



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA - BEJAIA
FACULTE DE LA TECHNOLOGIE

Département Automatique, Télécommunication, Electronique
Option Automatique

MÉMOIRE FIN DU CYCLE

En vue de l'obtention du Diplôme de Master en Electronique
Option : Automatique

THEME :

**COMMANDE D'UN PENDULE
INVERSÉ**

Réalisé par :

M^r Iamarene Sofiane

M^r Aissani Ferhat

Encadré par :

M^r Guenounou Wahib

Promotion 2015

Remerciement

Nous tenons à remercier tout premièrement Dieu le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Même si nous ne pourrions pas remercier toutes les personnes qui ont pu à un moment ou un autre nous aider durant notre projet de fin d'étude, nous tenons à en remercier certaines en particulier. Pour commencer, nous remercions la personne qui nous a suivi et aidé au jour le jour durant 6 mois : notre encadreur Dr. Guenounou Wahib. Nous le remercions pour sa disponibilité, la pertinence de ses remarques et son enthousiasme permanent.

Dans un registre plus personnel, nous tenons à remercier nos parents, qui nous ont toujours soutenu et aidé dans tous nos projets.

Dédicaces

À toi seigneur DIEU tout puissant créateur du ciel et de la terre. Je te remercie pour m'avoir donnée la volonté et surtout le courage de mener dans de bonnes conditions ce travail.

À mes très chers parents qui n'ont jamais cessé de me soutenir tout au long de mon parcours d'étude.

À mon frère et À mes sœurs

À mon ami du parcours Ferhat avec lequel j'ai eu le plaisir de travailler et à toute sa famille.

Et mes copains Abdelghani, massi, abderrezek, Samir et à tout(e)s mes ami(e)s.

Que dieu, le tout puissant, vous préserve et vous procure santé et longue vie afin que je puisse à mon tour vous combler.

Sofiane

Dédicaces

À toi seigneur DIEU tout puissant créateur du ciel et de la terre. Je te remercie pour m'avoir donnée la volonté et surtout le courage de mener dans de bonnes conditions ce travail.

À mes très chers parents qui n'ont jamais cessé de me soutenir tout au long de mon parcours d'étude.

À mes frères et Àmes sœurs

À mon ami du parcours Sofiane avec lequel j'ai eu le plaisir de travailler et à toute sa famille.

Et mes copains Abdelghani, massi, abderrezek, Samir et à tout(e)s mes ami(e)s.

Que dieu, le tout puissant, vous préserve et vous procure santé et longue vie afin que je puisse à mon tour vous combler.

FERHAT

Sommaire

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre I: Modélisation du pendule inversé	
I.1 Introduction	2
I.2 Introduction sur le pendule inversé	2
I.2.1 Objective de l'étude de pendule inversé	2
I.3 Modélisation de pendule inversé	4
I.3.1 Coordonnées de l'ensemble chariot-pendule	4
I.3.2 Energie cinétique de système en mouvement	6
I.3.3 Energie potentielle de système	7
I.4 Modélisation du moteur électrique à courant continue à aimant permanent commandé par l'induit	9
I.4.1 Modèle d'état du moteur	11
I.5 Modélisation de système globale moteur-chariot-pendule	12
I.5.1 Expression de la force F en fonction de la tension d'alimentation du moteur V_c	13
I.5.2 Modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot-pendule	14
I.5.3 Résultats de simulation	16
Conclusion	18
Chapitre II : principe de la commande	
II.1 Introduction	19
II.2 Définition de la fonction quadratique définie positive	19
II.3 Rappels sur la stabilité, détectabilité	19
a) Définition 1	19
b) Théorème 1	20
c) Définition 2	20
d) Théorème 2	20
II.4 Stabilité du système linéaire	20

Sommaire

a) Théorème 3	21
II.5 Commande linéaire quadratique (LQ)	21
II.5.1 Principe de la commande	21
II.5.2 Résultats	21
a) Démonstration 1	22
b) Remarque	24
II.5.3 Schéma de principe	25
II.5.4 Robustesse de la commande	25
a) Démonstration 2	25
II.6 Résolution de l'équation de Riccati	26
II.6.1 Propriété de la matrice hamiltonien	26
a) Démonstration 3	27
II.7 Propriété asymptotique	27
a) Théorème 4	27
II.8 Exemple de simulation	29
II.9 Quelque propriété d'énergie	30
Conclusion	30
Chapitre III : Stabilisation de pendule inversé	
III.1 Introduction	31
III.2 Stabilisation de pendule par retour d'état	31
III.3 Commande linéaire quadratique (LQ)	31
III.3.1 Choix des matrices de pondérations	32
III.3.2 Application pour la stabilisation de pendule inversé	33
III.3.2.1 Linéarisation de modèle autour de point d'équilibre instable $\theta=0$	33
III.3.2.2 Application numérique 1	35
III.3.2.3 Application numérique 2	36
III.4 Résultats de simulation	37
III.5 Résultats de simulation de modèle non linéaire	38
III.5.1 Interprétation du résultat de simulation	40
Conclusion	40
Conclusion Générale	41

Les listes des figures et de tableaux

Liste des figures :

Chapitre I :

Figure I.1 Robots segway i180 serie (gauche) et iBot 4000 (droite)	3
Figure I.2 Robots EMIEW (gauche) et EMIEW2 (droite)	4
Figure I.3 Schémas de l'ensemble chariot et pendule inversé	5
Figure I.4 Schéma électrique et mécanique de l'induit	10
Figure I.5 Relation entre la force mécanique f et la tension V_c	12
Figure I.6 Position du chariot pour $\theta=0$	15
Figure I.7 Position du pendule pour $\theta=0$	16
Figure I.8 Position du chariot pour $\theta=\pi$	16
Figure I.9 Position du pendule pour $\theta=\pi$	17

Chapitre II :

Figure II.1 principe de la commande linéaire quadratique	25
Figure II.2 évolution de la sortie du système	29

Chapitre II :

Figure III.3.1 Résultat de simulation du modèle linéaire avec le régulateur d'état LQR	37
Figure 3.2 Résultat de simulation de stabilisation du pendule inversé par le régulateur LQR dans sa position instable	39

Liste des tableaux :

Tableau I. 1 : Paramètres de l'ensemble pendule-chariot	5
Tableau I.2 : Paramètres du moteur à courant continu	10

La liste des symboles

M : Masse du pendule,
 b : Coefficient de frottement des roues du chariot,
 M : Masse du chariot,
 $X(t)$: Position du pendule,
 l : Demi-longueur de pendule,
 $\theta(t)$: Angle de rotation du pendule,
 $F(t)$: Force exercée sur le chariot,
 g : Intensité de la pesanteur,
 d : Coefficient de frottement de rotation du pendule,
 E_c : l'énergie cinétique,
 E_p : l'énergie potentielle,
 L : Lagrangien du système,
 E_{cM} : énergie cinétique du chariot
 E_{cm} : énergie cinétique du pendule,
 v_c : Vitesse de centre de gravité du pendule,
 $\dot{\theta}$: Vitesse angulaire du pendule
 r_c : Position du centre de gravité du pendule
 \vec{i}, \vec{j} : Vecteurs unitaires du repère x, y ,
 ε : Degré de liberté,
 R_a : Résistance de l'induit,
 L_a : Inductance de l'induit,
 V_c : Tension d'alimentation de l'induit du moteur,
 $I_a(t)$: Intensité du courant
 K_b : Constante électrique du moteur,
 K_m : Constante mécanique,
 J_m : Moment d'inertie
 f_m : Coefficient de frottement visqueux,
 Ω_m : Vitesse angulaire de l'arbre de moteur,
 $C_m(t)$: Couple moteur

La liste des symboles

$Cr(t)$: Couple résistant

Φ : Position angulaire d'un point quelconque située sur le périmètre de la poulie

r : Rayon de la poulie

Z : Vecteur d'état,

A : Matrice d'état du système,

B : Matrice de commande,

C : Matrice de sortie,

\mathfrak{J} : Fonction quadratique,

$Q(t) \geq 0$: Matrice de pondération,

$R > 0$: Matrice de pondération de commande,

$\rho(t)$: Solution de l'équation de Riccati,

$T_c(n * n)$: Matrice de transformation,

$\varepsilon(n * 1)$: Vecteur de transformation d'état,

K : Matrice de gain,

Introduction générale

Introduction générale :

Dans le domaine scientifique et celui de l'enseignement, l'automatique a souvent recours à des cas d'études particuliers, qui sont représentatifs de grandes classes d'applications. De plus, avec l'expérience, la connaissance de ces cas s'est affinée et ils fournissent aujourd'hui une base idéale pour comparer de façon valable les avantages et les inconvénients d'approches différentes.

Le pendule inversé est l'un de ces cas typique qui occupe une place importante dans l'industrie comme un outil de transport, qui à fait l'objet d'une grande discussion tout au long de ces dernières années. Cet intérêt est du au fait que le problème de la commande du pendule inversé est fondamentalement le même que ceux impliqués dans plusieurs autres systèmes tels que le lancement des fusées, la propulsion des missiles et la stabilisation des satellites [1]. Le pendule inversé a toujours été utilisé pour tester les nouvelles méthodes de commande, car il possède plusieurs caractéristiques attrayantes : c'est un système non linéaire, couplé, intrinsèquement instable et il possède plusieurs implications pratiques [2].

L'objet de ce travail est l'étude et l'application d'une commande linéaire quadratique pour la stabilisation d'un pendule inversé,

Pour ce la, Le présent mémoire est organisé en trois chapitres qui sont résumés comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation du pendule inversé, et les modèles obtenus sont utilisés pour la simulation du système.

Dans le deuxième chapitre, on a fait un rappel sur la stabilité des systèmes ainsi que le principe de la commande LQ.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une méthode de synthèse de loi de commande par retour d'état d'ordre entier: LQR (commande linéaire quadratique) [3]. Un problème majeur pour la synthèse de la commande LQR réside dans le choix des matrices de pondération permettant d'atteindre les spécifications désirées.

Enfin une conclusion générale clôture le mémoire.

I.1 Introduction

On s'intéresse dans ce premier chapitre à la modélisation du pendule inversé que nous utiliserons pour illustrer la commande que nous développerons dans ce mémoire. Il est constitué d'un chariot mobile sur des rails et d'un pendule suspendu sur le chariot [7]. Son principe de fonctionnement est très simple en théorie : Après avoir ramené le pendule de sa position d'équilibre basse à la position verticale haute, il faut le maintenir dans cette position.

Dans ce chapitre, à partir du formalisme d'Euler-Lagrange nous développons le modèle dynamique non linéaire du pendule. Nous développons également le modèle du moteur à courant continu. Enfin des courbes de simulation seront présentées afin de valider tous les modèles obtenus.

I.2 Le pendule inversé

Un pendule inversé est un système dynamique multi variable non linéaire instable, il est considéré comme un très bon exemple pour les systèmes instables et non linéaires. Il est utilisé pour tester les performances des techniques de commande pour des constantes de temps très rapides.

I.2.1 Objectif de l'étude d'un pendule inversé

L'étude du pendule inversé a assez bien d'importance. Il y a plusieurs raisons à cela :

- La marche humaine peut être modélisée par un pendule double inversé dont les deux axes de rotation principaux sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses pour les hanches sont amenés à utiliser le modèle du pendule double inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse.

- Dans le même ordre d'idée, la robotique humanoïde utilise ce genre de concept dans le cadre de la dynamique ZMP (zero moment point).[19]

- On voit apparaître des moyens de locomotion dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. On accélère en se penchant en avant et on ralentit en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé. La stabilité est aussi assurée par des gyroscopes mais nous n'entrerons pas dans ce genre de détails.

Les figures I.1 et I.2 donnent quelques exemples de robots qui sont déjà étudiés à base du pendule inversé.



Fig I.1 Robots Segway i180 séries (gauche) et iBot 4000 (droite)

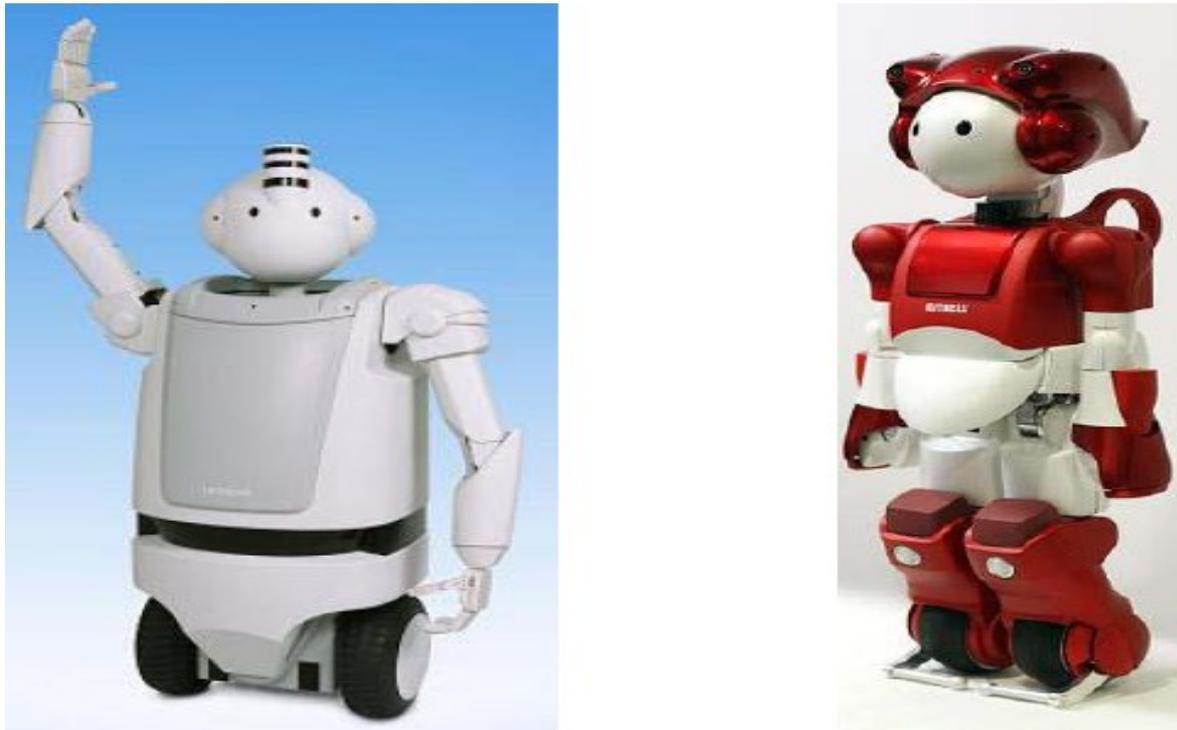


Fig I.2 Robots EMIEW (gauche) and EMIEW2 (droite)

I.3 Modélisation du pendule inversé

Il existe deux méthodes de détermination des équations du mouvement d'un pendule inversé : celle de la loi fondamentale de la dynamique (L.F.D) de Newton qui est basée sur le concept de force et celle de formalisme d'Euler- Lagrange [5] [6] qui est basée sur le principe de la conservation de l'énergie mécanique. Dans ce travail on s'intéresse au formalisme de Lagrange-Euler qui est défini comme une différence entre l'énergie cinétique (E_c) et l'énergie potentielle (E_p) du système :

$$\mathbf{L} = E_c - E_p \quad (\text{I.1})$$

I.3.1 Coordonnée de l'ensemble chariot-pendule

L'ensemble du chariot-pendule possède deux degrés de liberté qui sont représentés, comme le montre la figure I.3, par deux coordonnées généralisées : x pour le déplacement horizontal du chariot et θ pour la rotation du pendule.

La direction positive de x est le sens à droite en mètre et celui de l'angle est le sens des aiguilles d'une montre en radian

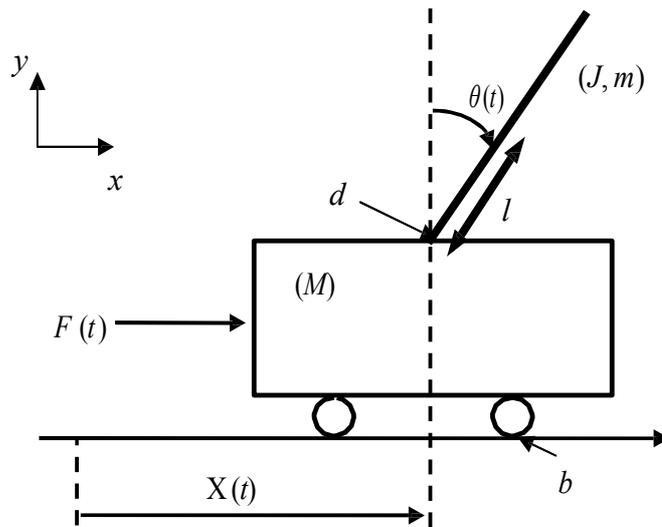


Fig 1.3 : Schémas de l'ensemble chariot et pendule inversé

Les paramètres de l'ensemble pendule-chariot sont :

paramètres	Valeurs	description
m	$0.2Kg$	Masse du pendule
b	$0.00005Ns.m$	Coefficient de frottement des roues du chariot
M	$2.3Kg$	Masse du chariot
$X(t)$	$/$	Position du chariot (m).
l	$0.3m$	Demi-longueur du pendule
$\theta(t)$	$/$	Angle de rotation du pendule (rad)
$F(t)$	$/$	Force exercée sur le chariot (N)
g	$9.81m s^2$	Intensité de la pesanteur
d	$0.005\left(\frac{Nms}{rad}\right)$	Coefficient de frottement de rotation du pendule

Tableau I.1 : Paramètre de l'ensemble chariot et pendule

I.3.2 Energie cinétique du système en mouvement

Le système en mouvement comporte le chariot qui se déplace linéairement sur les rails et le pendule qui se balance sur son axe de rotation.

L'énergie cinétique du chariot en mouvement est donnée par l'équation :

$$E_{cM} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (\text{I.2})$$

L'énergie cinétique du pendule est exprimée par l'équation :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.3})$$

v_c : La vitesse de centre de gravité du pendule

$\dot{\theta}$: La vitesse angulaire du pendule

J : Le moment d'inertie du pendule

La position du centre de gravité du pendule, notée \vec{r}_c à partir de ces coordonnées, est donnée par :

$$\vec{r}_c = (x + l \sin \theta) \vec{i} + l \cos \theta \vec{j} \quad (\text{I.4})$$

\vec{i}, \vec{j} : étant les vecteurs unitaires du repère x, y

La vitesse du centre de gravité du pendule est donc :

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = (\dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta}) \vec{i} - l \dot{\theta} \sin \theta \vec{j} \quad (\text{I.5})$$

En substituant l'équation (1.5) dans l'équation (1.3), l'expression de l'énergie cinétique du pendule devient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.6})$$

Qui s'écrit après simplification du terme $l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = l^2 \dot{\theta}^2$:

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.7})$$

Finalement, l'énergie cinétique totale de l'ensemble chariot et pendule est exprimée par :

$$E_c = E_{cM} + E_{cm} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.8})$$

I.3.3 Energie potentielle du système

Le chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle. L'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par :

$$E_p = mgl \cos \theta \quad (\text{I.9})$$

Une fois que les expressions de l'énergie cinétique E_c de l'ensemble chariot- pendule (Equation I.8) et l'énergie potentiel du système E_p (Equation I.9) sont établies, on utilise l'équation générale d'Euler-Lagrange pour déterminer les équations du mouvement de l'ensemble chariot-pendule.

En substituant les équations (I.8) et (I.9) dans l'équation (I.1) on trouve :

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x} l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (\text{I.10})$$

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_j} + \frac{\partial D_f}{\partial \dot{\varepsilon}_j} = F_j \quad (\text{I.11})$$

où :

$\xi(t)$: désigne les degrés de liberté. Dans le cas du pendule, ces deux degrés de liberté sont la position du chariot $x(t)$ et l'angle de rotation du pendule $\theta(t)$, D_f : désigne l'énergie dissipée par frottement, F : la force généralisée, L : représente le Lagrangien, il est donné par l'équation(I.1)

On définit donc l'équation de Lagrange pour le pendule inversé comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_j} = F_j \quad (\text{I.12})$$

-Pour le degré de liberté $\xi(t) = x(t)$ on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F - b\dot{x} \quad (\text{I.13})$$

Où : F représente la force exercée sur le chariot

La dérivée partielle de lagrangien suivant \dot{x} s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (M\dot{x} + m\dot{x} + ml \cos \theta \dot{\theta}) - 0 = F - b\dot{x} \quad (\text{I.14})$$

La première équation de Lagrange s'écrit alors :

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F - b\dot{x} \quad (\text{I.15})$$

-Pour le degré de liberté $\xi(t)=\theta(t)$ on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.16})$$

La dérivée de Lagrangien suivant $\dot{\theta}$ et θ s'écrit

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x} \cos \theta + ml^2 \dot{\theta} + J\dot{\theta}) - (-m\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} + mgl \sin \theta) = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.17})$$

La deuxième équation de Lagrange est :

$$(ml^2 + J) \ddot{\theta} + m\dot{x} \cos \theta - m\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} + m\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.18})$$

Le modèle de connaissance de l'ensemble chariot-pendule (Equation 1.18 et 1.19) est donné par le système d'équations :

$$\begin{cases} h\ddot{x} + b\dot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \\ mlx \cos \theta \ddot{\theta} + N\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

où :

$$h = M + m, \quad N = ml^2 + J$$

Le système d'équations (I.19) montre la dépendance qui existe entre l'accélération du chariot \ddot{x} et l'accélération angulaire du pendule $\ddot{\theta}$. Ainsi, lorsque $F=0$ (pas de force extérieure), si on déplace le pendule de sa position d'équilibre, il ne sera soumis qu'à sa propre inertie, il se mettra alors à osciller et, puisque le pendule est fixé sur le chariot, ce dernier commencera également à se mouvoir.

I.4 Modélisation du moteur électrique à courant continu à aimant permanent commandé par l'induit

Comme le moteur utilisé pour entrainer le chariot est un moteur à courant continu à aimant permanent, le flux inducteur est constant. Le schéma électrique et mécanique équivalent de l'induit est donné par la figure 1.6.

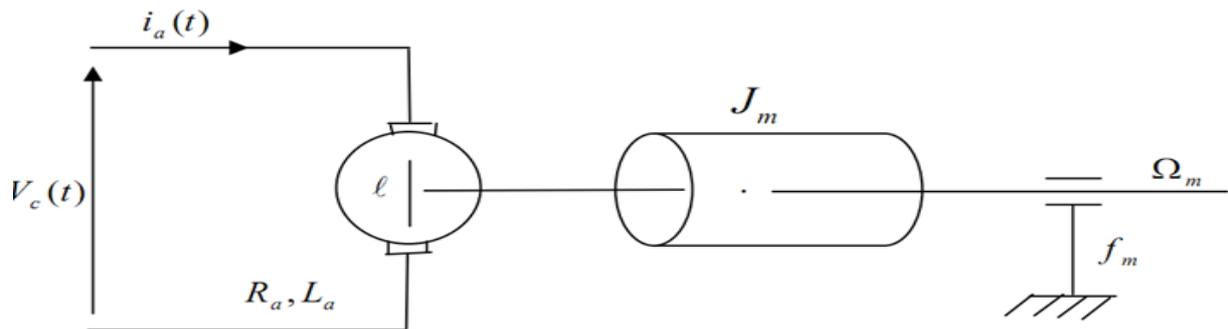


Fig 1.4 : Schéma électrique et mécanique de l'induit

- Les paramètres du moteur sont listés dans le tableau ci-dessous: [7]

Paramètre	valeurs	description
R_a	2.5Ω	Résistance de l'induit
L_a	$0.0025H$	Inductance de l'induit
$-2.5 \leq V \leq 2.5$	/	La tension d'alimentation de l'induit du moteur
$I_a(t)$	/	Intensité du courant (A)
K_b	$0.05N/A$	Constante électrique du moteur
K_m	$0.05Nm$	Constante mécanique
$l(t)$	/	Fcem
J_m	$1.4 \times 10^{-5}Kg.m^2$	Moment d'inertie
Cr	/	couple résistant
Cm	/	couple moteur
f_m	$10^{-6}Kg.m^2/s$	Coefficient de frottement visqueux
Ω_m	/	vitesse angulaire de moteur

Tableau I.2 : paramètres du moteur à courant continue

Les équations régissant le fonctionnement du moteur à courant continu à aimant permanent sont :

- **Les équations électriques :**

Equation de l'induit :

$$v_c(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + \ell(t) \quad (\text{I.20})$$

Equation de la fem

$$\ell(t) = K_b \Omega_m(t) \quad (\text{I.21})$$

- **Equation mécanique**

$$C_m(t) = J_m \frac{d\Omega_m(t)}{dt} + C_r(t) + f_m \Omega_m(t) \quad (\text{I.22})$$

- **Equation de couple**

$$\frac{d\Omega_m(t)}{dt} = \frac{-f_m}{J_m} \Omega_m(t) + \frac{K_m}{J_m} i_a(t) \quad (\text{I.23})$$

I.4.1 Modèle d'état du moteur [8]

En absence du couple résistant ($C_r(t) = 0$), et en considérant la vitesse angulaire de l'arbre du moteur comme sortie, puis en remplaçant l'équation (1.23), dans l'équation (1.22) et l'équation (1.21) dans l'équation (1.20) on obtient :

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \frac{-K_b}{L_a} \Omega_m(t) - \frac{R_a}{L_a} i_a(t) + \frac{1}{L_a} v_c(t) \quad (\text{I.24})$$

$$y_m = \Omega_m$$

Ces équations, écrites sous la forme matricielle, permettent d'obtenir le modèle d'état de la machine, il est donné par :

$$\begin{cases} \dot{Z} = A z + B v_c \\ y = C z \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Avec : $Z = [\Omega_m, i_a]^T$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-f_m}{J_m} & \frac{K_m}{J_m} \\ \frac{-K_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0] \quad (\text{I.26})$$

Si on considère le courant de l'induit comme étant la sortie, l'équation dynamique du modèle reste la même, par contre la matrice de sortie devient :

$$C = [0 \quad 1] \quad (\text{I.27})$$

I.5 Modélisation du système global : moteur-chariot-pendule

Le modèle (1.19) décrit le régime transitoire de l'ensemble pendule-chariot lorsque l'entrée est une force extérieure F . Dans notre étude, la force F est développée par un moteur à courant continu. Le schéma de la figure 1.5 illustre la relation existante entre le moteur commandé par la tension $V_c(t)$ et la force F permettant l'entraînement du chariot donc le balancement du pendule :

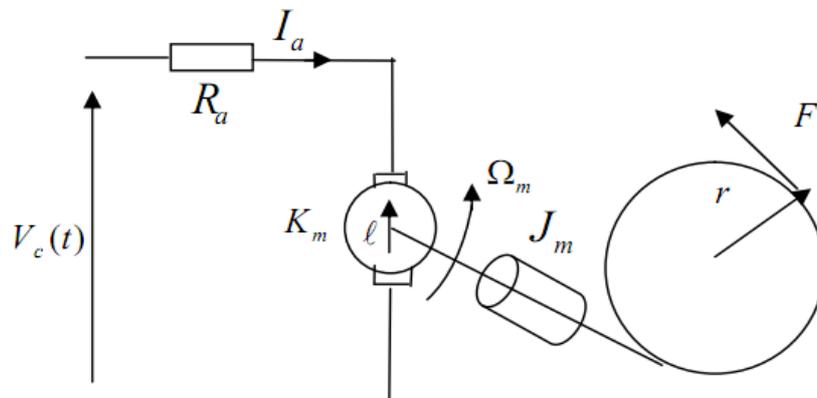


Fig 1.5 : Relation entre la force mécanique F et la tension V_c

I.5.1 Expression de la force F en fonction de la tension d'alimentation du moteur V_c

Pour déterminer cette expression et afin de ne pas rendre plus complexe le modèle global de l'ensemble pendule-chariot-moteur, on néglige la dynamique du moteur, par conséquent, l'équation électrique (1.20) devient en tenant compte de l'équation (1.21) [6] :

$$v_c = R_a i_a + K_b \Omega_m \quad (\text{I.28})$$

Et comme $x = r\Phi$. Φ : étant la position angulaire d'un point quelconque située sur le périmètre de la poulie, et $r = 0.0027m$: le rayon de la poulie, on obtient :

$$\frac{d}{dt} x(t) = r \frac{d}{dt} \Phi(t) = r \Omega_m(t) \quad (\text{I.29})$$

La vitesse du moteur Ω_m s'exprime donc par rapport à la vitesse du chariot \dot{x} par la relation :

$$\Omega_m = \frac{\dot{x}}{r} \quad (\text{I.30})$$

En substituant l'équation (1.30) dans l'équation (1.28), l'expression du courant de l'induit I_a s'écrit :

$$I_a = \frac{V_c}{R_a} - \frac{K_b}{r R_a} \dot{x} \quad (\text{I.31})$$

Le couple produit à l'arbre du moteur (équation (1.23)) crée une force qui est donnée par

$$F = \frac{C_m}{r} = \frac{K_m I_a}{r} \quad (\text{I.32})$$

En remplaçant l'équation (1.31) dans l'équation (1.32), on obtient finalement:

$$F = \frac{K_m}{r R_a} V_c - \frac{K_b K_m}{r^2 R_a} \dot{x} \quad (\text{I.33})$$

I.5.2 Modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot –pendule

Afin d'obtenir le modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot-pendule, on utilise une nouvelle fois le modèle (I.19). Le vecteur d'état est:

$$z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}] \quad (\text{I.34})$$

Après quelques manipulations mathématiques, on obtient le modèle non linéaire (1.35) où la grandeur de commande est la force F ::

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{-bN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \cos z_3 \sin z_3 \\ \quad + \frac{m l d \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4 + \frac{m l N \sin z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4^2 + \frac{FN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = \frac{m l g}{N} \sin z_3 - \frac{d}{N} z_4 + \frac{m l b \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_2 + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 z_3 \sin z_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3)} \\ \quad - \frac{m^2 l^2 d \cos^2 z_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3)} z_4 - \frac{m^2 l^2 \cos z_3 \sin z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4^2 - \frac{m l F}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \cos z_3 \\ y_1 = z_1 \\ y_2 = z_3 \end{array} \right. \quad (\text{I.35})$$

Lorsque la grandeur de commande du modèle est la tension de commande V_c du moteur, il suffit de substituer dans le modèle (1.35) la force F par son expression (Equation (1.33)) on obtient le nouveau modèle.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{z}_1 = z_2 \\
 \dot{z}_2 = \frac{-bN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \cos z_3 \sin z_3 \\
 \quad + \frac{m l d \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4 + \frac{m l N \sin z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4^2 + \frac{N}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m}{R_a r} V_c \\
 \quad - \frac{N}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m K_b}{R_a r^2} z_2 \\
 \dot{z}_3 = z_4 \\
 \dot{z}_4 = \frac{m l g}{N} \sin z_3 - \frac{d}{N} z_4 + \frac{m l b \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_2 + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 z_3 \sin z_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3)} \\
 \quad - \frac{m^2 l^2 d \cos^2 z_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3)} z_4 - \frac{m^2 l^2 \cos z_3 \sin z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4^2 - \frac{m l \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m}{R_a r} V_c \\
 \quad + \frac{m l \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m K_b}{R_a r^2} z_2 \\
 y_1 = z_1 \\
 y_2 = z_3
 \end{array} \right. \quad (I. 36)$$

1.5.3 Résultat de simulation :

Les figures ci-dessous représentent des simulations du modèle pour la position du chariot et du pendule :

-Première cas pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0]$ et impulsion de durée 0.1 sec et d'amplitude 0.04N

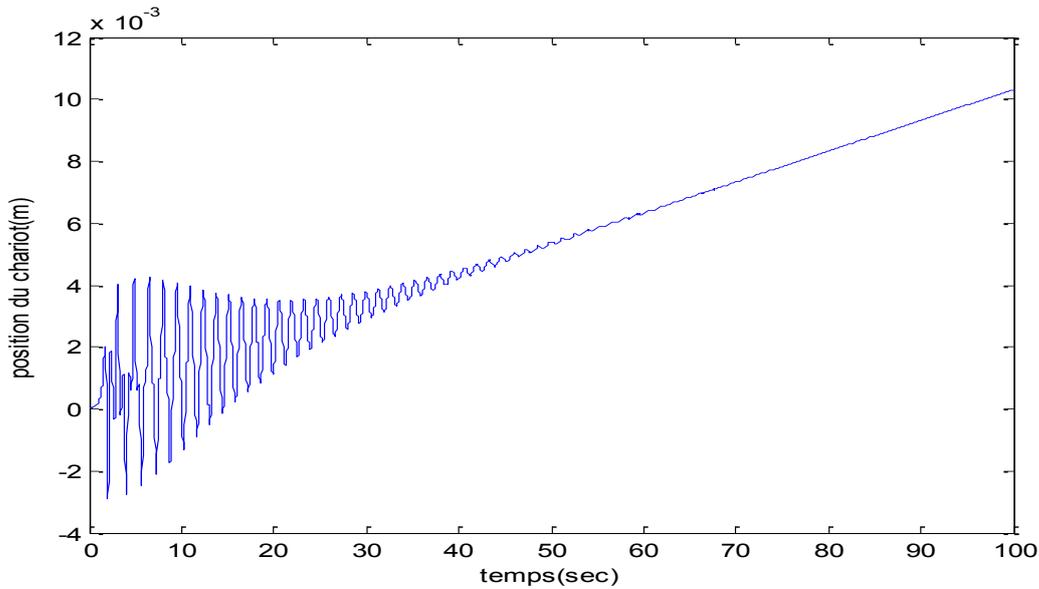


Fig. 1.6 : Position du chariot pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0]$

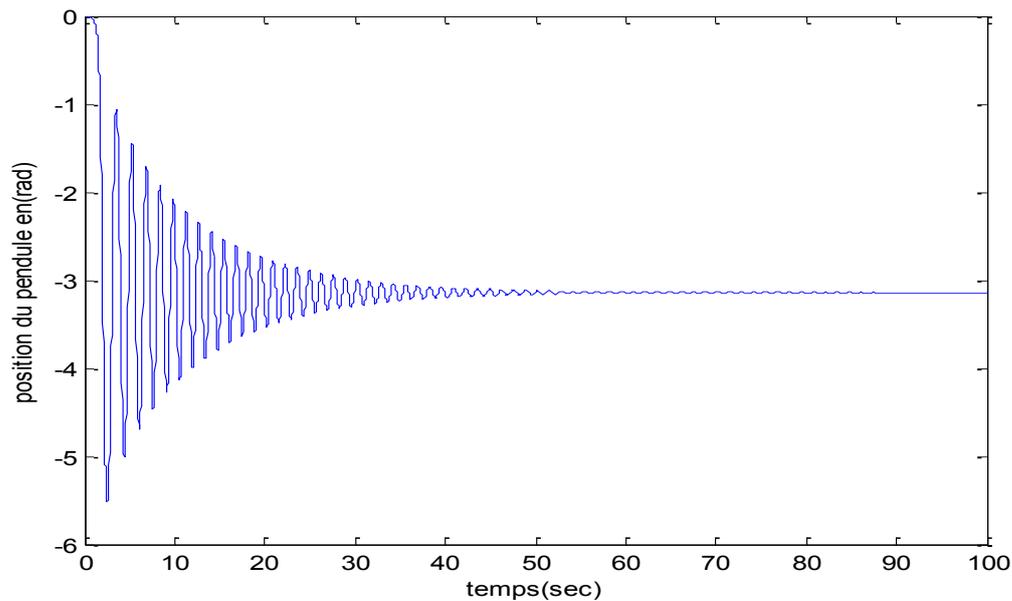


Fig. 1.7 : Position du pendule pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0]$

-deuxième cas pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$ et une impulsion de durée 0.1 sec et d'amplitude 0.04N

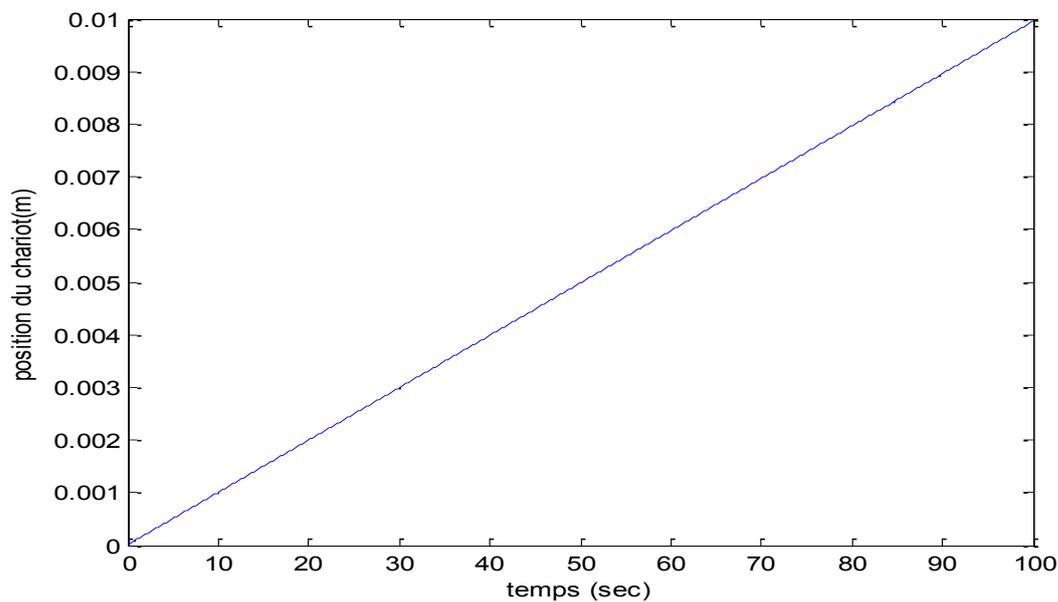


Fig : 1.8 : Position du chariot pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$

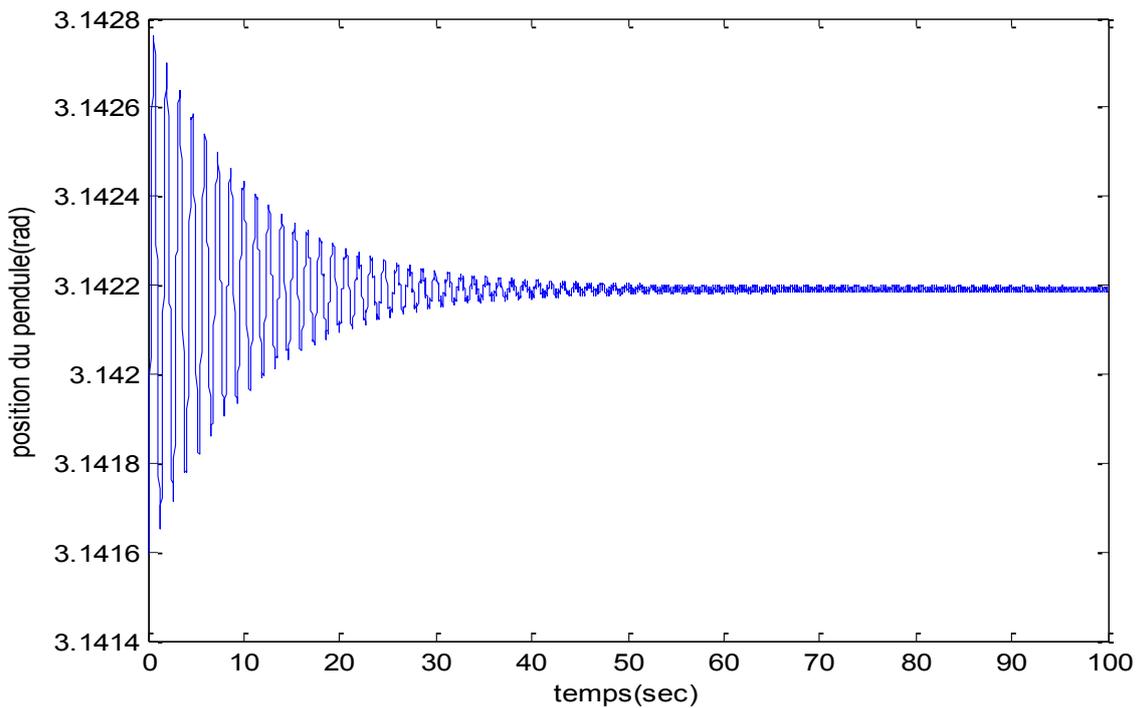


Fig. 1.9 : Position du pendule pour $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$

Ces résultats illustrent la complexité du modèle. Les figures (1.6 et 1.7) montre, que lorsque le pendule est initialement en position instable haute ($\theta = 0$), il se stabilise après un régime transitoire dans sa position d'équilibre stable ($\theta = \pi$). La figure (1.8 et 1.9) montre que, lorsque le pendule est initialement dans sa position d'équilibre stable ($\theta = \pi$), lorsqu'il est écarté grâce à la tension Vc , il y revient après le régime transitoire. Il faut noter également qu'une fois la barre en position $\theta = \pi$, le chariot continue à évoluer dans les deux sens, quelque soit la position initiale du pendule, à cause de l'effet de balancement du pendule.

Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la modélisation du pendule inversé puis au développement du modèle pendule-chariot-moteur sur Simulink, qui nous a permis de mettre en évidence les fortes non linéarités existantes dans le système. Le système qu'on a obtenu est un système non linéaire de rang 4 (quatre états). Le prochain chapitre sera consacré à présenter le principe de la commande optimale.

II.1 introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques rappels théoriques sur la notion de stabilité, ainsi que sur le principe de la commande linéaire quadratique (LQ), qui est applicable au pendule inversé.

II.2 Définition de la fonction quadratique définie positive :

La fonction quadratique $U(x) = x^T Q x$, où $Q_{n \times n}$ est une matrice réelle symétrique, est dite définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice $Q_{n \times n}$ sont strictement positives.

Les fonctions quadratiques sont souvent utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques (fonction de Lyapunov). Notamment : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique ou de gravité et l'énergie totale sont des fonctions quadratiques de l'état pour les systèmes mécaniques.

II.3 Rappels sur la stabilité et la détectabilité :

a) Définition 1 :

La paire (A, B) est stabilisable par retour d'état s'il existe une commande par retour d'état de la forme $u = Fx(t)$ telle que la matrice $(A + BF)$ est stable.

Le théorème ci-dessous permet de vérifier cette propriété

b) Théorème 1:

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (A, B) est stabilisable.
- Il existe une matrice L telle que $(A + BF)$ est stable.
- La matrice $[A - \lambda I \ B]$ est à colonnes de rang plein pour $Re\lambda < 0$
- Pour tout λ et x tel que $x^T A = \lambda x$, $x^T B \neq 0$

Définition 2:

Une paire (C, A) est détectable si les modes non observables sont stables.

Le théorème ci- dessous permet de vérifier cette propriété pour un système :

c) Théorème 2 :

(C, A) est détectable, alors :

- Il existe une matrice L telle que $(A + LC)$ est stable.
- La matrice $[A - \lambda I \ C]^T$ est à colonne rang plein pour $Re(\lambda) < 0$
- Pour tout λ et x telle que : $Ax = \lambda x \ Cx \neq 0$

II.4 Stabilité des systèmes linéaires

Si un système est linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x \in R^n \quad (\text{II.1})$$

alors le système est globalement asymptotiquement stable (le point d'équilibre étant à l'origine) si toutes les valeurs propres de A sont strictement négative, soit :

$$Re(\lambda_i(A)) < 0 \quad i = 1, \dots, n$$

a) **Théorème 3** : (stabilité de Lyapunov des systèmes linéaires)

Le système linéaire (II.1) est asymptotiquement stable (ou les valeurs propres de A sont à partie réelles négatives) si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive Q , il existe une matrice P définie positive (symétrique) satisfaisant l'équation de Lyapunov :

$$A^T P + PA + Q = 0 \quad (\text{II.2})$$

II.5 Commande linéaire quadratique (LQ) :

En Automatique la commande linéaire quadratique (LQ), est une méthode qui permet de calculer la matrice de gains d'une commande par retour d'état. L'initiateur de cette approche est Kalman, auteur des trois articles fondamentaux

II.5.1 Principe : [10]

Considérons un système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x \in R^n; u \in R^m \\ z(t) = Nx(t) & z \in R^q \end{cases}$$

II.5.2 Résultats :

La commande par retour d'état qui stabilise le système et minimise le critère LQ :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t))dt \\ &= \int_0^{\infty} (x^T(t)Q_x x(t) + u^T(t)Ru(t))dt \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Avec $R > 0$, $Q \geq 0$ et $Q_x = N^T Q N$, s'écrit :

$$u(t) = K_c x(t)$$

avec :

$$K_c = R^{-1} B^T P_c$$

Et P_c solution positive (symétrique) de l'équation de Riccati :

$$P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q_c = 0 \quad (\text{II.4})$$

On a alors :

$$J_{min} = x_0^T P_c x_0 \quad (\text{II.5})$$

où :

$$x_0: \text{état initial à } t = 0$$

a) Démonstration : [11]

La dynamique du système en boucle fermée sur la loi de commande $u(t) = -K x(t)$ obéit à l'équation :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (\text{II.6})$$

La réponse autonome de $x(t)$ s'écrit alors : $x(t) = x^{A_f t} x_0$

$$\text{avec } A_f = A - BK \text{ et } x_0 = x(t = 0).$$

Le critère J devient :

$$J = \int_0^\infty (x^T(t) Q_x x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (\text{II.7})$$

$$= \int_0^\infty x^T(t) (Q_x + K^T R K) x(t) dt \quad (\text{II.8})$$

$$= x_0^T \left(\int_0^\infty e^{A_f^T t} (Q_x + K^T R K) e^{A_f t} dt \right) x_0 \quad (\text{II.9})$$

$$= x_0^T P x_0 \quad (\text{II.10})$$

avec :

$$P = \int_0^\infty e^{A_f^T t} (Q_x + K^T R K) e^{A_f t} dt.$$

La contrainte A_f stable entraine que P vérifie l'équation de Lypunov (voir théorème 3) :

$$A_f^T P + P A_f + Q_x + K^T R K = 0 \quad (\text{II.11})$$

Par ailleurs $P \geq 0$ car $J = x_0^T P x_0$ et $J \geq 0 \forall x_0$ (critère quadratique).

Soit K_c la valeur optimale de K qui minimise J et P , la solution correspondante de l'équation de Lyapunov II.11, soit :

$$(A - B K_c)^T P_c + P_c (A - B K_c) + Q_x + K_c^T R K_c = 0 \quad (\text{II.12})$$

Considérons une variation Δ_K autour de K_c ; soit $K = K_c + \Delta_K$ alors il en résulte une variation Δ_P autour de P_c ; soit $P = P_c + \Delta_P$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} & (A - B(K_c + \Delta_k))^T (P_c + \Delta_p) + (P_c + \Delta_p)(A - B(K_c + \Delta_k)) + \dots Q_x + \\ & (K_c + \Delta_k)^T R (K_c + \Delta_k) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

K_c est la valeur optimale au sens du critère J, Ssi le critère augmente pour toute variation Δ_c autour de K_c .

Soit :

$$\Delta_p > 0 \forall \Delta_k / A - B(K_c + \Delta_k) \text{ Stable.}$$

(si Δ_k est telle que $A - B(K_c + \Delta_k)$ est instable, alors le critère devient infinie). si on retranche l'équation II.12 de l'équation II.13, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (A - B(K_c + \Delta_k))^T \Delta_p - \Delta_k^T B^T P_c + \Delta_p (A - B(K_c + \Delta_k)) - P_c B \Delta_k + \dots \Delta_k^T R \Delta_k \\ & + \Delta_k^T R K_c + K_c^T R \Delta_k = 0 \end{aligned}$$

$$(A - BK)^T \Delta_p + \Delta_p (A - BK) + \dots + \Delta_k^T (RK_c - B^T P_c) + (RK_c - B^T P_c)^T \Delta_k + \Delta_k^T R \Delta_k = 0$$

C'est une équation de LYAPUNOV. $A - BK$ étant stable, Δ_p est positif Ssi (théorème de Lyapunov) :

$$\Delta_k^T (RK_c - B^T P_c) + (RK_c - B^T P_c)^T \Delta_k + \Delta_k^T R \Delta_k > 0 \quad \forall \Delta_k$$

Or $\Delta_k^T R \Delta_k > 0 \quad \forall \Delta_k$ car $R > 0$,

il faut donc que :

$$RK_c - B^T P_c = 0,$$

soit :

$$K_c = R^{-1} B^T P_c \quad (\text{II.14})$$

Si on remplace cette équation dans l'équation II.12, nous obtenons l'équation de Riccati de commande :

$$P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q_c = 0 \quad (\text{II.15})$$

a) Remarque :

On peut retrouver directement l'équation de Lyapunov en boucle fermée II.12 à partir de l'équation de Riccati en boucle ouverte II.15 et de II.14, il suffit de rajouter et de retrancher $P_c B R^{-1} B^T P_c$ dans II.15

Cette démonstration s'appuie sur le théorème de LYAPUNOV, une démonstration plus générale utilise le principe du maximum [4].

La figure 2.1 illustre le principe de la commande linéaire quadratique

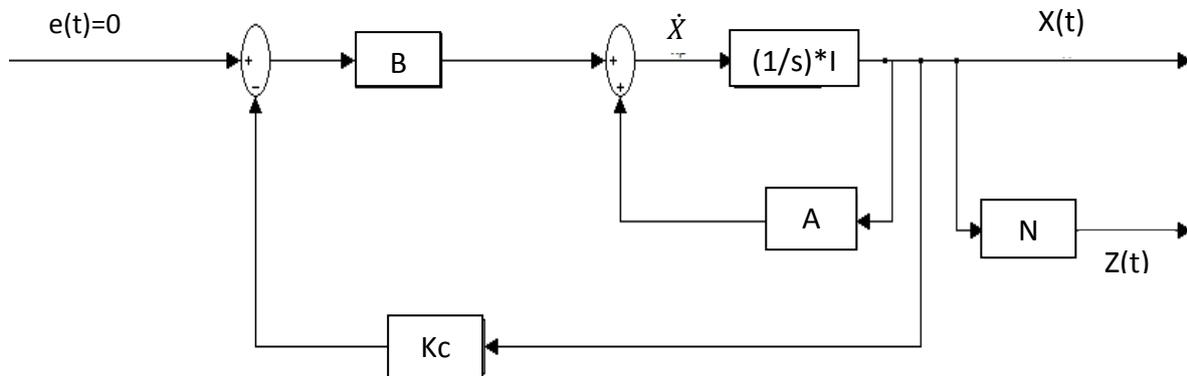


Fig.II.1 Principe de la commande linéaire quadratique

Le transfert du système est :

$$G_{zu}(s) = \frac{z}{u}(s) = N(sI - A)^{-1}B \quad (\text{II.16})$$

Le transfert de la boucle ouverte corrigée est donné par :

$$L_c(s) = K_c(sI - A)^{-1}B \quad (\text{II.17})$$

II.5.4 Robustesse de la commande LQ [10]

Le transfert de la boucle ouverte corrigée $L_c(s)$ vérifie la propriété :

$$(I + L_c^T(-s))R(I + L_c(s)) = R + G_{zu}^T(-s)QG_{zu}(s) \quad (\text{II.18})$$

a) Démonstration :

En ajoutant et retranchant sP_c à l'équation de Riccati (II.4) nous obtenons :

$$N^T Q N - P_c B R^{-1} B^T P_c - (-sI - A^T)P_c - P_c(sI - A) = 0 \quad (\text{II.19})$$

En multipliant chaque terme de cette dernière expression, à gauche par $B^T(-sI - A^T)^{-1}$ et à droite par $(sI - A^T)^{-1}B$, on obtient :

$$B^T(-sI - A^T)^{-1}N^TQN(sI - A)^{-1}B - B^T(-sI - A^T)^{-1}P_cBR^{-1}B^TP_c(sI - A)^{-1}B - B^TP_c(-sI - A)^{-1}B - B^T(-sI - A^T)^{-1}P_cB = 0$$

En tenant compte de la définition de G_{zu} en (II.16) et du fait que $K_c = R^{-1}B^TP_c$

Nous obtenons :

$$G_{zu}^T(-s)QG_{zu}(s) - L_c^T(-s)RL_c(s) - RL_c(s) - L_c^T(-s)R = 0 \quad (II.20)$$

Que l'on peut réécrire sous la forme :

$$(I + L_c^T(-s))R(I + L_c(s)) = R + G_{zu}^T(-s)QG_{zu}(s) \quad (II.21)$$

Dans le cas mono-variable (dim u=1), on obtient :

$$|1+L_c(jw)| \geq 1 \text{ ou } |S_u(jw)| \leq 1, \forall w \quad (II.22)$$

II.6 Résolution de l'équation de Riccati :

L'équation II.4, s'écrit aussi :

$$[P_c - I_n] \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_c & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P_c \end{bmatrix} = 0 \quad (II.23)$$

Avec : I_n désigne la matrice identité de dimension n

$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_c & -A^T \end{bmatrix}$ est appelée la matrice Hamiltonienne associée à l'équation de Riccati II.15.

II.6.1 Propriété de la matrice Hamiltonienne H :

Les 2n valeurs propres de H sont :

- Les n valeurs propres stables de la boucle fermée spec $A - BK_c$
- Les n valeurs propres opposées par rapport à l'axe imaginaire (donc instables)

a) Démonstration

Effectuons une transformation régulière sur H

$$\tilde{H} = H^{-1}HM$$

Avec :

$$M = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P_c & I_n \end{bmatrix} \text{ et } M^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P_c & I_n \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P_c & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P_c & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x - A^T P_c & -A^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P_c & -BR^{-1}B^T \\ -P_c A - A^T P_c - Q_x - P_c BR^{-1}B^T P_c & -A^T + P_c BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BK_c & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -(A - BK_c)^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc :

$$\det(sI_{2N} - \tilde{H}) = \det(sI_{2N} - H) = \det(sI_n - (A - BK_c)) \det(sI_n + (A - BK_c)^T)$$

II.7 Propriétés asymptotiques :

Le critère LQ peut être qualitativement perçu comme un compromis entre performance (décrit par la pondération sur z) et la consommation (décrit par la pondération sur u).

a) Théorème :(comportement asymptotique) [6]

Considérons un système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x \in R^n, u \in R^m \\ z(t) = Nx(t) & z \in R^q \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

La commande par retour d'état qui minimise le critère LQ :

$$J = \int_0^{\infty} (z^T(t)z(t) + \rho u^T(t)u(t))dt \quad (\text{II.25})$$

$$= \int_0^{\infty} (x^T N^T N(t)x(t) + \rho u^T(t)u(t))dt \quad (\text{II.26})$$

Avec ρ scalaire positif, s'écrit :

$$u(t) = -K_c x(t) \text{ avec } K_c = \frac{1}{\rho} B^T P_c \text{ et}$$

$$P_c = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{\rho} B B^T \\ -N^T N & -A^T \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Nous avons alors:

- $\lim_{\rho \rightarrow 0} (P_c) = P_0$ existe et $\lim_{\rho \rightarrow 0} (J) = x^T(0)P_0 x(0)$
- Enfin, si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- ❖ $\dim(z) \leq \dim(u)$ ($q \leq m$)
- ❖ Le transfert $\frac{z}{u(s)} = N(sI_n - A)^{-1}B$ n'a pas de zéro dans le demi-plan droit.

Alors :

$$P_0 = 0$$

La dernière hypothèse illustre le fait que, dans le cas de système à déphasage non minimal (c.-à-d. avec des zéros instables), on ne peut pas pousser indéfiniment les performances (c.-à-d. avoir une valeur P_c très faible) même si l'on s'autorise des commandes sans aucune limitation ; ceci est tout à fait logique puisque les zéros (du système comme du correcteur) attirent les pôles en boucle fermée quand le gain de boucle augmente (ou lorsque la pondération sur u diminue dans le critère LQ)

II.7 Exemple de simulation :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2.15x_1 - 0.305x_2 - 0.01x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 \end{cases}$$

$$y = x_1$$

Les matrices de pondérations de système : $R=1, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A = \begin{bmatrix} -2.15 & -0.305 & -0.01 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = [1 \ 0 \ 0]^T, C = [1 \ 0 \ 0]$$

Le vecteur commande $K = [1.0906 \ 2.4394 \ 0.9900]$

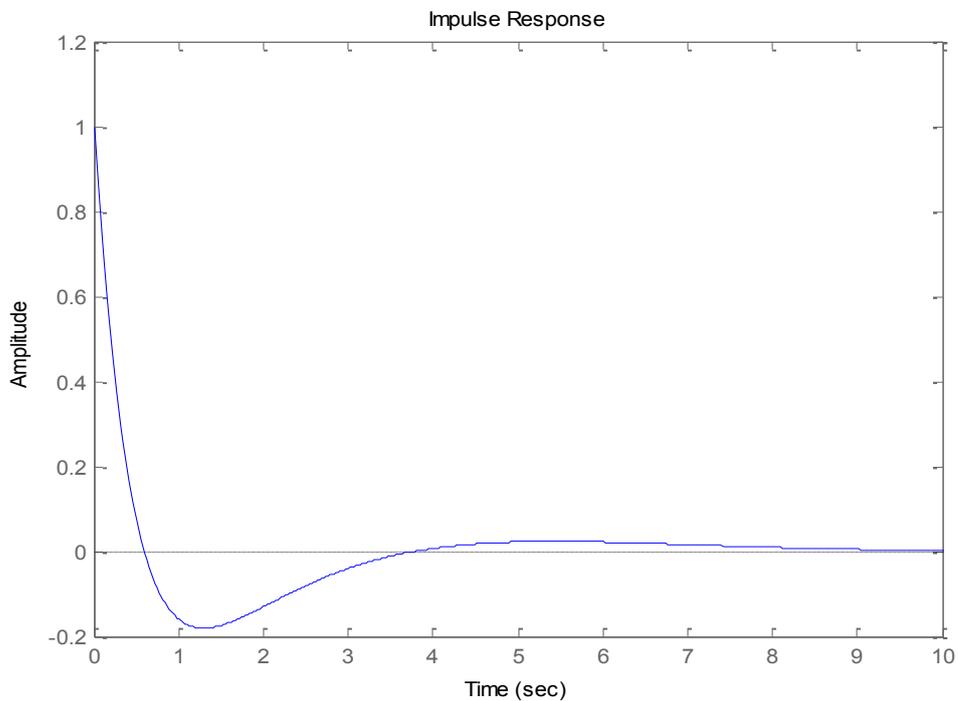


Fig II.2 : Evolution de la sortie de système

II.8 Quelques propriétés d'énergie

La fonction d'énergie possède deux propriétés essentielles. La première est la qualité d'extremum au point d'équilibre, à savoir s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Le point d'équilibre est stable lorsque cette extremum est un minimum.

Si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue, alors le système (qu'il soit linéaire ou non linéaire), devra rejoindre finalement un point d'équilibre.

On pourra donc conclure sur la stabilité d'un système par l'examen d'une seule fonction scalaire qui est l'énergie totale

- Le point d'énergie mécanique nulle est le point d'équilibre.
- La stabilité asymptotique implique la convergence de l'énergie vers 0.
- L'instabilité est liée à la croissance de l'énergie mécanique.

Conclusion :

Ce chapitre a été consacré à la présentation du principe de la commande linéaire quadratique LQ, et de quelques définitions et théorèmes sur la stabilité.

L'application de la commande linéaire quadratique LQ fera l'objet d'une application sur le pendule inversé dans le prochain chapitre.

III.1 Introduction

La stabilité est une exigence critique dans la conception d'un asservissement. Une perte de stabilité entraîne au mieux un comportement oscillatoire et donc une incapacité à régler ou poursuivre, au pire la génération de signaux de grande énergie qui vont endommager le système [12]. On présente dans ce chapitre les résultats de simulation obtenus par application de commande LQ pour la stabilisation d'un pendule inversé dans sa position verticale instable.

III.2 Stabilisation du pendule par retour d'état

Le problème de stabilisation est un problème qu'il faut résoudre lorsqu'on commande le pendule inversé. Dans ce travail on utilise les techniques de commande par retour d'état.

De nombreuses méthodes de commande des processus utilisent le principe du retour d'état (commande optimale, placement de pôles,...). Le principe de cette commande est de déterminer une commande telle que les pôles du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe pour obtenir de bonne performance en termes précision, de rapidité et de stabilité. Les pôles du système étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.

III.3 Commande linéaire quadratique (LQR)

On considère le système linéaire continu, invariant dans le temps, régi par les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t); \\ y(t) = Cz(t) \end{cases}; \quad z(t) = z_0 \quad (\text{III.1})$$

où :

$z(t) \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de commande, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ le vecteur de sortie, et z_0 désigne l'état initial à l'instant initial $t=0$, A est la matrice d'évolution ou d'état, B la matrice de commande ou d'entrée, C la matrice de sortie ou de mesure.

La synthèse linéaire quadratique dénommée LQ ou LQR (Linéaire Quadratique Régulateur)[13, 14, 15] Consiste en la recherche d'une matrice de gain K , telle que la commande par retour d'état $u(t) = -Kz(t)$ stabilise le système et minimise le critère quadratique

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\infty} (\dot{z}Qz + u^T Ru) dt \quad (\text{III.2})$$

avec les matrices de pondération Q et R satisfaisant

$$Q = Q^t \geq 0, R = R^t > 0 \quad (\text{III.3})$$

La matrice de gain K optimale est donnée par

$$k = -R^{-1}B^T \rho_0 \quad (\text{III.4})$$

où ρ_0 est la solution de l'équation algébrique de Riccati

$$\rho_0 A + A^T \rho_0 - \rho_0 B R^{-1} B^T \rho_0 + Q = 0 \quad (\text{III.5})$$

L'obtention du gain K passe donc par la recherche de la solution ρ_0 symétrique définie positive de l'équation de Riccati qui est reportée dans l'équation (III.4), fournit la matrice gain K .

III.3.1 Choix des matrices de pondération

La synthèse des matrices de gain du contrôleur optimal, repose directement sur les matrices de pondération Q et R . On peut trouver dans la littérature deux méthodes pour les choisir. La première méthode est la règle de Bryson [16] qui suggère de choisir des matrices de pondération diagonales, dont les coefficients diagonaux sont égaux au carré de l'inverse de l'écart maximum souhaité sur la variable correspondante. Bryson [16] indique également que cette règle ne fournit que des valeurs initiales, que l'on peut ensuite améliorer par simulations successives.

La règle de Bryson donne:

$$Q = \text{diag} (q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ et } R = \text{diag} (r_1, r_2, \dots, r_m) \quad (\text{III.6})$$

avec :

$$r_i = \left[\frac{1}{\sup(u_i)} \right]^2, i = 1, 2, \dots, m \text{ et } q_i = \left[\frac{1}{\sup(y_i)} \right]^2, i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.7})$$

Dans la deuxième méthode [17] les matrices de pondération Q et R peuvent être choisies symétriques, diagonales :

- 1) Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices d'identité.
- 2) Dans une seconde étape, on accélère ou on décélère globalement le système en multipliant la matrice Q par un scalaire ρ (accélération avec $\rho > 1$ et décélération avec $\rho < 1$), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
- 3) Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de Q correspondant aux premiers.
- 4) Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de R.

III.3.2 Application pour la stabilisation du pendule inversé

III.3.2.1 Linéarisation du modèle autour du point d'équilibre instable ($\theta = 0$)

Le modèle du pendule inversé est trop complexe et non linéaire, et comme l'objectif de la commande du pendule inversé est d'asservir la position du chariot x et l'angle θ à zéro (position d'équilibre instable), alors une linéarisation autour de cette dernière s'impose [18].

Pour des petites variations de θ autour du point d'équilibre θ_0 on a :

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \varepsilon \\ \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

On considère que tous les termes d'ordre supérieur sont nuls

$$\dot{\varepsilon}^2 \approx 0$$

Le développement en série de Taylor du premier ordre d'une fonction de θ est donné par :

$$f(\theta) \approx f(\theta_0) + \varepsilon \frac{df}{d\theta}(\theta_0) \quad (\text{III.9})$$

Si on se limite aux petites variations de θ autour du point de fonctionnement $\theta_0 = 0$ correspondant à la position haute du pendule et en utilisant le développement limité du première ordre (équation (III.8) et (III.9)), on obtient les approximations suivantes [7]

$$\begin{cases} \cos \theta \approx \cos(0) + \theta[-\sin(0)] = 1 \\ \sin \theta \approx \sin(0) + \theta[\cos(0)] = \theta \\ \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

En substituant les linéarisations (III.10) dans le système d'équations (I.36), on trouve le système d'équations linéarisé de l'ensemble pendule –chariot –moteur suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \left(\frac{-bN}{hN-m^2l^2} - \frac{N}{hN-m^2l^2} \frac{k_m k_b}{r^2} \frac{1}{R_a} \right) z_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hN-m^2l^2} z_3 + \frac{mld}{hN-m^2l^2} z_4 + \frac{N}{hN-m^2l^2} \frac{k_m}{R_a r} V_c \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = \left(\frac{mlb}{hN-m^2l^2} + \frac{ml}{hN-m^2l^2} \frac{k_m k_b}{r^2} \frac{1}{R_a} \right) z_2 + \left(\frac{mgl}{N} + \frac{m^3 l^3 g}{N(hN-m^2l^2)} \right) z_3 - \frac{d}{N} z_4 - \frac{m^2 l^2 d}{N(hN-m^2l^2)} z_4 \\ \quad - \frac{ml}{hN-m^2l^2} \frac{k_m}{R_a r} V_c \\ y_1 = z_1 \\ y_2 = z_3 \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Le modèle d'état (III.11) peut être mis sous la forme

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ y = Cz \end{cases}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{hN-m^2l^2} - \frac{N}{hN-m^2l^2} \frac{k_b k_m}{R_a r^2} & \frac{-gl^2 m^2}{hN-m^2l^2} & \frac{mld}{hN-m^2l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{hN-m^2l^2} + \frac{ml}{hN-m^2l^2} \frac{k_m k_b}{R_a r^2} & \frac{mgl}{N} + \frac{m^3 l^3 g}{N(hN-m^2l^2)} & \frac{-d}{N} + \frac{-m^2 l^2 d}{N(hN-m^2l^2)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_m N}{(hN - l^2 m^2) r R_a} & 0 & \frac{-ml}{hN - m^2 l^2} \frac{k_m}{R_a r} \end{bmatrix}^T, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

III.3.2.2 Application numérique 1 :

En remplaçant les paramètres du modèle linéaire (III.12) par leurs valeurs numériques données dans le chapitre 1, on obtient les valeurs numériques des matrices A,B,C de l'ensemble pendule–chariot–moteur :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 199 & 43778 & -372 \end{bmatrix}, \quad (III.13)$$

$$B = [0 \quad 3.2204 \quad 0 \quad -10,7263]^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice A de l'équation (III.13) sont données par :

$$\lambda_1 = 635.6152, \lambda_2 = -220.2848, \lambda_3 = -2.0461, \lambda_4 = -31.121$$

Celles-ci montrent que le modèle linéaire autour du point d'équilibre $\theta = 0$ est instable, ce qui justifie l'utilisation d'une commande permettant la stabilisation du pendule, c'est le problème que nous traitons dans ce mémoire.

En substituant les linéarisations (III.10) dans le système d'équations (I.35), on trouve le système d'équations linéarisé de l'ensemble pendule-chariot :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{-bN}{hN-m^2l^2} z_2 - \frac{m^2l^2g}{hN-m^2l^2} z_3 + \frac{mld}{hN-m^2l^2} z_4 + \frac{FN}{hN-m^2l^2} \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = \left(\frac{mgl}{N} + \frac{m^3l^3g}{N(hN-m^2l^2)} \right) z_3 - \left(\frac{d}{N} z_4 - \frac{m^2l^2d}{N(hN-m^2l^2)} \right) z_4 + \frac{mlb}{hN-m^2l^2} z_2 \\ - \frac{mlF}{hN-m^2l^2} \\ y_1 = z_1 \\ y_2 = z_3 \end{array} \right. \quad (III.14)$$

Le modèle d'état correspondant est donné par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{hN-m^2l^2} & \frac{-gl^2m^2}{hN-m^2l^2} & \frac{mld}{hN-m^2l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{hN-m^2l^2} & \frac{mgl}{N} + \frac{m^3l^3g}{N(hN-m^2l^2)} & \frac{-d}{N} + \frac{-m^2l^2d}{N(hN-m^2l^2)} \end{bmatrix} \quad (III.15)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ \frac{(hN - m^2l^2)}{hN - m^2l^2} \\ 0 \\ -ml \\ \frac{hN - m^2l^2}{hN - m^2l^2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

III.3.2.3 Application numérique 2

En remplaçant les paramètres du modèle linéaire (III.15) par leurs valeurs numériques données dans le p premier chapitre, on obtient les valeurs numériques des matrices A, B et C du système pendule –chariot :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8523 & 0.0072 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 35.5135 & -0.3017 \end{bmatrix}, B = [0 \ 0.4348 \ 0 \ -1.4481]^T, \quad (III.16)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le nombre d'état du modèle étant égale à $n=4$ et le nombre d'entrées de commande étant $m=1$, on choisit les matrices de pondérations suivantes :

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad R=0.0005 \quad (III.17)$$

Puisque les valeurs maximales de la commande V_c , la position x et l'angle θ sont connues alors pour le choix des matrices de pondération de ces variables la règle de Bryson est utilisée (Equation(III.16), (III.17)) et l'absence des valeurs maximales de la vitesse du chariot et la position du pendule nous a obligé d'utiliser la deuxième méthode. qu'est une méthode simple de choix et de modification des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

Une fois les coefficients de pondération Q et R sont obtenus, la matrice de gain K qui minimise la fonction quadratique \mathfrak{J} est calculée en utilisant la fonction 'lqr' de Matlab, on trouve:

$$K = [-63.246 \quad -78.3871 \quad -400.1978 \quad -95.0500] \quad (III.18)$$

Les pôles de la boucle fermée, sont dans ce cas :

$$p_1 = -98.179, p_2 = -1.6869 + 1.6449i, p_3 = -1.6869 - 1.6449i, p_4 = -1.6310 \quad (III.19)$$

III.4 Résultats de simulation avec le modèle linéaire.

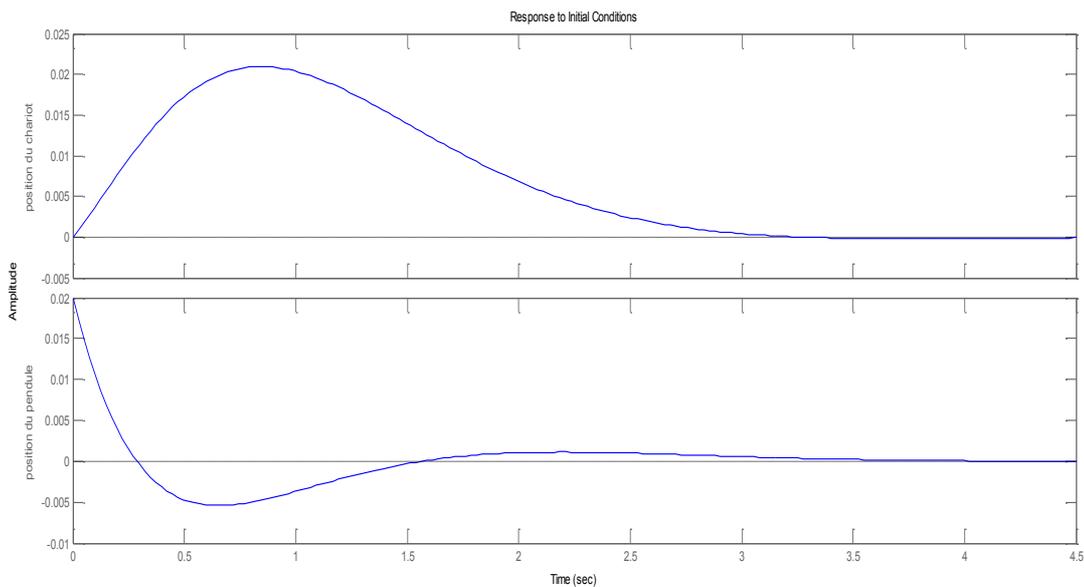


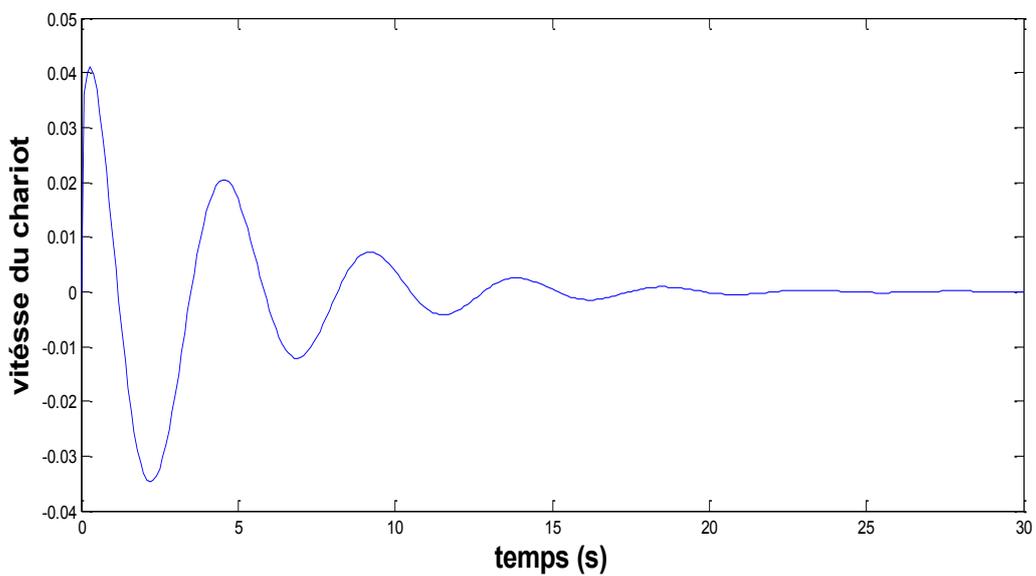
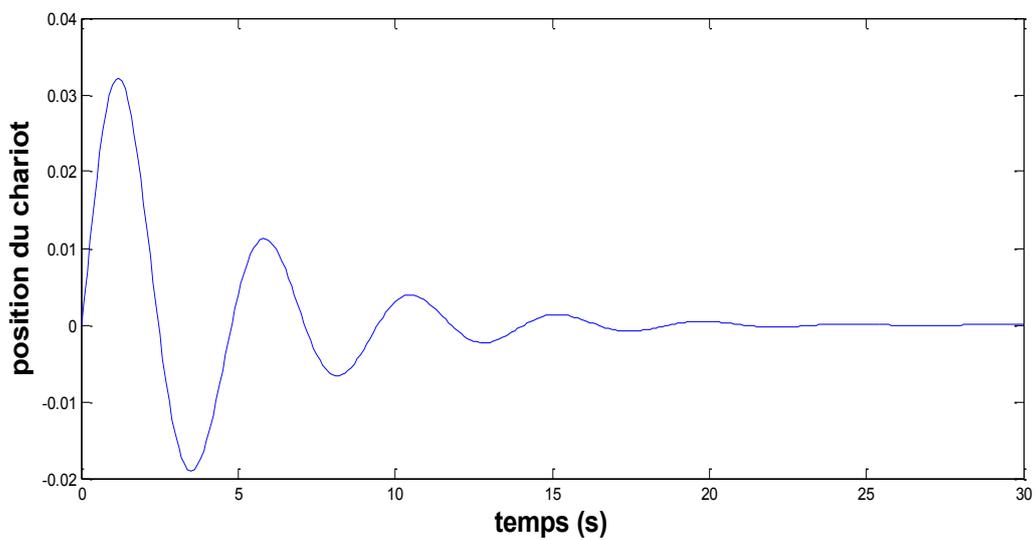
Fig 3.1: Résultats de simulation du modèle linéaire avec le régulateur d'état LQR

$$CI = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}] = [0 \ 0 \ 0.02 \ 0]$$

La figure 3.1 montre que le système pendule inversé linéaire se stabilise au bout de 3.5 s tout en respectant les contraintes imposées. En effet le déplacement du chariot ne dépasse pas les limites physiques du rail $[-0.4, 0.4]$.

III.5 Résultats de simulation avec modèle non linéaire

Les résultats de simulations obtenues, en utilisant le modèle non linéaire, sont donnés par la figure 3.2.



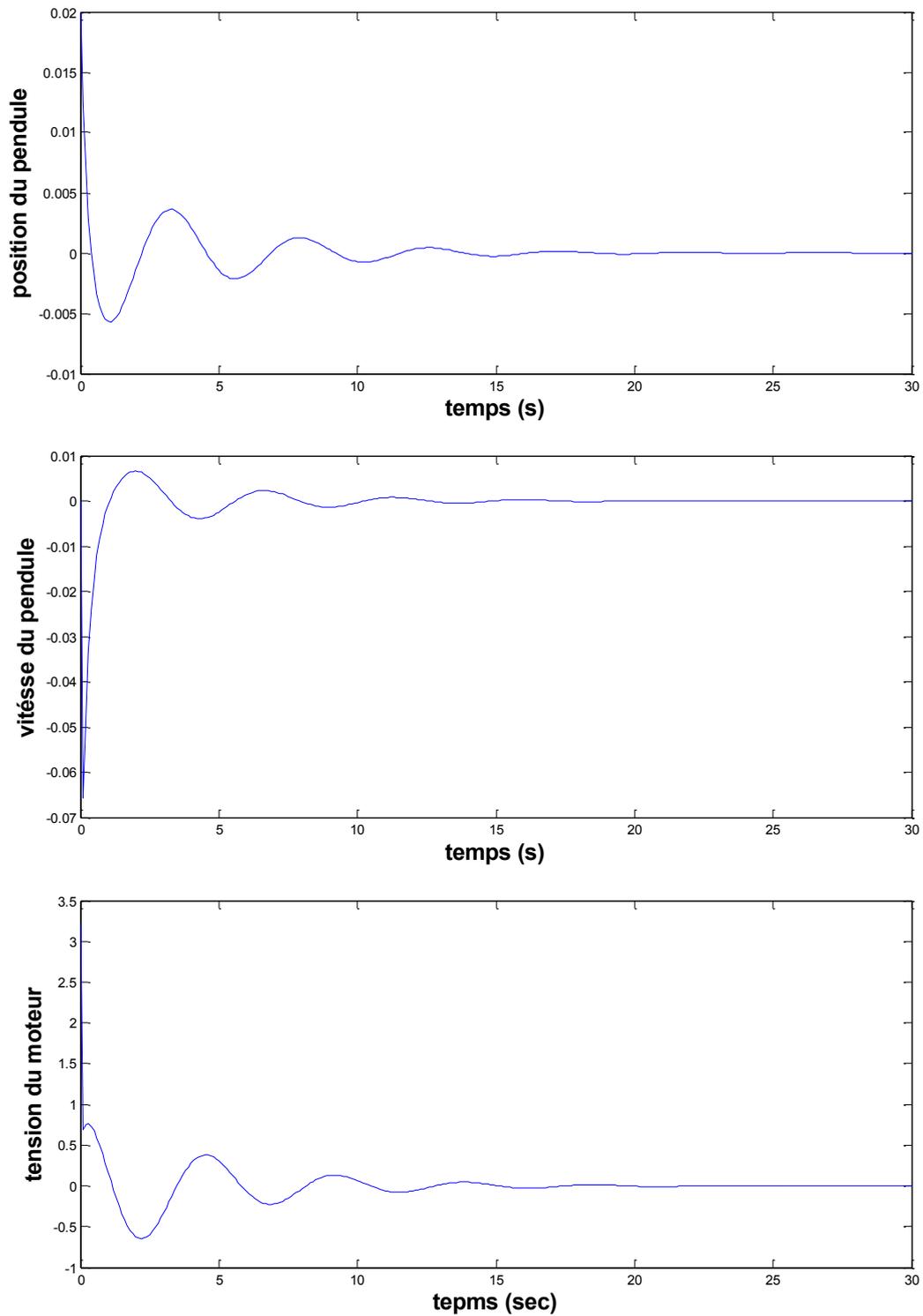


Figure 3.2 Résultat de simulation de stabilisation du pendule inversé par le régulateur LQR dans sa position instable $CI = [x \dot{x} \theta \dot{\theta}] = [0 \ 0 \ 0.02 \ 0]$.

III.5.1 Interprétation des résultats de simulation

A partir des graphes de la figure (3.2) on constate que la commande linéaire quadratique LQR permet de stabiliser le pendule inversé, et elle montre l'efficacité du contrôleur LQR en termes de précision et de stabilité. On constate aussi que :

- 1) Le système se stabilise au bout de 10 à 15 sec.
- 2) La dynamique des sous-systèmes pendule et chariot sont tolérables.
- 3) Le signal de commande v_c est admissible et réalisable.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu appliquer la commande linéaire quadratique pour la stabilisation du pendule inversé. Pour ce faire, une linéarisation du modèle du pendule a été réalisée avant d'effectuer un choix des matrices de pondération et le calcul de la matrice de gain.

Les résultats obtenus montrent que la commande LQR donne de bonnes performances en termes de stabilité et de précision.

Conclusions générale

Ce mémoire a été consacré à l'étude et à la commande d'un pendule inversé. Dans un premier temps, nous sommes amenés d'abord à comprendre les équations du système et à comprendre sa dynamique. La modélisation du système pendule inversé a été largement détaillée dans le chapitre 1. Le modèle obtenu mis en évidence les fortes non linéarités intrinsèques au système.

Comme le modèle que nous avons obtenu, après linéarisation, possède des pôles instables, et vu les contraintes en position qui nous limite la distance maximale que le chariot peut atteindre, une commande avancée est alors nécessaire pour pouvoir satisfaire les objectifs de la commande en terme de stabilité et de performance. Pour cela, on a choisi la commande optimale.

Dans un deuxième temps, le développement du formalisme mathématique illustrant la commande optimale quadratique a été présenté dans le chapitre 2. Ceci nous a permis de nous familiariser un peu plus avec cet outil de commande. La simplicité de cette loi de commande et les performances qu'elle donne nous incite à utiliser un régulateur de type LQR pour notre système en question.

Finalement, le chapitre 3 est complètement consacré à synthèse du régulateur LQR pour la commande du pendule inversé. Pour ce faire, on a commencé par la commande du système linéarisé autour de son point d'équilibre instable en position verticale. Pour stabiliser le système, le choix des matrices de pondération est crucial. Une simple modification dans les matrices Q et R entraîne une large variation dans les performances du système. Il est aussi à noter que certaines configurations de ces matrices rendent le système instable. Une fois les performances exigées sont satisfaites, on a implémenté le correcteur LQR sur le système non linéaire.

Finalement, nous souhaitons que ce travail soit repris par d'autres étudiants en vue d'améliorer encore plus le travail et de confirmer les résultats aussi bien sur le plan théorique que pratique.

Références Bibliographiques

- [1] Matignon D. "Représentation en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire". PhD Thesis, Université de Paris-Sud, Orsay. 1998.
- [2] Mullhaupt Ph. "Introduction à l'Analyse et à la commande des systèmes non linéaires". Lausanne, Juin 2007.
- [3] Abdelaziz T H S and Valasek M. "State derivative feedback by LQR for linear time invariant systems". Proceeding of 16th IFAC World Congress, Prague, July 3-8, 2005.
- [4] MIOMIR.V "ZERO-MOMENT-POINT-Thirty five years of its life". International journal of humanoid robotics, vol.1,No.1 (2004) 157-173
- [5] Bugeja M. « Non linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system ».EuroconLjubljana, Slovenia.2003
- [6] Lam J. "Control of an inverted pendulum". Dept of Electrical &computer Engineering, University of California. U.S.A. 2004
- [7] Manuel d'installation du pendule inverse feedback Digital pendulum controller 33-201.
- [8] Boussalem Chahira . « Implémentation de régulateurs fractionnaires pour la stabilisation d'un pendule inversé, Mémoire de magister, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou.2012
- [9] Andrew K. "Standup and stabilization of the inverted pendulum. Submitted to the department of mechanical engineering in partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor of Science", Massachusetts Institute of technology.June 1999
- [10] D. Alazarde. « notes de cours : régulateur LQ/LQG »
- [11] M.Libre « commande optimale des processus déterministe »,polycopie de cours supaéro
- [12] Alazard D, Ghristelle C, Apkarian P, Gauvit M et Ferreres G. "Robustesse et commande optimal". Editions Cépaduès. Paris. 1999.
- [13] Larminat P. "Automatique: Commande des systèmes linéaires".2^{ème} édition. Edition Hermès, Paris. 1996.
- [14] Mammar S. "Notes de cours de master RVSI: Automatique avancée". Université d'Evry Val d'Essonne, France. 2006

Références Bibliographiques

[15] Oustaloup A."La dérivation non entière: Théorie, Synthèse et Applications". Editions Hermes, Paris. 1995.

[16] Olivier MP."Equipement pour l'eau et l'environnement: Modélisation, analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation". Thèse de Doctorat, Ecole Nationale du génie Rural des Eaux et des Forêts. Janvier 1994.

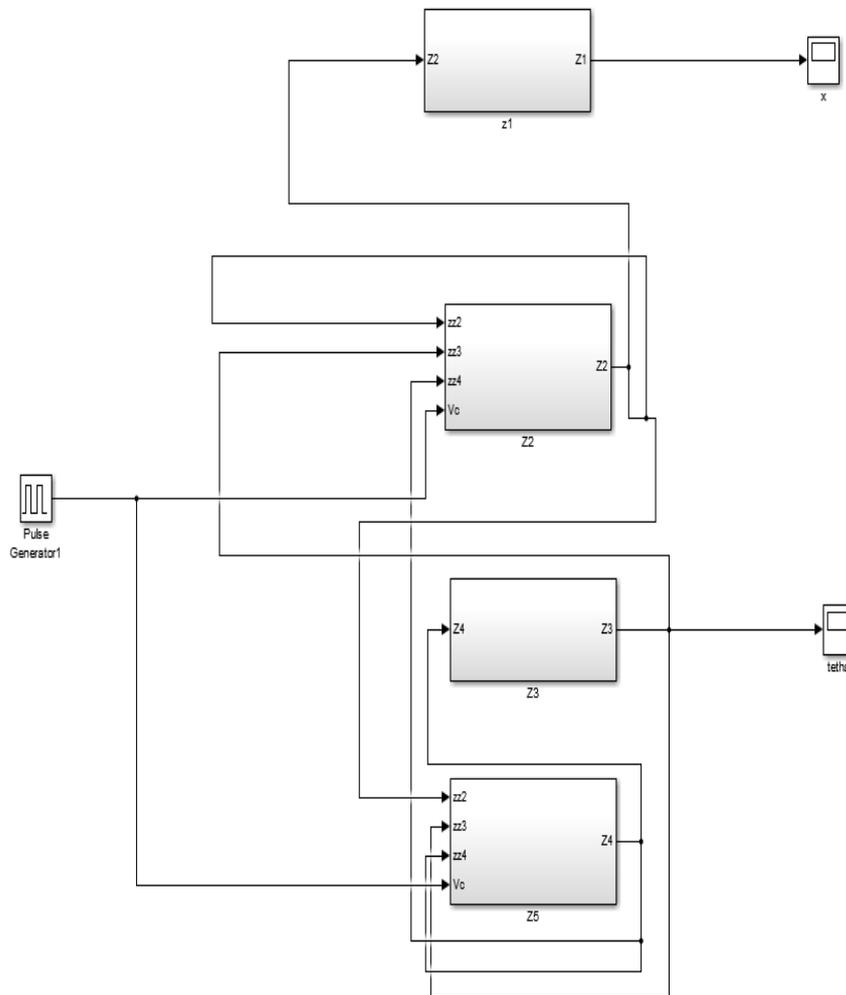
[17] Andrew K."Standup and stabilization of the inverted pendulum Submitted to the department of mechanical engineering in partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor of Science", Massachusetts Institute of Technology. June 1999.

[18] Dr.H .merabet boulouiha «note de cours techniques de commande avancées». centre universitaire de relizane Ahmed zabana faculté de la science et de la technologie, département d'électronique.

[19] Commande numérique des harmoniques des système « application aux engaines mobiles et aux robots » : ouvrage collectif publié sous la direction de C.Fargeon, Éditions Masson.

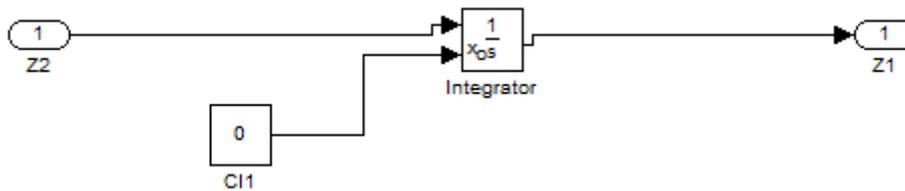
ANNEXES :

Annexes I : Modèle sous Matlab Simulink

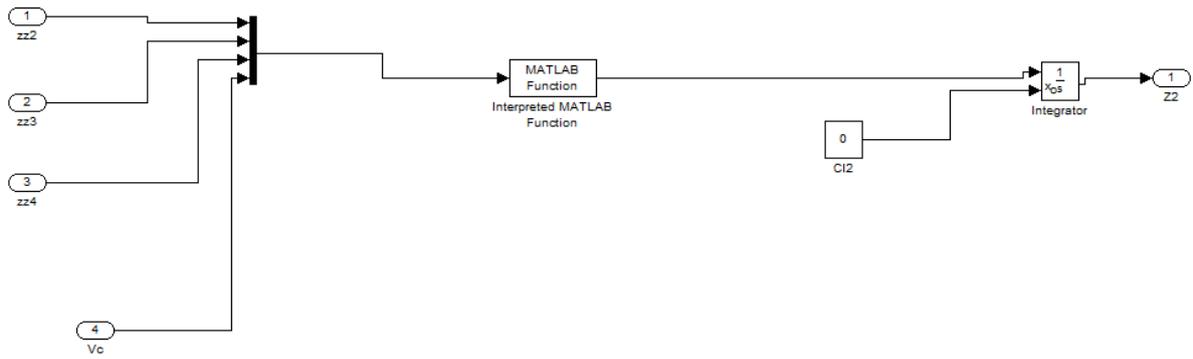


I.1 Représentation de chaque block de schéma Simulink :

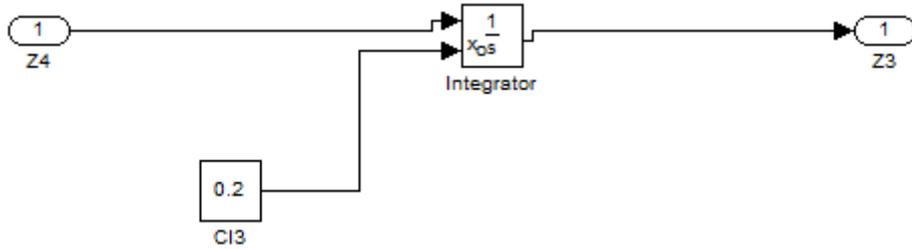
I.1.1 Le block z1c'est la position de chariot :



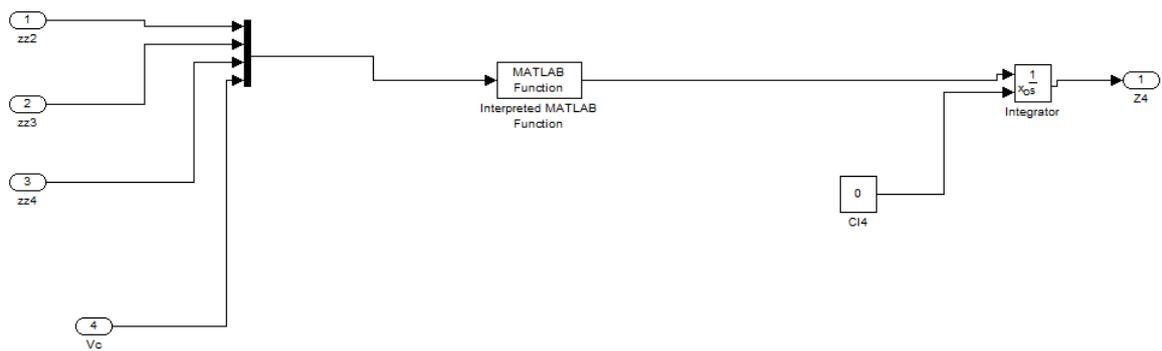
I.1.2 Le block z2 c'est la vitesse du chariot :



I.1.3 Le block z3 c'est la position du pendule



I.1.4 Le block z5 c'est la vitesse du pendule :



Annexe II : fichier script de calcul de la commande :

```
clearall
clc
Ts=0.1;

M=2.3;
l=0.3;
g=9.81;
b=0.00005;
d=0.005;
m=0.2;

g=9.81;
km=0.05;
kb=0.05;
Ra=2.5;
R=0.0027;
J=0.000014;
N=(m*l^2)+J
h=M+m;
f=20;
A=[0 1 0 0;0 -(b*N)/(h*N-(m^2*l^2)) -(g*m^2*l^2)/(h*N-(m^2*l^2))
(m*l*d)/(h*N-(m^2*l^2)); 0 0 0 1; 0 (m*l*b)/(h*N-(m^2*l^2))
((m*g*l)/N)+((m^3*l^3)*g)/(N*(h*N-(m^2*l^2))) (-d/N)-((m^2*l^2*d))/(N*(h*N-
(m^2*l^2)))]
B=[0; (N)/((h*N-(m^2*l^2))); 0; (-m*l)/(h*N-(m^2*l^2))]
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
D=0;
sys1=ss(A, B, C, D);

C0=CTRB(A,B);

det(C0);

R=RANK(C0)
Q=[2 0 0 0;
0 0.5 0 0;
0 0 12 0;
0 0 0 2.5];

r=0.0005;
out=lqr(A,B*f,Q,r)
p=eig(A-B*out)
%impulse (ss(A-B*f*out,B*f,C,D))

holdon
figure(2)
initial(ss(A-B*f*out,B*f,C,D),[0 0 0.2 0]')
```


Résumé

Ce mémoire est un projet de fin d'étude de master 2 consacré à l'étude et à la commande d'un pendule inversé. Ce travail se constitue de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à la modélisation du système moteur-chariot-pendule. Dans le second chapitre on a présenté le principe de la commande optimal LQR. Dans le chapitre 3, après plusieurs testes et choix des pondérations Q et R, on a implémenté un correcteur LQR pour stabiliser le système tout en assurant les performances exigées. Les résultats sont obtenus via Simulink/Matlab.

Abstract

This memory is a final project master study 2 dedicated to the study and control of an inverted pendulum. This work consists of three chapters. The first chapter is devoted to modeling of the engine carriage-clock system. In the second chapter we introduced the principle of optimal control LQR. In chapter 3, after several tested and choice of weights Q and R, we implemented a LQR correction to stabilize the system while ensuring the required performance. The results are obtained via Simulink /Matlab.