REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Bejaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématique

MEMOIRE DE FIN DE CYCLE

En vue de l'obtention d'un Master en Mathématique

Option : Statistique et Analyse décisionnelle

Thème

Méthode adaptée pour la résolution d'un problème de programmation quadratique convexe

Présenté par:

M^r AMEUR Riadh

M^r BENALI Syphax

Soutenu devant le jury composé de :

Président	M^{me}	..Amri	M.A.A	U.A. Mira, Béjaia
Rapporteur	M^{me}	N. Abassi	M.A.A	U.A. Mira, Béjaia
Examinateur	M^{me}	S. Guebli	M.C.B	U.A. Mira, Béjaia

Promotion 2015 /2016

Table des matières

Introduction générale

Les méthodes numériques de résolution des problèmes d'extrémum ont pris ces dernières années un très grand essor. Cet interêt reflète le rôle de premier plan occupé par ces problèmes dans les différentes applications pratiques.

Le terme"programmation quadratique" est attribué au problème de minimisation(ou de maximisation) d'une fonction objectif quadratique assujutie à des contraintes linéaires. Cependant,un problème de programmation quadratique diffère d'un problème de programmation linéaire seulement dans le fait que la fonction objectif contient en plus les termes x_j^2 et $x_j x_k (j \neq k)$. La programmation quadratique convexe est ainsi considérée comme une transition naturelle de la programmation linéaire vers la programmation non linéaire. On trouve la programmation quadratique dans plusieurs cas pratique comme, regression[4], gestion de production[28], gestion du portefeuile [6],[27], [7],[26], et la variance minimume[25].

Plusieurs approches ont été proposées dans ce domaine notament, la méthode la plus classique qui est celle du simplexe de wolfe[13], la méthode d'activation des contraintes[15], la méthode des points intérieurs[24], la méthode du gradient avec projection[17], ainsi que les méthodes de support de R.Gabasov et F.M.Kirolova[19],[16], qui font l'objet de notre travail. La majorité de ces méthodes ont été développées das le cas de problème de programmation linéaire et dont le concept est basé sur celui de la méthode de simplexe Dantzig 1963 [14].

Dans[18], les auteurs développent la méthode directe de support qui est une généralisation de la méthode de simplexe. Cette méthode démarre d'une solution réalisable initiale et d'un support initial(base initiale), elle passe d'un point intérieur ou extrême à un autre point meilleur jusqu'à ce qu'un point extrême optimale soit atteint. plus tard, ces même auteurs développent la méthode adaptée pour la résolution des probème de contrôle optimale, puis elle est étendue pour la résolution des problèmes linéaires et quadratiques sous forme générale[18], [21], [5], [8], [3], [2], [22], [23].

Historiquement, Barankin et Dorfman [1], furent les premiers à remarquer qu'en combinant les conditions d'optimalité de Lagrange avec celles du système original, la solution optimale d'un problème quadratique était une solution de base d'un système élargi ayant la propriété que seuls certains couples de variables figuraient dans la base. de son coté Markowitz montra qu'il est possible de modifier le système élargi et d'engendrer paramétriquement une classe de solutions de base ayant la propriété particulière ci-dessus et convergeant vers l'optimum en un nombre fini d'itérations. Enfin, Wolf [13], montra qu'en modifiant lègèrement la méthode de simplexe d'une façon à ne pas autoriser l'introduction d'une variable dans la base si sa variable complémentaire s'y trouvait déjà , on parvenait aisément à l'optimum recherché.

Le présent travail, s'inspirant essentiellement des traveaux de Gabassov, Kirillova et Kostyukova, et de ceux de Bibi [10], Abassi [12],et Bentoubache [11] et Brahmi [3], est consacré précisemment à la la construction d'algorithme de minimisation d'une fonctionnelle quadratique convexe dans un domaine borné de $\Re^n$. ces derniers sont de nature itérative, c'est à dire qu'on construit une suite $(x_k)_{k\in N}$ de points de $\Re^n$, reliés par la relation de récurrence $x_{k+1} = x_k + \theta\ell$, où ℓ est un n vecteur réel indiquant la direction d'amélioration, et $\theta \in \Re^+$ le pas le long de ℓ. Cette suite nous conduit vers la solution optimale x^0 en un nombre fini d'itérations.

Après un bref rappel de quelques notions sur les formes quadratiques dans le premier chapitre, nous avons construit dans le deuxième une itération de l'algorithme directe de minimisation d'une fonctionnelle quadratique convexe dans un domaine borné de $\Re^n$. La méthode utilisée est appelée méthode directe de support. L'itération de l'algorithme est basée sur le principe suivant : en partant d'une solution réalisable de support initiale$\{x, J_P\}$, on construit l'itération $\{x, J_P\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{J}_P\}$ en deux étapes ; la première étape consiste à changer la solution réalisable x en une autre solution réalisable $\bar{x} = x + \theta\ell$, et dans la deuxième qui dépend de la première, on construit le support $\bar{J}_P$ à partire de J_P. Le troisième chapitre sera consacré à la résolution du même problème par la méthode adaptée [21] . Dont le principe est pratiquement le même avec celui de la méthode directe de support présenté au chapitre 2, sauf qu'au lieu de changé un seul indice, on changera tout les indices non-optimaux. En même temps nous introduisons un nouveau concept liant le primal et le dual et ceci se fera dans le changement de support en construisant la direction duale et un pas le long de cette direction.

Chapitre 1

Rappel Mathématique

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons donner quelques définitions et propriétés des fonctions quadratiques et des matrices semi-définie positive. Ceci nous sera utile dans l'étude ultérieure de la programmation quadratique convexe. les propriétés non démontrées dans ce chapitre sont pour la plupart classiques, et relevant d'un cours d'algèbre linéaire ou bilinéaire de base.

1.2 matrices et vecteurs

Soient deux ensembles d'indices :

$I = \{1, 2, 3, ..., i, ..., m\}$, $J = \{1, 2, 3, ..., j, ..., n\}$, $m \leqslant n$. une matrice A d'ordre $(m \times n)$ est représentée par l'écriture suivante :

$$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pour des calcules pratiques, la matrice A se note aussi :

$$A = (a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n) = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_i^T \\ A_{i+1}^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix}$$

ou

$$a_j = A(I, j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

est un vecteur-colonne, $A_i^T = A(i, J) = (a_{i1}, ai_2, ..., a_{iq}, ..., a_{in})$ est un vecteur-ligne. La matrice transposée de A seras notée : $A^T = A^T(J, I) = (a_{ji}, j \in J, i \in I)$.

1.3 Matrices et vecteurs partitionnés

On peut effectuer le produit d'une matrice A et d'un vecteur x, apres les avoir partitionnés judicieusement. On dit alors qu'on a effectué un produit par blocs.
En effet, si l'on a

$$A = (A_1, A_2), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

Alors on peut écrire :

$$Ax = (A_1, A_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1 x_1 + A_2 x_2.$$

De même pour

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

L'equation $Ax = b$ peut alors s'ecrire

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

On peut partitionner une matrice d'une manière arbitraire. Par exemple, si $A = A(I, J)$ est une matrice d'ordre $(m \times n)$ et que J_B et J_N sont deux sous-ensembles quelconques de J tels que

$$J_B \cup J_N = J, J_B \cap J_N = \varnothing,$$

Alors on peut partitionner A de la façon suivante :

$$A = (a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n) = (A_B, A_N)$$

Avec $A_B = A\left(I, J_B\right), A_N = A\left(I, J_N\right)$. Si $x = x\left(J\right) = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, x_B = x\left(J_B\right),\ x_N = x\left(J_N\right),$ Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{j \in J} a_j x_j = \sum_{j \in J_B} a_j x_j + \sum_{j \in J_N} a_j x_j \\ &= A\left(I, J_B\right) x\left(J_B\right) + A\left(I, J_N\right) x\left(J_N\right) \\ &= A_B x_B + A_N x_N. \end{aligned}$$

1.4 Rang d'une matrice

Définition 1.4.1. le nombre maximum de colonnes (considérées comme des vécteurs de $\mathbb{R}^m$) linéairement indépendantes d'une matrice A est égal au nombre maximum de ligne (considérées comme des n-vecteurs lignes) linéairement indépendantes. Ce nombre est appelé rang de la matrice A et il est noté par $rang(A)$.

1.5 Discussion générale sur l'éxistence et le nombre de solutions d'un système linéaire

1.5.1 Généralités et définitions

Soit m et n deux nombres entiers. Un système de m équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n$ s'écrit comme suit :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

où les coefficients a_{ij}sont des nombres réels.
Les nombres $b_1, b_2, ..., b_m$ sont appelés les membres libres du système (1.1) ou les seconds membres. En posant

$$A = \left(a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\right), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

le système(1.1) s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$Ax = b. \tag{1.2}$$

Définition 1.5.1. le système(1.2) linéaire est dit le rang complet en lignes si $rang(A) = m$, $m \leq n$ et de rang complet en colonnes si $rang(A) = n$, $n \leq m$.si deux système d'équations linéaires, avec le meme nombres d'inconnues, possèdent éxactement les memes solutions, on dit alors qu'ils sont équivalents. on a ainsi le théorème suivant :

Théorème 1.5.1. *Si M est une matrice régulière d'ordre m, alors les systèmes $Ax = b$, $MAx = Mb$ sont équivalents.*

Théorème 1.5.2. *Le système $Ax = b$*
a) possède une solution unique si $rang(A) = rang(A, b) = n$.

b) possède une infinité de solutions si $rang(A) = rang(A, b) < n$.
c) est impossible si $rang(A) < rang(A, b)$.

1.5.2 Solutions basiques d'un système d'équations

Soit $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ un vecteur partitionné qui est solution du système $Ax = b$, ou $rang(A) = m < n$, avec $x_B \in \mathbb{R}^m$. Alors est dit solution basique si $x_N = 0$ et si les vecteurs qui composent la sous-matrices carrée A_B sont linéairement indépendants. Une solution basique est dite non dégénérée si

$$x_j \neq 0, \forall j \in J_B, avec \;\; x_B = A_B^{-1} b.$$

1.6 Propriétées des formes quadratiques semi -définies positives

Définition 1.6.1. Une fonction réelle de la forme suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{1.3}$$

est dites forme quadratique de n variables $x_1, x_2, ..., x_n$.
En posant $x' = (x_1, x_2, ..., x_n)$, et $A = (a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$, la formule s'écrit sous la forme suivante :

$$F(x) = x'Ax$$

1.6.1 Gradient et Hessien d'une forme quadratique

Définition 1.6.2. soit une fonction de classe C^1 $\quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. le gradient de la fonction f est définit par :

$$g(x) = \nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2Dx + c.$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est les dérivées partielles de $f(x)$ par rapport à $x_{i.}$

Définition 1.6.3. Soit une fonction de classe C^2 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Le hessien de la fonction f est définie par :

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix}$$

Définition 1.6.4. soit une fonction de classe C^1 $\quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. La dérivée directionnelle de f dans la direction ℓ au point x est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \ell}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{d}{dh} f(x + h\ell)\,|_{h=0} \\ &= \frac{d}{dx_1} f(x + h\ell)\,|_{h=0} \ell_{1+\ldots+} \frac{d}{dx_n} f(x + h\ell)\,|_{h=0} \ell_n \\ &= \nabla' f(x)\, \ell \end{aligned}$$

Si $\|\ell\| = 1$ alors la dérivée directionnelle est le taux d'accroissement de f dans la direction ℓ au point x. Le taux d'accroissement est maximal dans la direction du gradient.

1.6.2 Forme quadratiques définies et non définies

Soit la forme quadratique $F(x) = x'Dx$

Définition 1.6.5. $F(x)$ est dite définie positive si $x'Dx > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. Elle est dite semi-définie positive ou définie non négative si $x'Dx \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$.

Définition 1.6.6. $F(x)$ est dite définie négative si $x'Dx < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. Elle est dite définie non positive si $x'Dx \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$.

Définition 1.6.7. Une matrice symétrique D dite matrice définie positive (non négative) et se note $D > 0, (D \geq 0)$,si elle associé à une forme quadratique définie positive (non négative).

Définition 1.6.8. Une forme quadratique$F(x)$ est dite non définie si $F(x)$ est positive pour certaines valeurs de x et négative pour d'autres.

1.6.3 Propriétés des matrices définies positives et non négatives

Les matrices symétriques définies positives ont des propriétées trés intéressantes. En voici quelques unes :

Propriété 1.6.1.

Soit une matrice symétrique $D = (d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ si D est définie positive (non négative), alors on a : $d_{ij} > 0 \, (d_{ij} \geq 0)$, $\forall i = 1, 2, 3, ..., n$.

Propriété 1.6.2.

Soit la matrice D partitionnée de la manière suivante :

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}.$$

Si $D > 0 \, (D \geq 0)$, Alors les sous matrices principales D_{11} et D_{22} sont aussi définies positives(non négatives). D'une manière générale, toutes les sous matrices principales d'une matrice définies positive (non négatives) est définies positive (non négatives).

Propriété 1.6.3.

Un élément diagonal d'une matrice symétrique D définie non négative ne peut s'annuler que si les autres éléments de la même lignes et colonne s'annulent aussi.

Propriété 1.6.4.

Soit D une matrice symétrique définie non négative. Si x est un point quelconque mais fixé de $\mathbb{R}^n$ tel que $x'Dx = 0$, on a alors $Dx = 0$.

1.7 convexité

La convexité joue un rôle trés importannt dans la théorie classique de l'optimisation.Elle est un outil indispensable pour la recherche des conditions à la fois nécessaires et suffsantes d'optimalité.

1.7.1 Ensemble convexe

Définition 1.7.1. Un ensemble C dans $\mathbb{R}^n$ est dite convexe si $\forall x_{1,} x_2 \in C, \lambda \in [0, 1]$,le vecteur $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in C$.

1.7.2 Propriétés des ensembles convexes

Si C_1 et C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$,alors $K = C_1 \cap C_2$ est convexe et $K = \{x \backslash x = x_1 + x_2, x_1 \in C_1 \text{et } x_2 \in C_2\}$ est convexe.

Définition 1.7.2. Une fonction convexe $f(x), x \in C$ est dite strictement convexe si l'inégalité (1.2) est stricte pour tous les points $x_{1,}x_2$ de C, avec $x_1 \neq x_2$ et $\lambda \in]0,1[$

1.7.3 Propriété des fonctions convexes

Propriété 1.7.1.

Soit une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$.Alors f est convexe si seulement si son épigraphe

$$epi(f) = \{(x,r) : x \in C, r \geq f(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

est un ensemble convexe

Propriété 1.7.2. *Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$.Alors f est convexe si seulement si :*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i s_i\right) \leq \lambda_i \sum_{k=1}^{n} f(s_i) \tag{1.4}$$

ou $s_i \in C, i = 1, 2, \ldots, p, \lambda_i \geq 0,$

Propriété 1.7.3. *Soit une fonction réelle de classe C^1,définie sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$.Alors $f$est convexe si seulement si :*

$$f(y) - f(x) \geq (x-y)' \nabla f(x), \forall x, y \in C \tag{1.5}$$

Propriété 1.7.4. *Soit une fonction réelle de classe C^2,définie sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$.Alors $f$est convexe si seulement si :*

$$(y-x)' H(x)(x-y) \geq 0, \forall x, y \in C \tag{1.6}$$

Propriété 1.7.5. *Si $C \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert convexe, Alors f est convexe si et seulement si :*

$$H(x) \geq 0, \forall x \in C$$

Nous remarquons qu'une fonction quadratique semi-définie positive est une fonction convexe.

Définition 1.7.3. Le vecteur $\ell \in \mathbb{R}^n, \ell \neq 0$ est appelé direction admissible en point $x \in S$ s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $x + \theta\ell \in S, \forall\theta \in [0, \alpha]$ .Si x est un point itérieure,alors toutes les directions sont admissible.

1.8 Programmation convexe

• Le problème de la Programmation mathématique, consiste à minimiser(maximiser), une fonction scalaire(dite fonction objectif) sous des contraintes linéaires. Ces problèmes ont généralement la forme suivante :

$$f(x^*) = minf(x), x \in S$$

$$S = \{x \in \Re^n / g_i(x) = A_i' x - b_i \leq 0, i \in I\}, I = \{1, 2, 3, ..., m\},$$

• $b \in \Re^m$

• f est une fonction réelle à $n - variables.$

• x est un $n - vecteur$ qui vérifie les contraintes du problème.

• S est le domaine des solutions.

• A est une $(m \times n)$ matrice et $rangA = m < n.$

En fonction de la nature de la fonction objectif, on tombe sur une classe spéciale programmes mathématiques :

• $max_{x \in S} c'x$ programme linéaire.

• $max_{x \in S} x'Dx + c'x$ programme quadratique.

• Plus particulier, la classe de la programmation convexe (resp.strictement convexe),qui consiste à minimiser une fonction convexe (resp.strictement convexe) en un ensemble convexe.

Un problème de programmation quadratique est convexe dont la matrice D est (le hessien de la fonction objectif est semi défini positif).De plus un problème de programmation linéaire est un problème quadratique dégénré ($D = 0$)

• **Fonction linéaire** : une fonction linéaire est définie de la manière suivante :

$f : x \mapsto y$ avec $y = ax$

où le nombre a est un réel quelconque.Ce réel a s'appelle le coefficient de proportionnalité. En repartant de l'égalité $y = ax$, on voit que pour x différent de zéro, on peut diviser les deux membres par x.

• **Fonction quadratique** : Une fonction réelle de la forme suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

est dites forme quadratique de n variables $x_1, x_2, ..., x_n$

• **Fonction convexe** : Une fonction réelle f définie sur un ensemble convexe C de $\Re^n$, est dite convexe, si pour tous les points x ; y de C et pour tout nombre réel positif ou nul λ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$ l'inégalitée suivante est vérifiée :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

1.8.1 Minimisation avec contrainte

Définition 1.8.1. Soit f une fonction réelle, définie sur un ensemble ouvert S de $\Re^n$. La fonction f admet un minimum local en $x^* \in S$ *si* $\exists$ $B(x^*, \epsilon) \subset S$, telle que

$$f(x) \geq f(x^*), \forall x \in B(x^*, \epsilon)$$

Définition 1.8.2. Soit f une fonction réelle, définie sur un ensemble ouvert S de $\Re^n$. La fonction f admet un minimum global en $x^* \in S$ si

$$f(x) \geq f(x^*), \forall x \in S$$

Théorème 1.8.1. *[12] :*

Si x^* est un minimum local de f sur $\Re^n$ et si f est différentiable sur x^* alors $\nabla f(x^*) = 0$ condition de stationnaritée)

Conditions nécessaires de minimalité de Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T)

Définition 1.8.3. La fonction de $L(x;\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ est appelée fonction de Lagrange associée au problème de minimisation de f sur S, où le vecteur

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in \Re^m, \lambda > 0$, est appelé vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 1.8.2. *Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T)1951[12]*

Si x^* *est minimum local de* f *sur* S *alors il* $\exists \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*) \geq 0$ *tel que :*

(i) $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$

(ii)$\lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0, i \in I.$

1.8.2 Avantage de la convexitée

Théorème 1.8.3. *[9]*

Tout problème quadratique convexe dont la valeur est finie admet(au moins) une solution.

- Tout problème strictement convexe admet au plus une solution.
- Tout minimum local est un minimum global.
- La stationnaritée à elle seule constitue une condtion nécéssaire et suffisante de minimalité globale.

Théorème 1.8.4. *Théorème de KKT convexe[9]*

Soit $(x^*,\lambda^*,)$ *un couple de vecteurs vérifiant les conditions de KKT :*

- *(i).* $\nabla L_x(x^*, \lambda^*) = 0, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i \in I.$

- *(ii).* $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i \in I.$

alors le vecteur x *constitue le minimum globale de* f *sur* S*.*

Chapitre 2

Méthode directe de support pour la résolution d'un PQC à variables bornées

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rapelons la méthode directe de support pour la résolution des programmes quadratiques convexes à variables bornées, basée sur la métrique du simplexe. Le principe de cette méthode est le suivant : partant d'une solution réalisable de support initial, formée d'une solution réalisable et de deux matrices non dégénérées correspondant respectivement aux contraintes et à la fonction objectif, chaque itération consiste à trouver une direction d'amélioration et un pas maximal le long de cette direction de façon à améliorer la valeur de la fonction objectif, tout en s'assurant de ne pas sortir du domaine admissible déterminé par les contraintes du problème.

2.2 position du problème et définitions :

Le problème de programmation quadratique convexe à variables bornées se présente sous la forme suivante :

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^{'}Dx + c'x, \tag{2.1}$$

$$Ax = b, \tag{2.2}$$

$$d^{-} \leq x \leq d^{+}, \tag{2.3}$$

Où $D^{'} = D \geq 0$, c, x, d^{-}, d^{+} sont des $n - vecteurs$, b un $m - vecteur$, A est une matrice de dimension $m \times n$, avec $rangA = m < n$.

• Un vecteur x vérifiant les contraintes (2.2) et (2.3) est appelé solution réalisable (SR) du problème (2.1)-(2.3).

• Une solution réalisable x^0 est dite optimale si

$$f(x^0) = \frac{1}{2}(x^0)^{'} D x^0 + c' x^0 = \min_x (\frac{1}{2} x^{'} D x + c' x),$$

Où x est pris parmi toutes les solutions réalisables du problème (2.1)-(2.3).

• D'autre part, une solution réalisable x^{ϵ}est appelé ϵ-optimale ou suboptimale si

$$f(x^{\epsilon}) - f(x^0) \leq \epsilon$$

Où x^0 est une solution optimale du problème (2.1)-(2.3) et ϵ un nombre positif ou nul choisi à l'avance.

• Soit un sous- ensemble d'indices $J_B \subset J$ tel que $|J_B| = |I| = m$. l'ensemble J_B est alors appelé support des contraintes du problème (2.1)-(2.3) si

$$\det(A_B) = \det(A(I, J_B)) \neq 0.$$

• Le couple $\{x, J_B\}$ formé de la solution réalisable x et du support des contraintes J_B est appelé solution réalisable de support des contraintes(SRSC).

• Une SRSC est dite non-dégénérée si : $d_j^- \leq x_j \leq d_j^+, \ j \in J_B$

• Soit $g(x) = Dx + c = (g'_B, g'_N)$ le vecteur gradient de la fonction f au point x. On définit le vecteur le vecteur des multiplicateurs π :

$$\pi' = [\pi(x)]' = g'_B A_B^{-1} \tag{2.4}$$

Le vecteur des coûts réduits E :

$$E' = [E(x)]' = g' - \pi' A = (E'_B, E'_N), E_B = 0, E'_N = g'_N - \pi' A_N \tag{2.5}$$

• Soit J_B un support des contraintes du problème (2.1)-(2.3) et $J_N = J \setminus J_B$.

Définissons la $n \times (n - m)$-matrice Z et la matrice carrée d'ordre $n - m, M$ comme suit :

$$Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_{n-m} \end{pmatrix} \text{ et } M = M(J_N, J_N) = Z' D Z, \tag{2.6}$$

Où I_{n-m} est la matrice identité d'ordre $n - m$.

• On appelle support de la fonction objectif (2.1), l'ensemble des indices $J_S \subset J_N$ tel que

$$\det(M(J_S, J_S)) \neq 0.$$

Posons $J_{NN} = J_N \backslash J_S$.

• On appelle support du problème (2.1)-(2.3), la couple $J_P = \{J_B, J_S\}$ Formé du support des contraintes J_B et de celui de la fonction objectif J_S.

• On appelle solution réalisable de support (SRS) du problème (2.1)-(2.3) le paire $\{x, J_P\}$ formé de la solution réalisable x et de support J_P. Elle est dite accordée si : $E(J_S) = 0$.

• Une solution réalisable de support des contraintes est dite non dégénérée si :
$d_j^- \leq x_j \leq d_j^+$, $j \in J_B$.

• On appelle estimation de suboptimalité de la SRSC $\{x, J_B\}$ la quantitée $\beta\{x, J_B\}$ définie par :

$$\beta\left(x, J_B\right) = \sum_{E_j > 0, j \in \ J_N} E_j\left(x_j - d_j^-\right) + \sum_{E_j < 0, j \in \ J_N} E_j\left(x_j - d_j^+\right). \tag{2.7}$$

• Soit $\ell \in \mathbb{R}^n$. Le vecteur ℓ est dit une direction admissible pour le problème (2.1)-(2.3) si $A\ell = 0$. Une direction admissible ℓ est dite direction d'amélioration au point x si $E'\ell < 0$.

2.3 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, J_B\}$ une SRSC du problème (2.1)-(2.3). Considérons une autre solution réalisable quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$. L'accroissement de la fonction objectif s'ecrit alors

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(x) = g'(x)\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)' D \Delta x. \tag{2.8}$$

Par ailleus, on a

$$A\bar{x} = Ax = b \Longrightarrow A\bar{x} - Ax = A\Delta x = 0.$$

En posant $\Delta x_B = \Delta x(J_B), \Delta x_N = \Delta x(J_N)$, l'égalitée $A\Delta x = 0$ peut aussi s'écrire :

$$A\Delta x = A(I, J_B)\Delta x(J_B) + A(I, J_N)\Delta x(J_N) = 0.$$

c'est-à-dire

$$\Delta x_B = \Delta x(J_B) = -A_B^{-1} A_N \Delta x_N. \tag{2.9}$$

Grace à cette dernière égalité, l'accroissement (2.8) devient

$$\begin{aligned}\Delta f &= g'_B(x)\Delta x_B + g'_N(x)\Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x)'D\Delta x \\ &= g'_B(-A_B^{-1}A_N\Delta x_N) + g'_N(x)\Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x)'D\Delta x \\ &= (g'_N - g'_B A_B^{-1}A_N)\Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x)'D\Delta x \\ &= E'_N\Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x)'D\Delta x\end{aligned}$$

Exprimons le terme $(\Delta x)'D\Delta x$ en fonction de Δx_N :

$$\begin{aligned}(\Delta x)'D\Delta x &= \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \Delta x_N \end{pmatrix}' D \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \Delta x_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N\Delta x_N \\ \Delta x_N \end{pmatrix}' D \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N\Delta x_N \\ \Delta x_N \end{pmatrix} \\ &= (\Delta x_N)' \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_{n-m} \end{pmatrix}' D \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_{n-m} \end{pmatrix} \Delta x_N\end{aligned}$$

L'accroissement Δf devient

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(x) = E'_N\Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x_N)'M\Delta x_N. \tag{2.10}$$

2.4 Critère d'optimalité et de suboptimalité

Théorème 2.4.1. *(critère d'optimalité) [12]*

Soit $\{x, J_B\}$ une SRSC du problème (2.1)-(2.3). Alors les relations :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{pour } \ x_j = d_{j,}^- \\ E_j \leq 0, & \text{pour } \ x_j = d_{j,}^+ \\ E_j = 0 & \text{pour } \ d_j^- < x_j < d_j^+, j \in J_N, \end{cases} \tag{2.11}$$

sont suffisantes pour l'optimalité de la solution réalisable x. Ces mêmes relations sont aussi nécéssaires dans le cas où la SRSC $\{x, J_B\}$est non-dégénérée.

Démonstration. voir [12]

Théorème 2.4.2. *(condition suffisante de suboptimalité) [12].*

soient $\{x, J_B\}$ une SRSC du problème (2.1)-(2.3) et $\epsilon \geq 0$ arbitraire.

Si $\beta\{x, J_B\} \leq \epsilon$ alors la solution réalisable x est $\epsilon - optimale$.

Démonstration. voir [12]

2.5 Méthode de résolution

2.5.1 construction de la direction d'amélioration

On calcule l'estimation de suboptimalité $\beta\{x, J_B\}$. Si $\beta\{x, J_B\} \leq \epsilon$, alors x est une solution $\epsilon - optimale$ du problème (2.1)-(2.3). Sinon, on choisit l'indice j_0 de la manière suivante :

$$|E_{j_0}| = \max_{j \in J_{NNO}} |E_j|,$$

avec

$$J_{NNO} = \{j \in J_N : [E_j > 0, x_j > d_j^-] ou [E_j < 0, x_j < d_j^+]\}.$$

Puis, on construit une direction admissible $\ell = (\ell_j, j \in J)$comme suit :

$$\ell_{j_0} = -sign\,(E_{j_0})\,,$$

$$\ell_j = 0, j \neq j_0, j \in J_{NN} \doteq J_N \backslash J_S; \qquad (2.12)$$

Les composantes $\ell_j, j \in J_S$, seront déduit de telle sorte que les composantes d'indices $j \in J_S$ du vecteur $E(x+\ell)$ soient nulles. Notons par $\bar{x} = x + \ell, \bar{E} = E(\bar{x}) = E(x+\ell)$ et exprimons $\bar{E}_N$ en fonction de E_N. On a

$$[g(x)]'Z = (g'_B, g'_N) \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_{n-m} \end{pmatrix} = -g'_B A_B^{-1} A_N + g'_N = g'_N - \pi' A_N = [E_N(x)]' \qquad (2.13)$$

Donc

$$\begin{aligned} \bar{E}'_N &= [E_N(\bar{x})]' = [g(\bar{x})]'Z = (Dx + D\ell + c)'Z \\ &= (Dx + c)'Z + (D\ell)'Z \\ &= [g(x)]'Z + \ell' DZ \\ &= [E_N(x)]' + \ell' DZ \end{aligned}$$

Or

$$\ell = \begin{pmatrix} \ell_B \\ \ell_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N\ell_N \\ \ell_N \end{pmatrix} = Z\ell_N$$

D'où

$$\bar{E}'_N = [E_N(x)]' + \ell'_N Z' DZ = [E_N(x)]' + \ell'_N M.$$

Par conséquent,

$$\bar{E}_N = E_N + M\ell_N. \qquad (2.14)$$

Les composants $\ell_j, j \in J_S$, Sont alors calculées de telle sorte à avoir $\bar{E}(J_S) = 0$:

$$\bar{E}(J_S) = E(J_S) + M(J_S, J_N)\ell_N = M(J_S, J_N)\ell_N = 0 \Longrightarrow M(J_S, J_S)\ell_S + M(J_S, J_{NN})\ell_{NN} = 0.$$

D'où

$$\ell_S = -[M(J_S, J_S)]^{-1} + M(J_S, J_{NN})\ell_{NN} = -M_S^{-1}M(J_S, j_0)\ell_{j_0}. \tag{2.15}$$

Quant aux composantes du vecteur $\ell_B = (\ell_j, j \in J_B)$, elles seront calculées avec la formule :

$$\ell_B = -A_B^{-1}A_N\ell_N \tag{2.16}$$

2.5.2 Changement de la solution réalisable et du vecteur des coûts réduits

On construit une nouvelle solution réalisable $\bar{x}$, et le nouveau vecteur des coûts réduits $\bar{E}$ de telle sorte que $\{\bar{x}, J_P\}$ soit une solution réalisable de support accordée, et ce, tout en diminuant la valeur de la fonction objectif. Soient

$$\bar{x} = x + \theta^0\ell, \bar{E}_N = E_N + \theta^0\delta_N, \bar{E}_B = 0,$$

Où ℓ est la direction d'amélioration définie par les formules suivante et

$\delta_N = M\ell_N$.

Le nombre θ^0 se calcule comme suit :

$$\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \theta_f\} \tag{2.17}$$

Où θ_{j_0} est calculé de façon à ce que les contraintes de bornes sur le vecteur $\bar{x}_{NN}$ Soient vérifiées,

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0\ell_j \leq d_j^+ - x_j,\ j \in J_{NN} \Longleftrightarrow d_{jj_0}^- - x_{j_0} \leq -\theta^0 sign(E_{j_0}) \leq d_{j_0}^+ - x_{j_0}. \tag{2.18}$$

Donc

$$\theta_{j_0} = \begin{cases} \left(x_{j_0} - d_{j_0}^-\right), & \text{si } E_{j_0} > 0; \\ \left(d_{j_0}^+ - x_{j_0}\right), & \text{si } E_{j_0} < 0. \end{cases}$$

Le nombre θ_{j_S} est calculé de façon à ce que les contraintes de bornes sur le vecteur $\bar{x}_S$ Soient vérifiées,

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 \ell_j \leq d_j^+ - x_j, \; j \in J_S. \tag{2.19}$$

et θ_{j_1} est calculé de façon à ce que les contraintes de bornes sur le vecteur $\bar{x}_B$ Soient vérifiées,

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 \ell_j \leq d_j^+ - x_j, \; j \in J_B. \tag{2.20}$$

Donc $\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j$ et $\theta_{j_S} = \min_{j \in J_S} \theta_j$, avec

$$\theta_j = \begin{cases} \left(d_j^+ - x_j\right)/\ell_j, & \text{si } \ell_j > 0; \\ \left(d_j^- - x_j\right)/\ell_j, & \text{si } \ell_j < 0; \\ \infty & \text{si } \ell_j = 0. \end{cases}$$

Quant à θ_f, il se calcule de façon à ce que le passage de la solution réalisable x à la solution réalisable $\bar{x}$ assure une diminution maximale de la fonction objectif : en remplaçant Δx_N par $\theta^0 \ell_N$ dans la formule (2.10), on aura

$$\Delta f = \theta^0 E_N' \ell_N + \frac{1}{2}(\theta^0)^2 \ell_N' M \ell_N \tag{2.21}$$

En vertu des formules (2.12), l'accroissement Δf devient :

$$\Delta f = -\theta^0 |E_{j_0}| + \frac{1}{2}(\theta^0)^2 \ell_N' M \ell_N \tag{2.22}$$

Posons $\alpha = \ell_N' M \ell_N = \ell_N' \delta_N \geq 0$ et définissons la fonction de la variable réelle θ comme suit :

$$\varnothing(\theta) = -|E_{j_0}|\theta + \frac{1}{2}\alpha\theta^2$$

Il est clair que pour $\alpha > 0$, la fonction $\varnothing(\theta)$ atteint son minimum au point $\theta_f = \frac{|E_{j_0}|}{\alpha}$, de plus $\frac{d^2\varnothing(\theta)}{d^2\theta} = \alpha = \ell_N' M \ell_N > 0$.

Donc, afin d'assurer une diminution maximale pour la fonction objectif, on prendra

$$\theta_f = \begin{cases} \frac{|E_{j_0}|}{\alpha}, & \text{si } \alpha > 0 \\ \infty, & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

2.5.3 Changement de support

Si

$$\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{\bar{E}_j > 0, j \in J_N} \bar{E}_j \left(\bar{x}_j - d_j^-\right) + \sum_{\bar{E}_j < 0, j \in J_N} \bar{E}_j \left(\bar{x}_j - d_j^+\right) \leq \epsilon. \tag{2.23}$$

alors la nouvelle solution $\bar{x}$ est $\epsilon - optimale$. Sinon, on procède au changement de support :

♦ Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, alors on posera $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S, \bar{J}_P = J_P$.

♦ Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors on calcule les composantes du vecteur

$$h' = e'_{i_1} A_B^{-1} A(I, J_S \cup \{j_0\}) \ell(J_S \cup \{j_0\}) = (x_{j_1 j}, j \in J_S \cup \{j_0\}). \tag{2.24}$$

où i_1 représente la position de j_1 dans l'ensemble J_B.

♦ Si $J_S = \emptyset$ ou $x_{j_1 j} = 0, \forall j \in J_S$, alors on posera

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_0\}, \bar{J}_S = J_S, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

♦ Sinon on choisit un indice j_* de J_S tel que $|x_{j_1 j_*}| = \max_{j \in J_S}\{x_{j_1 j}\}$,puis on pose

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_*\}, \bar{J}_S = J_S \backslash \{j_*\}, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

♦ Si $\theta^0 = \theta_{j_S}$, alors on posera $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \backslash \{j_S\}, \bar{J}_P = .\{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$.

♦ Si $\theta^0 = \theta_f$, alors on posera $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \cup \{j_0\}, \bar{J}_P = .\{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$.

2.6 Algorithme de la méthode directe de support pour la résolution d'un PQC à variables bornées

Soientx, J_p une solution réalisable de support (SRS) accordée initiale pour le problème (2.1)-(2.3) et ϵ un nombre arbitrairement positif ou null. Le schéma de l'algorithme de la méthode directe de support pour la résolution d'un PQC à variable bornés est décrit dans les étapes suivantes :

(1) Calculer les matrices Z et M :

(2) Calculer les vecteurs $g(x) = (g'_B, g'_N)$,π' et $E' = [E(x)]' = (E'_B, E'_N)$

(3) Calculer $\beta(x, J_B)$

- Si $\beta = 0$, alors $\{x, J_p\}$, une solution réalisable optimale.
- Si $\beta \leq \epsilon$, alors $\{x, J_p\}$, une solution réalisable $\epsilon - optimale$.

(4)Changement de la solution réalisable et du vecteur des coûts réduits et de la nouvelle valeur de la fonction objectif

$\bar{x} = x + \theta^0 \ell, \bar{E}_N = E_N + \theta^0 \delta_N$, et $f(\bar{x}) = f(x) - \theta^0 \beta + \frac{1}{2}(\theta^0)^2 \alpha$;

- Déterminer l'ensemble des indices non-optimaux :

$$J_{NNO} = \{j \in J_N : [E_j < 0 \;\; et \;\; x_j < d_j^+] ou [E_j > 0 \;\; et \;\; x_j > d_j^-]\}$$

- choisir l'indice j_0 :

$$|E_{j_0}| = \max_{j \in J_{NNO}} |E_j|,$$

- Calculer les directions ℓ et δ_N
- Calculer le pas maximal θ^0 le long de la direction ℓ.
- Calculer α et θ_f

(5) calculer $\bar{\beta}$,

- Si $\bar{\beta} \leq \epsilon$, alors $\{\bar{x}, J_p\}$, une solution réalisable $\epsilon - optimale$.

(6) changement de support $J_P \to \bar{J}_P$:

- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$ alors poser $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S, \bar{J}_P = J_P, \bar{J}_P = \bar{J}_B, \bar{J}_S$
- Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors calculer $x_{j_1 j}, j \in J_S$ avec la formule (2.24) :

  Si $J_S = \emptyset$ ou $x_{j_1 j} = 0, \forall j \in J_S$; sinon choisir un j_* de J_S tel que

$|x_{j_1 j_*}| = \max_{j \in J_S}\{x_{j_1 j}\}$,puis on pose

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_*\}, \bar{J}_S = J_S \backslash \{j_*\}, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

- Si $\theta^0 = \theta_{j_S}$, alors on posera $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \backslash \{j_S\}, \bar{J}_P = .\{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$.
- Si $\theta^0 = \theta_f$, alors on posera $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \cup \{j_0\}, \bar{J}_P = .\{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$.

(7) Poser $x = \bar{x}, J_B = \bar{J}_B, J_S = \bar{J}_S, J_p = \bar{J}_p$ et aller à l'étape (1).

Exemples. Illustrons la méthode directe de support sur l'exemple suivant :

$$\min f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 - 4x_1 - 6x_2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2,$$

$$x_1 + 5x_2 + x_4 = 5$$

$$-1 \leq x_j \leq 10, j = 1 \ldots, 4.$$

On a

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = (2, 5)', c = (-4, -6, 0, 0)'.$$

$$d^- = (-1, -1, -1, -1)', d^+ = (10, 10, 10, 10)', x = (0, 0, 2, 5)', f(x) = \frac{1}{2} x' D x + c' x = 0.$$

$$I = \{1, 2\}, J = \{1, 2, 3, 4\}, J_B = \{3, 4\}, J_N = \{1, 2\}, J_N = J_{NN}, J_S = \emptyset, J_p = \{J_B, J_S\}.$$

Première itération :

Calcul des matrices Z et M :

$$g(x) = Dx + c = (-4,-6,0,0)^{'}.g_N' = (-4,-6), g_B' = (0,0),$$

$$A_B^{-1} = I_2, -A_B^{-1}A_N = -A_N = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, M = Z'DZ = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcul du vecteur des couts réduits :

$$\pi' = g_B' A_B^{-1} = (0,0), E_N' = (E_1, E_2) = g_N' - \pi' A_N = (-4,-6).$$

Calcul de l'estimation de suboptimalité $\beta\left(x, J_B\right)$.

$$\begin{aligned}\beta = \beta\left(x, J_B\right) &= \sum_{E_j>0, j\in\ J_N} E_j\left(x_j - d_j^-\right) + \sum_{E_j<0, j\in\ J_N} E_j\left(x_j - d_j^+\right) \\ &= E_1(x_1 - d_1^+) + E_2(x_2 - d_2^+) = 40 + 60 = 100 > 0.\end{aligned}$$

calcul de l'ensemble non-optimaux :

$$E_1 < 0 et x_1 < d_1^+ = 10; E_2 < 0 et x_1 < d_2^+ = 10 \Longrightarrow J_{NNO} = \{1,2\}.$$

Recherche de l'indice entant j_0 :

$$\max_{j\in J_{NNO}} |E_j| = |E_2| = 6 \Longrightarrow j_0 = 2.$$

Calcul des directions ℓ et δ_N :

$$\ell_{j_0} = \ell_2 = -sign(E_2) = 1, \ell_1 = 0 \Longrightarrow \ell_N = (\ell_1, \ell_2)^{'} = (0,1);$$

$$\ell_B = (\ell_3, \ell_4)' = -A_B^{-1}A_N\ell_N = (-1,-5)^{'};$$

$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)^{'} = (0,1,-1,-5)^{'}$$

$$\delta_N = (\delta_1, \delta_2)^{'} = (-2,4)^{'}.$$

Calcul de pas maximale θ^0 :

$$\theta_{j_0} = \theta_2 = d_2^+ - x_2 = 10.$$

$$\theta_{j_1}=\min_{j\in J_B}\theta_j=\min\{\theta_3,\theta_4\}=\min\left\{3,\frac{6}{5}\right\}=\frac{6}{5}\Longrightarrow j_1=4.$$
$$\theta_{j_S}=\infty \text{ car } J_S=\emptyset,$$
$$\alpha=\ell_N^{'}\delta_N=4,\theta_f=\frac{|E_2|}{\alpha}=\frac{3}{2};$$
$$\theta^0=\min\{\theta_{j_0},\theta_{j_1},\theta_{j_S},\theta_f\}=\theta_{j_1}=\frac{6}{5}.$$

Calcul de la nouvelle solution et de nouveau vecteur des côuts réduit :

$$\bar{x}=x+\theta^0\ell=(0,\frac{6}{5},\frac{4}{5},-1)^{'},\bar{E}_N=(\bar{E}_1,\bar{E}_2)^{'}=E_N+\theta^0\delta_N=(\frac{-32}{5},\frac{-6}{5})^{'}.$$

Remarquons qu'on a bie

$$f(\bar{x})=\frac{1}{2}\bar{x}^{^2}D\bar{x}+c'\bar{x}=\frac{-108}{25}.$$

Calcul de la nouvelle valeur de l'estimation de suboptimalité :

$$\bar{\beta}=\beta(\bar{x},J_B)=\bar{E}_1(\bar{x}_1-d_1^+)+\bar{E}_2(\bar{x}_2-d_2^+)=\frac{1864}{25}>0.$$

Changement de support :

$$\theta^0=\theta_{j_1}etJ_S=\emptyset\Longrightarrow\bar{J}_B=\{3,2\},\bar{J}_S=J_S,\bar{J}_N=\{1,4\},\bar{J}_{NN}=J_N.$$

deuxième itération :on a

$$\bar{J}_B=\{3,2\},J_S=\emptyset,J_N=J_{NN}=\{1,4\},x=(0,\frac{6}{5},\frac{4}{5},-1)^{'},f(x)=\frac{-108}{25}.$$

Calcul des matrices Z et M :

$$g(x)=Dx+c=(\frac{-32}{5},\frac{-6}{5},0,0)^{'}.g_N^{'}=(\frac{-32}{5},0),g_B^{'}=(0,\frac{-6}{5}),$$
$$A_B^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{-1}{5}\\0&\frac{1}{5}\end{pmatrix},-A_B^{-1}A_N=\begin{pmatrix}\frac{-4}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{-1}{5}&\frac{-1}{5}\end{pmatrix},$$
$$Z=\begin{pmatrix}-A_B^{-1}A_N\\I_{n-m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\frac{-1}{5}&\frac{-1}{5}\\\frac{-4}{5}&\frac{1}{5}\\0&1\end{pmatrix},M=Z'DZ=\begin{pmatrix}\frac{124}{25}&\frac{14}{25}\\\frac{14}{25}&\frac{4}{25}\end{pmatrix}.$$

Calcul du vecteur des coûts réduits :

$$\pi'=g_B^{'}A_B^{-1}=(0,\frac{-6}{25}),E_N^{'}=(E_1,E_4)=g_N^{'}-\pi'A_N=(\frac{-154}{25},\frac{6}{25}).$$

Calcul de l'estimation de suboptimalité $\beta\left(x, J_B\right)$.

$$\beta = \beta\left(x, J_B\right) = \sum_{E_j>0, j\in\ J_N} E_j\left(x_j - d_j^-\right) + \sum_{E_j<0, j\in\ J_N} E_j\left(x_j - d_j^+\right)$$
$$= E_1(x_1 - d_1^+) + E_4(x_4 - d_4^+) = \frac{308}{5} > 0.$$

calcul de l'ensemble non-optimaux :

$$E_1 < 0 et x_1 < d_1^+ = 10 \Longrightarrow J_{NNO} = \{1\}.$$

Recherche de l'indice entant j_0 :

$$\max_{j\in J_{NNO}} |E_j| = |E_1| = \frac{154}{25} \Longrightarrow j_0 = 1$$

Calcul des directions ℓ et δ_N :

$$\ell_{j_0} = \ell_1 = -sign(E_1) = 1, \ell_4 = 0 \Longrightarrow \ell_N = (\ell_1, \ell_4)' = (1, 0);$$

$$\ell_B = (\ell_3, \ell_2)' = -A_B^{-1}A_N\ell_N = (\frac{-4}{5}, \frac{-1}{5})';$$
$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)' = (1, \frac{-1}{5}, \frac{-4}{5}, 0)'$$
$$\delta_N = (\delta_1, \delta_4)' = (\frac{124}{25}, \frac{14}{25})'.$$

Calcul de pas maximale θ^0 :

$$\theta_{j_0} = \theta_1 = d_1^+ - x_1 = 10.$$
$$\theta_{j_1} = \min_{j\in J_B} \theta_j = \min\{\theta_3, \theta_2\} = \min\left\{\frac{9}{4}, 11\right\} = \frac{9}{4} \Longrightarrow j_1 = 3.$$
$$\theta_{j_S} = \infty \text{ car } \alpha = \ell_N'\delta_N = \frac{124}{25}, \theta_f = \frac{|E_1|}{\alpha} = \frac{77}{62};$$
$$\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \theta_f\} = \theta_f = \frac{77}{62}.$$

Calcul de la nouvelle solution et de nouveau vecteur des côuts réduit :

$$\bar{x} = x + \theta^0\ell = (\frac{77}{62}, \frac{59}{62}, \frac{-6}{31}, -1)', \bar{E}_N = (\bar{E}_1, \bar{E}_4)' = E_N + \theta^0\delta_N = (0, \frac{29}{31})'.$$

Calcue de la nouvelle valeur de la fonction objectif :

$$f(\bar{x}) = f(x) - \theta^0|E_1| + \frac{1}{2}(\theta^0)^2\alpha = \frac{-505}{62}.$$

Calcue de la nouvelle valeur de l'estimation de suboptimalité :

$$\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, J_B) = \bar{E}_4(\bar{x}_4 - d_4^-) = 0.$$

Parcoséqent, la solution réalisable optimale et l'optimum sont donnés par

$$x^* = (\frac{77}{62}, \frac{59}{62}, \frac{-6}{31}, -1)', etf(x^*) = \frac{-505}{62}.$$

2.7 conclusion

Dans ce chapitre nous avons rapellé la méthode directe de support pour la résolution d'un P.Q.C à variables bornées, basée sur la métrique du simplexe et cela en changeant un seul indices parmi les indices non optimaux. Sa particularité est de manipuler les variables de décision telles qu'elles se présentent initialement sans modification préliminaire. De plus, cet algorithme est doté d'un critère d'arrêt qui peut donner une solution approchée avec une précision choisie à l'avance.

Chapitre 3

Méthode adaptée pour la résolution d'un PQC à variables borneés

3.1 Introduction

Le principe de cette méthode est pratiquement le même que celui de la méthode directe de support (voir chapitre 2), c'est à dire, qu'au lieu d'utiliser la métrique du simplexe en changeant un seul indice non basique j_0 [20], on utilisera une autre métrique dite adaptée qui consiste à considerer tous les indices non optimaux en fonction des quels on construit une direction d'amélioration de la fonction objectif et le pas le long de cette direction. De plus nous avons proposé une variante de cette méthode qui consiste à changer le support avec la règle du pas simple, et cela en faisant intervenir le principe de duale.

3.2 position du problème et définitions :

Dans ce chapitre nous reprenons le même problème et les même définitions que dans le chapitre précédent c'est à dire :

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^{'}Dx + c^{\prime}x, \tag{3.1}$$

$$Ax = b, \tag{3.2}$$

$$d^{-} \leq x \leq d^{+}, \tag{3.3}$$

Où $D^{'} = D \geq 0$, c, x, d^{-}, d^{+} sont des $n - vecteurs$, b un $m - vecteur$, A est une matrice de dimension $m \times n$, avec $rang(A) = m < n$.

• Un vecteur x vérifiant les contraintes (3.2) et (3.3) est appelé solution réalisable (SR) du problème (3.1)-(3.3).

• Une solution réalisable x^0 est dite optimale si

$$f(x^0) = \frac{1}{2}(x^0)' Dx^0 + c'x^0 = \min_x(\frac{1}{2}x' Dx + c'x),$$

Où x est pris parmi toutes les solutions réalisables du problème (3.1)-(3.3).

• D'autre part, une solution réalisable x^ϵest appelé ϵ-optimale ou suboptimale si

$$f(x^\epsilon) - f(x^0) \leq \epsilon$$

Où x^0 est une solution optimale du problème (3.1)-(3.3) et ϵ un nombre positif ou nul choisi à l'avance.

• Soit un sous- ensemble d'indices $J_B \subset J$ tel que $|J_B| = |I| = m$. l'ensemble J_B est alors appelé support des contraintes du problème (3.1)-(3.3) si

$$\det(A_B) = \det(A(I, J_B)) \neq 0.$$

• Le couple $\{x, J_B\}$ formé de la solution réalisable x et du support des contraintes J_B est appelé solution réalisable de support des contraintes(SRSC).

• Une SRSC est dite non-dégénérée si : $d_j^- \leq x_j \leq d_j^+, \ j \in J_B$

• Soit $g(x) = Dx + c = (g'_B, g'_N)$ le vecteur gradient de la fonction f au point x. On définit le vecteur le vecteur des multiplicateurs π :

$$\pi' = [\pi(x)]' = g'_B A_B^{-1} \tag{3.4}$$

Le vecteur des coûts réduits E :

$$E' = [E(x)]' = g' - \pi' A = (E'_B, E'_N), E_B = 0, E'_N = g'_N - \pi' A_N \tag{3.5}$$

• Soit J_B un support des contraintes du problème (3.1)-(3.3) et $J_N = J \setminus J_B$.

Définissons la $n \times (n-m)$-matrice Z et la matrice carrée d'ordre $n-m, M$ comme suit :

$$Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_{n-m} \end{pmatrix} \text{ et } M = M(J_N, J_N) = Z' DZ, \tag{3.6}$$

Où I_{n-m} est la matrice identité d'ordre $n-m$.

• On appelle support de la fonction objectif (3.1), l'ensemble des indices $J_S \subset J_N$ tel que

$$\det(M(J_S, J_S)) \neq 0.$$

Posons $J_{NN} = J_N \backslash J_S$.

• On appelle support du problème (3.1)-(3.3), le couple $J_P = \{J_B, J_S\}$ Formé du support des contraintes J_B et de celui de la fonction objectif J_S.

• On appelle solution réalisable de support (SRS) du problème

(3.1)-(3.3) le paire $\{x, J_P\}$ formé de la solution réalisable x et de support J_P. Elle est dite accordée si :

• Une solution réalisable de support des contraintes est dite non dégénérée si : $d_j^- \leq x_j \leq d_j^+$, $j \in J_B$.

• On appelle estimation de suboptimalité de la SRSC $\{x, J_B\}$ la quantitée $\beta\{x, J_B\}$ définie par :

$$\beta\left(x, J_B\right) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j\left(x_j - d_j^-\right) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j\left(x_j - d_j^+\right). \tag{3.7}$$

• Soit $\ell \in \mathbb{R}^n$. Le vecteur ℓ est dit une direction admissible pour le problème (3.1)-(3.3) si $A\ell = 0$. Une direction admissible ℓ est dite direction d'amélioration au point x si $E'\ell < 0$.

3.3 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit x, J_B une SRSC du problème (3.1)-(3.3). Considérons une autre solution réalisable quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$. L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$f(\bar{x}) - f(x) = E_N^{'}\Delta_x + \frac{1}{2}\Delta^{'}x_N M \Delta x_N$$

.

3.4 Critère d'optimalité et de suboptimalité

Théorème 3.4.1. *(critère d'optimalité) [12]*

Soit $\{x, J_B\}$ une SRSC du problème (3.1)-(3.3). Alors les relations :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{pour} \quad x_j = d_{j,}^- \\ E_j \leq 0, & \text{pour} \quad x_j = d_{j,}^+ \\ E_j = 0 & \text{pour} \quad d_j^- < x_j < d_j^+, j \in J_N, \end{cases} \tag{3.8}$$

sont suffisantes pour l'optimalité de la solution réalisable x. Ces mêmes relations sont aussi nécéssaires dans le cas où la SRSC $\{x, J_B\}$est non-dégénérée.

Théorème 3.4.2. *(condition suffisante de suboptimalité) [12].*

soient $\{x, J_B\}$ une SRSC du problème (3.1)-(3.3) et $\epsilon \geq 0$ arbitraire.

Si $\beta\{x, J_B\} \leq \epsilon$ alors la solution réalisable x est $\epsilon - optimale$.

Avant de construire l'algorithme dual, rappelons les notions et les propriétés de la méthode duale pour la résolution d'un PQC à variables bornées.

3.5 Problème dual et ses propriétés

Considérons le problème primal(3.1)-(3.3), et son problème dual se formule ainsi :

$$\max \mathcal{L}(\lambda) = -\frac{1}{2}\kappa' D\kappa + b'y + v'd^{-} - w'd^{+} \tag{3.9}$$

$$D\kappa + c - A'y - v + w = 0, \tag{3.10}$$

$$v \geq 0, w \geq 0. \tag{3.11}$$

Où

(3.9) est la fonction de Lagrange.

(3.10) n'est que la condition de stationnaritée. $\nabla_{\kappa}\mathcal{L}(\kappa, y, v, w) = 0$.

Notons que (3.9)-(3.10) est un programme quadratique concave qui est intéressant à résoudre par rapport à son primale, car les variables κ et y sont des variables sans restriction de signe. Pour le problème dual introduisons les définition suivantes :

• Le quadruplet $\lambda = (\kappa, y, v, w)$ vérifiant les contraintes du problème (3.9)-(3.11) est appelé solution réalisable dual de ce problème.

• Le n-vecteur $\delta = D\kappa + c - A'y$ est appelé vecteur co-solution réalisable , associé au solution réalisable dual λ.

• Un solution réalisable dual $\lambda^0 = (\kappa^0, y^0, v^0, w^0)$ est dit optimal si

$$\mathcal{L}(\lambda^0) = -\frac{1}{2}\kappa^{0\prime} D\kappa^0 + b'y^0 + v^{0\prime}d^{-} - w^{0\prime}d^{+} = \max_{\lambda} \mathcal{L}(\lambda)$$

• la co-solution réalisable dual δ^0 est dit optimale si $\delta^0 = D\kappa^0 + c - A'y^0$.

• Un solution réalisable dual λ^ϵ est dit $\epsilon - optimal$ ou suboptimal si on a :

$$\mathcal{L}(\lambda^0) - \mathcal{L}(\lambda^\epsilon) \leq \epsilon$$

Où $\epsilon \geq 0$ est un nombre arbitraire choisi à l'avance et λ^0 un solution réalisable dual optimal.

• La paire $\{\lambda, J_P\}$ formé du solution réalisable duale λ et de support du problème J_P, défini précédemment, est appelé solution réalisable dual de support du problème (3.9)-(3.11).

• De même, la paire $\{\delta, J_P\}$ est appelée co-solution réalisable de support pour le problème (3.9)-(3.11).

• κ est appelé pseudo-solution associée au support $J_P = J_B, J_S$.

• κ_j est appelé solution du problème primale si $d_j^- \leq \kappa_j \leq d_j^+$.

Soit les partitions suivantes :

• $J_{NN} = J_N \backslash J_S = J^- \cup J^+, J^- \cap J^+ = \emptyset$.

• Le triplet d'indices $J_C = \{J_P, J^+, J^-\}$ est appelé support coordinateur, s'il existe un pseudo-solution réalisable κ tel que :

$$\begin{cases} \delta_j \geq 0, & J \in J^+, \\ \delta_j \leq 0, & J \in J^-, \end{cases} \tag{3.12}$$

On dit dans ce cas que le pseudo-solution réalisable κ est associé au support coordinateur J_C.

3.6 Rappel sur l'algorithme dual

3.6.1 Critère d'optimalité dual

Théorème 3.6.1. *(critère d'optimalité)[3]*

les relations $d_j^- < \kappa_j < d_j^+$ pour tout $j \in J_p = J_B \cup J_S$; sont suffisantes pour l'optimalité du co-solution réalisable de support coordinateur δ, J_c. Elles sont aussi nécessaires dans le cas où δ, J_c est non dégénéré. Le pseudo-solution réalisable κ correspondant au co-solution réalisable optimal est alors une solution optimale pour le problème primal.

3.6.2 Critère de suboptimalité dual

Théorème 3.6.2. *(critère de suboptimalité)[3]*

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution x soitϵ-optimal est qu'il existe un support coordinateur J_c, tel que $(\beta, J_c) < \epsilon$.

3.6.3 Schéma de l'algorithme dual de support (DSM)

L'algorithme de la méthode duale de support (DSM) présente dans les étapes suivantes :

(0) soit une co-solution réalisable de support initial $\{\delta, J_C\}$,ainsi que son pseudo -slution réalisable correspondant κ.

(1) Tester l'optimalité du co-slution réalisable de support coordinateur $\{\delta, J_C\}$:

• (1.a) Si les relations d' optimalité sont vérifiées , alors κ est optimal pour le problème primal(3.1) et donc on arrête l'algorithme.

• (1.b) Sinon, calculer les nombres suivats :

$$\alpha_j = \begin{cases} \kappa_j - d_j^-, \text{si } \kappa_j < d_j \\ \kappa_j - d_j^+, \text{si } \kappa_j > d_j^+ \end{cases} \quad j \in J_p^{no}$$

• (1.c) choisir un indice $j_1 \in J_p^{no}$ vérifiant $\alpha_{j_1} = \max\left\{|\alpha_j|, j_1 \in J_p^{no}\right\}$.

Aller à (2)

(2) Construction d'une nouvelle co-solution réalisable et de sa pseudo-solution associée.

• (2.a) Calculer les direction ℓ et t comme suit :

$$\begin{cases} l_{NN} = 0, \\ l_S = -M_S^{-1} Z'(J_S, j_1) sign\alpha_{j_1}, \\ l_B = -A_B^{-1} A_S l_S, \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{j_1} = -sign\alpha_{j_1}, t(J_p \setminus j_1) = 0, \\ t_{NN} = D(J_{NN}, J_p) l_p - A'_{NN} q; \\ q = \left[A_B^{-1}\right]' D, (J_B, J_p) l_p - t_B \end{cases}$$

• (2.b) Calculer le pas optimal $\sigma = \min\{\sigma_{j_1}, \sigma_{j_0}\}$,où

$$\sigma_{j_1} = \begin{cases} -\frac{\alpha_{j_1}}{l_{j_1}}; & \text{si } l_{j_1} \neq 0; \\ \infty; & \text{si } l_{j_1} = 0 \end{cases} \quad \sigma_{j_0} = \min_{j \in J_{NN}} \sigma_j, \text{avec } \sigma_j = \begin{cases} -\frac{\delta_j}{t_j}; & \text{si } \delta_j t_j < 0; \\ \infty; & \text{si } \delta_j t_j \geq 0 \end{cases} \qquad j \in J_{NN}$$

• (2.c) Si $\sigma = \infty$ alors le problème dual est borné et par coséquent sont dual (3.1) est irréalisable .

Donc on arrête l'algorithme.

• (2.d) Sinon($\sigma < \infty$), calculer

$$\bar{\delta} = \delta + \sigma t, \quad \bar{\kappa} = \kappa + \sigma l, \quad \bar{y} = y + \sigma q,$$

Aller à (3)

(3) Construction d'un nouveau support coordinateur $\bar{J}_C = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S, \bar{J}^+, \bar{J}^-\}$.

• (3.a) Si $\sigma = \sigma_{j_1}$, $j_1 \in J_P = J_B \cup J_S$,alors la composante κ_{j_1}devient réalisable et par coséquent l'indice $j_1$sera dans $\bar{J}^-$ où $\bar{J}^+$ selon la règle suivante :

$$\begin{cases} \bar{J}^+ = J^+ \cup j_1, \ \bar{J}^- = J^- & \text{Si } l_{j_1} > 0, \\ \bar{J}^+ = J^+, \ \bar{J}^- = J^- \cup j_1 & \text{Si } l_{j_1} < 0. \end{cases}$$

- (3.b) Si $j_1 \in J_S$,alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \backslash j_1$.
- (3.c) Si $j_1 \in J_B$,choisir un idice $j_* \in J_S$ tel que $Z_{j_1 j_*} = Z(j_1, j_*) \neq 0$ et poser :

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash j_1) \cup j_*, \quad \bar{J}_S = J_S \backslash j_*.$$

Aller à (1) en partant de $\{\bar{\delta}, \bar{J}_C\}$,$\bar{k}$

- (3.d) Sinon $(\sigma = \sigma_{j_0})$ et donc l'indice j_1 n'est pas optimal . calculons le nombre

$$\bar{\alpha}_{j_1} = \bar{\kappa}_{j_1} - l_{j_1} < 0 \;\; Si\ t_{j_1} = 1, \qquad \bar{\alpha}_{j_1} = \bar{\varphi}_{j_1} - u_{j_1} > 0 \;\; Si\ t_{j_1} = -1,$$

- (3.e) Si $\eta_0 = M(j_0, j_0) - M(j_0, j_S) M_S^{-1} M(j_S, j_0) \neq 0$, alors l'indice j_0 est supprimé de $\bar{J}_{NN}$ et sera dans $\bar{J}_S$:

$$\bar{J}_S = J_S \cup j_0, \quad \bar{J}_B = J_B, \quad \bar{J}_{NN} = J_{NN} \backslash j_0$$
$$\bar{J}^+ = J^+ \cap \bar{J}_{NN}, \quad \bar{J}^- = J^- \cap \bar{J}_{NN}$$

Aller à (2)

en partant de $\{\bar{\delta}, \bar{J}_C\}$,$\bar{\kappa}$,$\bar{\alpha}_{j_1}$,j_1.

- (3.f) Si $\eta_0 = 0$,alors permuter d'abord les indices ,j_1,,j_0, de la manière suivante :
- (3.g) Si ,$j_1 \in j_S$,alors $\bar{J}_B = J_B$, $\quad$.$\bar{J}_S = (J_S \backslash j_1) \cup j_0$
- (3.h) Sinon , poser $\bar{J}_B = (J_B \backslash j_1) \cup j_0, \bar{J}_S = J_S$ et

$$\bar{J}_{NN} = \bar{J}_N \backslash \bar{J}_S, \begin{cases} \bar{J}^+ = J^+ \cap \bar{J}_{NN} \cup j_1, & \bar{J}^- = J^- \cap \bar{J}_{NN} \quad \text{Si } \ t_{j_1} = 1 \\ \bar{J}^+ = J^+ \cap \bar{J}_{NN}, & \bar{J}^- = J^- \cap \bar{J}_{NN} \cup j_1 \quad \text{Si } \ t_{j_1} = -1 \end{cases}$$

Par la suite , on corrige le pseudo-slution réalisable en posant $\tilde{\kappa} = \bar{\kappa} + \tilde{l}$, où la direction d'amélioration $\tilde{l}$ est déterminée comme suit :

$$\tilde{l}_j = 0 \quad j \neq j_1, \quad j \in \bar{J}_{NN},$$
$$\tilde{l}_{j_1} = l_{j_1} - \kappa_{j_1}^- \quad \text{Si } \ t_{j_1} = 1, \qquad \tilde{l}_{j_1} = u_{j_1} - \kappa_{j_1}^- \quad \text{Si } \ t_{j_1} = -1$$
$$\tilde{l}(J_S) = -M(\bar{J}_S, \bar{J}_S)^{-1} M(\bar{J}_S, j_1) \tilde{l}_{j_1}, \quad \tilde{l}(J_B) = Z(\bar{J}_B, \bar{J}_N) \tilde{l}_N$$

où M et Z sont des matrices définies par la relation (3.6). Aller à (1) en partant de $\{\bar{\delta}, \bar{J}_C\}$.et $\tilde{k}$

Dans cet algorithme nous utiliserons que la construction d'une nouvelle co-solution duale et sa pseudo-solution duale de l'étape (2.a),(2.b).

3.7 Construction d'une direction d'amélioration adaptée

On calcule l'estimation de suboptimalité $\beta\{x, J_B\}$. Si $\beta\{x, J_B\} \leq \epsilon$, alors x est une solution $\epsilon-$*optimale* du problème (3.1)-(3.3). Sinon, on construit une direction admissible $\ell = (\ell_j, j \in J)$comme suit :

$$d_j^- - x_j \leq \ell_j \leq d_j^+ - x_j, j \in J_{NN} = J_N \backslash J_S. \tag{3.13}$$

Afin de calculer les composantes de la direction ℓ, considérons l'accroissement

$$\Delta f = f(x + \ell) - f(x) = \sum_{\bar{E}_j > 0, j \in\ J_N} E_j \ell_j + \sum_{\bar{E}_j < 0, j \in\ J_N} E_j \ell_j + \frac{1}{2}\ell' D\ell$$

En tenant compte de la métrique (3.13), la partie linéaire de celui ci atteint son minimum pour les valeurs des composantes de $\ell_{NN} = (\ell_j, j \in J_{NN})$ suivantes :

$$\ell_j = \begin{cases} d_j^- - x_j, & \text{si } E_j > 0; \\ d_j^+ - x_j, & \text{si } E_j < 0; \\ 0 & \text{si } E_j = 0; \end{cases} \qquad j \in J_{NN} \tag{3.14}$$

Les composantes de $\ell(J_S)$ seront déduites à partire de $E_j(x + \ell) = 0, j \in J_S$, donc

$$M(J_S, J_S)\ell(J_S) + M(J_S, J_{NN})\ell(J_{NN} = 0)$$

D'où : $\ell(J_S) = -M_S^{-1} M(J_S, J_{NN})\ell(J_{NN})$ Les composantes $\ell(J_B$ seront déduite de $A\ell = 0$, d'où : $\ell(J_B) = -A_B^{-1}(A_S\ell_S A_{NN}\ell_{NN})$. sorte que les composantes d'indices $j \in J_S$ du vecteur $\bar{E} = E(x + \ell)$ soient nulles. Le nouveau vecteur de couts réduits s'écrit

$$\bar{E}_N = E_N + M\ell_N \tag{3.15}$$

Comme $E(J_S) = 0$, les composantes $\ell_j, j \in J_S$ serons alors calculées comme suit :

$$\bar{E}(J_S) = 0 \Longrightarrow M(J_S, J_N)\ell_N = 0 \Longrightarrow M(J_S, J_S)\ell_S + M(J_S, J_{NN})\ell_{NN} = 0$$

3.8 Changement de la solution réalisable et du vecteur des coûts réduits

On construit une nouvelle solution réalisable $\bar{x}$, et le nouveau vecteur des coûts réduits $\bar{E}$ comme suit :

$$\bar{x} = x + \theta^0\ell, \bar{E}_N = E_N + \theta^0\delta_N, \bar{E}_B = 0,$$

Le nombre θ^0 se calcule comme suit :

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \theta_{j_r}\} \tag{3.16}$$

Où $1, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}$ est calculé de façon à ce que les contraintes de bornes sur le vecteur $\bar{x}$ Soit vérifié.

$$d_j^- - x_j \quad \leq \theta^0 \ell_j \leq d_j^+ - x_j, \; j \in J_{NN} \tag{3.17}$$

$$d_j^- - x_j \quad \leq \theta^0 \ell_j \leq d_j^+ - x_j, \; j \in J_B \tag{3.18}$$

$$d_j^- - x_j \quad \leq \theta^0 \ell_j \leq d_j^+ - x_j, \; j \in J_S \tag{3.19}$$

Donc

$$\theta_{j_0} = \begin{cases} \left(x_{j_0} - d_{j_0}^-\right), & \text{si } E_{j_0} > 0; \\ \left(d_{j_0}^+ - x_{j_0}\right), & \text{si } E_{j_0} < 0. \end{cases}$$

Donc $\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j$ et $\theta_{j_S} = \min_{j \in J_S} \theta_j$, avec

$$\theta_j = \begin{cases} \left(d_j^+ - x_j\right)/\ell_j, & \text{si } \ell_j > 0; \\ \left(d_j^- - x_j\right)/\ell_j, & \text{si } \ell_j < 0; \\ \infty & \text{si } \ell_j = 0; \end{cases}$$

Le nombre $\theta^0 = 1$ représente le pas correspondant aux indices de J_{NN}. Quant à θ_F, il se calcule de façon que le passage de x à $\bar{x}$ assure une relaxation maximale de la fonction objectif tout en gardant le même signe pour E_j et $\bar{E}_j$.

$$E'_N(x) = g'(x)Z, \bar{E}_N(\bar{x}) = \bar{E}_N(x + \theta^0 \ell)$$

.

$\bar{E}_N(\bar{x}) = E_N(x) + \theta^0 M \ell_N = E_N(x) + \theta^0 \delta_N$

On posera donc $\theta_F = \sigma_{j_*} = min \sigma_j, j \in J_{NN}$ avec

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-E_j}{\delta_j}, & \text{si } E_j \delta_j < 0 \\ \infty, & \text{Dans les autres cas} \end{cases}$$

$$\delta_j = M(j, J_N)\ell_N.$$

3.9 Calcul de la nouvelle estimation de suboptimalité

Soit $\beta(\bar{x}, J_B)$ la nouvelle estimation de suboptimalité. On a

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{\bar{E}_j>0, j\in\, J_N} \bar{E}_j \left(\bar{x}_j - d_j^-\right) + \sum_{\bar{E}_j<0, j\in\, J_N} \bar{E}_j \left(\bar{x}_j - d_j^+\right) = (1-\theta^0)\beta - \theta^0(1-\theta^0)\alpha \leq \beta \tag{3.20}$$

Si $\bar{\beta} \leq \epsilon$, alors la nouvelle solution $\bar{x}$ est optimale, sinon on procède au changement de support.

3.10 Changement de support avec la règle algébrique

♦ Si $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$ et $\bar{\beta} > \epsilon$ alors le choix de l'indice j_0 n'est pas unique.

soit i_1 représente la position de j_1 dans l'ensemble J_B. Pour l'indice j_1, on a

$$\ell_{j_1} = -\sum_{j\in\, J_N} e'_{i_1} A_B^{-1} a_j \ell_j = -\sum_{j\in\, J_N} x_{j_1 j}\ell_j \neq 0$$

Il existe alors un indice $j_0 \in j_N$ tel que $x_{j_1 j_*} \neq 0$. cette dernière condition nous assure, par conséquent, que$\bar{J}_B = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_0\}$, est bel et bien un support.

Si on peut avoir $x_{j_1 j_*} \neq 0$, avec $j_0 \in j_S$ on posera donc

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_0\}, \bar{J}_S = (J_S \backslash \{j_0\}).$$

♦ Sinon on choisira un indice j_0 de J_{NN} tel que $x_{j_1 j_*} \neq 0$ et on posera

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_0\}, \bar{J}_S = J_S \backslash \{j_*\}$$

♦ Si $\theta^0 = \theta_{j_S}$, alors on posera $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \backslash \{j_S\}$,

♦ Si $\theta^0 = \sigma_{j_r}$, alors on posera $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \cup \{j_r\}$.

3.11 Changement de support avec la règle du pas simple :

Dans la variante ci-dessus, le choix de l'indice j_0 est basé uniquement sur une condition algébrique. Ici, on s'éfforcera de choisir j_0 en faisant une itération duale qui consiste à construire une direction duale et un pas dual le long de cette direction. A cet effet, on peut faire correspondre à la solution réalisable x, J_p, une co-solution réalisable δ et une solution réalisable duale $\lambda = (y, v, w)$ du problème (3.9)-(3.11) dual, en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} \kappa_S = -M_S^{-1} Z'(J_S, J_p)[D(J_p, J_B)A_B^{-1}b + c(J_p) - M_S^{-1}M(J_S, J_{NN})\kappa_{NN} \\ \kappa_B = A_B^{-1}(b - A_N)\kappa_N \end{cases}$$

et puis nous allons passer à la construction du co-solution réalisable de support $\{\bar{\delta}, \bar{J}_C\}$ et sa pseudo-solution réalisable correspondant $\bar{\kappa}$:

$$\bar{\delta} = \delta + \sigma t, \quad \bar{\kappa} = \kappa + \sigma \ell \qquad \text{et} \quad \alpha_{j_1} = \begin{cases} \kappa_{j_1} - d_{j_1}^-, \text{si } d_{j_1}^- > \kappa_{j_1}; \\ \kappa_{j_1} - d_{j_1}^+, \text{si } \kappa_{j_1} > d_j^+. \end{cases}$$

et puis nous utilisons ces réultats pour calculer les directions duales t et ℓ tel que :

$$t_{j_1} = -sign(\alpha_{j_1}), \quad \ell = Z\ell_S \quad \text{telque} \ \ \ell_S = -M_S^{-1}Z't\,;$$

nous allons passer au calcule du pas optimale σ^0 avec $\sigma^0 = \min\{\sigma_{j_1}; \sigma_{j_0}\}$.

$$\sigma_{j_1} = \begin{cases} -\frac{\alpha_{j_1}}{l_{j_1}}; & \text{si } \ l_{j_1} \neq 0; \\ \infty; & \text{si } \ l_{j_1} = 0 \end{cases} \quad \sigma_{j_0} = \min_{j \in J_{NN}} \sigma_j, \text{avec } \sigma_j = \begin{cases} -\frac{\delta_j}{t_j}; & \text{si } \ \delta_j t_j < 0; \\ \infty; & \text{si } \ \delta_j t_j \geq 0 \end{cases} \qquad j \in J_{NN}$$

• Si $\sigma = \sigma_{j_1}$, $j_1 \in J_P = J_B \cup J_S$,alors la composante κ_{j_1}devient réalisable et par coséquent l'indice $j_1$sera dans $\bar{J}^-$ où $\bar{J}^+$ selon la règle suivante :

$$\begin{cases} \bar{J}^+ = J^+ \cup j_1, \ \bar{J}^- = J^- & \text{Si } l_{j_1} > 0, \\ \bar{J}^+ = J^+, \ \bar{J}^- = J^- \cup j_1 & \text{Si } l_{j_1} < 0. \end{cases}$$

- Si $j_1 \in J_S$,alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \backslash j_1$.
- Si $j_1 \in J_B$,choisir un idice $j_* \in J_S$ tel que $x_{j_1 j_*} = x(j_1, j_*) \neq 0$ et poser :

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash j_1) \cup j_*, \qquad \bar{J}_S = J_S \backslash j_*.$$

$$\bar{J}_C = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S, \bar{J}^+, \bar{J}^-\}$$

3.12 Algorithme de la méthode adaptée avec la règle algébrique

Soient$\{x, J_p\}$ une solution réalisable de support (SRS) initiale pour le problème (3.1)-(3.3) et ϵ un nombre arbitrairement positif ou null. Le schéma de la méthode adaptée avec la règle algébrique pour la résolution d'un PQC à variables bornées est décrit dans les étapes suivantes :

(1) Calculer les matrices Z et M :

(2) Calculer les vecteurs $g(x) = (g'_B, g'_N)$,π' et $E' = [E(x)]' = (E'_B, E'_N)$

(3) Calculer $\beta(x, J_B)$

- Si $\beta = 0$, alors $\{x, J_p\}$, une solution réalisable optimale.
- Si $\beta \leq \epsilon$, alors $\{x, J_p\}$, une solution réalisable $\epsilon - optimale$.

(4)Changement de la solution réalisable et du vecteur des coûts réduits et de la nouvelle valeur de la fonction objectif

$\bar{x} = x + \theta^0 \ell, \bar{E}_N = E_N + \theta^0 \delta_N$

- Calculer les directions ℓ et δ_N
- Calculer le pas maximal θ^0 le long de la direction d'amélioration.
- Calculer α et $f(\bar{x}) = f(x) - \theta^0 \beta + \frac{1}{2}(\theta^0)^2 \alpha$;
- Si $\theta^0 = 1$ alors $\bar{x}, J_p$ une solution réalisable optimale.

(5) calculer $\bar{\beta}$,

- Si $\bar{\beta} \leq \epsilon$, alors $\{\bar{x}, J_p\}$, une solution réalisable $\epsilon - optimale$.

(6) changement de support $J_P \rightarrow \bar{J}_P$:

- Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$ alors dans ce cas choisir un indice j_0 :
- soit i_1 représente la position de j_1 dans l'ensemble J_B. Calculer le $(n - m) - vecteur$ $h = h(J_N) : h' = (x_{j_1 j}, j \in J_N) = e'_{i_1} A_B^{-1} A_N$;
- S'il existe un indice $j_0 \in j_S$ tel que $x_{j_1 j_*} \neq 0$, alors poser

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_0\}, \bar{J}_S = (J_S \backslash \{j_0\}), \text{ et } \bar{J}_p = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

- Sinon choisir un indice $j_0 \in J_{NN}$ tel que $x_{j_1 j_*} \neq 0$ puis poser

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_0\}, \bar{J}_S = J_S, \text{ et } \bar{J}_p = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$$

- Si $\theta^0 = \theta_{j_S}$, alors poser $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \backslash \{j_S\}$, et $\bar{J}_p = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$.
- Si $\theta^0 = \sigma_{j_r}$, alors poser $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \cup \{j_r\}, \bar{J}_p = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$.

(7) Poser $x = \bar{x}, J_B = \bar{J}_B, J_S = \bar{J}_S, J_p = \bar{J}_p$ et aller à l'étape (1).

3.13 Algorithme de la méthode adaptée avec la règle du pas simple :

(1) Calculer les matrices Z et M :

(2) Calculer les vecteurs $g(x) = (g'_B, g'_N)$,π' et $E' = [E(x)]' = (E'_B, E'_N)$

(3) Calculer $\beta(x, J_B)$

- Si $\beta = 0$, alors $\{x, J_p\}$, une solution réalisable optimale.
- Si $\beta \leq \epsilon$, alors $\{x, J_p\}$, une solution réalisable $\epsilon - optimale$.

(4) Changement de la solution réalisable et du vecteur des coûts réduits et de la nouvelle valeur de la fonction objectif

$\bar{x} = x + \theta^0 \ell, \bar{E}_N = E_N + \theta^0 \delta_N$

- Calculer les directions ℓ et δ_N
- Calculer le pas maximal θ^0 le long de la direction d'amélioration.
- Calculer α et $f(\bar{x}) = f(x) - \theta^0 \beta + \frac{1}{2}(\theta^0)^2 \alpha$;
- Si $\theta^0 = 1$ alors $\bar{x}, J_p$ une solution réalisable optimale.

(5) calculer $\bar{\beta}$,

- Si $\bar{\beta} \leq \epsilon$, alors $\{\bar{x}, J_p\}$, une solution réalisable $\epsilon - optimale$.

(6) changement de support $J_P \to \bar{J}_P$:

- calculer le pseudo-solution réalisable κ
- construire le co-solution réalisable de support $\{\bar{\delta}, \bar{J}_C\}$ et son pseudo-solution

réalisable correspondant $\bar{k}$:

- calculer les direction duale t et ℓ
- calculer le pas optimale σ^0avec $\sigma^0 = \min\{\sigma_{j_1}; \sigma_{j_0}\}$ de tel sorte que :

- Si $\sigma = \sigma_{j_1}$, $j_1 \in J_P = J_B \cup J_S$,alors la composante κ_{j_1}devient réalisable et par coséquent l'indice $j_1$sera dans $\bar{J}^-$ où $\bar{J}^+$ selon la règle suivante :

$$\begin{cases} \bar{J}^+ = J^+ \cup j_1, \ \bar{J}^- = J^- & \text{Si } l_{j_1} > 0, \\ \bar{J}^+ = J^+, \ \bar{J}^- = J^- \cup j_1 & \text{Si } l_{j_1} < 0. \end{cases}$$

- Si $j_1 \in J_S$,alors $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \backslash j_1$.
- Si $j_1 \in J_B$,choisir un idice $j_* \in J_S$ tel que $x_{j_1 j_*} = x(j_1, j_*) \neq 0$ et poser :

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash j_1) \cup j_*, \qquad \bar{J}_S = J_S \backslash j_*.$$

(7) Aller à l'étape 3

Exemples. Résolvoons le PQC suivant avec la règle Algèbrique : .

$$\min f(x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4,$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 3,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

$$-2 \leq x_1 \leq 2, .0 \leq x_2 \leq 4, 2 \leq x_3 \leq 5, -3 \leq x_4 \leq 6$$

On a

$$D = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = (3,4)^{'}, c = (2,1,-3,-1)^{'}.$$

$$d^- = (-2,0,2,-3)^{'}, d^+ = (2,4,5,6)^{'}, x = (0,0,3,4)^{'}, f(x) = \frac{1}{2}x^{'}Dx + c^{'}x = 0.$$

$$I = \{1,2\}, J = \{1,2,3,4\}, J_B = \{3,4\}, J_N = \{1,2\}, J_p = \{J_B, J_S\}.$$

$$A_B = (a_3, a_4) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Première itération :

Calcul des matrices Z et M :

$$g(x) = Dx + c = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = (2,1,-3,-1)^{'}.g'_N = (2,1), g'_B = (-3,-1),$$

$$A_B^{-1} = I_2, -A_B^{-1}A_N = -A_N = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, M = Z'DZ = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, M_S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice M est défini alors prenons $J_S = J_N = \{1.2\}, J_{NN} = J^+ \cup J^- = \emptyset$.

Calcul du vecteur des couts réduits :

$$\pi' = g'_B A_B^{-1} = (-3,-1), E'_N = (E_1, E_2) = g'_N - \pi' A_N = (7,-10).$$

Calcul de l'estimation de suboptimalité $\beta\,(x, J_B)$.

$$\begin{aligned}\beta = \beta\,(x, J_B) &= \sum_{E_j>0, j\in\ J_N} E_j\left(x_j - d_j^-\right) + \sum_{E_j<0, j\in\ J_N} E_j\left(x_j - d_j^+\right)\\ &= E_1(x_1 - d_1^-) + E_2(x_2 - d_2^+) = 14 + 40 = 54 > 0.\end{aligned}$$

Calcul des directions ℓ et δ_N :

$$\ell_1 = d_1^- - x_1 = -2, \ell_2 = d_2^+ - x_2 = 4 \Longrightarrow \ell_N = (\ell_1, \ell_2)^{'} = (-2, 4)^{'};$$

$$\ell_B = (\ell_3, \ell_4)' = -A_B^{-1} A_N \ell_N = (18, 0)^{'};$$

$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)^{'} = (-2, 4, 18, 0)^{'}$$

$$\delta_N = (\delta_1, \delta_2)^{'} = (32, 24)^{'}.$$

Calcul de pas maximale θ^0 :

$$\theta_{j_1} = \min_{j\in J_B} \theta_j = \min\{\theta_3, \theta_4\} = \min\left\{\frac{1}{9}, +\infty\right\} = \frac{1}{9} \Longrightarrow \theta_{j_1} = \theta_3 = \frac{1}{9},\ j_1 = 3.$$

$$\theta_{j_S} = \min_{j\in J_S = J_N} \theta_j = \min\{\theta_1, \theta_2\} = \min\{1, 1\} = 1 \Longrightarrow \theta_{j_S} = \theta_1 = 1,\ j_S = 1.\ ,$$

$$\sigma_{j_r} = \min_{j_r\in J_N}\{\sigma_1, \sigma_2\} = \min\left\{\frac{-E_1}{\delta_1}, \frac{-E_2}{\delta_2}\right\} = \min\left\{\frac{-7}{-32}, \frac{10}{24}\right\} = \frac{7}{32} \Longrightarrow j_r = 1;$$

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \sigma_{j_r}\} = \theta_{j_1} = \theta_3 = \frac{1}{9}.$$

Calcul de la nouvelle solution et de nouveau vecteur des côuts réduit :

$$\bar{x} = x + \theta^0\ell = (-\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 5, 4)^{'}, \bar{E}_N = (\bar{E}_1, \bar{E}_2)^{'} = E_N + \theta^0\delta_N = (\frac{31}{9}, -\frac{66}{9})^{'}.$$

Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :

$$\alpha = \ell_N^{'}\delta_N = 160.$$

$$f(\bar{x}) = f(x) - \theta^0\beta + \frac{1}{2}(\theta^0)^2\alpha = -\frac{1459}{81}.$$

Calcul de la nouvelle valeur de l'estimation de suboptimalité :

$$\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta - \theta^0(1 - \theta^0)\alpha = \frac{2608}{81} \simeq 32.198 > 0.$$

$$h' = (x_{j_1j}, j \in J_N) = e_{i_1}^{\prime} A_B^{-1} A_N = (x_{31}x_{32}) \Longrightarrow \max_{j\in J_N} |x_{j_1j}| = 4 \Longrightarrow j_0 = 2.$$

$$\bar{J}_B = \{J_B \backslash j_1\} \cup j_0 = \{2,4\}\,, \bar{J}_S = J_S \backslash j_0 = \{1\}, \bar{J}_N = \{1.3\}\,.$$

Itération 2 :

, $J_B = \{2,4\}\,, J_N = \{1,3\}\,, J_S = \{1\}\,.x = (-\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 5, 4)$.

Calcul des matrices Z et M :

$$g(x) = Dx+c = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-\frac{14}{9}, \frac{17}{9}, -3, -1)'.g'_N = (-\frac{14}{9}, -3)$$

$$g'_B = (\frac{17}{9}, -1).$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, -A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \\ -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, M = Z'DZ = \begin{pmatrix} \frac{25}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

Calcul du vecteur des couts réduits :

$$\pi' = g'_B A_B^{-1} = (-\frac{13}{18}, -1), E'_N = (E_1, E_3) = g'_N - \pi' A_N = (\frac{21}{18}, -\frac{41}{18}).$$

Calcul de l'estimation de suboptimalité $\beta\,(x, J_B)$.

$$\begin{aligned} \beta = \beta\,(x, J_B) &= \sum_{E_j > 0, j \in\ J_N} E_j \left(x_j - d_j^-\right) + \sum_{E_j < 0, j \in\ J_N} E_j \left(x_j - d_j^+\right) \\ &= E_1(x_1 - d_1^-) + E_3(x_3 - d_3^+) = \frac{336}{162} \simeq 2.07 > 0. \end{aligned}$$

Calcul des directions ℓ et δ_N :

$$\ell_1 = d_1^- - x_1 = -\frac{16}{9}, \ell_3 = d_3^+ - x_3 = 0 \Longrightarrow \ell_N = (\ell_1, \ell_3)' = (-\frac{16}{9}, 0)';$$

$$\ell_B = (\ell_2, \ell_4)' = -A_B^{-1} A_N \ell_N = (-\frac{4}{9}, 4)';$$

$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)' = (-\frac{16}{9}, -\frac{4}{9}, 0, 4)'$$

$$\delta_N = (\delta_1, \delta_2)' = M \ell_N = (-\frac{100}{9}, \frac{4}{3})'.$$

Calcul de pas maximale θ^0 :

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j = \min\{\theta_2, \theta_4\} = \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta_{j_1} = \theta_4 = \frac{1}{2} \Longrightarrow j_1 = 4.$$

$$\theta_{j_S} = 1 \Longrightarrow \theta_{j_S} = \theta_1 = 1,\ j_S = 1.\ ,$$

$$\sigma_{j_r} = \min_{j_r \in J_N} \{\sigma_1, \sigma_3\} = \min\left\{\frac{-E_1}{\delta_1}, \frac{-E_3}{\delta_3}\right\} = \min\left\{\frac{21}{200}, \infty\right\} = \frac{21}{200} \Longrightarrow j_r = 1;$$

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \sigma_{j_r}\} = \sigma_{j_r} = \sigma_1 = \frac{21}{200}.$$

Calcul de la nouvelle solution et de nouveau vecteur des côuts réduit :

$$\bar{x} = x + \theta^0 \ell = (\frac{-736}{1800}, \frac{716}{1800}, 5, \frac{884}{200})', \bar{E}_N = (\bar{E}_1, \bar{E}_2)' = E_N + \theta^0 \delta_N = (\frac{31}{9}, -\frac{66}{9})'.$$

Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :

$$\alpha = \ell'_N \delta_N = \frac{1600}{81}.$$

$$f(\bar{x}) = f(x) - \theta^0 \beta + \frac{1}{2}(\theta^0)^2 \alpha = -18.12.$$

Calcul de la nouvelle valeur de l'estimation de suboptimalité :

$$\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta - \theta^0(1 - \theta^0)\alpha = . - \frac{3024}{16200} \simeq -0.19 < 0$$

Donc l'algorithme s'arrête. avec la solution réalisable optimale et l'optimum sont donnés par

$$x^* = (\frac{-736}{1800}, \frac{716}{1800}, 5, \frac{884}{200})'$$
$$f(x^*) = -18.12.$$

Exemples. Résolvoons le PQC suivant avec la règle du pas simple .

$$\min f(x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4,$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 3,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

$$-2 \leq x_1 \leq 2, .0 \leq x_2 \leq 4, 2 \leq x_3 \leq 5, -3 \leq x_4 \leq 6$$

On a

$$D = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = (3,4)', c = (2,1,-3,-1)'.$$

$$d^- = (-2,0,2,-3)', d^+ = (2,4,5,6)', x = (0,0,3,4)', f(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x = 0.$$

$$I = \{1,2\}, J = \{1,2,3,4\}, J_B = \{3,4\}, J_N = \{1,2\}, J_p = \{J_B, J_S\}.$$

$$A_B = (a_3, a_4) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Première itération :

Calcul des matrices Z et M :

$$g(x) = Dx+c = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = (2,1,-3,-1)'.g'_N = (2,1), g'_B = (-3,-1),$$

$$A_B^{-1} = I_2, -A_B^{-1}A_N = -A_N = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, M = Z'DZ = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, M_S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice M est défini alors prenons $J_S = J_N = \{1.2\}, J_{NN} = J^+ \cup J^- = \emptyset$.

Calcul du vecteur des coûts réduits :

$$\pi' = g'_B A_B^{-1} = (-3,-1), E'_N = (E_1, E_2) = g'_N - \pi' A_N = (7, -10).$$

Calcul de l'estimation de suboptimalité $\beta(x, J_B)$.

$$\begin{aligned} \beta = \beta(x, J_B) &= \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j \left(x_j - d_j^-\right) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j \left(x_j - d_j^+\right) \\ &= E_1(x_1 - d_1^-) + E_2(x_2 - d_2^+) = 14 + 40 = 54 > 0. \end{aligned}$$

Calcul des directions ℓ et δ_N :

$$\ell_1 = d_1^- - x_1 = -2, \ell_2 = d_2^+ - x_2 = 4 \Longrightarrow \ell_N = (\ell_1, \ell_2)' = (-2,4)';$$

$$\ell_B = (\ell_3, \ell_4)' = -A_B^{-1} A_N \ell_N = (18, 0)^{'};$$

$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)^{'} = (-2, 4, 18, 0)^{'}$$

$$\delta_N = (\delta_1, \delta_2)^{'} = (32, 24)^{'}.$$

Calcul de pas maximale θ^0 :

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j = \min\{\theta_3, \theta_4\} = \min\left\{\frac{1}{9}, +\infty\right\} = \frac{1}{9} \Longrightarrow \theta_{j_1} = \theta_3 = \frac{1}{9},\ j_1 = 3.$$

$$\theta_{j_S} = \min_{j \in J_S = J_N} \theta_j = \min\{\theta_1, \theta_2\} = \min\{1, 1\} = 1 \Longrightarrow \theta_{j_S} = \theta_1 = 1,\ j_S = 1.\ ,$$

$$\sigma_{j_r} = \min_{j_r \in J_N} \{\sigma_1, \sigma_2\} = \min\left\{\frac{-E_1}{\delta_1}, \frac{-E_2}{\delta_2}\right\} = \min\left\{\frac{-7}{-32}, \frac{10}{24}\right\} = \frac{7}{32} \Longrightarrow j_r = 1;$$

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \sigma_{j_r}\} = \theta_{j_1} = \theta_3 = \frac{1}{9}.$$

Calcul de la nouvelle solution et de nouveau vecteur des coûts réduit :

$$\bar{x} = x + \theta^0 \ell = (-\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 5, 4)^{'}, \bar{E}_N = (\bar{E}_1, \bar{E}_2)^{'} = E_N + \theta^0 \delta_N = (\frac{31}{9}, -\frac{66}{9})^{'}.$$

Calcule de la nouvelle valeur de la fonction objectif :

$$\alpha = \ell_N^{'} \delta_N = 160.$$

$$f(\bar{x}) = f(x) - \theta^0 \beta + \frac{1}{2}(\theta^0)^2 \alpha = -\frac{1459}{81}.$$

Calcul de la nouvelle valeur de l'estimation de suboptimalité :

$$\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta - \theta^0(1 - \theta^0)\alpha = \frac{2608}{81} \simeq 32.198 > 0.$$

Pour changer le support,faisons une itération duale avec un pas simple ; pour cela en calculant

$$\begin{cases} \kappa_S = M_S^{-1} Z^{'}(J_S, J_P)[D(J_P, J_B) A_B^{-1} b + c(J_P)] - M_S^{-1} M(J_S, J_{NN}) \kappa_{NN}. \\ \kappa_B = A_B^{-1}(b - A_N \kappa_N). \end{cases}$$

$$\kappa_S = M_S^{-1} Z^{'}(J_S, J_P)[D(J_P, J_B) A_B^{-1} b + c(J_P)] - M_S^{-1} M(J_S, J_{NN}) \kappa_{NN}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix}.$$

Donc : $\kappa_S = \left(\frac{3}{4}, \frac{13}{4}\right)'$.

$$\kappa_B = A_B^{-1}(b - A_N\kappa_N) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{61}{4} \\ \frac{-3}{4} \end{pmatrix}.$$

Donc : $k_B = \left(\frac{61}{4}, \frac{-3}{4}\right)'$.

Calcul des direction duales t et ℓ :

pour cela nous avons besoin de calculer α_{j_1}

On a $j_1 = 3$ donc :$k_3 > d_3^+ \Longrightarrow \alpha_3 = k_3 - d_3^+ = \frac{61}{4} - 5 = \frac{41}{4}$

$t_{j_1} = t_3 - sign(\alpha_3) = -1$, $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ Donc : $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)' = (0, 0, -1, 0)'$

et $\ell = Z\ell_S$, avec $\ell_S = M_N^{-1}Z't$.

$$\ell_S = -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} \\ \frac{-7}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\ell = Z\ell_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} \\ \frac{-7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} \\ \frac{-7}{4} \\ \frac{-25}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Calcul du pas maximal σ :tel que :

$$\sigma = \min\{\sigma_{j_0}, \sigma_{j_1}\}$$

nous avons $J_{NN} = \emptyset \Longrightarrow \sigma_{j_0} = \infty$

$$\sigma_{j_1} = \sigma_3 = \begin{cases} \frac{-\alpha_3}{\ell_3} & \text{si } \ell_3 \neq 0; \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}, \text{et on a } \ell_3 = -\frac{25}{4} \neq 0 \Longrightarrow \sigma_3 = \frac{41}{25}.$$

Donc :

$$\sigma = \min\{\sigma_{j_0}, \sigma_{j_1}\} = \min\left\{\frac{41}{25}, \infty\right\} = \sigma_3 = \frac{41}{25}.$$

Nous avons : $\sigma = \sigma_{j_1}$, avec $(j_1 = 3) \in J_B$ alors le nouveau support coordinateur $\bar{J}_c = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S, \bar{J}^+, \bar{J}^-\}$ est obtenue en posant : $\bar{J}_B = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_*\}, \bar{J}_S = (J_S \backslash \{j_*\})$, ou $j_* \in J_S$et vérifie $x_{j_1 j_*} \neq 0$.

On choisit par exemple $j_* = 2$ car $x_{32} = 4 \neq 0$ alors $\bar{J}_B = (J_B \backslash 3) \cup \{2\} = \{2, 4\}$, $\bar{J}_S = (J_S \backslash \{2\}) = \{1\}$, $\bar{J}^- = \{3\}$, $\bar{J}^+ = \emptyset$

Itération 2 :

, $J_B = \{2,4\}$, $J_N = \{1,3\}$, $J_S = \{1\}$.$x = (-\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 5, 4)$.

Calcul des matrices Z et M :

$$g(x) = Dx+c = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-\frac{14}{9}, \frac{17}{9}, -3, -1)'.g'_N = (-\frac{14}{9}, -3).$$

$$g'_B = (\frac{17}{9}, -1).$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, -A_B^{-1}A_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \\ -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, M = Z'DZ = \begin{pmatrix} \frac{25}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

Calcul du vecteur des coûts réduits :

$$\pi' = g'_B A_B^{-1} = (-\frac{13}{18}, -1), E'_N = (E_1, E_3) = g'_N - \pi' A_N = (\frac{21}{18}, -\frac{41}{18}).$$

Calcul de l'estimation de suboptimalité $\beta(x, J_B)$.

$$\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{E_j>0, j\in\ J_N} E_j\left(x_j - d_j^-\right) + \sum_{E_j<0, j\in\ J_N} E_j\left(x_j - d_j^+\right)$$
$$= E_1(x_1 - d_1^-) + E_3(x_3 - d_3^+) = \frac{336}{162} \simeq 2.07 > 0.$$

Calcul des directions ℓ et δ_N :

$$\ell_1 = d_1^- - x_1 = -\frac{16}{9}, \ell_3 = d_3^+ - x_3 = 0 \Longrightarrow \ell_N = (\ell_1, \ell_3)' = (-\frac{16}{9}, 0)';$$

$$\ell_B = (\ell_2, \ell_4)' = -A_B^{-1}A_N\ell_N = (-\frac{4}{9}, 4)';$$

$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)' = (-\frac{16}{9}, -\frac{4}{9}, 0, 4)'$$

$$\delta_N = (\delta_1, \delta_2)' = M\ell_N = (-\frac{100}{9}, \frac{4}{3})'.$$

Calcul de pas maximale θ^0 :

$$\theta_{j_1} = \min_{j\in J_B} \theta_j = \min\{\theta_2, \theta_4\} = \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta_{j_1} = \theta_4 = \frac{1}{2} \Longrightarrow j_1 = 4.$$

$$\theta_{j_S} = 1 \Longrightarrow \theta_{j_S} = \theta_1 = 1,\ j_S = 1.\ ,$$
$$\sigma_{j_r} = \min_{j_r \in J_N} \{\sigma_1, \sigma_3\} = \min\left\{\frac{-E_1}{\delta_1}, \frac{-E_3}{\delta_3}\right\} = \min\left\{\frac{21}{200}, \infty\right\} = \frac{21}{200} \Longrightarrow j_r = 1;$$

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \sigma_{j_r}\} = \sigma_{j_r} = \sigma_1 = \frac{21}{200}.$$

Calcul de la nouvelle solution et de nouveau vecteur des côuts réduit :

$$\bar{x} = x + \theta^0 \ell = (\frac{-736}{1800}, \frac{716}{1800}, 5, \frac{884}{200})', \bar{E}_N = (\bar{E}_1, \bar{E}_2)' = E_N + \theta^0 \delta_N = (\frac{31}{9}, -\frac{66}{9})'.$$

Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :

$$\alpha = \ell_N' \delta_N = \frac{1600}{81}.$$

$$f(\bar{x}) = f(x) - \theta^0 \beta + \frac{1}{2}(\theta^0)^2 \alpha = -18.12.$$

Calcul de la nouvelle valeur de l'estimation de suboptimalité :

$$\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta - \theta^0(1 - \theta^0)\alpha = -\frac{3024}{16200} \simeq -0.19 < 0$$

Donc l'algorithme s'arrête. avec la solution réalisable optimale et l'optimum sont donnés par

$$x^* = (\frac{-736}{1800}, \frac{716}{1800}, 5, \frac{884}{200})'$$
$$f(x^*) = -18.12.$$

3.14 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une nouvelle méthode de résolution des programmes quadratiques convexes à variables bornées dite la méthode de pas simple qu'est une variante de la méthode primale pour tester l'optimalité de la solution réalisable et la méthode dual pour faire le changement de support, où nous changeant touts les indices non-optimaux.Afin de tester l'éfficacité de cette méthode nous avoun proposé un exemple numérique explicatif.

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons proposé une variante de la méthode adaptée pour la résolution d'un problème de programmation quadratique convexe à variables bornées. Avant cela, nous avons exposé la méthode directe de support pour la résolution du même problème,dans le but de rappeler le principe des méthodes de R.Gabasov et F.M.Kirolova pour la résolution d'un problème de programmation quadratique convexe à variables bornées qui est basée sur la métrique du simplexe.Ensuite nous avons traité le même problème en utilisant un concept différent de celui du simplexe c'est-à-dire en changeant tous les indices au même tenps, c'est la méthode adaptée.Enfin en se basant sur les travaux de M.O.Bibi, et M.Bentobache dans le cas linéaire,nous avons utilisé la règle du pas simple pour éfféctuer le changement de support et ce résultat à été confirmer par un exemple numérique.

Perspective

- Utiliser la règle du pas multiple pour éfffféctuer le changement de support.
- Trouver une nouvelle estimation de suboptimalité dans le cas du pas simple.

Bibliographie

[1] Barankin and Dorfman. *On Quadratic Programming* , volume 2. Publications in statistics, 1958.

[2] B.Brahmi and M.O.Bibi . *Dual support method for solving convex quadratic programs optimisation* ,vol.59,no.6,pp.851-872,2010.

[3] Belkacem BRAHMI.*Méthodes primales et duales pour la programmation quadratique : extension et applications* ,Memoire de magister en Mathématique appliqué,Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Algérie, 2012.

[4] Belkacem BRAHMI.*Méthodes primales et duales pour la programmation quadratique : extension et applications* ,thèse doctorat,Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Algérie, 2012.page.39.40.

[5] E.A.Kostina and O.I.Kostlykova . *An algorithm for solving quadratic programing problems with linear equality containts* ,compitational Mathematics and Mathematical physcs,vol.41.no.7,pp.960-97,2001.

[6] H. M. Markowitz. *Portfolio selection.* Journal of Finance, 7(1) :77–91, 1952.

[7] H. M. Markowitz. *Portfolio Selection* : Efficient Diversification in Investments. John Wily and Sons, New York, 1959.

[8] M.O.Bibi.*Methods for solving linear- quadratic problems of optimal control*,Ph.D thesis,University of Minsk, 1985.

[9] M.O.Bibi.*Cours de programmation Mathématique 4eme année Recherche Opérationnelle*,Université de Béjaia, 1998.

[10] M.O. Bibi .*Méthodes Adaptées de Programmation Linèaire. Cours de postgraduation en recherche opérationnelle*, Université de Béjaia, 2000 .

[11] M.Bentobache .*sur les méthodes Mathématiques de la programmation linèare et quadratique* ,thèse doctorat,Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Algérie, 2013.

[12] N.Ikheneche .*Méthode de support pour la minimisation d'une fonctionnelle quadratique convexe. Mémoire de Magister. Département de Recherche Opérationnelle* , Université de Béjaia, 2004.

[13] P. Wolfe. *The simplex method for quadratic programming* ,Econometrica, vol. 27,pp. 382–398, 1959.

[14] G.B. Dantzig .*Linear Programming and Extensions* ,Princeton University Press,Princeton, New-Jersey , 1963.

[15] R. Fletcher,P. E. Gill,al .*Active-set methods*,1971 ,1978.

[16] R. Gabasov,F. M. Kirillova. *Methods of linear programming*, Vol. 1, 2 and 3,Edition of the Minsk University, 1977, 1978, 1980. (in Russian).

[17] Rosen,Goldstein,Levintin,Po-lyak .*The gradient projection Method* ,1960,1964,1966.

[18] R.Gabasov et F.M Kirrilova . *Méthode de programation linéaire* ,volumes,1,2 et 3 Edition de l'Université,Minsk,1977,1978 et 1980,(en Russe).

[19] R.Gabassov , F.M.Kirillova and V.M Raketsky.*On methods for solving the general problem of convex quadratic programming. Soviet mathematics Doklady,pp. 653-657,1981(in Russian)* .

[20] R. Gabassov, F.M. Kirillov a, O.I. Kostyukov a, and V.M. Raketskii. *Méthodes Constructives d'Optimisation, volume 4 : problèmes convexes*,Université e de Minsk,1987.

[21] R.Gabasov, *Adaptive methode of linear programing*,Preprints of the University of Karlsruhe of statistics and Mathematics Germany,1993 .

[22] S.Radjef. *Application de la méthode adaptée aux problèmes multicritères*,thèse doctorat,Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Algérie, 2011.

[23] S.Radjef and M.O.Bibi. *An effective generalization of the direct support method* ,Mathematical problems in Engeniring,vol.2011,Article ID 374390,18 pages,doi :10.1155/2011/374390,2011.

[24] Y. E.Nesterov ,A. S. Nemirovsky .*Interior point methods,Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming*, SIAM Publications, 1994.

[25] Roger.Clarke ,Harindra de Silva et Steven Thorley. *Minimum-Variance Portfolios in the U.S. Equity Market*,Journal of Portfolio Management, 33(1), pp. 10-24.2006.

[26] Victor DeMiguel, Lorenzo Garlappi et Raman Uppal . *Optimal Versus Naive Diversification : How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy*,Review of Financial Studies.2007.

[27] Sebastian Maillard,Thierry Roncalli, Jérôme Teiletche. *On the properties of equally-weighted risk contributions portfolios*,2009.

[28] G.B. Dantzig *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. In Tj.C. Koopmans, éditeur, Activity Analysis of Production and Allocation*,pages 339-347. Wiley, New York ,1951.

Remerciements

Nous tenons à remercier notre promotrice M^{me} Abassi, enseignante à l'université de Bejaia pour nous avoir suivi durant la réalisation de ce modeste travail, les conseils qu'elle nous a prodigué, pour la confiance qu'elle nous a accordé, sa disponibilité et la patience dont elle a fait preuve nous a été d'un apport précieux pour l'accomplissement de ce travail.

Nous tenons à remercier aussi les membres de jury, M^{me} Amri.F., M^{me} Guebli.S. qui ont accepté d'examiner ce travail. Nos remerciements vont également à tous ceux qui nous ont aidé à la réalisation de ce travail.

Nous remercions tous les enseignants du département Mathématiques pour,leurs rôles importants dans notre formation.