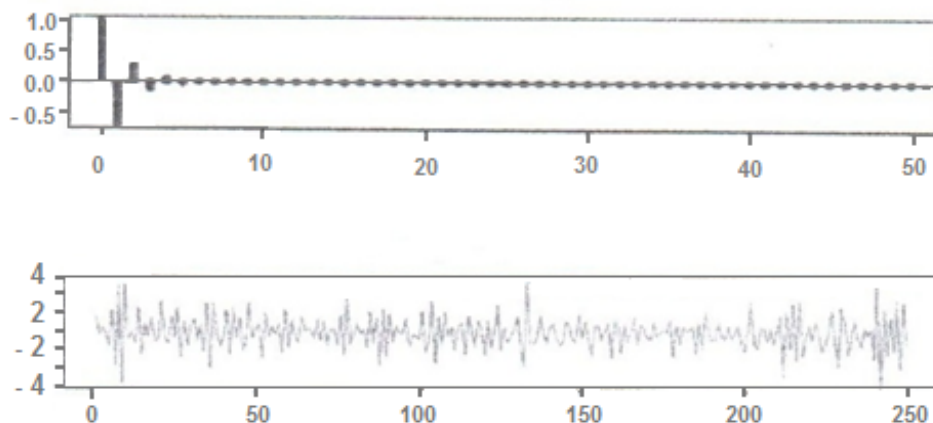


FIGURE 1.9 – Graphique d'un processus ARMA(1,1) et les autocorrélations de cette série.

Processus ARIMA

D'une manière générale, les séries chronologiques ont non seulement une moyenne non nulle mais ne sont pas stationnaires : elles comportent également une tendance ou une saisonnalité. On a vu que si un processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ admet une tendance polynomiale de degré d , le processus différencié d fois est stationnaire [11] :

$$Y_t = \nabla^d y_t = (1 - L)^d y_t \quad (1.17)$$

Définition 1.3.3. On appelle processus $ARIMA(p, d, q)$, un processus non stationnaire $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ pour lequel le processus différencié d fois, vérifie la relation suivante :

$$\Phi(L)\nabla^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t. \quad (1.18)$$

Où Φ et θ sont deux polynômes de degrés respectifs p et q .

Le "I" de ARIMA signifie "integrated" comme réciproque de la différenciation.

- Le modèle ARMA ne sert à traiter que les séries dites stationnaires alors que les modèles ARIMA permettent de traiter les séries non stationnaires après avoir déterminé le niveau d'intégration (le nombre de fois qu'il faut différencier la série avant de la rendre stationnaire). Autrement dit, le modèle ARIMA revient à appliquer un modèle ARMA sur le processus différencié.

Ainsi, si $\{Y_t = \nabla^d y_t\}$ est $ARMA(p, q)$, alors on dit que $\{y_t\}$ est $ARIMA(p, d, q)$.

Remarque 1.3.1. Le rapport des polynômes $\frac{\theta(z)}{\Phi(z)}$, pour $z \in \mathbb{Z}$ est dit fonction de transfert.

Processus SARIMA

La saisonnalité est un autre facteur de non-stationnarité. On a vu qu'une façon simple d'éliminer une saisonnalité de période s consiste à appliquer l'opérateur ∇_s

$$Y_t = \nabla_s y_t = (1 - L^s)y_t = y_t - y_{t-s}$$

Les processus SARIMA sont une généralisation des modèles $ARIMA(p, d, q)$ contenant une partie saisonnière.

Définition 1.3.4. Un Processus $(Y_t, t \in Z)$ suit un processus $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$, si cette série a une saisonnalité de période s qu'on peut écrire comme suit :

$$\Phi_1(L)\Phi_2(L^s)(1 - L)^d(1 - L^s)^D y_t = \theta_1(L)\theta_2(L^s)\varepsilon_t. \quad (1.19)$$

Où $\Phi_1, \Phi_2, \theta_1, \theta_2$ sont des polynômes de degrés respectifs p, P, q, Q .

1.3.2 Les processus stationnaires de longue mémoire

Les modèles de longue mémoire les plus étudiés sont les processus stationnaires qui présentent des auto-corrélations qui décroissent vers 0 hyperboliquement (donc lentement), c'est à dire qu'ils présentent des corrélations non négligeables entre les observations passées et futures.

Deux grandes classes de processus sont derrière la popularité des modèles à mémoires longue : Le mouvement brownien fractionnaire, introduit en 1968 par Mandelbrot et Van Ness [10] pour modéliser des phénomènes d'hydrologie et le modèle FARIMA (ARIMA fractionnaire) auquel on va s'intéresser, en particulier le modèle $FARIMA(0, d, 0)$, dans les chapitres qui suivent.

Processus de longue mémoire et caractéristiques d'un processus à mémoire longue de type $FARIMA(0, d, 0)$

2.1 Processus de longue mémoire

On rencontre des processus à mémoire longue dans divers domaines : hydrologie, météorologie (vitesse du vent), économie, etc.

La mémoire d'un processus peut être caractérisée par des propriétés de sa fonction d'autocovariance ou de sa densité spectrale.

Un processus est dit à longue mémoire si les autocovariances entre des observations éloignées du processus ne sont pas négligeables ; autrement dit, des observations très espacées dans le temps afficheront une dépendance et les processus fractionnaires présentent cette caractéristique puisque leurs autocorrélations décroissent lentement (à une vitesse hyperbolique) quand le retard entre les observations croît. Ces processus représentés par un modèle de type $ARIMA(p, d, q)$ fractionnaire (ARMA intégré avec un ordre fractionnaire), appelé aussi $FARIMA(p, d, q)$ (Fractionally Autoregressive Integrated Moving Average), obtenus en considérant les cas où d (le degré de différenciation) n'est pas forcément entier et introduits initialement en 1981 par Hosking [22] et en 1980 par Granger et Joyeux [18] auxquels nous renvoyons pour plus de détails, sont les seuls modèles qui sont étudiés dans ce chapitre. Ces auteurs ont proposé une généralisation du processus $ARIMA(p, d, q)$ décrit par Box et Jenkins (1970) en permettant au paramètre d de prendre des valeurs réelles, compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ [6]. Cette généralisation, repose sur la manipulation des séries d'opérateurs retard (L), et sur le

développement en série entière de $(1 - L)^d$.

2.1.1 Le modèle autorégressif moyenne mobile fractionnaire (FARIMA)

Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981) ont introduit les modèles ARIMA à différentiation fractionnaire, appelés aussi $FARIMA(p, d, q)$ où d peut prendre des valeurs réelles, afin de décrire le comportement mémoire longue de certaines séries chronologiques rencontrées en économie, hydrologie, météorologie,... (voir Lawrance et Kottegada (1977), Hippel et McLeod (1978), Mandelbrot (1971),...)

Le processus $FARIMA(p, d, q)$ est caractérisé par une dépendance forte entre des observations éloignées comme on peut le voir dans la fonction d'autocovariance ou dans la fonction de densité spectrale.

2.1.2 L'opérateur de dérivation fractionnaire

Nous avons définie dans l'introduction générale sur les processus l'opérateur retard L par $LY_t = Y_{t-1}$ et l'opérateur de différentiation ∇ par $\nabla = 1 - L$ et nous assimilerons l'opérateur ∇^d à une différentiation fractionnaire pour $d \in \mathbb{R}$.

Définition 2.1.1. Opérateur de dérivation fractionnaire

L'opérateur fractionnaire est le polynôme $(1 - L)^d$ défini par :

$$(1 - L)^d = \sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j L^j \quad (2.1)$$

où

$$\pi_j = \frac{d(d-1)\dots(d-j+1)}{j!}$$

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)}, \forall j \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

$\Gamma(x)$ étant la fonction Gamma définie sur \mathbb{R} (Voir [19]) par :

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \\ x^{-1}\Gamma(1+x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

on a $\forall x \neq 0, x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ si $x = n \in \mathbb{N}, \Gamma(n) = (n-1)!$

Définition 2.1.2. (Processus $FARIMA(p, d, q)$)

On dit que $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est un processus $FARIMA(p, d, q)$ s'il vérifie l'équation suivante :

$$\Phi(L)(1 - L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (2.4)$$

où

- $\Phi(L) = 1 - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p$: polynôme de degré p ;
- $\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$: polynôme de degré q ;
- d est un nombre fractionnaire;
- ε_t est un bruit blanc (c'est-à-dire une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées) de moyenne 0 et de variance σ^2 .
- L est l'opérateur de retard.
- Le polynôme $(1 - L)^d$ qui porte le nom d'opérateur de dérivation fractionnaire et s'écrit à partir du développement en série donnée dans la formule (2.1) : $(1 - L)^d = \sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j L^j$

Définition 2.1.3. Inversibilité

Un processus stochastique $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit inversible s'il existe une suite de constante (π_j) telle que les erreurs s'écrivent en fonction du passé du processus comme suit [32] :

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j} \quad (2.5)$$

Définition 2.1.4. Causalité

Un processus stochastique $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit causal s'il existe une suite de constante $(\Phi_j), Y_t$ est en fonction des innovations passées et s'écrit comme suit [32] :

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j \varepsilon_{t-j} \quad (2.6)$$

2.1.3 Processus de longue mémoire

Les processus à longue mémoire sont caractérisés par la présence de corrélations à long terme, autrement dit, la dépendance entre des observations largement séparées dans le temps reste forte. Les caractéristiques de possession de longue mémoire de séries chronologiques surgissent dans des domaines aussi divers que les sciences économiques, géophysiques,...etc. Le lecteur peut se référer aux ouvrages généraux tels que Beran [5], Denian et al [13], Doukhan et al [16] et Robinson [31]. Une manière de les présenter consiste à les définir dans le domaine temporel à partir de propriétés de la fonction d'autocorrélation ou dans le domaine spectrale à partir de propriétés de la densité spectrale. Dans ce chapitre nous nous intéressons au domaine temporel et le domaine spectrale sera présenté dans le chapitre 2.

a) Le domaine temporel [18]

Dans le domaine temporel, les processus à mémoire longue sont caractérisés par une fonction d'autocorrélation décroissant hyperboliquement lorsque le retard h augmente. Un processus à mémoire longue répond à la définition suivante :

Un processus aléatoire est dit à mémoire longue si sa fonction d'autocorrélation $\rho(h)$ est telle que [18] :

$$\rho(h) \sim c.h^{-\alpha} \text{ quand } h \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

Où $c > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$ et \sim représente l'équivalence asymptotique.

$\rho(h)$ décroît d'une façon hyperbolique (donc lentement) quand le retard croît.

b) Le domaine fréquentiel [32]

Dans le domaine fréquentiel, les processus de longue mémoire sont caractérisés par une densité spectrale s'accroissant sans limite quand la fréquence tend vers zéro, formellement on retiendra la définition suivante ;

Un processus stationnaire $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est à mémoire longue s'il existe un nombre réel β , avec $0 < \beta < 1$, et une constante $c', c' > 0$, vérifiant :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f(\omega)}{c'|\omega|^{-\beta}} = 1 \quad (2.8)$$

où $f(\omega)$ est la densité spectrale du processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ à la fréquence ω voir [32]. On en déduit immédiatement que $f(\omega) \sim c'|\omega|^{-\beta}$ quand $\omega \rightarrow 0$. Ainsi, la densité spectrale exhibe un pôle à la fréquence zéro.

Les processus à mémoire longue se rencontrent dans des phénomènes physiques (hydrologie, météorologie,...) ainsi qu'en économie. Certains peuvent être représentés par un modèle de type $FARIMA(p, d, q)$ dont nous allons définir, dans le chapitre prochain, les principales caractéristiques.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser au processus purement de longue mémoire. Mais avant d'aborder ce sujet, nous allons rappeler quelques notions et règles relatives à l'analyse d'une série temporelle.

2.1.4 Analyse d'une série temporelle

Avant d'appliquer une méthode d'estimation, une analyse approfondie des propriétés des séries univariées, avec pour objectif principal de révéler leur (non) stationnarité, est indispensable. A cet effet, il existe des tests statistiques de stationnarité ou de non-stationnarité, on peut citer : tests de Dickey-Fuller simple et Dickey-Fuller augmenté, test de phillipe-Perron, test de Schmidlt et Shin (KPSS)...etc [7].

Nous n'étudierons ici que le test de Dickey-Fuller (Dickey-Fuller simple et Dickey-Fuller augmenté).

Test de Dickey-Fuller simple

Le test de Dickey-Fuller permet de savoir si une série est stationnaire ou non [?].

Les hypothèses du test sont les suivantes :

– H_0 : processus non stationnaire, il correspond à une de ces formes de non stationnarité.

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.9)$$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c + \varepsilon_t \quad (2.10)$$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + bt + c + \varepsilon_t \quad (2.11)$$

où $\phi_1 = 1$ et $\varepsilon_t \rightarrow i.i.d.(0, \sigma_\varepsilon^2)$

– H_1 : processus stationnaire, $|\phi_1| < 1$. Sous H_0 vraie, la statistique de test pour l'estimateur de ϕ_1 est donnée par :

$$t_{\hat{\phi}_1} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}} \quad (2.12)$$

On commence par étudier le modèle général (2.11).

On regarde si b est significativement différent de 0 ou non. Si b est significativement non différent de 0, on passe à l'étude du modèle (2.10) et on cherche à savoir si c est significativement différent de 0 ou pas. Si c est significativement non différent de 0, on étudie le modèle (2.9).

Les valeurs calculées sont à comparer avec les valeurs tabulées de la table de Dickey-Fuller(DF).

La région critique est :

$$t_{\hat{\phi}_1} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}} > t_{DF}$$

où t_{DF} désigne la valeur critique donnée par la table de DF.

La règle de décision est la suivante :

- si $|t_{\hat{\phi}_1}| > t_{DF} \Rightarrow$ on accepte H_0 : la série est non stationnaire.

Test de Dickey-Fuller Augmenté

Dans le test de Dickey-Fuller simple que nous venons d'étudier, le processus ε_t est par Hypothèse un bruit blanc. Or il n'y a aucune raison pour que, à priori, les erreurs soient non corrélées. Le test de Dickey-Fuller Augmenté ne suppose pas que ε_t est un bruit blanc [14].

Les hypothèses du test de Dickey-Fuller Augmenté se définissent de la façon suivante :

1. H_0 : processus non stationnaire, il correspond à une de ces formes de non stationnarité :

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} - \sum_{k=2}^p \gamma_k Y_{t-k+1} + \eta_t \quad (2.13)$$

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} - \sum_{k=2}^p \gamma_k Y_{t-k+1} + c + \eta_t \quad (2.14)$$

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} - \sum_{k=2}^p \gamma_k Y_{t-k+1} + bt + c + \eta_t \quad (2.15)$$

2. H_1 : processus stationnaire, $\rho < 0$

Avec $\rho = (\phi_1 - 1)(1 - \theta_1 - \theta_2 - \dots - \theta_{p-1})$

Et p le nombre de retards à ajouter dans la régression afin de prendre en compte l'autocorrélation et donc de blanchir les résidus (les résidus suivent un $BB(0, \sigma^2)$). On parle de corrélation paramétrique de l'autocorrélation. La valeur p est déterminée à l'aide du corrélogramme partiel de la série différenciée $\nabla Y_t = (1 - L)Y_t$.

La statistique de test est donnée par :

$$t_{\hat{\rho}} = \frac{\hat{\rho}_n - 1}{\hat{\sigma}_n} \quad (2.16)$$

qui est à comparer avec la valeur critique t_{DF} de la table de Dickey-Fuller.

- Si la valeur empirique de la statistique de test est inférieure à la valeur critique de la table, alors on rejette l'hypothèse nulle de non stationnarité,

- Si la valeur empirique de la statistique de test est supérieure à la valeur critique de la table, alors on accepte l'hypothèse nulle de non stationnarité, c'est à dire qu'il ya présence d'une racine unitaire.

Après avoir appliqué les tests de non stationnarité sur chaque modèle ((2.13),(2.14),(2.15)), on peut passer à l'analyse de détection de mémoire longue et on va se limiter à présenter les méthodes les plus connues : la statistique R/S (Rescaled Range) et la statistique de Lo.

2.1.5 Les méthodes de détection des processus de mémoire longue

Un certain nombre d'auteurs ont proposé des méthodes d'analyse des processus stochastiques pour détecter la présence de longue mémoire. Hurst(1951) a été le premier à proposer une méthode appelée analyse des étendues normalisées, ou Rescaled Range Analysis (R/S Analysis) qui a été améliorée par Lo (1991).

Notons que l'objectif initial de l'auteur était de modéliser la série temporelle de la hauteur des crues du Nil, de l'antiquité à nos jours. Selon cette méthode, une série chaotique peut être caractérisée par un exposant (noté H), qui représente la probabilité pour qu'un évènement soit suivi par un évènement similaire. C'est donc les aspects de persistance qui sont principalement visés par cette analyse. Le mode de calcul de l'exposant de Hurst n'est pas encore fixé, et certaines différences peuvent apparaitre en fonction des détails des algorithmes utilisés [12].

La statistique R/S (exposant de Hurst)

L'approche classique pour détecter la présence de mémoire longue (ou de dépendance à long terme) dans une série chronologique est la Rescaled Range Analysis (R/S Analysis) proposé initialement par l'hydrologue Harold Edwin Hurst (1951) et repris pour l'économie par Mandelbrot (1972). Nous exposons ici la méthode originale de l'auteur.

Cette méthode est construite sur la statistique $Q(n) = \frac{R(n)}{S_n}$, où n désigne la taille de l'échantillon et $Q(n) > 0$, elle permet de détecter des cycles non périodiques. On obtient ainsi l'estimation du paramètre H qui est connu comme étant le coefficient de Hurst qui est équivalent au coefficient d'auto-similarité [6].

Avec

$$R(n) = \max_{i \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k (Y_i - \bar{Y}_n) - \min_{i \leq k \leq n} \sum_{i=1}^k (Y_i - \bar{Y}_n) \quad (2.17)$$

(appelé l'étendue de la série (range) qui est la différence entre le maximum et le minimum de $Y_{i,k}$).

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2, \text{ la variance empirique} \quad (2.18)$$

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \text{ la moyenne empirique} \quad (2.19)$$

Et

$$S_n = \sqrt{S_n^2}, \text{ écart type de la série} \quad (2.20)$$

En pratique, cette méthode se fait en plusieurs étapes :

- Tout d'abord, on détermine une suite des entiers $(k_i)_{i=1, \dots, m}$ de longueur m , choisie arbitrairement, telle que $1 < k_m < \dots < k_1 < n$, pour laquelle on utilise la suite définie par Davies et Harte (1987) telle que pour $i = 1, 2, \dots, 6$, $k_i = \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ et pour $i = 7, 8, \dots, m$, $k_i = \lfloor \frac{k_{i-1}}{1.15^i} \rfloor$.

- Ensuite, pour chaque k_i , on détermine la statistique $Q(k_i)$.

- Puis, on détermine les logarithmes de $Q(k_i)$ ainsi que les logarithmes de k_i , et on trace $\log Q(k_i)$ contre $\log(k_i)$.

- Enfin, on trace une droite dont l'expression est : $\log Q(k_i) = a + b \log(k_i) + \mu$ et on applique la méthode des moindres carré ordinaires, ce qui nous donne les estimateurs \hat{a} et \hat{b} et par la suite on peut déterminer l'estimation du coefficient de Hurst tel que $\hat{H} = \hat{b}$.

La méthode de Lo

Parmi les inconvénients de la statistique R/S proposé par Hurst, on peut citer sa sensibilité à la présence de mémoire courte. Pour surmonter ce problème, Lo (1991) a proposé une autre statistique, appelée "la statistique R/S modifiée". Sa distribution limite est invariante aux différentes formes des processus à mémoire courte.

Cette méthode proposée par Lo permet de tester l'hypothèse nulle d'absence de dépendance de long terme contre l'hypothèse alternative de dépendance de long terme [6].

La statistique R/S modifiée de Lo possède la forme suivante :

$$\tilde{Q}_q(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{R(n)}{S_q(n)} \quad (2.21)$$

où $S_q(n)$ est exprimé par :

$$S_q(n) = \left[S_n^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^q \omega_j(q) \left(\sum_{i=j+1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)(Y_{i-j} - \bar{Y}_n) \right) \right]^{1/2} \quad (2.22)$$

où S_n^2 et \bar{Y}_n sont respectivement la variance et la moyenne empiriques qui sont définies par les relations (2.18) et (2.19),

$\omega_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1}$, sont les poids qui sont proposés par Newey et ω est (1987), avec $j = 1, 2, \dots, q$.

Remarque 2.1.1. Phillips (1987) a montré sous forme d'un théorème la convergence de l'estimateur $S_q(n)$ sous les deux conditions suivantes [6].

1. $\sup_t E[|\varepsilon|^{2\beta}] < \infty$, pour $\beta > 2$,
2. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors $q \rightarrow +\infty$ tel que $q \sim o(n^{1/4})$.

Remarque 2.1.2. Dans la pratique, le choix de l'entier q représente un vrai problème. Lo et Mackinlay (1989) et Andrews (1991) ont montré par des études par Monte Carlo que lorsque q est relativement grand par rapport à la taille de l'échantillon, l'estimateur est biaisé et donc q doit être choisi comme un petit entier, alors que d'autres études par Monte Carlo ont montré que $q = 1$ est un choix acceptable.

D'une manière générale, l'exposant de Hurst est compris entre 0 et 1.

Alors, selon les valeurs de H , on peut établir une classification des séries temporelles en fonction de leurs structures de dépendance [27] :

1. Si $H = \frac{1}{2}$, les autocorrélations sont nulles et la densité spectrale est constante et positive, le processus ne présente donc aucune dépendance à long terme.

2. Si $\frac{1}{2} < H < 1$, les autocorrélations sont toutes positives et diminuent hyperboliquement vers zéro, la densité spectrale exhibe un pôle à la fréquence zéro. La série présente des cycles non périodiques de tous ordres. Les basses fréquences sont très importantes et les cycles (non périodiques) lents deviennent de plus en plus marqués. Le processus présente une forme persistante de mémoire longue.

3. Si $0 < H < \frac{1}{2}$, les autocorrélations alternent de signe et la densité spectrale, nulle en zéro, est dominée par les composantes de haute fréquence. Le processus est anti-persistant ; des phases de hausse ont tendance à être suivies par des phases de baisse.

2.1.6 Test de bruit blanc

Le Test de Box et Pierce (1970) permet d'identifier les processus de bruit blanc (i.e. les processus aléatoires de moyenne nulle, de variance constante et non autocorrélés).

Cette statistique permet de tester $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0$ pour tout h , soit $\rho(h) = 0$ pour tout h [9], [21].

Les hypothèses du test de Box-Pierce sont les suivantes :

$$H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(h)$$

H_1 : il existe au moins un $\rho(i)$ significativement différent de 0 ($\rho(i) \neq 0$).

Pour effectuer ce test, on a recours à la statistique Q qui est donnée par :

$$Q = T \sum_{k=1}^h \hat{\rho}_k^2 \quad (2.23)$$

où h est le nombre de retards, T est le nombre d'observations et $\hat{\rho}_k$ est le coefficient d'auto-corrélation empirique d'ordre k .

Sous l'hypothèse H_0 vraie, Q suit la loi du Khi-deux avec h degrés de liberté :

$$Q = T \sum_{k=1}^h \hat{\rho}_k^2 \longrightarrow \chi^2(h)$$

La règle de décision est la suivante :

Si $Q > k^*$ où k^* est la valeur donnée par la table du Khi-deux pour un risque fixé et un nombre h de degrés de liberté

\Rightarrow On rejette H_0 (l'hypothèse de bruit blanc) et on accepte H_1 (autocorrélation des erreurs ε_t).

Une statistique ayant de meilleures propriétés asymptotiques peut être utilisée (Ljung et Box (1978)) :

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k}{T-k} \quad (2.24)$$

qui suit asymptotiquement, sous H_0 , une loi du χ^2 à h degré de liberté. Ces tests sont appelés par les anglo-saxons "portemanteau test", soit littéralement test "fourre-tout".

2.1.7 Test de Student

Le test de Student nous permet de tester si les paramètres du modèle (2.24) estimés sont significativement différent de 0. Si un coefficient est significativement égale à 0, on élimine le terme correspondant dans la formulation du modèle. Cela revient à tester les hypothèses suivantes :

$$H_0 : \theta = 0$$

$$H_1 : \theta \neq 0$$

La statistique de décision du test de Student est donnée par :

$$T_\theta = \frac{|\hat{\theta}|}{\sigma(\hat{\theta})} \quad (2.25)$$

T_θ suit une loi de Student à $(T - K)$ degré de liberté.

Où T représente la taille de la série considérée et K le nombre de paramètres estimés.

On note par $\theta \in R^k$ le paramètre du modèle à estimer et $\hat{\theta}$ son estimateur et $\hat{\sigma}(\hat{\theta})$ est l'estimateur de l'écart type associé à l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ .

- Si $T_\theta < t_{T-K, \alpha/2}$: on accepte l'hypothèse H_0 , le coefficient n'est pas significatif.
- Si $T_\theta > t_{T-K, \alpha/2}$: on rejette l'hypothèse H_0 , le coefficient est significatif.

2.2 Caractéristiques d'un processus à mémoire longue pure

L'objet de notre travail dans ce chapitre porte sur l'inférence statistique dans une classe particulière des modèles $FARIMA(p, d, q)$, plus précisément, la classe du modèle $FARIMA(0, d, 0)$ appelé processus à mémoire longue pure.

2.2.1 Le Processus $FARIMA(0, d, 0)$

Le processus $FARIMA(0, d, 0)$ est un cas particulier du processus $FARIMA(p, d, q)$ pour lequel $p = q = 0$. C'est un bruit gaussien fractionnaire défini par l'équation suivante :

$$(1 - L)^d Y_t = \varepsilon_t \quad (2.26)$$

Avec

$$\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$(1 - L)^d$ est un polynôme qu'on peut développer selon la formule (2.1).

Le processus Y_t est appelé aussi bruit blanc intégré avec un ordre fractionnaire [24].

Condition de causalité, d'inversibilité et stationnarité pour le processus $FARIMA(0, d, 0)$

Définition 2.2.1. Causalité [17]

Un processus stochastique $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit causal si les valeurs du processus s'écrivent en fonction des erreurs passées :

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (2.27)$$

Pour un processus fractionnaire $(1 - L)^d Y_t = \varepsilon_t$ on a :

$$\Psi_j = \frac{\Gamma(d + j)}{\Gamma(d)\Gamma(j + 1)}$$

- Propriété 2.2.1.**
1. Si $d < 0$, alors $\sum_{j \geq 0} |\Psi_j| < \infty$
 2. Si $0 < d < \frac{1}{2}$, alors $\sum_{j \geq 0} |\Psi_j| = \infty$ et $\sum_{j \geq 0} |\Psi_j|^2 < \infty$
 3. Si $d \geq \frac{1}{2}$, alors $\sum_{j \geq 0} |\Psi_j| = \infty$ et $\sum_{j \geq 0} |\Psi_j|^2 = \infty$

Proposition 2.2.1. (Gonçalves 1987) [17]

Le processus stationnaire satisfaisant l'équation (2.26) est causal si et seulement si $d < \frac{1}{2}$.

Définition 2.2.2. Inversibilité [17]

Un processus stochastique $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est dit inversible si les erreurs peuvent s'écrire en fonction des valeurs passées du processus :

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \pi_j Y_{t-j} \quad (2.28)$$

Pour un processus fractionnaire $(1 - L)^d Y_t = \varepsilon_t$, on a :

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j - d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j + 1)}$$

Propriété 2.2.2. 1. Si $d > 0$, alors $\sum_{j \geq 0} |\pi_j| < +\infty$

2. Si $\frac{-1}{2} < d < 0$, alors $\sum_{j \geq 0} |\pi_j| = +\infty$ et $\sum_{j \geq 0} |\pi_j|^2 < +\infty$

3. Si $d \leq \frac{1}{2}$, alors $\sum_{j \geq 0} |\pi_j| = +\infty$ et $\sum_{j \geq 0} |\pi_j|^2 = +\infty$

Proposition 2.2.2. (Gonçalves 1987)

Le processus défini par l'équation (2.26) est inversible si et seulement si $d \geq \frac{-1}{2}$.

Remarque 2.2.1. En utilisant la formule de Shepard suivante :

$$\frac{\Gamma(j + a)}{\Gamma(j + b)} \sim j^{a-b}, \text{ si } j \rightarrow +\infty \quad (2.29)$$

De la fonction Gamma on obtient les valeurs asymptotiques des coefficients Ψ_j et π_j qui sont :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \Psi_j \sim \frac{j^{d-1}}{\Gamma(d)} \text{ et } \lim_{j \rightarrow +\infty} \pi_j \sim \frac{j^{-d-1}}{\Gamma(-d)}$$

Les coefficients Ψ_j et π_j sont décroissants mais à une vitesse hyperbolique qui est plus faible que la vitesse exponentielle des processus ARMA. La fonction d'autocorrélation possède ce même type de comportement, ce qui permet de caractériser les processus $FI(d)$ [15].

Proposition 2.2.3. Le processus $(1 - L)^d Y_t = \varepsilon_t$ est causal et inversible si et seulement si $\frac{-1}{2} < d < \frac{1}{2}$.

Fonction d'autocovariance d'un processus FARIMA(0, d, 0) [15], [34]

Le processus $FARIMA(0, d, 0)$ est complètement caractérisé par sa fonction d'autocovariance.

Soit (Y_t) un processus $FARIMA(0, d, 0)$ avec $d \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$, on a :

$$\nabla^d Y_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow \nabla^{-d} \varepsilon_t = Y_t = \sum_{j \geq 0} \Psi_j \varepsilon_{t-j}$$

Il est clair que le processus (Y_t) est centré et on a pour $h \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= E(Y_t.Y_{t+h}) - E(Y_t).E(Y_{t+h}) \\
&= E(Y_t.Y_{t+h}) \quad (\text{car } E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = 0) \\
&= E \left[\left(\sum_{j \geq 0} \Psi_j \varepsilon_{t-j} \right) \left(\sum_{j \geq 0} \Psi_j \varepsilon_{t+h-j} \right) \right] \\
&= E \left[\sum_{j \geq 0} \Psi_j^2 \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-j} + \sum_{j \neq k} \Psi_j \Psi_k \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-k} \right] \\
&= E \left(\sum_{j \geq 0} \Psi_j^2 \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-j} \right) + E \left(\sum_{j \neq k} \Psi_j \Psi_k \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-k} \right) \quad (\text{car } E \text{ est linéaire}) \\
&= \sum_{j \geq 0} \Psi_j^2 E(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-j}) + \sum_{j \neq k} \Psi_j \Psi_k E(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-k})
\end{aligned}$$

Sauf pour $t - j = t + h - k$, ou $k = j + h$ ($h \neq 0$)

Pour $h \neq 0$, on a :

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \Psi_j \Psi_{j+h} \quad (2.30)$$

Pour $h = 0$,

$$\gamma(0) = \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \Psi_j^2 \quad (2.31)$$

La forme explicite des autocovariances se déduit directement de celle des coefficients Ψ_j , tel que :

$$\Psi_j = \frac{\Gamma(d+j)}{\Gamma(d)j!}$$

En remplaçant Ψ_j par sa valeur dans la formule (2.30), on obtient :

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \frac{\Gamma(d+j)\Gamma(d+j+h)}{\Gamma(d)j!\Gamma(d)(j+h)!} \\
&= \left[\frac{\delta^2 \Gamma(h+d)}{\Gamma(h+1)\Gamma(d)} \right] \cdot \left[\frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(h+d)\Gamma(d)} \sum_{j \geq 0} \frac{\Gamma(d+h)\Gamma(d+h+j)}{\Gamma(h+1+j)j!} \right]
\end{aligned} \quad (2.32)$$

On reconnaît dans le second terme entre crochets une valeur de la fonction hypergéométrique donnée par :

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{j \geq 0} \frac{\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)z^j}{\Gamma(c+j)j!} \quad (2.33)$$

Alors la fonction d'autocovariance peut s'écrire comme suit :

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \frac{\Gamma(d+h)}{\Gamma(h+1)\Gamma(d)} \cdot F(d, h+d, h+1, 1), \forall h \geq 0. \quad (2.34)$$

En utilisant la propriété de la fonction hypergéométrique suivante :

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (2.35)$$

On obtient alors

$$F(d, h + d, h + 1, 1) = \frac{\Gamma(h + 1)\Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(h + 1 - d)\Gamma(1 - d)}$$

La formule (2.34) s'écrit alors comme suit :

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \frac{\Gamma(d + h)\Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(d)\Gamma(h + 1 - d)} \quad (2.36)$$

Pour $h = 0$,

$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{\Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(1 - d)} \quad (2.37)$$

En utilisant la formule de Sheppard (2.29), quand h tend vers ∞ , on a :

$$\gamma(h) \sim |h|^{2d-1} \quad (2.38)$$

Remarque 2.2.2. Le processus $FI(d)$ est à mémoire longue si $0 < d < \frac{1}{2}$, car dans ce cas la fonction d'autocovariance décroît hyperboliquement (donc lentement) vers zéro lorsque h augmente.

La fonction d'autocorrélation $\rho(h)$ d'un processus $FARIMA(0, d, 0)$

La fonction d'autocorrélation pour un retard $h \in Z$ est donnée par :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\sigma^2 \frac{\Gamma(d+h)}{\Gamma(h+1)\Gamma(d)} F(d, h + d, h + 1, 1)}{\Gamma(d)} \Gamma(1)\Gamma(d) \quad (2.39)$$

Donc

$$\rho(h) = \frac{\Gamma(d + h)F(d, h + d, h + 1, 1)}{\Gamma(h + 1)\Gamma(d)F(d, d, 1, 1)} \quad (2.40)$$

On peut écrire $F(d, d, 1, 1)$ en utilisant la formule (2.35) :

$$F(d, d, 1, 1) = \frac{\Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(1 + d)^2}$$

Alors la fonction d'autocorrélation donnée dans la formule (2.39) peut s'écrire comme suit :

$$\rho(h) = \frac{\Gamma(d + h)\Gamma(1 - d)}{\Gamma(h - d + 1)\Gamma(d)} \quad (2.41)$$

Et grâce à la formule de Sheppard (2.29), on obtient : $\rho(h) \sim h^{2d-1} \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)}$ quand h tend vers $+\infty$

qui peut aussi s'écrire comme suit : $\rho(h) \equiv \frac{-(d)!}{(d-1)!} h^{2d-1}$, quand $h \rightarrow +\infty$

Remarque 2.2.3. Le processus $FI(d)$ est à mémoire longue si $0 < d < \frac{1}{2}$, car dans ce cas, quand $h \rightarrow +\infty$ alors h^{2d-1} et la fonction d'autocorrélation décroît hyperboliquement (donc lentement) vers zéro.

Un processus de longue mémoire est caractérisé par ses fonctions d'autocovariances et d'autocorrélations qui décroissent hyperboliquement vers zéro.

Fonction d'autocorrélation partielle

L'application de l'algorithme de Durbin-Levinson donne pour l'autocorrélation partielle d'ordre h , notée $\alpha(h)$, le résultat suivant [34] :

$$\alpha(h) = -\frac{\Gamma(h-d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)\Gamma(h-d+1)} = \frac{d}{h-d}, \text{ pour } h \in \mathbb{N}^* \quad (2.42)$$

2.2.2 La relation entre l'exposant de Hurst et le paramètre d'intégration fractionnaire

En reprenant les formulations des fonctions d'autocovariance du bruit gaussien fractionnaire et des processus *FARIMA*, on établit une relation entre le paramètre d des processus *FARIMA*(p, d, q) et l'exposant de Hurst H . Ainsi, en liant les deux exposants, on obtient la relation suivante [28].

$$d = H - \frac{1}{2} \quad (2.43)$$

et ce sont GEWEKE et Parter-HUDAK (1983) qui ont démontré la relation liant le paramètre d à l'exposant de Hurst H . Alors, selon les valeurs de d , on peut établir une classification des séries temporelles en fonction de leur structure de dépendance selon le même schéma que celui retenu dans le cas du bruit gaussien fractionnaire [34] :

Plus spécifiquement, trois cas peuvent être distingués en fonction des valeurs du paramètre d :

- Si $0 < d < \frac{1}{2}$: le processus *FARIMA*(p, d, q) est un processus stationnaire à mémoire longue, les autocorrélations sont positives et diminuent hyperboliquement vers zéro lorsque le retard augmente.
- Si $d = 0$: le processus FARIMA se réduit au processus ARMA.
- Si $\frac{-1}{2} < d < 0$: le processus est dit stationnaire à mémoire courte (le processus est anti-persistant).

Le cas de l'anti-persistence est appelé par Mandelbrot "effet Joseph", il correspond à des alternances de hausse et de baisse dans le processus.

Analyse temporelle et spectrale

Les principales caractéristiques temporelles d'un processus sont données par ses fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation (simple et partielle). Dans les pages qui suivent, nous essaierons de montrer comment il est possible de passer de l'étude d'une série dans le domaine des temps à l'étude dans le domaine des fréquences , [23].

La densité spectrale contient la même information que la fonction d'autocovariance mais elle est définie dans le domaine des fréquences plutôt que dans le domaine du temps.

L'idée est que les différentes composantes d'une série peuvent être vues comme des oscillations ou des composantes périodiques de fréquence plus ou moins élevée [30]. Autrement dit, chaque composante de la série peut être interprétée comme une fonction périodique, celle-ci pouvant être décomposée en un nombre fini d'oscillations sinusoïdales. Ce principe découle de l'analyse harmonique de Fourier (1822) qui précise que toute oscillation est caractérisée par son amplitude, sa phase et sa période, et une façon de passer du domaine des temps au domaine des fréquences est d'utiliser la transformation de Fourier [23].

Ainsi, dans l'approche temporelle, les questions sont directement formulées en termes de temps alors que dans l'approche fréquentielle, l'objectif est la décomposition spectrale d'une série stationnaire, c'est à dire l'indentification des oscillations aux principales fréquences. Si un processus comporte plusieurs composantes alors sa densité spectrale donnera la répartition des amplitudes des composantes aux différentes fréquences.

Ce chapitre, après quelques rappels d'analyse, traite la notion de densité spectrale des processus aléatoires stationnaires et de son estimation au moyen du périodogramme.

3.1 Quelques rappels d'analyse

Définition 3.1.1. Fonction localement intégrable

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction f est dite localement intégrable, si $\int_a^b |f(x)|dx$ converge pour tout

couple de réels (a, b) avec $a < b$.

Définition 3.1.2. Fonction périodique

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est périodique s'il existe $T \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $x, x + T \in I$,

$$f(x) = f(x + T) \quad (3.1)$$

Le plus petit entier naturel $T > 0$ qui vérifie l'équation (3.1) est appelé période.

Remarque 3.1.1. Les fréquences sont mesurées en fréquence angulaire ω et on a les relations suivantes entre la fréquence angulaire ω et la période de temps T :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Définition 3.1.3. Discontinuité de première espèce

Une fonction f admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche de x_0 existent. (Celles-ci ne sont pas forcément égales sauf en cas de continuité).

3.1.1 Série de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et intégrable sur tout compact¹ de \mathbb{R} .

Définition 3.1.4. On appelle série de Fourier associée à f , la série trigonométrique :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (3.2)$$

Avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

où a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier de f .

Théorème 3.1.1. Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique vérifiant :

1. Les discontinuités de f (si elles existent) sont de première espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini.

2. f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à f est simplement convergente sur \mathbb{R} , et sa somme vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \begin{cases} f(x), & \text{si } f \text{ est continue en } x, \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{si } f \text{ est discontinue en } x, \end{cases} \quad (3.3)$$

où $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x .

1. Un ensemble $K \subset E$ est compact si toute suite d'éléments de K , on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K .

3.1.2 Intégral de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur \mathbb{R} et telle que :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

converge.

On suppose que f satisfait aux conditions de Dirichlet et admet un développement en série de Fourier.

L'intégrale de Fourier (voir la démonstration [3]) s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \exp(-2\pi i vt) dt \right]^{2\pi i vt} dv \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(v)]^{2\pi i vt} dv \quad (3.5)$$

avec

$$f(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2\pi i vt) dt.$$

La fonction $f(v)$ est appelée transformée de Fourier et $f(t)$ est la représentation intégrale de Fourier de la série.

3.1.3 La fonction Gamma d'Euler

La fonction Γ d'Euler [4] (ou fonction Gamma) est une fonction qui prolonge le factoriel aux valeurs réels et complexes.

Pour $Re(\alpha) > 0$, on définit :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$$

La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^{-1}$ tout entier, on a :

$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ et pour n entier positif $\Gamma(n + 1) = n!$.

3.2 Analyse spectrale des processus stationnaire

3.2.1 Densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire

Pour l'étude des séries stationnaires, une approche également utilisée est celle basée sur l'étude des fréquences. Cette vision est une généralisation des méthodes utilisées en analyse de Fourier. L'idée est que les coefficients d'autocovariance d'une série stationnaire correspondent aux coefficients de Fourier d'une mesure positive, appelée mesure spectrale du processus. Il est possible de montrer que cette mesure spectrale admet une densité, dite spectrale, que nous noterons f [8].

Définition 3.2.1. Soit $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire de fonction d'autocovariance $\gamma(h)$. La densité spectrale du processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) \exp(i\omega h), \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

on a : $\exp(i\omega h) = \cos(\omega h) + i \sin(\omega h)$

La densité spectrale n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance.

Propriétés [30] :

- $f(\omega)$ existe car la série de terme général $\gamma(h) \exp(i\omega h)$ est absolument convergente puisque $\sum_h |\gamma(h)| < +\infty$ (car Y_t est stationnaire).
- $f(\omega)$ est une fonction paire, continue, périodique de période 2π (on la représente sur $[0, \pi]$) et positive.
- La transformation inverse de Fourier permet d'écrire :

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \exp(i\omega h) d\omega$$

Et il est donc équivalent de connaître $\gamma(h), h \in \mathbb{Z}$ ou $f(\omega), \omega \in \mathbb{R}$:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) \exp(i\omega h); \quad \gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \exp(i\omega h) d\omega$$

Il est donc aisé de passer de la série des autocovariances à la densité spectrale et le passage pour les processus stationnaires entre le domaine des temps et celui des fréquences est ainsi établi.

Exemple 1. Un bruit blanc (ε_t) est caractérisé par :

$$\begin{cases} \gamma_\varepsilon(0) = \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 \\ \gamma_\varepsilon(h) = 0, & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

Alors sa densité spectrale est donnée par :

$$f(\omega) = \frac{\gamma(0)}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2\pi} = \text{Cste}$$

3.2.2 Densité spectrale du processus $ARMA(p, q)$

La densité spectrale d'un processus $ARMA(p, q)$ défini par l'équation :

$$\Phi(L)Y_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

est donnée par [24] :

$$f_y(\omega) = \frac{\sigma_y^2 |\theta(\exp(-i\omega))|^2}{2\pi |\Phi(\exp(-i\omega))|^2}, \quad \omega \in [-\pi, \pi] \quad (3.7)$$

La densité spectrale d'un processus ARMA étant égale au rapport de deux polynômes trigonométriques, on la qualifie de densité spectrale rationnelle.

3.2.3 Distribution spectrale d'un processus aléatoire stationnaire

La distribution spectrale d'un processus stationnaire est la fonction $D(\omega)$ définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, telle que [24] :

$$D(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(u) du \quad (3.8)$$

(la densité spectrale est la dérivée de la distribution spectrale).

3.2.4 La densité spectrale d'un processus FARIMA(0, d, 0)

On a

$$\nabla^d Y_t = \varepsilon_t$$

où ε_t est un processus de bruit blanc de variance σ^2 .

$$Y_t = \nabla^{-d} \varepsilon_t = (1 - L)^{-d} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} = \Psi(L) \varepsilon_t$$

où $\Psi(L) = (1 - L)^{-d} = \sum_{j=0}^{+\infty} \Psi_j L^j$ Y_t est stationnaire de deuxième ordre, donc la densité spectrale $f_y(\omega)$ du processus Y_t s'écrit :

$$f(\omega) = |\Psi(\exp(-i\omega))|^2 f_\varepsilon(\omega) \quad (3.9)$$

où $f_\varepsilon(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ est la densité spectrale du processus de bruit blanc (ε_t), donc

$$f_Y(\omega) = |1 - \exp(-i\omega)|^{-2d} \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad (3.10)$$

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} - \left(\cos 2\left(\frac{\omega}{2}\right) - i \sin 2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \right|^{-2d}$$

comme $\cos \omega = \cos 2\frac{\omega}{2} = \cos^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2}$

$\sin \omega = \sin 2\frac{\omega}{2} = 2 \cos \frac{\omega}{2} \cdot \sin \frac{\omega}{2}$

d'où

$$\begin{aligned} f_Y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} - \cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} + 2i \cos \frac{\omega}{2} \cdot \sin \frac{\omega}{2} \right|^{-2d} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 2 \sin \frac{\omega}{2} \left(\sin \frac{\omega}{2} + i \cos \frac{\omega}{2} \right) \right|^{-2d} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 2 \sin \frac{\omega}{2} \right|^{-2d} \cdot \left| \sin \frac{\omega}{2} + i \cos \frac{\omega}{2} \right|^{-2d} \end{aligned}$$

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 2 \sin \frac{\omega}{2} \right|^{-2d}, \quad -\pi < \omega < \pi \quad (3.11)$$

car $\left| \sin \frac{\omega}{2} + i \cos \frac{\omega}{2} \right|^{-2d} = 1$.

Remarque 3.2.1. Lorsque $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$, le processus $(Y_t, t \in Z)$, est stationnaire et inversible. Les autocorrélations décroissent hyperboliquement vers zéro et la densité spectrale n'est pas limitée à la fréquence zéro. Ces processus vérifient donc la définition générale des processus à mémoire longue donné dans le paragraphe précédent. Le paramètre d explique le comportement de long terme de la série, le comportement de court terme étant expliqué par les composantes autoregressives et moyenne-mobiles [34].

3.2.5 Décomposition de Wold

Théorème 3.2.1. Théorème de Wold (ou décomposition de Wold)

Tout processus stationnaire du second ordre peut être représenté sous la forme [30] :

$$Y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} + m \quad (3.12)$$

C'est une représentation MA (moyenne mobile),

où les paramètres Ψ_j satisfont $\Psi_0 = 1, \Psi_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \mathbb{N}^, \sum_{j=0}^{+\infty} \Psi_j^2 < +\infty, \varepsilon_t$ est un bruit blanc i.i.d $(0, \sigma^2)$ et m est la moyenne.*

La somme des chocs passés correspond à la composante linéaire stochastique de Y_t et le terme m désigne la moyenne du processus. Ainsi, tout processus stationnaire peut s'écrire comme une somme pondérée infinie de chocs passés, ces chocs étant représentés par un bruit blanc de variance finie. La condition $\sum_{j=0}^{+\infty} \Psi_j^2 < +\infty$ est très importante. Elle assure l'existence des moments d'ordre 2 [30].

3.2.6 Densité spectrale d'un processus de longue mémoire

Comme nous l'avons déjà rappelé précédemment, la mémoire d'un processus peut être caractérisée par des propriétés de sa fonction d'autocovariance ou de sa densité spectrale.

Pour la classe de processus ARIMA fractionnaires ($FARIMA(p, d, q)$), processus à longue mémoire, introduits par Box-Jenkins (1971), et définis par [1] :

$$\Phi(L)(1 - L)^d Y_t = \theta(L)\varepsilon_t, d \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[\subset \mathbb{R} \quad (3.13)$$

Où d , paramètre de longue mémoire, est aussi appelé degré d'intégration du processus. La densité spectrale d'un tel processus est donnée par :

$$f(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\theta(\exp(-i\omega))|^2}{|\Phi(\exp(-i\omega))|^2} |1 - \exp(-i\omega)|^{-2d}$$

Avec un comportement particulier au voisinage de $\omega = 0$ pour les longues mémoires.

- Si $0 < d < \frac{1}{2}$, $\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) = +\infty$ (longue mémoire).
- Si $\frac{-1}{2} < d < 0$, $\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) = 0$ (mémoire intermédiaire).

Remarque 3.2.2. En notant $\gamma(h), \rho(h)$ la fonction de covariance et la fonction d'autocorrélation respectivement, on a aussi les relations suivantes :

a) La fonction d'autocovariance [6]

La fonction de covariance $\gamma(h)$ du processus $FARIMA(p, d, q)$ est telle que :

$$\gamma(h) = c_\gamma(d, \Phi, \theta)|h|^{2d-1}, \text{ lorsque } |h| \rightarrow +\infty \quad (3.14)$$

où $c_\gamma(d, \Phi, \theta) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(1)|^2}{\pi |\Phi(1)|^2} \Gamma(1 - 2d) \sin(\pi d)$

$\theta(1) = 1 + \theta_1 + \dots + \theta_q$ et $\Phi(1) = 1 - \Phi_1 + \dots - \Phi_p$.

b) La fonction d'autocorrélation [6]

La fonction d'autocorrélation du processus $FARIMA(p, d, q)$, notée $\rho(h)$, est telle que :

$$\rho(h) = c_\rho(d, \Phi, \theta)|h|^{2d-1}, \text{ lorsque } |h| \rightarrow +\infty \quad (3.15)$$

Avec

$$c_\rho(d, \Phi, \theta) = \frac{c_\gamma(d, \Phi, \theta)}{\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega} \quad (3.16)$$

Exemple : $FARIMA(1, 0.4, 1)$

Soit le modèle à longue mémoire suivant [1] :

$$(1 - L)^{0.4}(1 + 0.5L)Y_t = (1 - 0.4L)\varepsilon_t,$$

Dont la densité spectrale est :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{|1 - 0.4 \exp(-i\omega)|^2}{|1 + 0.5 \exp(-i\omega)|^2} |1 - \exp(-i\omega)|^{-0.8}, \quad -\pi < \omega < \pi.$$

Nous représentons , ci-dessous, la chronique simulée de ce modèle ainsi que sa densité spectrale.

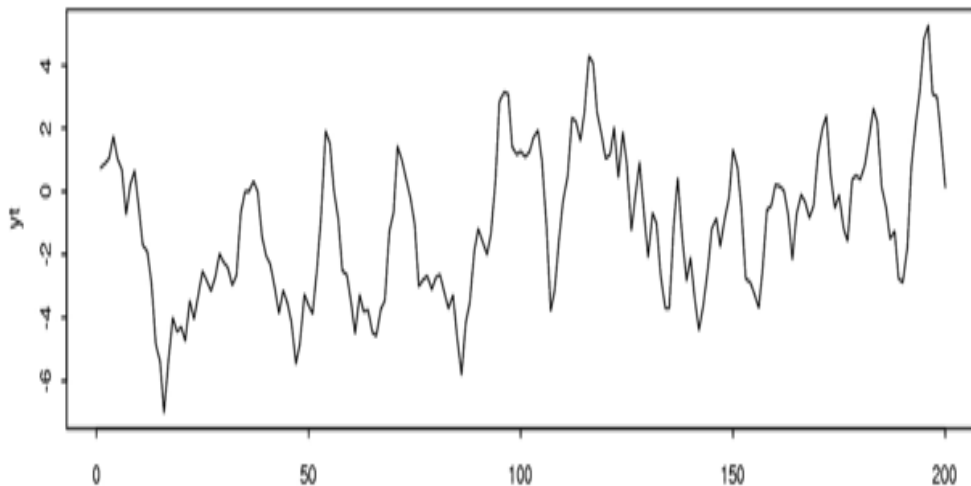


FIGURE 3.1 – Chronique du modèle FARIMA (1,0.4,1)

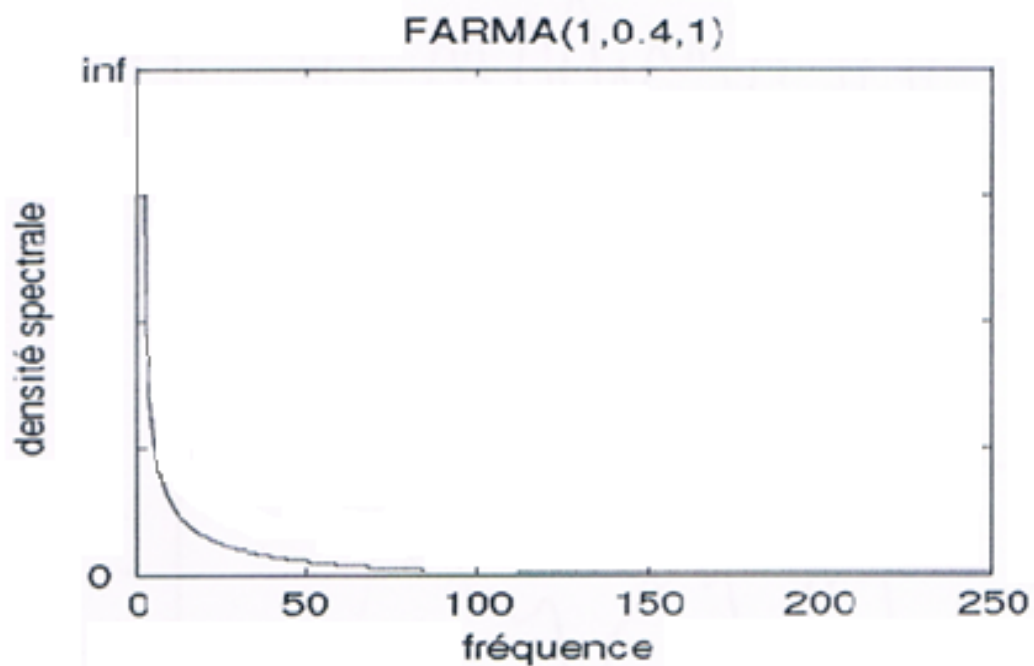


FIGURE 3.2 – Densité spectrale du modèle FARIMA (1,0.4,1)

- Commentaire des graphiques :

a) **La Chronique** : D'après la figure 3.1, nous constatons que la chronique fluctue lentement autour de zéro.

b) **La densité spectrale** : La figure 3.2 indique que la densité spectrale du modèle $FARIMA(1, 0.4, 1)$ explose c'est-à-dire qu'elle tend vers l'infini quand $\omega \rightarrow 0$.

Tableau 3.2.1 : Propriété du processus à mémoire longue dans le domaine fréquentiel.

d	S	I	Propriétés
$d = -0.5$	Oui	<i>Non</i>	$s(\omega) \sim 0$ quand $\omega \rightarrow 0$
$-0.5 < d < 0$	Oui	Oui	Mémoire courte avec corrélation négative et haute densité spectrale à haute fréquence, $s(\omega) \sim 0$ quand $\omega \rightarrow 0$
$d = 0$	Oui	Oui	Bruit blanc avec corrélation nulle et densité spectrale constante. $s(\omega) = \sigma^2 / 2\pi$
$0 < d < 0.5$	Oui	Oui	Mémoire longue avec corrélation positive et haute densité spectrale à basse fréquence, $s(\omega) \sim \infty$ quand $\omega \rightarrow 0$
$d = 0.5$	<i>Non</i>	Oui	$s(\omega) \sim \infty$ quand $\omega \rightarrow 0$

FIGURE 3.3 – Propriété du processus à mémoire longue dans le domaine fréquentiel

Tableau extrait de Hwang, Satchell² [2007].

Où S et I représente respectivement la stationnarité et l'inversibilité, $S(\omega)$ représente la fonction de densité spectrale du processus de mémoire longue en temps discret.

2. Soosung Hwang, Stephen E. Satchell "Implied Volatility forecasting a comparison of different procedures including fractionally integrated models with applications to UK equity options" in Forecasting Volatility in the Financial Markets Third edition Edited by John Knight, Stephen Satchell, 2007 Elsevier finance Ltd.

Le périodogramme

Les astronomes ont été les premiers à utiliser l'analyse de Fourier pour des séries Chronologiques. Leur but était de détecter des saisonnalités cachées au sein de leurs données. En 1847, Buys et Ballot, dans "les changements périodiques de températures" ont proposé des méthodes pour étudier la périodicité de données astronomiques. Toutefois, il a fallu attendre 1898 pour que Sir Arthur Schuster introduise le périodogramme, qui constitue la base des méthodes spectrales d'analyse de séries chronologiques [8].

Le périodogramme peut servir, non seulement à estimer la densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire, mais également pour mettre en évidence des composantes périodiques dans une série chronologique en général.

Ce chapitre est consacré à l'examen des propriétés du périodogramme comme estimateur de la densité spectrale.

4.1

Définition 4.1.1. Le Périodogramme

Soit $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire. Si on dispose d'un échantillon constitué de T observations du processus stationnaire (Y_1, Y_2, \dots, Y_T) , On appelle périodogramme, la fonction I_T définie comme suit :

$$I_T(\omega) = \frac{1}{T} \left| \sum_{t=1}^T Y_t \exp(-it\omega) \right|^2$$

Si le processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ admet une densité spectrale, alors $\frac{1}{2\pi} I_T(\omega)$ est un estimateur sans biais de la densité spectrale.

En effet, pour une série temporelle $Y_t, t = 1, \dots, T$ avec I_T son périodogramme, on a la relation

suivante pour toute valeur de ω [24].

$$I_T(\omega) = \frac{1}{T} \left| \sum_{t=1}^T TY_t \exp(-it\omega) \right|^2 = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \hat{\gamma}_T(h) \exp(-it\omega) \quad (4.1)$$

Cette relation suggère de prendre comme estimateur de la densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire, pour lequel on dispose d'une réalisation de taille T , le périodogramme divisé par 2π (voir la définition 2.6), soit :

$$\hat{f}_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} I_T(\omega).$$

Mais cet estimateur n'est pas consistant (on ne peut estimer que les T premiers termes de $\gamma(h)$ intervenant dans la définition du périodogramme à partir de T observations) et n'apas toutes les qualités attendues du "bon" estimateur. En particulier, il n'est pas convergent (la variance de l'estimateur ne tend pas vers 0 quand T tend vers l'infini).

4.2 Estimateurs dérivés du périodogramme

Soit le périodogramme défini ci-dessus par la relation (4.1) :

$$I_T(\omega) = \frac{1}{T} \left| \sum_{t=1}^T TY_t \exp(-it\omega) \right|^2 = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \hat{\gamma}_T(h) \exp(-it\omega)$$

Ce périodogramme, divisé par 2π , constitue un estimateur de la densité spectrale du processus $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ qui est sans biais, mais non consistant. On peut donc réaliser un "post-traitement" pour améliorer cet estimateur ; ce post-traitement s'effectue soit dans le domaine spectral, soit dans le domaine temporel.

4.2.1 Périodogramme lissé dans le domaine spectral

On peut résoudre le problème de convergence en lissant le périodogramme et en considérant l'estimateur pondéré suivant :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \leq m_T} W_T(j) I_T \left(g(T, \omega) + \frac{2\pi}{T} j \right) \quad (4.2)$$

Où W_T représente une fonction poids tel que :

$\forall j \in \mathbb{Z}, W_T(j) \geq 0, W_T(-j) = W_T(j), \sum_{j \leq m_T} W_T(j) = 1$ et $\sum_{j \leq m_T} W_T^2(j) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow +\infty$;

$g(T, \omega)$ est le multiple de $\frac{2\pi}{T}$ le plus proche de ω ;

On a alors pour $T \rightarrow +\infty, m_T \rightarrow +\infty$ et $\frac{m_T}{T} \rightarrow 0$.

4.2.2 Pondération dans le domaine temporel

Une autre façon de lisser le périodogramme consiste à moyenner plusieurs périodogrammes d'un échantillon de taille donnée , ce qui est le cas dans la pratique, il faut donc diviser cet échantillon en plusieurs sous échantillons de tailles égales (de préférence), ce qui diminue la résolution fréquentielle [24].

4.3 Simulation d'un processus de longue mémoire

Pour illustrer les caractéristiques du processus $FARIMA(p, d, q)$ développées précédemment, nous prenons l'exemple d'un processus simple de type $FARIMA(0, d, 0)$ avec $d = 0.3, \Phi = 0.2, \theta = 0.1$ et une valeur nulle pour la moyenne du processus et modélisant le trafic Internet. Cet exemple est tiré du Mémoire présenté par Mr. Maher Chtioui Mars 2006 au niveau de l'université du Québec à Montréal sous le titre : "L'exploitation de l'auto-similarité pour la prédiction du trafic Internet" [10]. Le logiciel utilisé dans ce cas pour simuler les trajectoires (trajectoires de la fonction d'autocorrélation et du processus) du processus $(0, d, 0)$ est le logiciel "S-Plus" qui possède la fonction prédéfinie qui permet de simuler ces trajectoires. En utilisant la relation qui lie l'exposant de Hurst (H) au paramètre d'intégration fractionnaire (d) on obtient ce qui suit :

$$H = d + \frac{1}{2} \text{ avec } d = 0.3, \text{ on a : } H = 0.8$$

D'après la remarque (1.2) se rapportant à l'exposant de Hurst développé dans le sous-chapitre 1.1.5.1 du chapitre 1 on en déduit que ce processus est à mémoire longue ($\frac{1}{2} < H < 1$). Les trajectoires obtenues sont les suivantes.

a) Trajectoire du processus

On remarque que la trajectoire du processus est stationnaire.

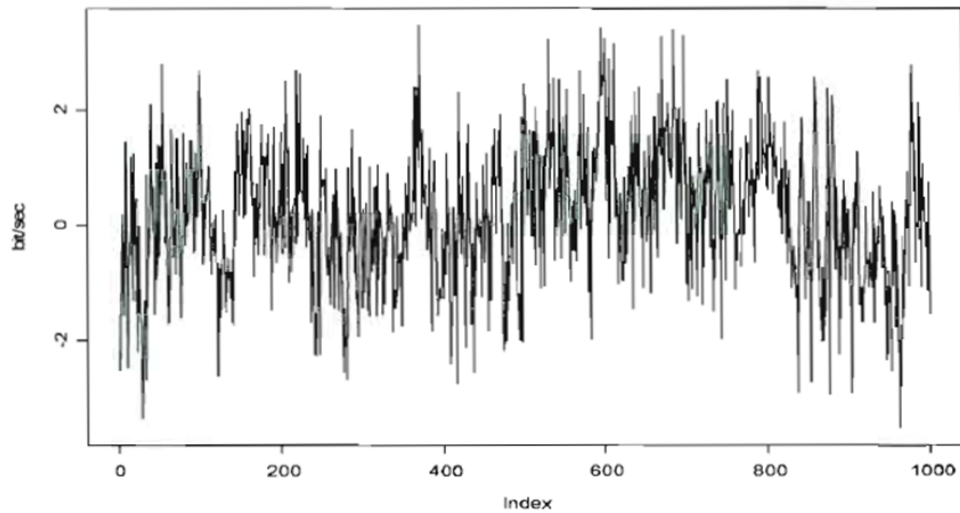


FIGURE 4.1 – Trajectoire du processus FARIMA

b) Trajectoire de la fonction d'autocorrélation du processus FARIMA(0,d,0)

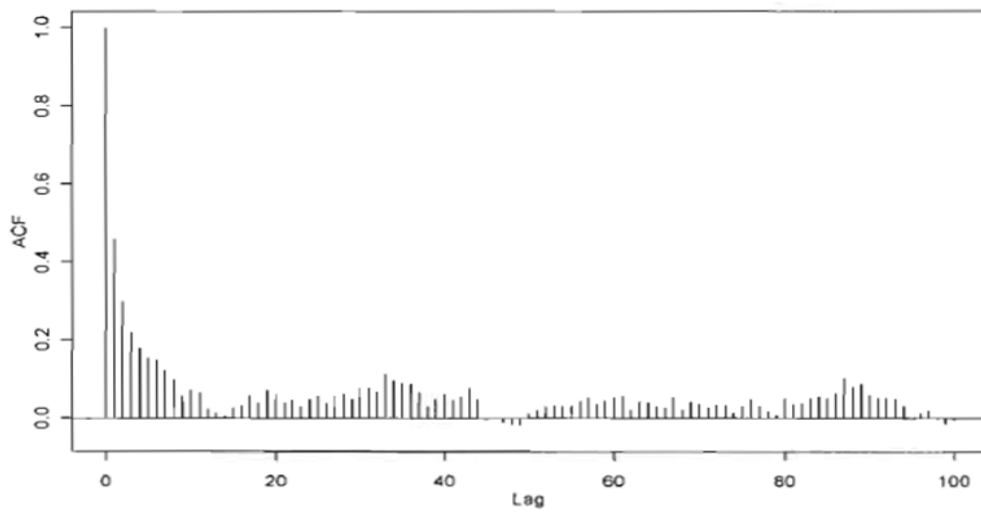


FIGURE 4.2 – Fonction d'autocorrélation du processus FARIMA (0,d,0)

On remarque bien qu'à partir de la figure 4.2, la présence d'une lente décroissance de la fonction d'autocorrélation empirique lorsque la fréquence tend vers zéro. Ces résultats empiriques confirment les conclusions théoriques se rapportant aux processus à mémoire longue et en particulier, celle relative à la décroissance hyperbolique de la fonction d'autocorrélation lorsque le retard h augmente.

Conclusion Générale

Une des hypothèses fondamentales de la statistique classique est l'indépendance des observations, ou encore on suppose que la dépendance est assez faible donc négligeable. Malheureusement, en pratique, il ya beaucoup de séries qui laissent cette hypothèse d'indépendance entre les observations impossible à réaliser d'où la présence de mémoire longue dans la série.

Cette dépendance de long terme entre les observations d'une série chronologique apparait dans de nombreux champ d'application des statistiques. Le domaine qui a été très certainement à l'origine du développement des modèles longue mémoire en statistique est l'hydrologie avec les travaux menés par Hurst (1951). Cependant, la majeure partie des applications récentes des processus longue mémoire se situe dans le domaine de l'économie et de la finance.

Dans ce mémoire, nous avons présenté une description précise d'une classe populaire de modèles à longue mémoire (les FARIMA) permettant de modéliser les persistances observées dans les séries présentant une forte dépendance entre les observations. Nous avons également mis en relief deux définitions usuelles d'un processus à mémoire longue fréquemment rencontrées dans la littérature statistique et permettant de se placer soit dans le domaine temporel soit dans le domaine spectral.

Dans le domaine temporel on définit la propriété de longue mémoire par une décroissance lente (hyperbolique) vers zéro de la fonction d'autocorrélation lorsque les retards augmentent. Si on se place dans le domaine spectral, on définit alors la propriété de longue mémoire par une densité spectrale infinie en la fréquence zéro.

L'exemple de simulation proposé a permis de mettre en évidence clairement ces deux principales caractéristiques.

En conclusion, nous pouvons avancer l'idée que le concept de longue mémoire et en particulier les modèles FARIMA sont des outils concurrents dans le sens où ils capturent la dynamique

des chroniques qui présentent de fortes dépendances avec les mêmes performances que celles des modèles ARMA pour les chroniques de mémoire courte.

En matière de perspectives de recherches, nous préconisons l'application des modèles FARIMA pour la modélisation des chroniques se rapportant aux phénomènes suivants :

- Chroniques démographiques des naissances de la wilaya de Bejaia pour une période déterminée.
- Chronique des températures de la ville de Bejaia pour une période déterminée.
- Chronique des cours du pétrole Algérien pour une période déterminée.
- Chronique du comportement du taux de change (le taux de change exprime la quantité de monnaie nécessaire pour acquérir une unité d'une monnaie différente) du dinars Algérien pour une période déterminée.
- Chronique du P.I.B Algérien pour une période déterminée.

Bibliographie

- [1] A-N. Ajmi et M. Boutahar. *Chroniques démographiques des naissances : longue mémoire ou changement de régime ?* Msh.mss, Varia 181, 2008.
- [2] C. Aloui et A.Grira. *Efficienc e informationnelle*. dynamique des rendements boursiers et apport des processus de mémoire longue : fondements théoriques et validation internationale.
- [3] N. Amroune. *Série de fourier*. cours Licence, université sba.
- [4] E. Artin. *The Gamma Function*. New York, Holt, Rinehart and Winston, Elémentaire et classique de 1931, P. 39, 1964.
- [5] J. Beran. *Statistics for long memory processus*. New York, Chapman Hall, 1994.
- [6] M. Boutahar, L. Nouira et V. Marimoutou. *Les méthodes d'estimation du paramètre de mémoire longue : Evidence Numérique*. Greqam, Université de la méditerranée, 2003.
- [7] G. Bresson et A. Pirotte. *Econométrie et séries temporelles, théorie et application*. Press Universitaire de France, 1998.
- [8] A. Charpentier. *Cours de séries temporelles, Théorie et applications*. Université Paris Dauphine.
- [9] A. Charpentier. *Econométrie de la finance, introduction aux modèles dynamiques*. ENSAI-CREST, Master Gestion des Risques, IGR, 2006-2007.
- [10] M. Chtioui. *Mémoire sur l'exploitation de l'Auto-Similarité pour la prédiction du trafic Internet*. Université du Quebec à Montreal, Mars, 2006.
- [11] J-J. Daudin, C. Duby, S. Robin et P. Trécourt. *Analyse des Séries Chronologiques*. INA-PG, Mathématiques, 1996.
- [12] D. Delignières. *L'analyse des processus stochastiques*. EA 2991 "Sport performance, santé", Université de Montpellier 1, Janvier 2001.
- [13] C. Deniau, P. Douchan, G. Oppenheim et E. Renaulte. *Théorèmes limites et longue mémoire en statistique*. Statistical Inférence For stochastic Processus 3, Special issue, 2000.

- [14] T. Djafri et S. Idres. *Etude statistique des produits d'importation les plus dominants au port et l'indépendance entre l'import et l'export*. 2011.
- [15] T. Djafri et S. Idres. *Processus de longue mémoire*. Université de Bejaia, Mémoire de fin de cycle, 2012-2013.
- [16] P. Doukhan, G. Oppenheim, M-S. Taqqu. *Theory and applications of long-range dependence*. Basel Suisse, Birkhauser, 2003.
- [17] E. Gonçalves. *Une généralisation des processus ARMA*. In : Annales d'économie et de statistique-Amiens, Vol. 5, PP. 109-145, 1987.
- [18] C-W. Granger et R. Joyeux. *An introducing to long-memory time séries models and fractional differencing*. Time Séries Anal, 1, 15-29, 1980.
- [19] V. Guiraud. *Intégration fractionnaire et étude des chroniques économiques*. Université de Montpellier, 1, 1997.
- [20] J-D. Hamilton. *Time Séries Analysis*. Princeton University Press, 2016.
- [21] H. Hamisultane. *Econométrie des séries temporelles*.
- [22] J-R-M. Hosking. *Fractional differencing*. Biometrika, 68, 165-176, 1981.
- [23] P-A. Jayet. *Quelques notion sur l'analyse spectrale des séries temporelles*. In Histoire et mesure, Volume 6, n° 1-2, PP 7-2, 1991.
- [24] C. Keribin et M. Prenat et R. Rossignol. *Séries Chronologiques, cours et exercices*. Université Paris-Sud, 2010-2011.
- [25] B. Mandelbrot et J.W. Van Ness. *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*. SIAM Review, Vil 10, 422-437, 1968.
- [26] G. Mélard. *Méthodes de prévision à court terme*. Editions de l'université de Bruxelles.
- [27] V. Mignon. *Les tests de mémoire longue appartiennent-ils au camp du démon ?* (version longue), document de travail MODEM, Université Paris Nanterre (en collaboration avec S.Lardic), 1996.
- [28] V. Mignon. *Méthode d'estimation de l'exposant de Hurst, Application aux rentabilité boursières*. Economie et prévision. n° 1-2, PP 193-214, 1998.
- [29] F. Nicolau. *Séries Chronologiques*. Cour, Département STID, université Nice d'Azur, 2005-2006.
- [30] C. Perraudin. *Séries Chronologiques*. Quelques éléments du cours, Université Paris 1, 2004-2005.
- [31] P-M. Robinson. *Time sérieswith long memory*. Oxford University Press, 2003.
- [32] A. Serroukh. *Inférence asymptotique et non paramétrique pour les modèles ARMA fractionnaires*. Université libre de Bruxelles, Institut de Statistique, 1995-1996.

[33] M. Tenehaus. *La Méthodologie de Box-Jenkins*. Site Web.

[34] S. Zetili. *Inférence statistique dans les processus ARMA fractionnaires*. Université Mentouri de Constantine.