

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de BEJAIA

Faculté de la Technologie

Département Automatique, Télécommunication et Électronique

Mémoire de fin d'études

En vu de l'obtention du diplôme de Master en électronique

Option : Automatique

THEME :

**ETUDE DES METHODES D'ANALySE ET DE
CONCEPTION DES SYSTEMES A
INCERTITUDES PARAMETRIQUES**

Présenté par :

Mr. ISSAADI Abdellah

Mr. KHACHA Ilyes

Devant le jury:

Mr.H.LEHOUCHE

Melle.N.ARAR

Encadré par :

Mr.H.HADAR

Promotion : 2014 /2015

Remerciements

En premier lieu, on tient à remercier dieu de nous avoir donné le courage et la force pour faire ce travail et nous le prions toujours qu'il soit à nos côtés.

Nous adressons tous nos sincères et respectueux remerciements à :

- MR. H.Hadar : (chargé de cours à l'université de Béjaia), nous vous présentons de tout cœur, nos remerciements les plus distingués pour votre gentillesse, pour votre aide durant notre travail et d'avoir mis à notre disposition tous les documents nécessaires à la réalisation de ce travail.
- Les membres du jury d'avoir accepté de juger notre travail.

Enfin, nous tenons à remercier tous les enseignants Ayant contribué à notre formation durant tout notre Cours universitaire.

Ilyes

Dédicace

Je dédie ce précieux travail :

- A toute ma famille et mes chers parents et tout mes amies.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole d'amour et de tendresse qui s'est sacrifiée pour mon bien être, ma réussite et mon bonheur, **à ma Mère.**

A mon Père école de mon enfance, celui qui a veillé tout au long de sa vie à m'encourager et à me protéger, celui qui a tant donné pour nous assurer une vie décente.

A ma chère grande mère qui a toujours été là pour nous, qui nous a toujours entourés de son amour et de son affection.

A mes chers frères MASSOUD, MOUMEN, RAOUF qui m'ont toujours soutenu.

A ma cher sœur SAMIA qui m'a toujours soutenu.

A mon binôme, mes copains de chambre et mon meilleure ami BENDADOUCHE.H qui m'a toujours aidée surtout avec ses conseils.

A mes cher(e)s ami(e)s Kamel, Fahem, Nabil, Moumen, Lounis, Khalad, Boussaad, aita, Idir, Hakim, Naim, Sofian, 3ami Brahem, Fateh, Ghano, Azdin, Sofian, Massi, Fares, Hakim, Hocin, Samiha, Karima, Hanan, Dida, Sabrina, Kahina, Zaza, Wahiba,

A tous les résidents de 1000lits.

A tous ceux qui me sont chers

A vous tous, je dis qu'aucune dédicace ne saurait exprimer à sa juste valeur l'amour que je porte pour vous.

Tableau de matières

Introduction Général.....	01
Chapitre I : Définitions et Généralités sur les systèmes linéaires incertains	
I.1-Introduction	03
I.2. Critère de stabilité	04
I.2.1. Critère de Hurwitz.....	04
I.2.1.1. Définition :.....	04
I.2.1.2. Condition pour la stabilité :	04
I.3. Modèles d'incertitude et robustesse.....	05
I.4. Critère de Nyquist	05
I.4. Théorème de franchissement de frontière	06
I.5. Commande robuste	06
I.5.1. Stabilité robuste.....	07
I.5.2. Synthèse robust multi-objectif	07
I.5.3. Synthèse nominal multi-objectif	07
I.5.4. Synthèse englobant multi-objectif.....	07
I.6. COMMANDE ROBUSTE H_∞	08
I.6.1. Présentation :	08
I.6.2. Problématique.....	08
I.6.3. Domaine d'application :	08
I.7. Théorème de petits gains :	09
I.8. Mu-analyse :.....	09
I.9. Notion de borne robustesse :	09
I.10. Stabilité robuste d'un disc polynôme :.....	10
I.11. Incertitude :	10

I.11.1. Modélisation des incertitudes dynamiques de modèles	10
I.11.1.1. Incertitudes de modélisation	10
I.11.1.2. Incertitudes de conception	11
I.11.2. Les différentes classes d'incertitudes	11
I.11.2.1. Incertitudes poly-topiques :	11
I.11.2.2. Incertitudes affines.....	12
I.12. Hypersphère de stabilité dans l'espace des paramètres	12
I.13. Principe d'exclusion de zéro :	13
I.14. La marge de stabilité paramétrique.....	14
I.15. Propriétés extrêmes des bords et des sommets	14
I.16. Conclusion	15

Chapitre II : Méthodes d'analyses de la robustesse de systèmes intervalles.

II.1. Introduction	16
II.2. Théorème de Kharitonov	17
II.3. Théorème de Kharitonov généralisé.....	18
II.5.2. Hypothèse.....	25
II.5.3. Theorem (théorème des segments exposés) (1); (2).....	26
II.5.4. Lemme 1.1.....	26
II.6. Stabilité d'un segment linéaire.....	26
II.6.1. Condition de phase bornée.....	27
Lemme 1.2.....	27
II.7. Directions convexes	27
Lemme 1.3	28
II.7.2. Direction réel convexe	28
II.7.3 Lemme 1.4	28
II.8. Conclusion	29

III.Introduction.....	Er
reur ! Signet non défini.	
III.1. Ensemble de systèmes extrême de Kharitonov :.....	30
III.2. Enveloppes et ensemble image dans le plan complexe des systèmes extrêmes de Karitonov	Erreur ! Signet non défini.
III.3. Commande par retour d'état robuste :.....	33
III.3.1. Stabilisation robuste par retour d'état :.....	33
Etape 1 :.....	34
Etape 2 :.....	34
Etape 3 :.....	35
III.5. Exemple 2 :.....	42
III.5. Conclusion :.....	Erreur !
Signet non défini.	

Listes des figures

Figure II.1 la boîte Δ et les quatre segments de Kharitonov.....	18
Figure II.2 Les quatre segments de Kharitonov.....	22
Figure II.3 La boîte dans l'espace des paramètres transformé en un segment dans l'espace des coefficients.....	23
Figure –III.1- Système en boucle fermée à retour unitaire.....	30
Figure –III.2- Lieu des racines du polynôme caractéristique du système intervalle compensé par le contrôleur de 2ème ordre calculé pour le système nominal.....	37
Figure –III.3- L'image dans le plan complexe du polynôme caractéristique incertain du système en boucle fermée.....	38
Figure –III.4- Les gabarits de Nyquist pour le système intervalle et le lieu de Nyquist pour le système nominal.....	39
Figure –III.5- Ensemble image dans le plan complexe du polynôme caractéristique du système intervalle avec retour d'état robuste.....	40
Figure –III.6- Lieu des racines du système intervalle en boucle fermée avec retour d'état robuste.....	41
Figure –III.7- Réponses indicielles de 100 échantillons de fonctions de transfert choisies aléatoirement parmi la famille intervalle.....	42
Figure –III.8- Lieu des racines du polynôme intervalle caractéristique sans contrôleur.....	44
Figure –III.9- Enveloppes de gain et de phase du système intervalle du deuxième exemple.....	45
Figure –III.10- Marge de gain et de phase du système nominal.....	46
Figure –III.11- Gabarits de la réponse fréquentielle dans le plan de Nyquist du système sans le contrôleur.....	46
Figure –III.12- Ensemble image du polynôme intervalle caractéristique du système sans contrôleur.....	47
Figure –III.13- Lieu de Nyquist du système intervalle compensé par le compensateur à avance de phase conçu pour garantir la robustesse contre les incertitudes paramétriques.....	48

Liste des figures

Figure –III.14-Enveloppe de Bode du système intervalle compensé par un avance de phase.....	49
Figure –III-15- Marges de phase et de gain du système nominal compensé par un avance de phase.....	50
Figure –III.16- Digramme de Bode du compensateur à avance de phase utilisé.....	51
Figure –III.17- Ensemble image du polynôme caractéristique du système intervalle compensé par avance de phase.....	52
Figure –III.19- Lieu des racines du polynôme caractéristique du système intervalle en boucle fermée compensé par avance de phase.....	54
Figure –III.20- Réponse indicielle du système compensé par avance de phase en boucle fermée de 100 échantillons choisis aléatoirement parmi la famille du système intervalle.....	55
Figure –III.21- Gabarits de la réponse fréquentielle dans le plan de Nyquist du système intervalle. La flèche dans la courbe agrandie représente l'incertitude additive.....	57
Figure –III.22- Amplitude de l'incertitude additive maximale due à l'incertitude paramétrique du système intervalle accompagnée de la réponse en amplitude du filtre utilisé pour la majoration.....	58
Figure –III.23- Lieu des racines du polynôme caractéristique du système en boucle fermée compensé par la méthode de Nevanlinna-Pick. La deuxième courbe est un agrandissement de la zone proche de l'axe imaginaire.....	61

Introduction générale

Introduction générale

A la fin des années 1970, il a été constaté que la commande H_2 , la commande par retour d'état à travers un observateur et d'autres méthodes de contrôle des systèmes répondues à ce temps telle que la commande adaptative n'offrent pas de garanties de stabilité ou de performances en la présence d'incertitudes. Ainsi, le sujet de robustesse, proéminent dans la commande classique, prend renaissance dans un cadre moderne.

La commande H_∞ a été proposée comme première approche à la solution du problème de robustesse. Cette méthode élégante et sa voisine synthèse fournissent une formulation et une solution précises au problème de conception de compensateur par retour de sortie qui minimise la norme H_∞ d'une fonction de transfert prescrite. Plusieurs problèmes de stabilisation et de performances robustes peuvent être énoncés sous cette formulation et il existe de nos jours une théorie complète pour la synthèse de contrôleurs de systèmes soumis à des incertitudes à norme H_∞ bornée.

Les contrôleurs fournis par les théories H_2 et H_∞ nécessitent d'être testés contre des incertitudes plus réalistes que celles considérées pendant la conception. Parmi ces incertitudes, les incertitudes paramétriques réelles et les incertitudes mixtes (paramétriques et non structurées). Cependant, la théorie de la commande optimale H_2 et H_∞ est incapable de donner une réponse directe non conservative à ce genre de question.

Le problème de robustesse contre des incertitudes paramétriques a attiré l'attention après que le théorème de Kharitonov est devenu notoire au milieu des années 1980. Depuis, un développement rapide et spectaculaire a pris place dans ce domaine. Ceci a résulté en une théorie rigoureuse compréhensive et cohérente pour traiter directement et efficacement les incertitudes paramétriques réelles dans le domaine de contrôle des systèmes.

Le théorème de Kharitonov généralisé a permis non seulement le test non conservatif de la stabilité des polynômes dont les paramètres sont linéairement interdépendants mais a aussi fourni une solution structurelle à plusieurs problèmes extrémaux, il identifie a priori le sous ensemble critique de l'ensemble des paramètres dans lequel la stabilité ou les performances seront perdus et réduit à un ensemble très petit, généralement des points ou des segments linéaires ou les paramètres dans lesquels la stabilité doit être vérifiée. Ceci a permis le calcul de plusieurs propriétés telles que la marge de stabilité paramétrique, la marge de stabilité sous

des incertitudes mixtes, et a permis aussi l'extension des méthodes classiques de conception telles que Nyquist, Bode, lieu des racines aux systèmes contenant plusieurs paramètres incertains.

Dans ce travail, nous avons étudié les propriétés de cet ensemble extrême et nous avons développé un programme pour son calcul. Nous avons utilisé cet ensemble pour l'analyse de la robustesse en stabilité et de performances des systèmes intervalles. Les enveloppes des réponses fréquentielles que nous avons pu calculés à partir de cet ensemble nous ont été utiles pour la conception de compensateurs garantissant la robustesse en stabilité et en performance des systèmes à incertitudes paramétriques.

Notre mémoire est structuré comme suit :

CHAPITRE I : définitions et généralités sur les systèmes linéaires incertains.

CHAPITRE II : Méthodes d'analyses de la Robustesse de systèmes intervalles.

CHAAPITRE III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles.

CHAPITRE I :
définitions et généralités
sur les systèmes
linéaires incertains.

Généralités et définitions sur le contrôle des systèmes incertains

I.1-Introduction

Un système de contrôle doit être conçu de telle sorte que certaines propriétés essentielles restent inchangées en présence de perturbation. L'invariance des propriétés du système en présence de petites perturbations paramétriques a été prise en compte dans les étapes initiales de l'élaboration de la théorie de contrôle. Ces propriétés englobent la stabilité et les performances du système de contrôle.

Dans la théorie du contrôle classique telle que développée par Nyquist et Bode, Les spécifications de robustesse pour les systèmes de contrôle sont données sous forme de marges de gain et de phase du système en boucle ouverte, ces marges constituent des mesures de la capacité de la conception proposée à tolérer les erreurs et les incertitudes dans le modèle nominal du procédé.

Ces notions dominent l'ingénierie de la commande jusqu'à aujourd'hui. En 1981 Zames a développé la théorie de la commande optimale H_∞ , dans cette commande, l'optimisation de la fonction de sensibilité a été proposée en tant que stratégie de conception garantissant certain degré de robustesse. Le but de la conception de contrôleur, dans cette approche, est de minimiser la norme H_∞ de la fonction de transfert sous l'effet de perturbations. Les conditions de la stabilité en présence d'incertitudes, représentées par des fonctions de transferts dont la norme H_∞ est bornée, sont tirées à partir de l'application du théorème de petit gain au système incertain en boucle fermée.

Il faut souligner que les méthodes qui envisagent seulement des perturbations (non structurées) ayant une norme bornée sont conservatrices et il est nécessaire d'étudier la robustesse sous la contrainte que les perturbations admissibles respectent la structure du système, donnée par la définition de sous-systèmes et des interconnexions.

Par rapport à ces développements, le domaine de la robustesse contre l'incertitude des paramètres réels est resté largement sous-développé. Au début des années 1960, Horowitz a souligné que l'objectif central de la conception du système de commande à rétroaction est de combattre l'incertitude sur les paramètres réels, il a développé l'approche dite la théorie quantitative de rétroaction (QFT). Dans cette approche, les techniques de la réponse

fréquentielle ont été utilisées pour étudier l'effet d'incertitudes sur des paramètres réels. Si l'on devait tenter d'utiliser les résultats traditionnels de la théorie du contrôle robuste, la seule option disponible pour traiter systématiquement l'incertitude sur des paramètres réels dans les systèmes de contrôle était d'utiliser la commande H_∞ ou le μ analyse. Dans ces approches, le seul lien avec les paramètres réels incertains est par la norme H_∞ . Ceci complexifie essentiellement les paramètres réels, ce qui fait que ces méthodes sont intrinsèquement conservatrices. En 1978 Kharitonov a publié un résultat surprenant sur la stabilité de polynômes intervalles. Le théorème de Kharitonov stipule que la stabilité d'une famille de polynômes intervalle à coefficients réels de degré arbitraire peut être déterminée à partir de celle de quatre polynômes fixes. Ces résultats fournissent les outils les plus efficaces de nos jours pour faire face à cette classe d'incertitudes.

I.2. Critère de stabilité

I.2.1. Critère de Hurwitz

I.2.1.1. Définition :

Soit $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$ un polynôme réel de degré n , $\delta(s)$ est dit polynôme de Hurwitz si toutes ses racines sont situées dans la partie gauche du plan complexe.

- ✓ Si $\delta(s)$ est un polynôme de Hurwitz alors tous ses coefficients sont non nuls et possèdent le même signe.
- ✓ Si $\delta(s)$ est un polynôme de Hurwitz de degré n alors la phase de $\delta(j\omega)$ est une fonction continue et strictement croissante en ω [09].

I.2.1.2. Condition pour la stabilité :

La stabilité d'un système d'oscillateurs linéaires est liée à celle de son polynôme caractéristique, à coefficients réels positifs, idem pour les filtres électriques linéaires.

Pour qu'un système soit stable, il faut que son polynôme caractéristique ait toutes ses racines à partie réelle négative, cela revient à dire que ce polynôme est un polynôme de Hurwitz. Il est important donc de trouver les conditions que les coefficients doivent satisfaire pour que le polynôme soit stable.

Un polynôme à coefficients réels dont toutes les racines résident dans le demi plan complexe ouvert de gauche (partie réelle strictement négative) est un polynôme Hurwitz.

Les polynômes Hurwitz sont caractérisés par la condition nécessaire et suffisante.

I.3. Modèles d'incertitude et robustesse

Les modèles linéaires invariants dans le temps sont habituellement utilisés dans le domaine de la conception de contrôleurs. Ces modèles sont seulement des approximations qui sont faites pour rendre l'analyse et la conception des systèmes complexes traitables. La plupart des systèmes réelles sont non linéaires. Un modèle linéaire invariant dans le temps de ces systèmes est obtenu en fixant le point de fonctionnement et en linéarisant le système d'équation. Le changement de point de fonctionnement fait que ces modèles linéaires fixes ne sont pas une approximation fidèle. Parfois, on peut avoir recours aux modèles linéaires à paramètres variables. Ainsi il ya une grande incertitude en ce qui concerne le modèle du système réel, et il est nécessaire qu'un correcteur qui stabilise le système pour toute les gammes des variations attendus dans les paramètres soit utilisé.

En outre d'autres perturbations raisonnables mais moins structurées d'un modèle de l'installation doivent, également, être tolérées sans perturber la stabilité en boucle fermée. Ces perturbations se produisent typiquement quand on tronque un modèle complexe. En ne conservant que certains des modes dominants qui se situent généralement dans la plage des basses fréquences, Donc les incertitudes non structurées sont généralement opérationnelles dans une gamme de hautes fréquences.

La tolérance de ces deux types d'incertitudes est qualitativement décisive sur le problème de la stabilité robuste. Dans la conception de commande classique, le problème ci-dessus est traité au moyen de diagrammes de Bode et de Nyquist et les notions de marge de gain ou de marge de phase.

Il est d'usage de fixer la structure de régulateur sur la base des contraintes matérielles et logicielles existantes, et optimiser la conception sur les valeurs numériques du nombre fixe de paramètres de régulation et des paramètres réglables de l'installation.

La robustesse a été interprétée comme signifiant que le système en boucle fermée reste stable malgré une quantité adéquate (de point de vue marge de gain et de phase) de l'incertitude. Les diagrammes de Bode et de Nyquist constituent les outils préférés car ceux-ci représentent les données mesurées à partir du système physique.

I.4. Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist permet de déterminer la stabilité d'un système bouclé (boucle fermée à retour unitaire), sur la base de sa réponse harmonique en boucle ouverte. Pour construire le diagramme de Nyquist on commence par introduire ce qu'on appelle le contour d'exclusion, constitué de l'axe imaginaire et un demi cercle de rayon infini qui entourent

l'ensemble de demi plan droite du plan complexe. Le graphe dirigé de $G(s)C(s)$ évaluée quand s traverse ce contour dans le sens horaire s'appelle le lieu de Nyquist. Le critère de Nyquist indique que la boucle fermée est stable si et seulement si le lieu de Nyquist encercle le point critique $(-1+0j)$ P fois au sens contraire des aiguilles d'une montre, où P est le nombre de pôles instables (*RHP*) de $G(s)C(s)$. Une condition similaire peut être déclarée pour les systèmes multi-variables. Le lieu de Nyquist est juste pour la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte et peut souvent être mesurée expérimentalement, ainsi éliminant la nécessité d'avoir un modèle mathématique détaillé du système.

La conception de commandes stabilisantes d'un système nominale peut être réalisée par une variété de moyens tels que le contrôle classique, la commande linéaire quadratique, retour d'état mis en œuvre par des observateurs, et commande par placement de pôles. Le problème le plus difficile et non résolu est la stabilité en présence d'incertitude, nommé la stabilité robuste [10].

1.4. Théorème de franchissement de frontière

Nous commençons avec le principe bien connu de l'argument de variable complexe. Soit C un contour fermé dans le plan complexe et $w = f(z)$ une fonction de variable complexe z qui est analytiquement sur C soit Z et P désigne les zéros et les poles respectivement de $f(z)$ contenu dans C et on a $\Delta_c \arg[f(z)]$ qui désigne la variation de l'argument z traverse le contour C .

1.5. Commande robuste

Les systèmes de contrôle doivent être conçus de telle sorte que certaines propriétés essentielles restent inchangées sous l'effet de perturbations et d'incertitudes. Le problème de conception, en maintenant l'invariance des propriétés des systèmes sous des petites variations de leurs paramètres, a été pris en compte au début de l'élaboration de la théorie de contrôle. Parmi les propriétés désirées figurent la stabilité et la performance des systèmes. Le plus important est l'exigence que le système de contrôle doit fonctionner de manière satisfaisante en présence de grandes perturbations. Ainsi les problèmes d'évaluation de la stabilité et de validation de performances pour une famille de systèmes à

contrôler ayants des paramètres variables en utilisant la réponse fréquentielle ont attiré une attention considérable.

I.5.1. Stabilité robuste

Un système de commande est dit robustement stable s'il reste stable malgré les incertitudes et les perturbations affectant le système à commander.

I.5.2. Synthèse robuste multi-objectif

Cette synthèse est définie comme suit : elle consiste à trouver un correcteur robustement stabilisant qui, pour toutes les incertitudes admissibles, garantit ou optimise différents critères de performance exprimés sur la boucle fermée.

Ce problème très complet n'a pas de solution simple. Même si nous proposons des algorithmes en vue de le résoudre, ils s'appliquent difficilement en pratique des lors les incertitudes sont structurés et présentent un grand nombre de blocs. C'est pourquoi différent problèmes simplifiés et moins généraux peuvent être proposés. Ils fournissent bien souvent une solution à moindre coût qui s'avère tous de même intéressante vis-à-vis du problème initial.

I.5.3. Synthèse nominale multi-objectif

Ce problème consiste à trouver un correcteur robustement stabilisant qui garantit ou optimise différents critères de performance exprimés sur le modèle nominale de la boucle fermée.

Cette approche a été présentée dans [Scherer 97b]. Le passage d'une problématique a l'autre se fait par la relaxation des critères de performances robustes en critères de performances sur le modèle **LTI** nominale. Le désavantage de cette méthode est que le niveau de performance obtenu n'est pas garanti via a vis des variations paramétriques pouvant intervenir sur ce modèle certain. Cela implique, de toutes façons, d'effectuer a posteriori une étape d'analyse robuste en performance sur le système corrigé. Cette méthode est qualifiée d'approche nécessaire. En effet, si elle échoue, le problème de synthèse robuste initial, na pas de solution.

I.5.4. Synthèse englobant multi-objectif

Choisir un modèle incertain simplifié qui inclue l'ensemble des réalisations du modèle incertain initial et trouver un correcteur robustement stabilisant qui pour toutes les

incertitudes du modèle simplifié, garantit ou optimise différents critères de performance exprimés sur la boucle fermée.

Cette méthode est clairement suffisante, la solution de ce problème est également une solution du problème initial. L'avantage de cette démarche est de ne jamais oublier le caractère incertain du modèle, ceci au dépend d'une étape de modélisation supplémentaire. La solution, quand elle existe, est pessimiste vis-à-vis du problème initial. Il est toutefois toujours possible de l'affiner par une étape ultérieure d'analyse du système corrigé. Différents exemples de cette approche peuvent être trouvés dans (Peaucelle et Ghoui) [11].

I.6. COMMANDE ROBUSTE H_∞

I.6.1. Présentation :

La norme H_∞ d'un système dynamique est l'amplification maximale que le système peut exercer sur l'énergie du signal d'entrée.

Dans le cas d'un système MIMO, ceci équivaut à la valeur singulière maximale du système, ce qui, dans le cas SISO, se traduit par la valeur maximale de l'amplitude de sa réponse fréquentielle.

L'approche H_∞ est une façon particulière de calculer un correcteur qui permet de modéliser différents transferts du système asservi, de garantir des marges de stabilité et d'assurer la robustesse aux dynamiques négligées par un retour dynamique de sortie, en appliquant des concepts du domaine fréquentiels [12].

I.6.2. Problématique

L'approche H_∞ du problème de stabilisation robuste, à partir de la représentation d'état d'un système augmenté, consiste principalement à calculer à l'aide d'équations de Riccati, un correcteur sous la forme d'un retour d'états observés.

I.6.3. Domaine d'application :

La commande H_∞ a été appliquée au contrôle de structures flexibles des systèmes spatiaux comme les satellites ou les lanceurs, Ces systèmes possèdent des modes de flexions proches de la bande passante du contrôleur et dont les caractéristiques sont incertaines (fréquence, gain, amortissement). La méthode H_∞ permet de garantir théoriquement une certaine robustesse de la stabilité du système (via la marge de module) tout en assurant les performances de réjection de perturbation.

Sur Ariane 5, le pilotage basé H_∞ a ainsi permis de garantir la stabilité du lanceur tout en optimisant la commande de braquage de la tuyère, faisant économiser plusieurs centaines de kilo sur le liquide hydraulique de commande.

I.7. Théorème de petits gains :

Le théorème de petits gains donne une condition suffisante de stabilité lorsque la stabilité d'un système bouclé connu est étudiée, et une condition nécessaire et suffisante de stabilité lorsque la stabilité d'un système présentant des incertitudes est traitée. Ainsi, bien que le théorème de petits gains puisse être conservatif pour l'analyse de la stabilité d'un système, il s'avère non conservatif pour l'étude de la robustesse. La démonstration du théorème de petits gains repose fortement sur le critère de Nyquist multi variable. Ce théorème de petits gains est facilement utilisable pour les études de robustesse [13].

I.8. Mu-analyse :

Nous venons de montrer que dans le cas général de plusieurs incertitudes, l'application du théorème de petits gains peut donner des résultats conservatifs.

La μ -analyse permet alors de généraliser le théorème de petits gains à ce cas. Pour cela, nous avons besoin de mettre le problème sous une forme LFT (transformée linéaire fractionnelle). La notion de valeur singulière structurée - μ - est utilisée pour l'étude de la robustesse en stabilité puis pour la robustesse en performances.

I.9. Notion de borne robustesse :

Nous établissons la une nuance entre deux types d'analyse robuste, analyse qualitative et quantitative. L'analyse qualitative consiste à figer le domaine d'incertitude, en particulier sa taille et a tenter d'affirmer de manière qualitative (c'est-à-dire booléenne) la stabilité.

L'analyse quantitative consiste à définir une structure d'incertitude et une forme de domaine sans spécifier sa taille, puis à estimer la taille maximale de ce domaine pour laquelle la stabilité robuste peut être attestée.

I.10. Stabilité robuste d'un disc polynôme :

Nous considérons un modèle alternatif d'incertitude, et examinons la stabilité robuste d'un ensemble F_d du polynôme de disque, qui est caractérisées par le fait que chaque coefficient d'un élément typique $P(s)$ dans F_d peut être tout nombre complexe dans un disque arbitraire mais fixé du plan complexe. La motivation pour considérer la stabilité robuste du polynôme de disque est la même que celle de considérer la stabilité robuste de la boule I_p du polynôme. A savoir, il est un dispositif de prise en compte les variations des paramètres dans les plages prescrites, et S la région de stabilité pour envisager $n+1$ le disque arbitraire, $d_i, i = 0, \dots, n$ dans le plan complexe, et chaque disque est centré au point B_i et avoir rayon $r_i > 0$.

I.11. Incertitude :

On vient de voir que les modèles utilisés par la commande robuste se constituent d'un modèle nominale et d'un modèle d'incertitude.

Le modèle mis en place traduit les relations existantes entre les commandes et les sorties.

La qualité du modèle dépend du faible écart avec les dynamiques du régime réel.

Les origines de provenances des incertitudes sont multiples : incertitudes sur des paramètres physiques, dynamiques négligées, fonctionnements sous des conditions extrêmes.

Les incertitudes sont représentées par deux types, structurées et non structurées, les incertitudes structurées sont dues à la variation des paramètres du modèle du système.

Les incertitudes non structurées ont pour origine le non prise en compte de certaines dynamiques dans la modélisation ou la linéarisation autour d'un point de fonctionnement

I.11.1. Modélisation des incertitudes dynamiques de modèles

I.11.1.1. Incertitudes de modélisation

L'ingénieur conçoit un système à partir de modèles des différents équipements. Dans le cas idéal, ces modèles reflètent parfaitement le comportement du système réel. Mais pour un système aussi complexe qu'un réseau électrique, les sources d'erreur de modélisation sont nombreuses, application numérique, erreur d'identification de paramètres, hypothèses de linéarité ou de conduction continu, ordre de troncature choisi pour la réduction de

modèle. Par exemple, lors de l'identification dynamique d'un système, un nombre fini de points de mesure est considéré; ceci peut alors conduire à occulter certaines dynamiques critiques du point de vue du dimensionnement par exemple des résonances avec des largeurs de bande très étroites.

Citons aussi les approximations fréquentielles faites lors de l'établissement d'un modèle moyen de convertisseur, ou seuls les fréquences inférieure a la moitié de la fréquence de commutation des interrupteurs sont modélisées. Le modèle devient dès lors obsolète pour les plus hautes fréquences. Cependant, cette dernière approximation n'est généralement pas considérée comme étant un problème dans les études de stabilité. En générale, les dynamiques de très hautes fréquences sont négligées en électrotechnique. En effet, un filtre ayant pour un but principal de filtrer les harmoniques rejetés par le convertisseur, sa fréquence de coupure sera choisie bien en dessous des fréquences de commutation. Les problèmes de stabilité venant souvent des interactions filtre-convertisseur, le concepteur pourra alors faire l'hypothèse qu'il n'est pas nécessaire de modéliser le comportement à plus haute fréquence.

I.11.1.2. Incertitudes de conception

Lors de la conception d'un équipement électrique aéronautique, son environnement de fonctionnement final n'est pas connu. Par exemple, le concepteur d'un équipement i ne connaît a priori pas la dynamique de la régulation d'un équipement j ni les paramètres de son filtre d'entrée ou de sortie. Ici encore, rappelons que la majorité des problèmes de stabilité des réseaux continus mentionnés dans la littérature proviennent des interactions filtre-convertisseur. La robustesse de la conception d'un équipement par rapport a ces incertitudes paramétriques est supposée être représentative de sa capacité d'intégration dans le réseau.

I.11.2. Les différentes classes d'incertitudes

I.11.2.1. Incertitudes poly-topiques :

Cette structure a été considérée en particulier par [Bernussou et al. 1989]. Les incertitudes poly-topiques sont des incertitudes paramétriques, la matrice d'état du système est une combinaison linéaire convexe et elle appartient au domaine de type poly-topique

En effet, chaque sommet du poly-tope correspond à un domaine de fonctionnement particulier, ce qui permet de considérer les différentes phases de travail d'un processus donné. De point de vue pratique, cette formulation correspond à une représentation multimodale du processus ou chaque modèle est obtenu pour des conditions de fonctionnement données.

I.11.2.2. Incertitudes affines

Parmi les travaux où cette structure a été traitée on peut citer par exemple (Biannic et Feron). Ce type d'incertitude définit un hyper rectangle, les sommets de cet hyper rectangle correspondent aux valeurs extrêmes.

Ce modèle affine s'obtient à partir des lois de la physique puisqu'un grand nombre de processus pratiques évoluent en fonction de paramètres compris entre une valeur minimale et une valeur maximale.

I.12. Hypersphère de stabilité dans l'espace des paramètres

Cette situation habituelle que l'on rencontre dans les systèmes de contrôle contenant les paramètres incertains calcule le plus grand rayon de stabilité d'une boule dans l'espace des paramètres réels sous l'hypothèse que ces paramètres incertains entrent dans les coefficients du polynôme caractéristique de façon linéaire ou affine. Ce rayon sert de mesure quantitative de la marge de stabilité à paramètre réel pour des systèmes de contrôle. Deux régions d'incertitude ellipsoïdales et poly-topique sont considérées. Dans le cas poly-topique nous établissons la stabilité en testant les propriétés des bords exposés et quelques propriétés extrêmes des bords et des sommets. Ceux-ci sont utiles pour le calcul de la marge de stabilité la plus défavorable sur un ensemble de données d'incertitude qui est une mesure de la performance robuste du système.

Dans cette section, nous donnons une caractérisation utile de la marge de stabilité paramétrique dans le cas générale. Cela peut être effectué en trouvant la plus grande boule de stabilité l'espace des paramètres, centrée sur une valeur du paramètre nominale p_0 . Soit S un ensemble ouvert, qui est symétrique par rapport à l'axe réel, et désigne la région de la stabilité à envisager. Dans le cas du système continu, S peut être le demi-plan ouvert gauche ou un sous ensemble de ceci. Pour le cas discret, S est le cercle unité ouvert [14].

Soit (s) un polynôme :

$$(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

La norme euclidienne de ce polynôme est :

$$\| (s) \| = |a_n|^2 + |a_{n-1}|^2 + \dots + |a_0|^2$$

La boule ouverte, induite de cette norme, de centre le polynôme (s) et de rayon r est définie par :

$$B((s), r) = \{ (s) \in \mathcal{P}_n : \| (s) - (s) \| < r \}$$

Avec r l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . L'hyper-sphère (la boule ouverte) de stabilité centrée à (s) est $B((s), r)$ tel que r est le plus grand nombre positive garantissant que tout polynôme $(s) \in B((s), r)$ est de degré n et est stable. Cette hyper-sphère est généralement dénotée $B((s), r)$ avec r est le rayon de l'hyper-sphère de stabilité.

Des techniques existent pour le calcul du rayon de l'hyper-sphère de stabilité voir [2].

I.13. Principe d'exclusion de zéro :

Le théorème de franchissement de frontière peut être appliqué à une famille de polynômes pour détecter la présence du polynôme instables dans la famille. Supposons que (s, p) représente un polynôme de degré n dont les coefficients dépendent en permanence sur le vecteur de paramètre $p \in \Omega$. Le vecteur p varie un ensemble Ω et génère la famille de polynômes $\Delta(s) = \{ (s, p) : p \in \Omega \}$ supposons qu'une partie de Ω est contenue dans S (la région stable) et l'autre partie est contenu dans $\bar{S} = \{ (s, p) : (s, p) \text{ est instable} \}$ (c'est-à-dire $\Delta(s)$ contient au moins un polynôme instable). Supposons qu'il ya au moins un polynôme (s, p) stable et de degré n de la famille. Si (s, p) est un polynôme instable, il résulte le théorème de franchissement de frontière que sur toute chemin connectant S à \bar{S} il doit exister un polynôme tel que le polynôme (s, p) contient des racines à la limite de stabilité ∂S . Dans ce cas, la présence du polynôme instable dans la famille est équivalente a la présence du polynôme dans la famille avec des racines sur la frontière du domaine de stabilité S . Si s_0 est une racine d'un polynôme dans la famille il en résulte que $(s_0, p) = 0$ et cela implique que $0 \in \Delta(s_0)$. A cet effet la présence d'éléments instables dans $\Delta(s)$ peut être détectée par la génération d'ensemble image dans le plan complexe de la famille pour $p \in \Omega$. Dans le cas ou S est le

demi-plan complexe ouvert gauche, alors σ_c est tout simplement l'axe imaginaire. Le principe d'exclusion de zéro peut être utilisé à la fois pour exploiter les deux solutions théoriques et informatiques à de nombreux dérivés du problème de la stabilité robuste. Il est systématiquement exploité pour en tirer divers résultats sur la stabilité robuste paramétrique.

I.14. La marge de stabilité paramétrique

Supposons que p_0 est la valeur nominale du vecteur paramétrique dénoté p . Considérons un contrôleur $C(s)$ fixe avec le paramètre p_0 , qui stabilise le système nominal (G, H) . Maintenant nous allons désigner par $\Delta = p - p_0$ une perturbation du vecteur de paramètre du système à partir de la valeur nominale p_0 . Une borne sur la taille de Δ pour laquelle la stabilité en boucle fermée est garantie est utile car elle fournit la plus grande boule dans l'espace des paramètres dans laquelle les paramètres varient librement sans que la stabilité en boucle fermée ne soit affectée. En plus de nous fournir une évaluation non conservatrice de la taille de la région de stabilité, cette boule serait aussi utile comme une mesure de la performance du contrôleur $C(s)$.

La marge de stabilité paramétrique est définie comme étant la longueur de la plus petite perturbation Δ_p qui déstabilise la boucle fermée. Cette marge sert de mesure quantitative de la robustesse du système en boucle fermée par rapport à l'incertitude paramétrique évaluée au point nominal p_0 . Elle est aussi utile dans la conception du dispositif de commande en tant que moyen de comparaison de la performance des contrôleurs proposés.

I.15. Propriétés extrêmes des bords et des sommets

Maintenant, nous allons introduire le problème de trouver la pire marge de stabilité sur un poly-tope de polynômes stables. Cette marge extrême de stabilité est une mesure de la performance robuste du système et du contrôleur associé. Comme mentionné plus haut ce problème est formidablement difficile dans le cas général. Mais, il est possible de déterminer la performance robuste en exploitant l'ensemble image dans le plan complexe et les méthodes disponibles dans la théorie des systèmes intervalles concernant la production des bords exposés et de leurs propriétés. En effet, pour ces familles les pires cas de marge de stabilité se produisent en générale sur les bords exposés, dans un cas particulier, il peut se produire sur certains sommets. Ce résultat émane du théorème de Kharitnov généralisé

qui est utile pour déterminer le pire cas de la marge de stabilité paramétrique sur une boîte d'incertitude. Ce théorème sera exposé avec plus de détails dans le prochain chapitre. Essentiellement il réduit un problème d'optimisation multiparamétrique à un ensemble d'optimisations à un seul paramètre. Une nouvelle simplification peut être obtenue lorsque la stabilité du poly-tope peut être garantie à partir des sommets. Dans ce cas, nous pouvons trouver la pire marge de stabilité en évaluant () sur l'ensemble des sommets.

I.16. Conclusion

Dans ce chapitre introductif nous avons rappelé quelques définitions et propriétés sur les systèmes incertains qui sont présents naturellement dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur. Nous avons donné quelques notions et définitions relatives à l'étude de la stabilité des systèmes incertains et plus spécialement les systèmes à incertitudes paramétrique pour lesquelles nous avons introduit la marge paramétrique de stabilité.

CHAPITRE II :

Méthodes d'analyses de
la Robustesse de
systèmes intervalles.

Méthodes d'analyse de la robustesse des systèmes intervalles

II.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la robustesse et à la performance de la commande des systèmes à incertitudes paramétriques et/ou de variations des paramètres. Afin de décrire de telles perturbations, différents modèles d'incertitudes ont été adoptés conduisant à différents axes de recherches.

À la fin des années 70, l'intérêt à la robustesse a mené au développement d'une théorie complète pour la commande des systèmes ayant des incertitudes non structurées. Ces incertitudes représentent l'effet des dynamiques non modélisées, des non linéarités négligées, des erreurs dues à la linéarisation, des erreurs de troncature etc. Pour ce type d'incertitude, la stabilité en boucle fermée de ces systèmes perturbés a été abordée par le théorème de petit gain.

Un autre axe de recherche concerne la robustesse en présence d'incertitudes paramétriques. Il s'agit du cas des modèles à paramètres inconnus. Pendant plusieurs années, le problème de la stabilité paramétrique robuste (notamment, garantissant la stabilité des systèmes avec incertitudes paramétriques) a été considéré comme très difficile à aborder, jusqu'à l'apparition des résultats du théoricien russe V. Kharitonov.

Stimulés par le théorème de Kharitonov, les automaticiens ont cherché des extensions à des familles plus larges de polynômes. En particulier, dans le cas de la présence des dépendances linéaires entre les coefficients du polynôme, et celui de l'analyse de robustesse pour des familles polytopiques de polynômes. Cependant le théorème de Kharitonov souffre d'un problème de conservatisme et se limite aux paramètres indépendants. En effet, il suppose que les coefficients du polynôme caractéristique sont indépendants ce qui n'est pas vrai dans la plupart des cas. Il y a deux manières pour traiter le cas des paramètres interdépendants. La première utilise le théorème des segments exposés (the Edge Theorem) [1] et la seconde exploite le théorème de Kharitonov généralisé.

Le théorème des segments exposés montre que la stabilité d'un polytope de polynômes peut être garantie par la stabilité des segments polynômiaux exposés. Le problème avec cette approche est de vérifier la stabilité sur un grand nombre de polynômes. L'autre

approche est le théorème de Kharitonov généralisé (TKG), présenté dans [2]. Le TKG, comme nous allons le montrer par la suite, considère une structure particulière de l'équation caractéristique où apparaissent des polynômes à coefficients constants avec d'autres à coefficients incertains. L'étude de la stabilité revient dans ce cas à considérer les segments (arêtes) de Kharitonov de la deuxième famille.

II.2. Théorème de Kharitonov

Soit un polynôme $P_i(s)$ donné par la forme suivante :

$$P_i(s) = p_{i,0} + p_{i,1}s + \dots + p_{i,d^\circ(P_i)}s^{d^\circ(P_i)} \quad (\text{II-01})$$

Chaque $P_i(s)$ appartient à la famille de polynômes intervalles $\mathbf{P}_i(s)$ ou les coefficients $p_{i,j}$ appartiennent aux intervalles $p_{i,j} \in [\underline{p}_{i,j}, \bar{p}_{i,j}]$ avec $i \in [1, 2, \dots, m]$ et $j = 0, 1, \dots, d^\circ(P_i)$

La famille de polynôme intervalle $\mathbf{P}_i(s)$ est stable si et seulement si les quatre polynômes ci-dessous sont stables :

$$\begin{aligned} K_i^1(s) &= \underline{p}_{i,0} + \underline{p}_{i,1}s + \bar{p}_{i,2}s^2 + \bar{p}_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^2(s) &= \underline{p}_{i,0} + \bar{p}_{i,1}s + \bar{p}_{i,2}s^2 + \underline{p}_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^3(s) &= \bar{p}_{i,0} + \underline{p}_{i,1}s + \underline{p}_{i,2}s^2 + \bar{p}_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^4(s) &= \bar{p}_{i,0} + \bar{p}_{i,1}s + \underline{p}_{i,2}s^2 + \underline{p}_{i,3}s^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{II-02})$$

La boîte Δ et les sommets correspondant aux polynômes de Kharitonov sont présentés dans la figure II.1.

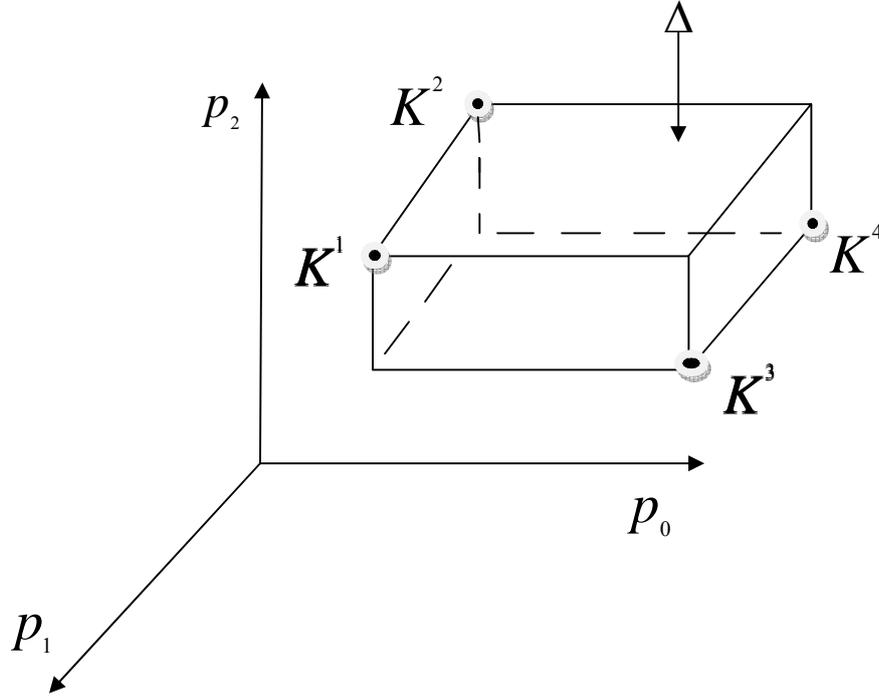


Figure II.1 la boîte Δ et les quatre segments de Kharitonov.

II.3. Théorème de Kharitonov généralisé

Avant de présenter le théorème de Kharitonov généralisé qui est exploité par la suite, il est nécessaire de présenter quelques définitions et notations [4].

Soit un polynôme de la forme :

$$\delta(s) = F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s) + \dots + F_m(s)P_m(s) \quad (\text{II-03})$$

On considère les m-uplets de polynômes suivants :

$$\underline{F}(s) = (F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s))$$

$$\underline{P}(s) = (P_1(s), P_2(s), \dots, P_m(s))$$

On introduit la notion suivante :

$$\langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle = F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s) + \dots + F_m(s)P_m(s) \quad (\text{II-04})$$

On dit que $\underline{F}(s)$ stabilise $\underline{P}(s)$ si $\delta(s) = \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle$ est stable.

Pour ce qui suit, les $F_i(s)$ sont des polynômes réels à coefficients fixes alors que les $P_i(s)$ sont des polynômes réels dont les coefficients sont indépendants et compris dans des intervalles donnés.

Chaque polynôme $P_i(s)$ donné par la forme suivante :

$$P_i(s) = p_{i,0} + p_{i,1}s + \dots + p_{i,d^\circ(P_i)}s^{d^\circ(P_i)} \quad (\text{II-05})$$

Chaque $P_i(s)$ appartient à la famille de polynômes intervalles $(\)$ où les coefficients $p_{i,j}$ appartiennent aux intervalles $p_{i,j} \in [\underline{p}_{i,j}, \bar{p}_{i,j}]$ avec $i \in [1, 2, \dots, m]$ et $j = 0, 1, \dots, d^\circ(P_i)$.

Soit la famille de m-uplet de polynômes intervalles :

$$(\) = (\) \times (\) \times \dots \times (\) \quad (\text{II-06})$$

On s'intéresse par la suite à l'étude de la stabilité de la famille des polynômes définis par :

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \{ \prec \underline{F}(s), \underline{P}(s) \succ : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}(s) \} \\ &= \underline{F}(s) \underline{P}(s) + \underline{F}(s) \bar{P}(s) + \dots + \underline{F}(s) \bar{P}(s) \end{aligned} \quad (\text{II-07})$$

$\Delta(s)$ est stable si chaque polynôme dans $\Delta(s)$ est stable, ceci est équivalent à $\underline{F}(s)$ stabilise chaque $\underline{P}(s) \in \mathbf{P}(s)$.

La solution proposée par (Chapellat; Bhattacharyya) est de construire un ensemble extrémal de segments polynômiaux $\Delta_E(s) \in \Delta(s)$ tel que sa stabilité implique celle de $\Delta(s)$.

On considère la famille (s) de polynômes intervalles réels, les quatre polynômes de Kharitonov associés à $\mathbf{P}_i(s)$ sont :

$$\begin{aligned} K_i^1(s) &= \underline{p}_{i,0} + \underline{p}_{i,1}s + \bar{p}_{i,2}s^2 + \bar{p}_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^2(s) &= \underline{p}_{i,0} + \bar{p}_{i,1}s + \bar{p}_{i,2}s^2 + \underline{p}_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^3(s) &= \bar{p}_{i,0} + \underline{p}_{i,1}s + \underline{p}_{i,2}s^2 + \bar{p}_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^4(s) &= \bar{p}_{i,0} + \bar{p}_{i,1}s + \underline{p}_{i,2}s^2 + \underline{p}_{i,3}s^3 + \dots \end{aligned}$$

On note par $K_i(s)$ l'ensemble des polynômes de Kharitonov.

$$K_i(s) = \{ K_i^1(s), K_i^2(s), K_i^3(s), K_i^4(s) \} \quad (\text{II-08})$$

Pour chaque $\mathbf{P}_i(s)$ on introduit les quatre segments, qui joignent des paires de polynômes de Kharitonov, définies par :

$$S_i(s) = \{ [K_i^1(s), K_i^2(s)], [K_i^1(s), K_i^3(s)], [K_i^2(s), K_i^4(s)], [K_i^3(s), K_i^4(s)] \} \quad (\text{II-09})$$

Ces quatre segments sont appelés *les segments de Kharitonov*. Le segment $[K_i^1, K_i^2]$ est défini par toutes les combinaisons convexes de la forme $\lambda K_i^1 + (1 - \lambda) K_i^2$ ou $\lambda \in [0, 1]$

Pour $l \in \{1, \dots, m\}$, on définit l'ensemble :

$$P_E^l(s) = k_1(s) \times \dots \times k_{l-1}(s) \times S_l(s) \times k_{l+1}(s) \times \dots \times k_m(s) \quad (\text{II-10})$$

Un élément typique de $P_E^l(s)$ est :

$$(K_i^{j_1}(s), K_2^{j_2}(s), \dots, K_{l-1}^{j_{l-1}}(s), \lambda K_l^1(s) + (1-\lambda)K_l^2(s), K_{l+1}^{j_{l+1}}(s), \dots, K_m^{j_m}(s))$$

On introduit la famille de polynômes $\Delta_E^l(s)$ correspondant à $P_E^l(s)$:

$$\Delta_E^l(s) = \left\{ \prec \underline{F}(s), \underline{P}(s) \succ : \underline{P}(s) \in P_E^l(s) \right\} \quad (\text{II-11})$$

L'ensemble $\Delta_E^l(s)$ peut être décrit aussi par :

$$\Delta_E^l(s) = F_1(s)k_1(s) + \dots + F_{l-1}(s)k_{l-1}(s) + F_l(s)S_l(s) + F_{l+1}(s)k_{l+1}(s) + \dots + F_m(s)k_m(s)$$

Un élément typique de $\Delta_E^l(s)$ est donné par :

$$F_1(s) K_i^{j_1}(s), F_2(s) K_2^{j_2}(s), \dots, F_{l-1}(s) K_{l-1}^{j_{l-1}}, \\ F_l(s) [\lambda K_l^1(s) + (1-\lambda) K_l^2(s)], F_{l+1}(s) K_{l+1}^{j_{l+1}}(s), \dots, F_m(s) K_m^{j_m}(s) \quad (\text{II-12})$$

Avec $\lambda \in [0,1]$

Soit $P_E(s)$ le sous ensemble extrémal de $P(s)$ définit par :

$$P_E(s) = \bigcup_{l=1}^m P_E^l(s)$$

L'ensemble $P_E(s)$ contient au plus 4 éléments. On lui associe l'ensemble $\Delta_E(s)$ suivant appelé les segments polynômiaux généralisés de Kharitonov :

$$\Delta_E(s) = \bigcup_{l=1}^m \Delta_E^l(s) = \left\{ \prec \underline{F}(s), \underline{P}(s) \succ : \underline{P}(s) \in P_E(s) \right\} \quad (\text{II-13})$$

L'ensemble de m-uplet de polynômes de Kharitonov est exprimé par :

$$P_K(s) = k_1(s) \times k_2(s) \times \dots \times k_m(s)$$

L'ensemble de famille de *polynômes extrémaux de Kharitonov* associé à $P_K(s)$ est donné par :

$$\Delta_K(s) = \left\{ \prec \underline{F}(s), \underline{P}(s) \succ : \underline{P}(s) \in P_K(s) \right\} \quad (\text{II-14})$$

$P_K(s)$ contient au $4m$ éléments. Un élément typique de $\Delta_K(s)$ est :

$$F_1(s) K_i^{j_1}(s) + F_2(s) K_2^{j_2}(s) + \dots + F_m(s) K_m^{j_m}(s)$$

Théorème (Théorème de Kharitonov généralisé)

Soit un m-uplet de polynômes réels $(F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s))$

1. $\underline{F}(s)$ stabilise la famille entière de m-uplet $\mathcal{P}(s)$ si et seulement si $\underline{F}(s)$ stabilise chaque m-uplet segment de $\mathcal{P}_E(s)$. Autrement dit $\Delta(s)$ est stable si et seulement si $\Delta_E(s)$ est stable.
2. Si les polynômes $F_i(s)$ sont de la forme $s^{t_i}(a_i s + b_i)U_i(s)Q_i(s)$ ou $t_i \geq 0$ est un entier arbitraire, a_i et b_i sont des réels, $U_i(s)$ est un polynôme anti-Hurwitz et Q_i est un polynôme pair ou impair, alors il suffit que $\underline{F}(s)$ stabilise un ensemble fini de m-uplet $\mathcal{P}_K(s)$. Autrement dit l'ensemble $\Delta_K(s)$ est stable.
3. La stabilité de $\mathcal{P}_K(s)$ n'est pas suffisante pour confirmer la stabilité de $\mathcal{P}(s)$ si les polynômes $F_i(s)$ ne satisferont pas la condition 2.

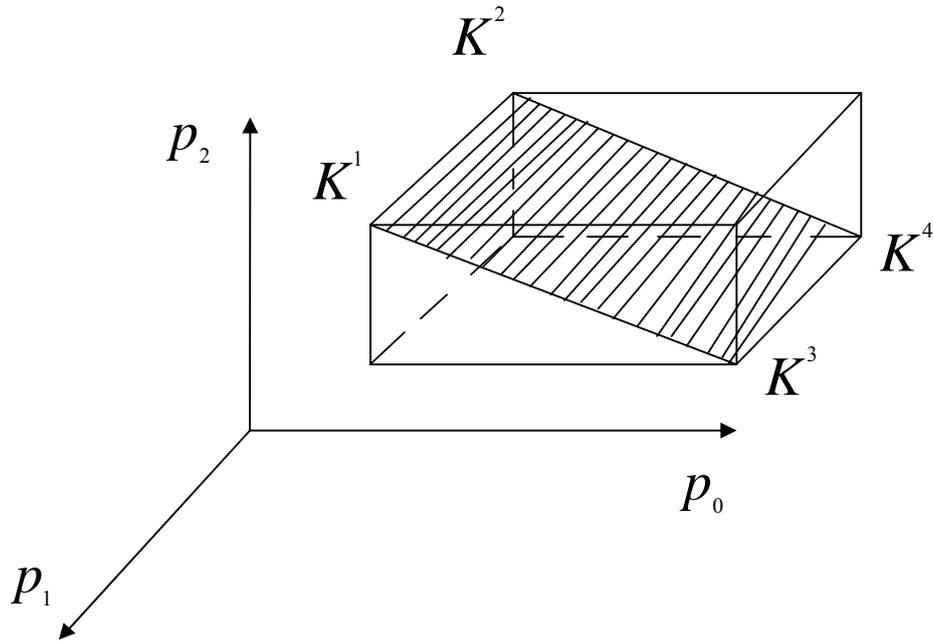


Figure II.2 Les quatre segments de Kharitonov.

Notons que le théorème de Kharitonov s'applique dans le cas de paramètres a_i et b_j indépendants entre eux. Cependant, ces coefficients sont calculés à partir des variations paramétriques du système; ils sont donc des combinaisons de ces paramètres. Ainsi, en pratique, les coefficients peuvent ne pas être indépendants les uns des autres. L'analyse par le théorème de Kharitonov nécessite donc en général de prendre en compte un plus grand nombre de combinaisons paramétriques pour les coefficients a_i et b_j qu'il n'en existe en réalité. L'analyse de stabilité sera alors en général conservative [5].

➤ Exemple

Soit G une fonction de transfert définie comme suit

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s}{1 - s + \alpha s^2 + s^3} \text{ et } \alpha \in [3.4, 5]$$

Et a une valeur nominale $\alpha^0 = 4$

Il est facile de vérifier que le contrôleur $C(s) = \frac{3}{s+1}$ stabilise le système nominal, donnant le polynôme caractéristique nominal en boucle fermée,

$$\delta_4(s) = 1 + 3s + 3s^2 + 5s^3 + s^4$$

Pour déterminer si $C(s)$ stabilise également la famille de systèmes, on examine le polynôme caractéristique du système :

$$\delta_\alpha(s) = 1 + 3s + (\alpha - 1)s^2 + (\alpha + 1)s^3 + s^4$$

Dans l'espace (δ_2, δ_3) , les coefficients de s^2 et s^3 décrivent le segment $[R_1, R_2]$ sont représentés sur la figure II.3.

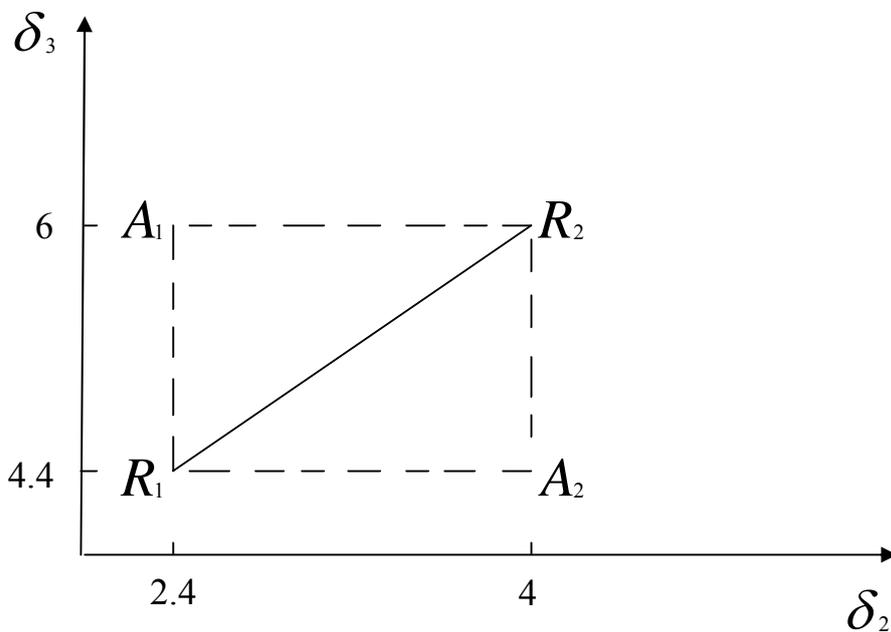


Figure II.3 La boîte dans l'espace des paramètres transformé en un segment dans l'espace des coefficients.

La seule façon d'appliquer le théorème de Kharitonov ici est d'enfermer ce segment dans la zone B définie par les deux points réels R_1 et R_2 deux points artificielles A_1 et A_2 et de vérifier la stabilité des polynômes de Kharitonov qui correspondent au polynôme caractéristique évaluée aux quatre coins de B .

Le polynôme :

$$\delta_{A_1}(s) = 1 + 3s + 2.4s^2 + 6s^3 + s^4$$

Est instable à cause de son troisième déterminant de Hurwitz H_3 ,

$$H_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 2.4 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -1.8 < 0$$

Par conséquent, le théorème de Kharitonov ne nous permet pas de conclure à la stabilité de l'ensemble de la famille de systèmes en boucle fermée, pourtant, si on vérifie les valeurs des déterminants de Hurwitz au long du segment $[R_1, R_2]$ on trouve :

$$H = \begin{vmatrix} 1+\alpha & 3 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 1 \end{vmatrix}$$

Et

$$\begin{cases} H_1 = 1 + \alpha \\ H_2 = \alpha^2 - 4 \\ H_3 = 2\alpha^2 - 2\alpha - 13 \\ H_4 = H_3 \end{cases} \quad \text{et } \alpha \in [3.4, 5]$$

Cet exemple démontre que le théorème de Kharitonov offre des conditions suffisantes qui peuvent parfois être trop conservateur pour des problèmes de contrôle.

II.5 Le théorème des segments exposés (EDGE theorem) :

Les automaticiens ont cherché des extensions à des familles plus larges de polynômes. En particulier, le cas de la présence des dépendances linéaires entre les coefficients du polynôme, et celui de l'analyse de robustesse pour des familles polytopiques de polynômes. Cependant le théorème de Kharitonov souffre d'un problème de conservatisme et se limite aux paramètres indépendants. En effet, il suppose que les coefficients du polynôme caractéristique sont indépendants ce qui n'est pas vrai dans la plupart des cas.

Il y a deux manières pour traiter le cas des paramètres interdépendants. La première utilise le théorème des segments exposés (the Edge Theorem) et la seconde exploite le théorème de Kharitonov généralisé.

Le théorème des segments exposés montre que la stabilité d'un polytope de polynômes peut être garantie par la stabilité de ses polynômes associés aux segments exposés. Le

problème avec cette approche est de vérifier la stabilité sur un grand nombre de polynômes [6].

II.5.1 Théorème 1.1

Une famille de polynôme polytopique peut être considérée comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points (polynômes). Mathématiquement, ceci peut être représenté par la famille :

$$P(s) = \lambda_1 P_1(s) + \dots + \lambda_n P_n(s) \quad (\text{II-16})$$

Où $P_i(s)$ sont des polynômes réels fixés et λ_i sont des réels avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum \lambda_i = 1$.

Une représentation alternative d'une famille polytopique est de la forme

$$P(s) = a_1 Q_1(s) + a_2 Q_2(s) + \dots + a_m Q_m(s) \quad (\text{II-17})$$

Où chaque paramètre réel intermédiaire varie de façon autonome dans l'intervalle $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$. En d'autres termes, le vecteur de paramètre $a := [a_1, \dots, a_m]$ varie dans l'hypercube

$$A := \left\{ a : \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, i = 1, \dots, m \right\}$$

Prenons une famille de polynômes réels de degré n dont un élément typique est donné

par :
$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_{n-1} s^{n-1} + \delta_n s^n \quad (\text{III-18})$$

Nous identifions P_n l'espace vectoriel de toutes les polynômes réels de degré inférieur ou égal à n avec R^{n+1} , et nous allons identifier le polynôme (III-18) avec le vecteur

$$\underline{\delta} := [\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1, \delta_0]^T$$

Soit $\Omega \subset R^{n+1}$ un m -dimensionnel polytope, qui est, la coque convexe d'un nombre fini de points. Comme un polytope, Ω est un ensemble fermé borné et il est donc compact. Nous faisons l'hypothèse que tous les polynômes en Ω ont le même degré [7].

II.5.2. Hypothèse

Le signe de δ_n est constant sur Ω , soit toujours positif ou toujours négatif. En supposant par exemple que ce signe est toujours positif, et en utilisant le fait que Ω est compact, il est toujours possible de trouver $\Delta > 0$ tel que, $\delta_n > \Delta$ pour chaque $\underline{\delta} \in \Omega$.

Un hyperplan de support H est un ensemble affine de dimension n tel que $\Omega \cap H \neq \Phi$, et de telle sorte que tout point de Ω est situé sur un seul côté de H . Avant de continuer, nous devons introduire la notion d'espace racine.

Considérez toute $W \subset \Omega$. Alors $R(W)$ est l'espace de racine de W si

$$R(W) = \{s : \delta(s) = 0, \text{ pour certains } \underline{\delta} \in W \}$$

II.5.3. Theorem (théorème des segments exposés) (1); (2)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ soit un tronçon des polynômes qui satisfait l'hypothèse II.5.2 Alors la frontière de $R(\Omega)$ est contenu dans l'espace de racine des segments exposés de Ω .

II.5.4. Lemme 1.1

si un réel S_r appartient à $R(\Omega)$, alors il existe un segment E exposée de Ω tels que $S_r \in R(E)$, et si un nombre complexe S_c appartient à $R(\Omega)$, alors il existe une face exposée F de telle sorte que $S_c \in R(F)$

II.6. Stabilité d'un segment linéaire

Dans ce paragraphe, nous nous concentrons sur le problème de la détermination de la stabilité d'un segment de linéaire joignant deux polynômes fixes que nous appelons les critères d'évaluation. Ce segment linéaire de polynômes est une combinaison convexe des deux extrémités. Ce genre de problème ressemble à des problèmes de contrôle robustes contenant un seul paramètre incertain, comme un gain ou une constante de temps, lorsque la stabilité du système doit être établie pour la totalité de l'intervalle de l'incertitude. Nous donnons quelques solutions simples à ce problème pour le cas continu (de Hurwitz).

Par exemple, considérons le segment joignant les deux polynômes

$$P_1(s) = 3s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 \text{ et } P_2(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 5$$

On peut vérifier que les deux polynômes $P_1(s)$ et $P_2(s)$ sont Hurwitz stables, mais que le polynôme au milieu $\frac{P_1(s) + P_2(s)}{2}$ a une racine $s = j$.

Maintenant, nous allons introduire un lemme simple qui traite des combinaisons convexes de deux polynômes réels, et trouve les conditions sous lesquelles une de ces combinaisons convexes peut avoir une racine imaginaire pure.

II.6.1. Condition de phase bornée

Soit S un ensemble ouvert dans le plan complexe représentant la région de stabilité et soit ∂S sa frontière. Supposons δ_1 et δ_2 sont des polynômes (réels ou complexes) de degré n et soit :

$$\delta_\lambda(s) := \lambda\delta_1(s) + (1-\lambda)\delta_2(s) \quad (\text{II.19})$$

Considérons la famille de polynômes a un paramètre suivante :

$$[\delta_1(s), \delta_2(s)] := \{\delta_\lambda(s) : \lambda \in [0,1]\} \quad (\text{II.20})$$

Cette famille sera désignée comme un segment linéaire de polynômes. Nous dirons que le segment est stable si seulement si tout polynôme sur le segment est stable. Cette propriété est appelée aussi stabilité forte de la paire $(\delta_1(s), \delta_2(s))$.

II.6.1 Lemme 1.2

Soit δ_1 et δ_2 stables par rapport à S et supposons que le degré de $\delta_\lambda(s) = n$ pour tout $\lambda \in [0,1]$ Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Le segment $[\delta_1(s), \delta_2(s)]$ est stable par rapport a S
- b) $\delta_\lambda(s^*) \neq 0$ pour tout $s^* \in \partial S; \lambda \in [0,1]$
- c) $|\phi\delta_1(s^*) - \phi\delta_2(s^*)| \neq \pi$ radians pour tout $s^* \in \partial S$
- d) Le graphe dans le plan complexe de $\frac{\delta_1(s^*)}{\delta_2(s^*)}$, pour $s^* \in \partial S$ ne coupe pas l'axe réel négatif.

Ce lemme indique essentiellement que l'ensemble du segment est stable à condition que les points d'extrémité le sont et que le degré reste invariant et que la différence entre les phases des points d'extrémité évalués le long de la frontière du domaine de stabilité (axe imaginaire pour le cas continu) est limitée par π . Cette condition sera désignée comme la condition de phase bornée [8].

II.7. Directions convexes

Il se trouve qu'il est possible de donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $\delta_0(s)$ en vertu de laquelle une forte stabilité de la paire $(\delta_2(s), \delta_0(s) + \delta_2(s))$ tiendra pour chaque $\delta_2(s)$ et $\delta_0(s) + \delta_2(s)$ qui sont Hurwitz. Ceci est accompli en utilisant la notion de direction. Et

$$\delta_0(s) := \delta_1(s) - \delta_2(s)$$

Le problème d'intérêt est : Offrir des conditions nécessaires et suffisantes sur $\delta_0(s)$ en vertu de lesquelles la stabilité du segment est garantie à chaque fois que les deux polynômes d'extrémités sont Hurwitz stables? Le polynôme $\delta_0(s)$ satisfaisant la propriété ci-dessus est appelé une direction convexe. Il ya deux résultats distincts sur les orientations convexes correspondant

II.7.1 Lemme 1.3

Soit $\delta(s) = \delta_1(s) + \delta_2(s)$, $\alpha \in [0,1]$ un segment complexe des polynômes de degré n pour tout α , avec $\delta_1(s)$ et $\delta_2(s)$ stables. Le polynôme complexe $\delta_0(s)$ est une direction convexe si et seulement si :

$$\frac{d\varphi_{\delta_0}(\omega)}{d\omega} \leq 0 \tag{II.21}$$

pour chaque fréquence $\omega \in R$ de telle sorte que $\delta_0(j\omega) \neq 0$. Cette condition est équivalente à :

$$\frac{dX_0(w)}{dw} \leq 0 \tag{II.22}$$

pour chaque fréquence $\omega \in R$ telle que $\delta_0(j\omega) \neq 0$ avec $X_0(w) = \frac{[\delta_1(w)]}{[\delta_2(w)]}$.

II.7.2. Direction réel convexe

Ce qui suit donne la condition nécessaire et suffisante pour que $\delta_0(s)$ soit une direction convexe dans le cas réel.

II.7.3 Lemme 1.4

Considérez les segments réels $\{\delta_\lambda(s) : \lambda \in [0,1]\}$ de degré n . Le polynôme réel $\delta_0(s)$ est une direction convexe si et seulement si :

$$\frac{d\varphi_{\delta_0}(w)}{dw} \leq \left| \frac{\sin(2\varphi_{\delta_0}(w))}{2w} \right| \tag{II.23}$$

Est satisfaite pour toutes les fréquences $w > 0$ tel que $\delta_0(jw) \neq 0$. Une condition équivalente est comme suit :

$$\frac{dX_0(w)}{dw} \leq \left| \frac{X_0(w)}{w} \right| \quad (\text{II.24})$$

Pour chaque fréquence $w > 0$ de telle sorte que $\delta_0(jw) \neq 0$. [16]

II.8. Conclusion

Nous avons proposé une analyse de robustesse en stabilité contre des incertitudes paramétriques à partir du théorème de Kharitonov. Puisque des incertitudes de conception peuvent être considérées, le problème de l'intégration de sous-systèmes peut (théoriquement) être traité avec cette méthode. Cependant, nous avons vu que son utilisation peut être relativement complexe, même pour une analyse de robustesse sur un système simple, quand il s'agit de calculer les valeurs minimales et maximales des coefficients du polynôme caractéristique. Par ailleurs, aucune notion de performance n'est présente dans l'analyse par le théorème de Kharitonov. Enfin, notons que les résultats peuvent être conservatifs dans le cas où les paramètres sont interdépendants, dans ce cas le théorème de Kharitonov généralisée doit être utilisé.

Nous nous sommes aussi intéressés plus particulièrement à la notion de stabilité robuste.

Des notions de stabilité robuste sont détaillées et l'accent a été mis sur l'approche de Kharitonov beaucoup utilisée pour ces modèles.

CHAPITRE III :

Application des
méthodes d'analyse et de
conception des systèmes
intervalles

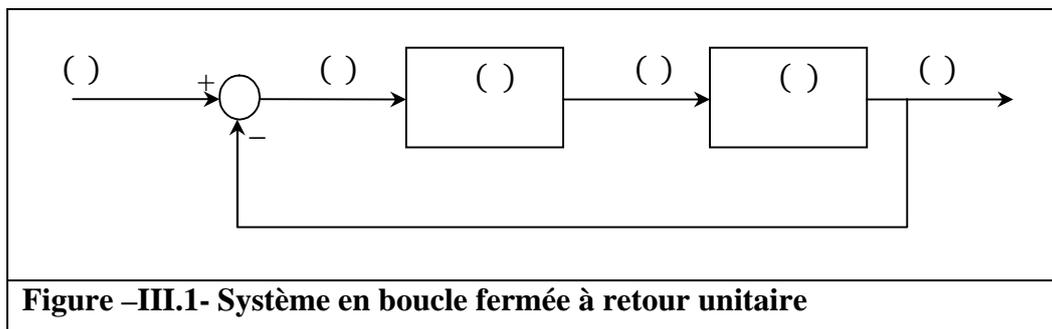
Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles :

III. Introduction

La question de robustesse en stabilité des systèmes contenant des incertitudes représente un sujet de recherche intéressant à fort potentiel d'application dans le contrôle. Dans ce chapitre on s'intéresse à l'analyse de la robustesse en stabilité des systèmes à incertitudes paramétriques avec une approche graphique qui utilise la condition d'exclusion du zéro. De point de vue pratique, l'analyse de la stabilité robuste pour les systèmes à incertitudes paramétriques peut être très confortablement réalisée avec cette approche.

III.1. Ensemble de systèmes extrême de Kharitonov :

Les systèmes en boucle fermée que nous allons traiter dans ce qui suit ont la forme suivante :



Ici, $G(s)$ et $H(s)$ sont des systèmes intervalles. L'analyse et la conception de ces systèmes en utilisant les méthodes graphiques classiques et en prenant en considération la robustesse par rapport aux incertitudes paramétriques, n'est possible que si on dispose de techniques pour pouvoir déterminer les images dans le plan complexe des différents ensembles paramétrés. Maintenant, nous allons développer la procédure que nous avons suivie pour construire ces images. Les fonctions de transfert du système et du contrôleur sont :

$$G(s) = \frac{G(s)}{G(s)}; \quad H(s) = \frac{H(s)}{H(s)} \quad (\text{III.1})$$

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

Nous supposons que le contrôleur () est fixe et que le système () contient des paramètres réels incertains qui apparaissent comme des coefficients de N(s) et de D(s). On écrit :

$$\begin{aligned} () &= + + + \dots + + \\ () &= + + + \dots + + \end{aligned}$$

Où $\in [,]$, $\in _ = \{1,2, \dots, \}$ et $\in [,]$, $\in _$. On définit les ensembles des polynômes intervalles suivants :

$$\begin{aligned} () &= \{ () = + + + \dots + + : \in [,] \in _ \} \\ () &= \{ () = + + + \dots + + : \in [,] \in _ \} \end{aligned}$$

L'ensemble de systèmes intervalles est définie comme suit :

$$() = \left\{ \frac{()}{()} : ((), ()) \in ((), ()) \right\} \tag{III.2}$$

Le système en boucle fermée à retour unitaire de la figure précédente est un système intervalle de contrôle. Le polynôme caractéristique du système est :

$$() = () () + () () \tag{III.3}$$

Et l'ensemble des polynômes caractéristiques correspondant aux différentes combinaisons de valeurs des paramètres est dénoté $\Delta()$.

Le système en boucle fermée est robustement stable si et seulement si chaque polynôme dans l'ensemble $\Delta()$ est du même degré et est Hurwitz. Ceci est exactement le problème traité par le théorème de Kharitonov généralisé où il a été montré que le test de la stabilité du système intervalle peut être réduit au test de la stabilité d'un ensemble extrême de systèmes ().

En conservant la même notation utilisée avant, l'ensemble extrême de systèmes est :

$$() = \frac{()}{()} \cup \frac{()}{()} \tag{III.4}$$

() et () sont les deux ensembles de polynômes de Kharitonov correspondants aux polynômes intervalles () et () et (), () sont les segments de Kharitonov. On introduit l'ensemble suivant :

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

$$(\mathcal{A}) \times (\mathcal{B}) = (\mathcal{A}) \times (\mathcal{B}) \cup (\mathcal{A}) \times (\mathcal{B}) \quad (\text{III.5})$$

On définit aussi l'ensemble extrême de polynômes caractéristique du système de contrôle intervalle par :

$$\Delta(\mathcal{A}) = \{ (\mathcal{A}) (\mathcal{B}) + (\mathcal{A}) (\mathcal{B}) : (\mathcal{A}), (\mathcal{B}) \in (\mathcal{A}) \times (\mathcal{B}) \} \quad (\text{III.6})$$

L'ensemble des systèmes de Kharitonov (vertex) est :

$$(\mathcal{A}) = \frac{(\mathcal{A})}{(\mathcal{A})} \quad (\text{III.7})$$

III.2. Enveloppes et ensemble image dans le plan complexe des systèmes extrêmes de Karitonov

Les fonctions de transfert communément utilisées pour un système en boucle fermée sont :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}) &= \frac{(\mathcal{A})}{(\mathcal{A})} = (\mathcal{A}) (\mathcal{B}); & (\mathcal{A}) &= \frac{(\mathcal{A})}{(\mathcal{A}) (\mathcal{B})} = \frac{(\mathcal{A})}{(\mathcal{A}) (\mathcal{B})}; & (\mathcal{A}) &= \frac{(\mathcal{A})}{(\mathcal{A})} = \frac{(\mathcal{A})}{(\mathcal{A}) (\mathcal{B})} \quad \text{et} \quad \text{enfin} \\ (\mathcal{A}) &= \frac{(\mathcal{A})}{(\mathcal{A})} = \frac{(\mathcal{A}) (\mathcal{B})}{(\mathcal{A}) (\mathcal{B})}. \end{aligned}$$

Lorsque $G(s)$ varie dans l'ensemble (\mathcal{A}) , ces fonctions varient dans les ensembles (\mathcal{A}) , (\mathcal{A}) , (\mathcal{A}) et (\mathcal{A}) . Si on remplace (\mathcal{A}) pour ces ensembles par (\mathcal{A}) nous obtenons :

$$(\mathcal{A}) = \{ (\mathcal{A}) (\mathcal{B}) : (\mathcal{A}) \in (\mathcal{A}) \} \quad (\text{III.8})$$

$$(\mathcal{A}) = \left\{ \frac{(\mathcal{A})}{(\mathcal{A}) (\mathcal{B})} : (\mathcal{A}) \in (\mathcal{A}) \right\} \quad (\text{III.9})$$

$$(\mathcal{A}) = \frac{(\mathcal{A})}{(\mathcal{A}) (\mathcal{B})} : (\mathcal{A}) \in (\mathcal{A}) \quad (\text{III.10})$$

$$(\mathcal{A}) = \left\{ \frac{(\mathcal{A}) (\mathcal{B})}{(\mathcal{A}) (\mathcal{B})} : (\mathcal{A}) \in (\mathcal{A}) \right\} \quad (\text{III.11})$$

Maintenant, nous allons résumer l'ensemble des théorèmes donnant les propriétés de ces ensembles extrêmes que nous venons de définir :

1. Pour une valeur donnée ω de la pulsation, la frontière de l'ensemble image (gabarit) dans le plan complexe de l'ensemble de polynômes caractéristiques correspondant aux différentes combinaisons des valeurs de paramètres dénoté $\Delta(\omega)$ vérifie : $\Delta(\omega) \subset \Delta(\omega)$.

2. $() \subset ()$.
3. $() \subset ()$.
4. $() \subset ()$.
5. $() \subset ()$.
6. $() \subset ()$.

Ces propriétés sont utilisées aussi pour la génération des enveloppes de la réponse fréquentielle dans le plan de Bode, de Nyquist et de Nichols qui seront établies seulement à partir des ensembles extrémaux.

III.3. Commande par retour d'état robuste :

La commande par retour d'état des systèmes linéaires consiste à utiliser un vecteur de gain de retour utilisé pour réinjecter les valeurs actuelles des états du système vers l'entrée, ceci a pour effet de placer les pôles en boucle fermée du système dans des positions prédéterminées dans le polynôme caractéristique désiré. La seule condition exigée pour appliquer cet algorithme est que le système soit contrôlable. Les fonctions de MATLAB 'place' et 'acker' permettent de faire ces calculs de façon directe. Pour les systèmes intervalles (contenant des incertitudes paramétriques), le système en boucle fermée calculé pour le cas nominal n'est garantie de garder les performances désirées quand les paramètres dévient de leurs valeurs nominales et il n'est même pas garantie de rester stable.

Dans la première application, nous avons met au point un programme qui fait le calcul du gain de retour d'état robuste pour les systèmes intervalles. Nous allons expliquer l'algorithme que nous avons implémenté ensuite nous allons l'appliquer à un exemple en vu de tester ses performances et le comparer avec un autre contrôleur.

III.3.1. Stabilisation robuste par retour d'état :

Le problème de retour d'état robuste peut être énoncé comme suit :

Etant donné une famille de polynôme intervalle $()$:

$$() = + + + \dots + + \quad (III.12)$$

Chaque paramètre peut varier dans un intervalle $-\frac{\Delta}{}, +\frac{\Delta}{}$ où est la valeur nominale du paramètre et Δ est la longueur de son intervalle de variation.

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

Pour éviter le cas trivial, on suppose que la famille () contient au moins un polynôme instable. Le problème est alors de trouver un vecteur de n paramètre $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n]$ qui pour un vecteur $\Delta_{-} = [\Delta_{-1}, \Delta_{-2}, \dots, \Delta_{-n}]$ donné, transforme la famille () en () définie par :

$$() = (+) + (+) + (+) + \dots + (+) + \dots \quad (III.13)$$

Tel que tous les membres de () sont entièrement stables.

Le calcul du vecteur de retour d'état robuste K se fait en trois étapes qui sont :

Etape 1 :

On choisit un polynôme stable quelconque () et un nombre réel $\Delta_{-} > \frac{\Delta_{-}}{r()}$ où $r()$ est le rayon de la plus large hyper sphère de stabilité autour de (). Dénotons :

$$() = + + + \dots + = () \quad (III.14)$$

Alors les quatre polynômes suivants :

$$() = - + - + + + + \dots, (III.15)$$

$$() = - + + + + - + \dots, (III.16)$$

$$() = + + - + - + + + \dots, (III.17)$$

$$() = + + + + - + - + \dots, (III.18)$$

Sont stable car $\dots + \dots + \dots + \dots < [()] = [()]$.

Etape 2 :

On cherche quatre nombre réels positifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que chacun des quatre polynômes :

$$() + \dots \quad 0 \leq \alpha < \beta ; \quad \alpha = 1,2,3,4 \quad (III.18)$$

Pour calculer ces quatre paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ avec une précision finie, nous avons utilisé la méthode de bisection.

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

Soit $\alpha = \min \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \}$. Si $\alpha > 1$ alors on prend $\alpha = 1$. Sinon on divise par α et on considère les quatre polynômes :

$$P_i(s) = -\alpha P_i(s) + \dots \quad (III.19)$$

Le choix de α implique que les quatre polynômes $P_i(s)$ sont stables. Mais ces polynômes ne sont que les quatre polynômes de Kharitonov de la famille :

$$P_i(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n \quad (III.20)$$

Avec $\alpha \in \left[-\frac{(\Delta_i)}{a_n}, -\frac{(\Delta_i)}{a_{n-1}} \right], i = 1, 2, \dots, (n-1)$ et par suite cette famille de polynômes est entièrement stable.

Etape 3 :

Maintenant, il suffit de choisir le vecteur K tel que :

$$P_i(s) + K Q_i(s) = -\alpha P_i(s) \quad (III.21)$$

III.4. Exemple 1 :

Le premier exemple que nous avons considéré est un système intervalle de troisième ordre :

$$P(s) = \dots \quad (III.22)$$

Les paramètres du système varient dans les intervalles suivants : $a_1 \in [3,7], a_2 \in [-3,-1]$ et $a_3 \in [-6,-2], a_4 \in [5,7]$. Les paramètres a_0 sont fixes.

Le système nominal est donné par : $P(s) = \dots$

Pour pouvoir faire une comparaison, nous allons commander le système en utilisant deux méthodes : un retour d'état robuste et un contrôleur de deuxième ordre calculé en résolvant une équation de Diophantine et qui place les cinq pôles du système en boucle fermée à : $\{-1, -2, -3, -2 + 2j, -2 - 2j\}$.

Pour le calcul du contrôleur de deuxième ordre, nous avons adopté la méthode numérique pour la résolution de l'équation de Diophantine. La fonction de transfert du contrôleur est :

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

$$(\) = \text{-----} \quad \text{(III.23)}$$

Le polynôme caractéristique est dénoté par : $(\) = \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$

Posons : $\ = [\quad , \quad , \quad , \quad , \quad]$; $\ = [\quad , \quad]$. Alors, le système d'équation à résoudre est : $\ * \ =$ avec :

$$= \begin{bmatrix} 6 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.24)}$$

Le contrôleur obtenu est alors :

$$(\) = \text{-----} \quad \text{(III.25)}$$

Ce contrôleur garantie évidemment la stabilité du système nominal. Mais la question qui se pose est si cette stabilité reste maintenue quand les paramètres du système dévient de leurs valeurs nominales. Nous allons utiliser les outils d'analyse des systèmes intervalles pour tester si le système intervalle compensé avec ce contrôleur est robustement stable en boucle fermée.

La première méthode que nous avons utilisée consiste à appliquer le théorème de Kharitonov généralisée au polynôme caractéristique en boucle fermée. Le programme commence alors par calculer l'ensemble extrême de Kharitonov correspondant à ce polynôme caractéristique, ensuite on vérifie la stabilité de cet ensemble en appliquant le théorème de frontière (Edge théorème) qui stipule que le lieu des racines d'une famille polytopique est inclus dans la région entourée par le lieu des racines des segments exposés. Ceci permet de transformer un problème de recherche dans espace multidimensionnel (nombre de paramètres) à un problème de recherche dans un espace unidimensionnel (un seul paramètre). Le programme que nous avons mis aux point considère tous les segments et pas seulement les segments exposés. Ceci conduit à la même conclusion, car les racines des segments non exposés sont situées à l'intérieur du domaine délimité par les racines des segments exposés.

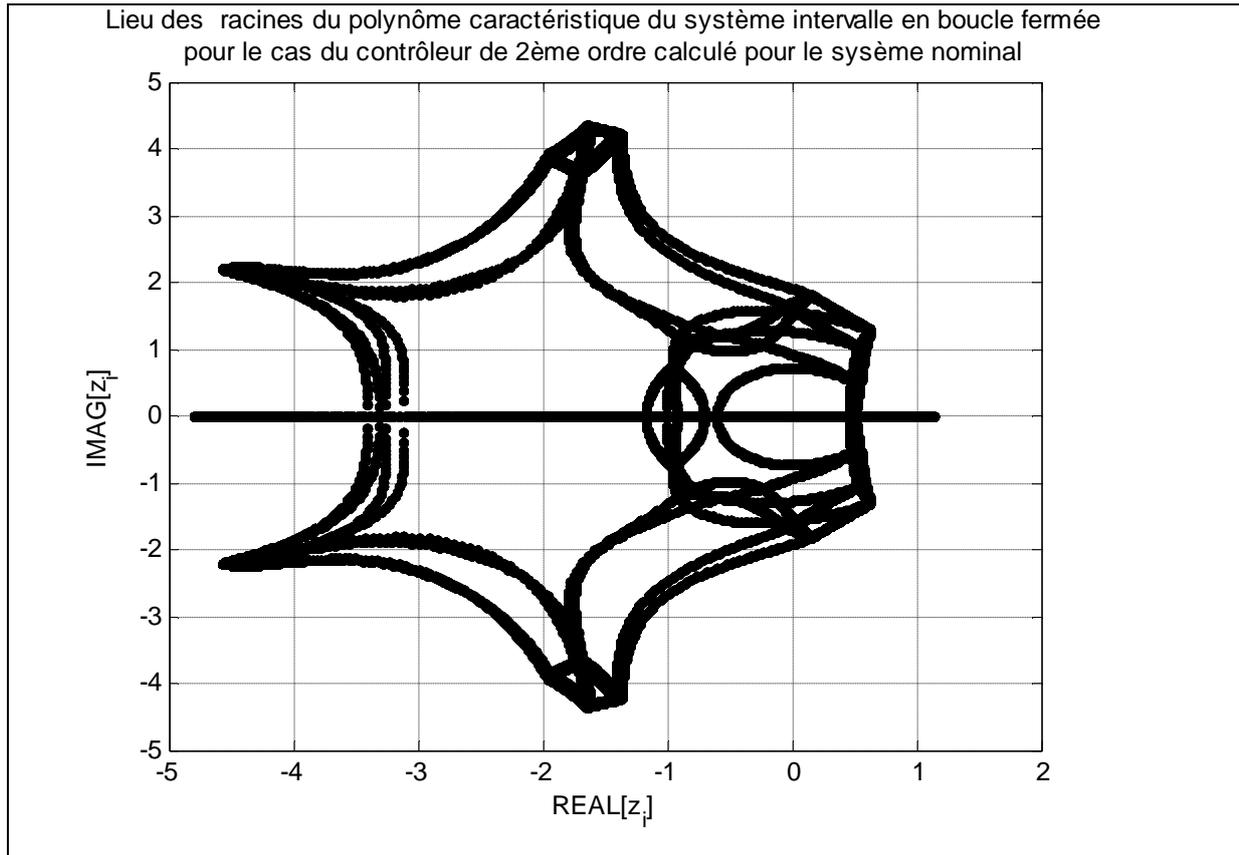


Figure –III.2- Lieu des racines du polynôme caractéristique du système intervalle compensé par le contrôleur de 2^{ème} ordre calculé pour le système nominal.

La deuxième méthode consiste à tracer les gabarits des ensembles images dans le plan complexe du polynôme caractéristique en boucle fermée quand $\alpha = \beta$, $\beta \in [0, +\infty]$. Ensuite appliquer le principe d'exclusion de zéro. Ceci est possible car on sait déjà que le système en boucle fermée est stable pour le cas nominal. La figure suivante montre les gabarits des ensembles images dans le plan complexe du polynôme caractéristique en boucle fermée pour un ensemble fini de valeur de β . On voit bien que le gabarit correspondant à $\beta = 1$ / α contient l'origine ce qui signifie que le polynôme caractéristique à des racines instables et par conséquent le système intervalle en boucle fermée n'est pas robustement stable.

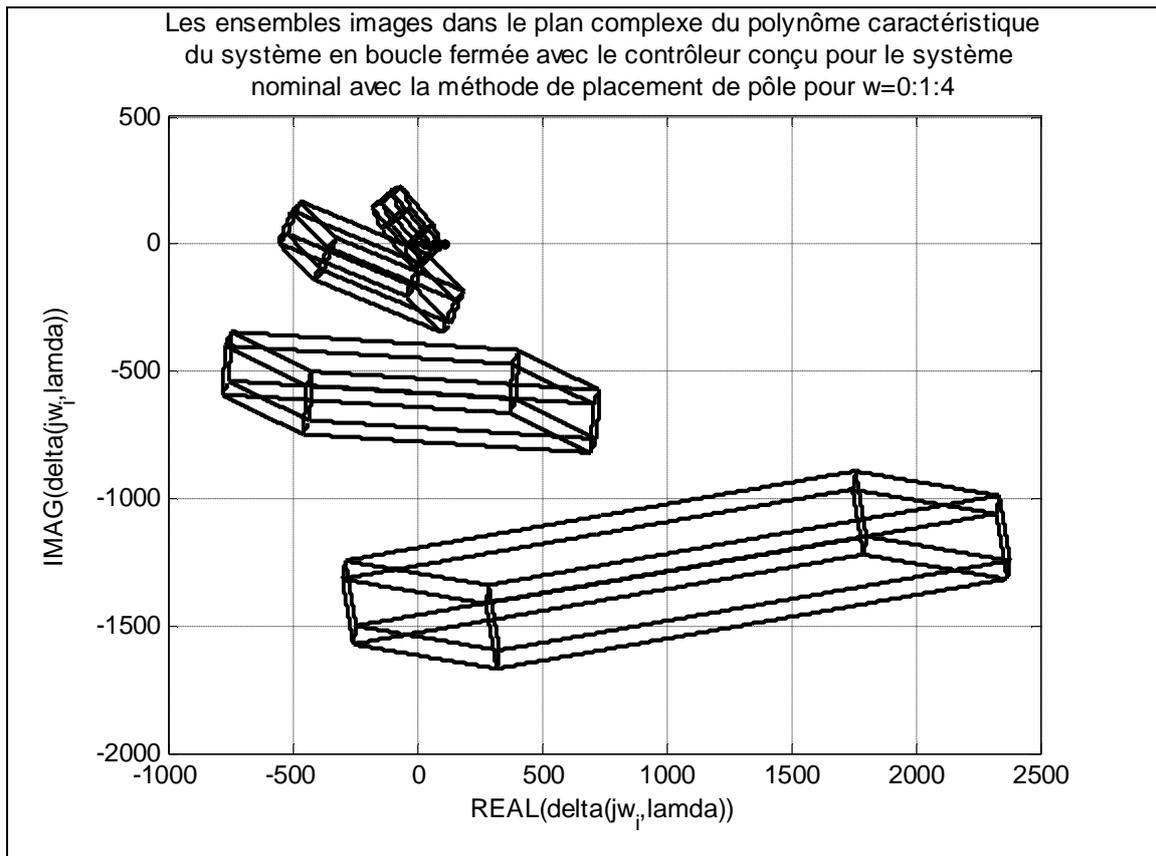


Figure –III.3- L'image dans le plan complexe du polynôme caractéristique incertain du système en boucle fermée. (remarque : le gabarit correspondant à $w=1$ rad/sec contient l'origine du plan complexe)

On peut aussi arriver à cette même conclusion en examinant les gabarits de la réponse fréquentielle dans le plan de Nyquist. Le lieu de Nyquist du système nominal entour le point $(-1,0)$ deux fois dans sens horaire et vu que le système nominal à déjà deux pôles instables ceci signifie que le système nominal en boucle fermée est stable. Mais certains gabarits de la réponse fréquentielle contiennent le point critique $(-1,0)$ ceci signifie qu'ils existent des combinaisons valables des coefficients du système intervalle pour lesquelles le lieu de Nyquist passe complètement à droite du point critique, si pour ces combinaisons les pôles instables en boucle ouverte sont toujours présents (voir lieu des racines), alors le système en boucle fermée n'est pas robustement stable.

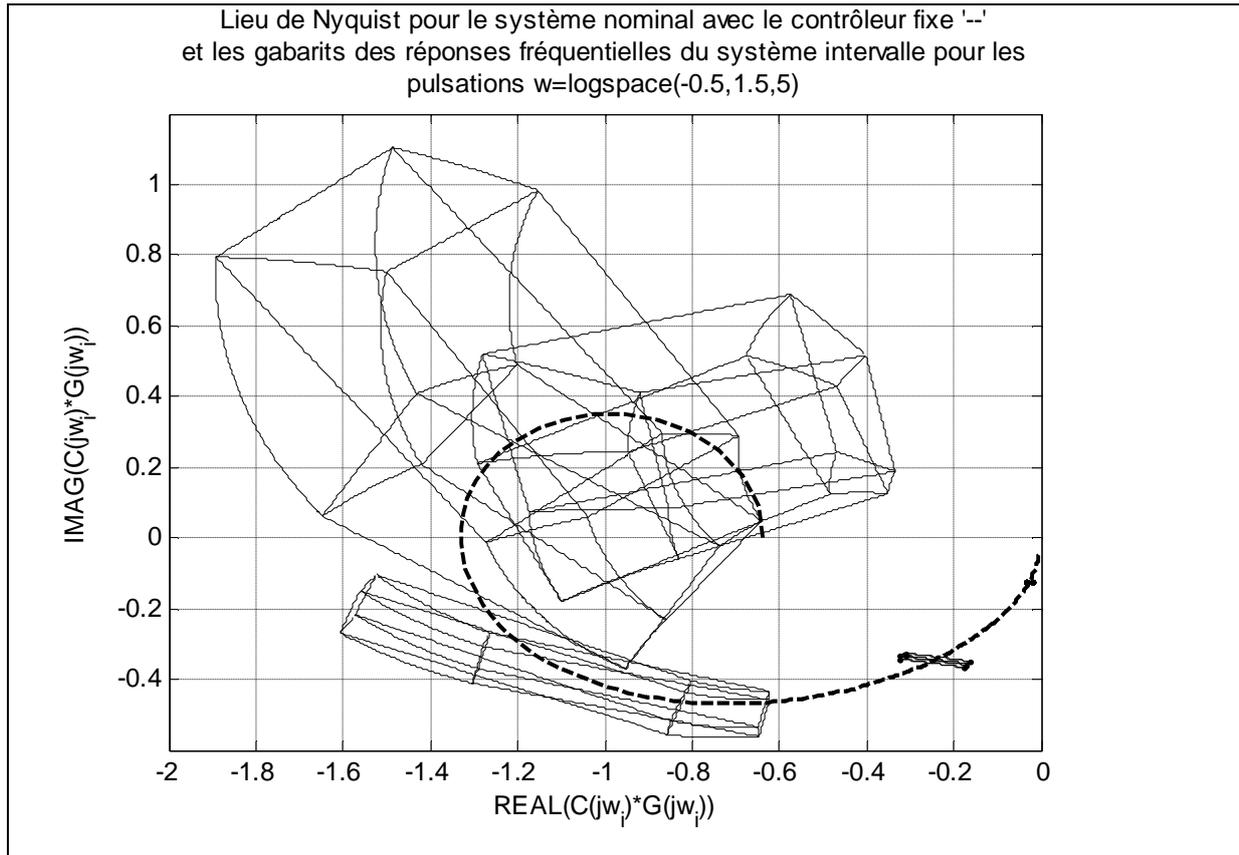


Figure –III.4- Les gabarits de Nyquist pour le système intervalle et le lieu de Nyquist pour le système nominal.

Pour le cas de contrôle avec retour d'état robuste, le programme que nous avons fait prend le vecteur des paramètres nominaux du dénominateur de la fonction de transfert du système intervalle, leurs intervalles de variation, ainsi que le polynôme arbitraire (s) , ensuite, il calcule la borne inférieure sur le nombre n et il demande de choisir la valeur de α supérieure à la borne minimale. Enfin, le programme calcule le vecteur de gains de retour d'état robuste.

Le polynôme arbitraire que nous avons choisi est $(s) = (s + 1)$ la valeur de $\alpha = 2.5 > 2.2383$. Le vecteur de gain de retour d'état robuste calculé par le programme est $K = [-3.5000 \quad 9.0000 \quad 5.5000]$.

Le retour d'état déplace les pôles du système en boucle ouverte, mais laisse les zéros inchangés. Ainsi le test de la robustesse en stabilité du système se résume à tester la stabilité du polynôme intervalle $(s) = (s + 1) + (s + \alpha) + (s + \beta) + (s + \gamma)$. D'après le théorème de Kharitonov, ce test se réduit au test des quatre polynômes de Kharitonov associés au polynôme intervalle. Nous avons trouvé que les quatre polynômes sont stables. La même

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

chose peut être montrée en traçant l'ensemble image du polynôme du dénominateur du système en boucle fermée. La figure suivante montre cet ensemble image et permet de conclure que le système ne peut avoir aucun pôle instable (principe d'exclusion de zéro).

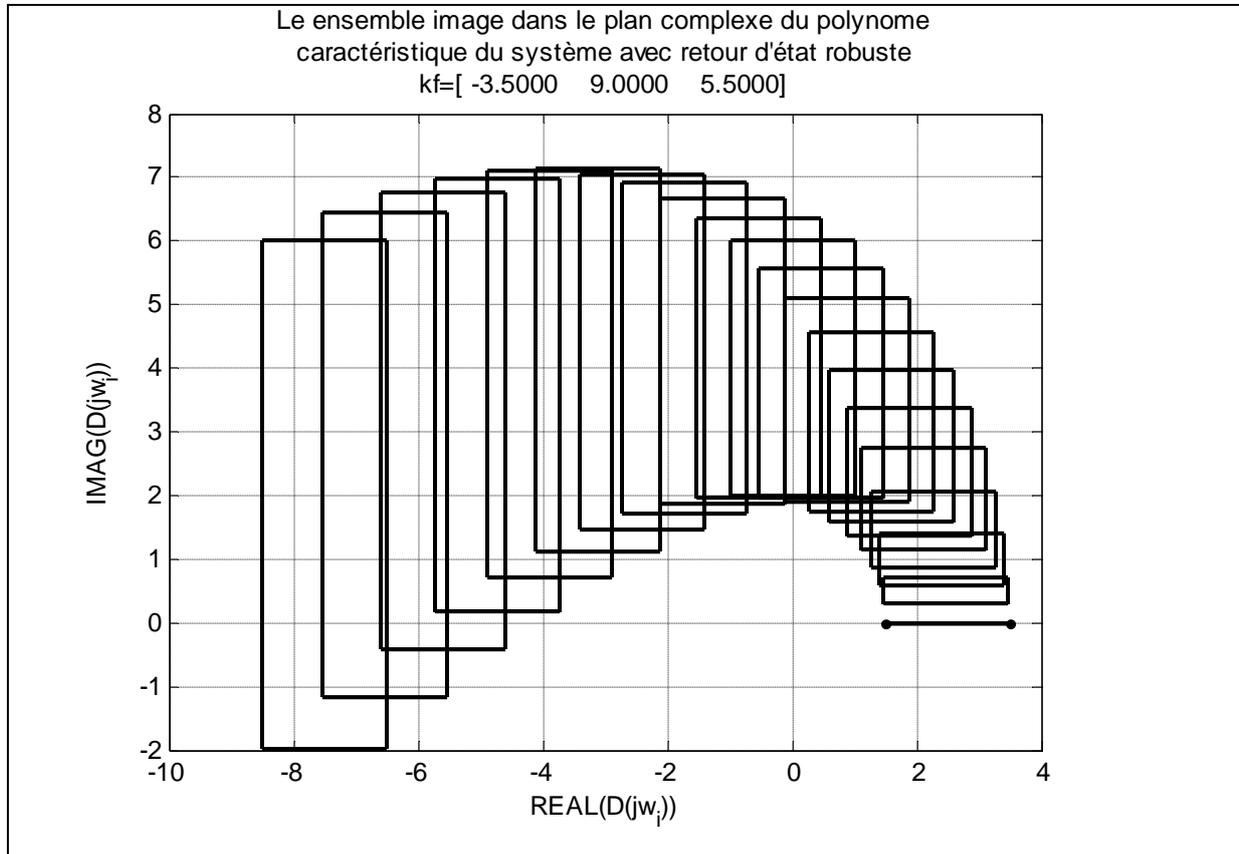


Figure –III.5- Ensemble image dans le plan complexe du polynôme caractéristique du système intervalle avec retour d'état robuste. (Remarque l'origine est exclue de tous les gabarits)

Le lieu des racines du polynôme intervalle qui représente le dénominateur du système avec retour d'état robuste révèle la même chose. On remarque que les pôles du système restent à l'intérieur du demi plan à partie réelle négative et ceci pour toutes les combinaisons permises des valeurs des coefficients.

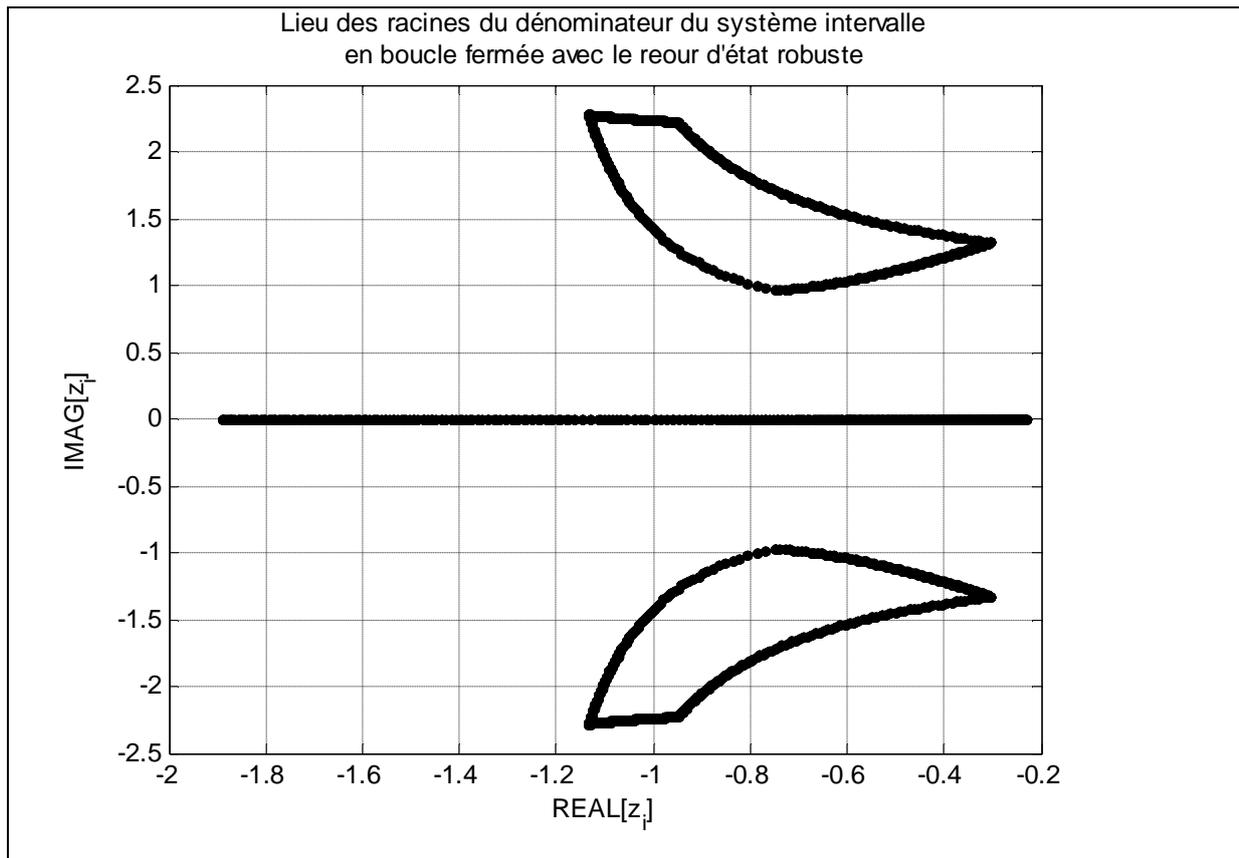


Figure –III.6- Lieu des racines du système intervalle en boucle fermée avec retour d'état robuste.

Pour examiner le comportement dans le domaine temporel du système intervalle avec retour d'état robuste en fonction des changements des paramètres, nous avons calculé les réponses indicielles de 100 fonctions de transfert valides choisies aléatoirement parmi la famille intervalle (voir figure suivante). On constate que le système est robustement stable, mais ses performances varient considérablement avec la variation des paramètres du système intervalle.

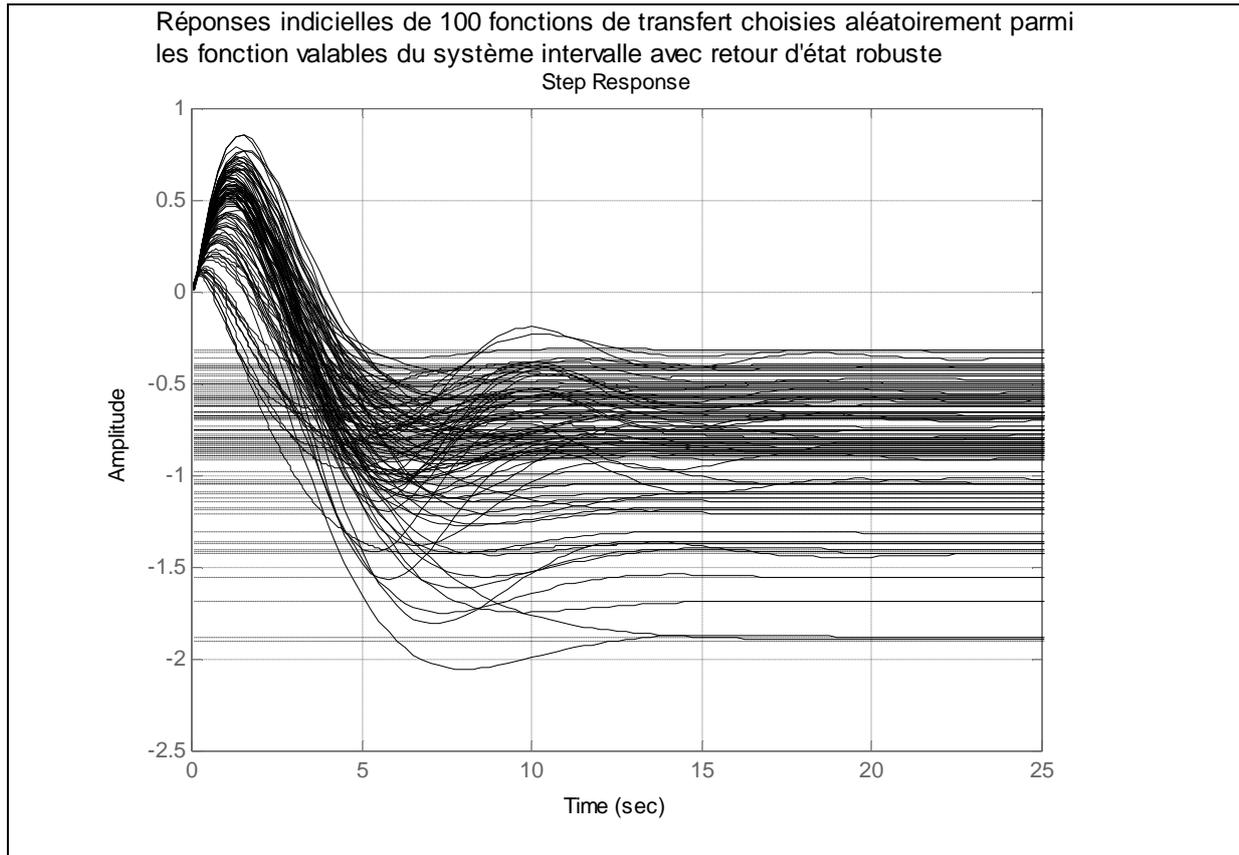


Figure –III.7- Réponses indicielles de 100 échantillons de fonctions de transfert choisies aléatoirement parmi la famille intervalle.

III.5. Exemple 2 :

Dans cette exemple nous allons appliquer les théorèmes concernant les diagrammes de Bode, Nyquist, Lieu des racines, et l'ensemble image dans le plan complexe pour les systèmes intervalles pour l'analyse et la conception de compensateur garantissant la robustesse en stabilité et performances et ceci en utilisant les concepts des outils classiques de conception de compensateur. Les programmes que nous avons mis au point, commencent par construire l'ensemble extrême de kharitonov (de fonctions de transfert ou de polynômes) et ensuite utilisent cet ensemble pour le calcul des enveloppes et des gabarits de réponses fréquentielles en exploitant les résultats et les théorèmes déjà cités. Le système, que nous allons traiter, a une fonction de transfert de la forme :

$$() = \text{-----} \quad (III.26)$$

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

Les paramètres de ce système peuvent varier dans des intervalles telles que : $\omega \in [35, 45]$; $\tau \in [-3, -1]$; $K = 0$ (fixe), $\alpha \in [3, 5]$; $\beta \in [40, 44]$; $\gamma \in [21.5, 22.5]$, $\delta = 1$ (l'ordre du système est fixe). Les valeurs nominales de ces paramètres correspondent à la fonction de transfert suivante :

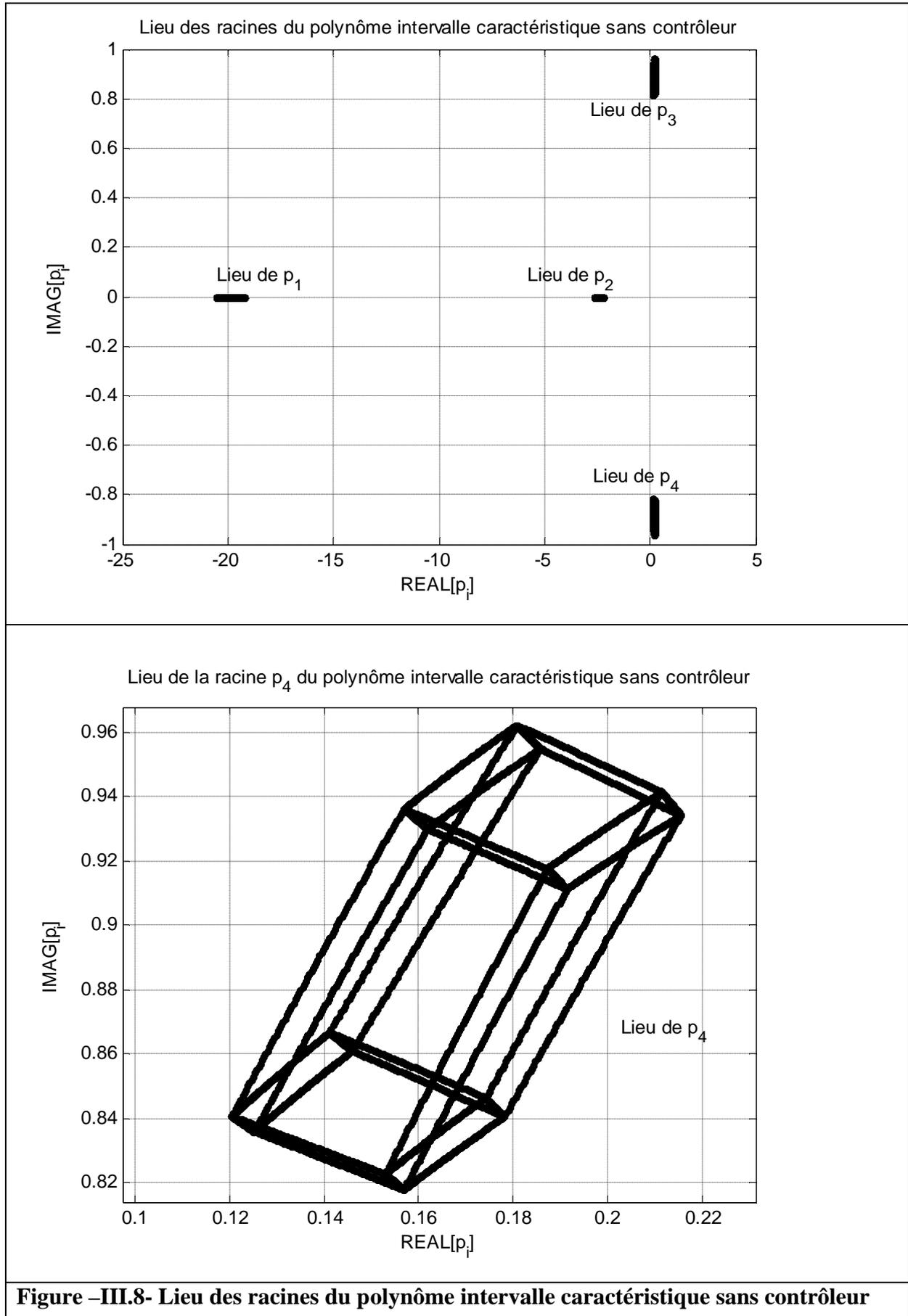
$$G(s) = \frac{K}{(s + \alpha)(s + \beta)(s + \gamma)(s + \delta)} \quad (\text{III.27})$$

Le système nominal en boucle fermée avec un contrôleur $C(s) = 1$ est déjà instable. Si on examine le lieu des racines du système intervalle en boucle fermée avec ce même contrôleur on remarque qu'il est instable et ceci pour toutes les combinaisons de valeurs des paramètres (voir le lieu figure suivante). A partir de la figure du lieu des racines, on remarque que les gabarits de la troisième et la quatrième racine sont situés complètement dans le demi-plan de droite pour toutes les combinaisons des valeurs des paramètres.

Il faut noter que les gabarits de la réponse fréquentielle correspondant à l'ensemble image du polynôme caractéristique excluent l'origine mais ceci n'est pas suffisant pour conclure que le système est robustement stable car le principe d'exclusion de zéro exige qu'il existe au moins une combinaison de valeur des paramètres qui donne un système stable.

Les figures des enveloppes de la réponse fréquentielle dans le plan de Bode permettent de conclure que la marge de phase et la marge de gain sont les deux négatives. On peut à partir des enveloppes, de gain constater que $-20.1 \leq \text{PM} \leq -11.58$ et que $-180 + 147.1 = -32.9 \text{ é } \leq h \leq -180 + 160.3 = -19.7 \text{ é } .$

Les enveloppes de la réponse fréquentielles dans le plan de Nyquist permettent de constater que les gabarits passent complètement à gauche du point $(-1, 0)$. Ceci permet de conclure que le lieu de Nyquist entoure ce point deux fois dans le sens horaire ($N = 2$) et que le nombre de pôle instables en boucle fermée est égale à 2.



Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

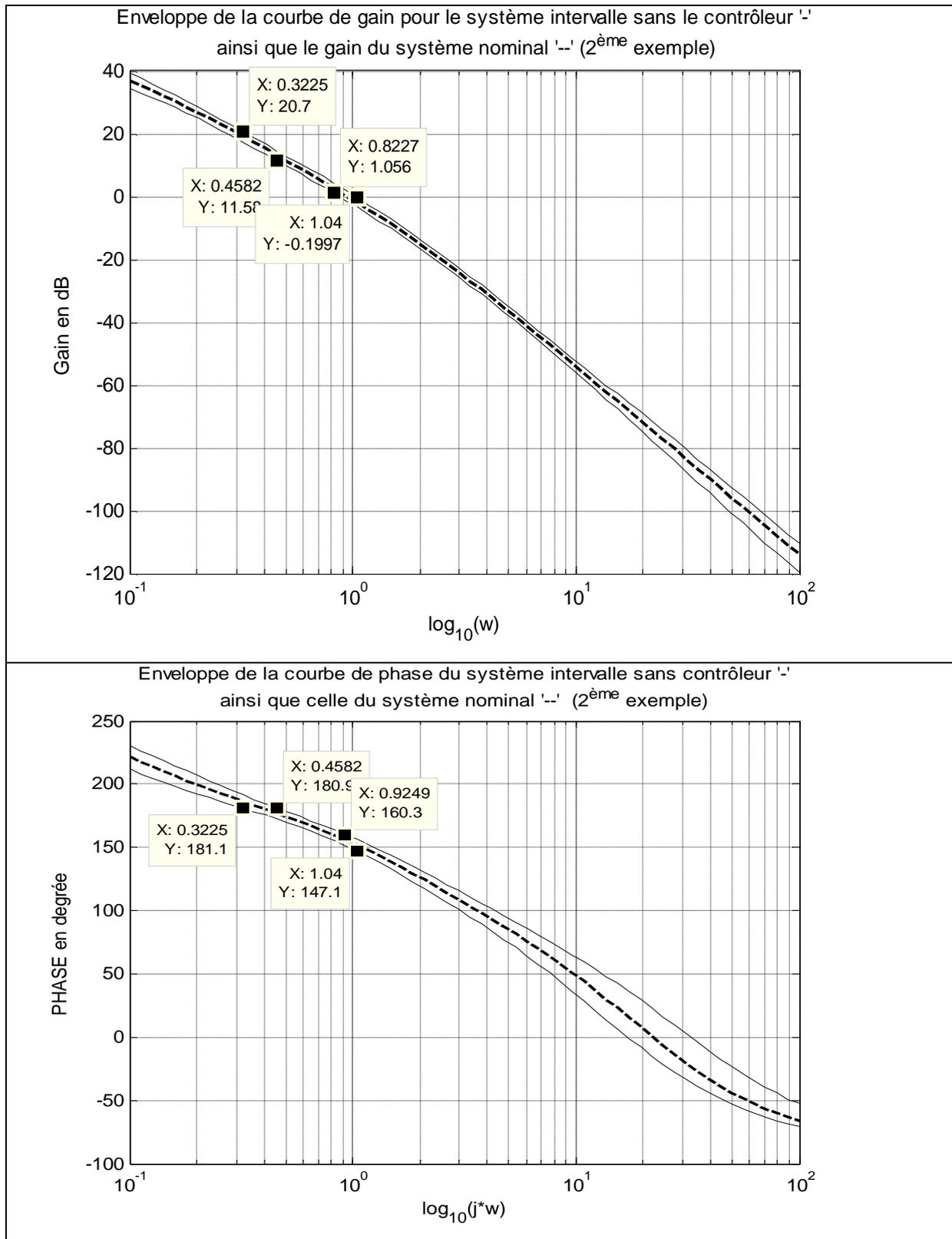


Figure –III.9- Enveloppes de gain et de phase du système intervalle du deuxième exemple.

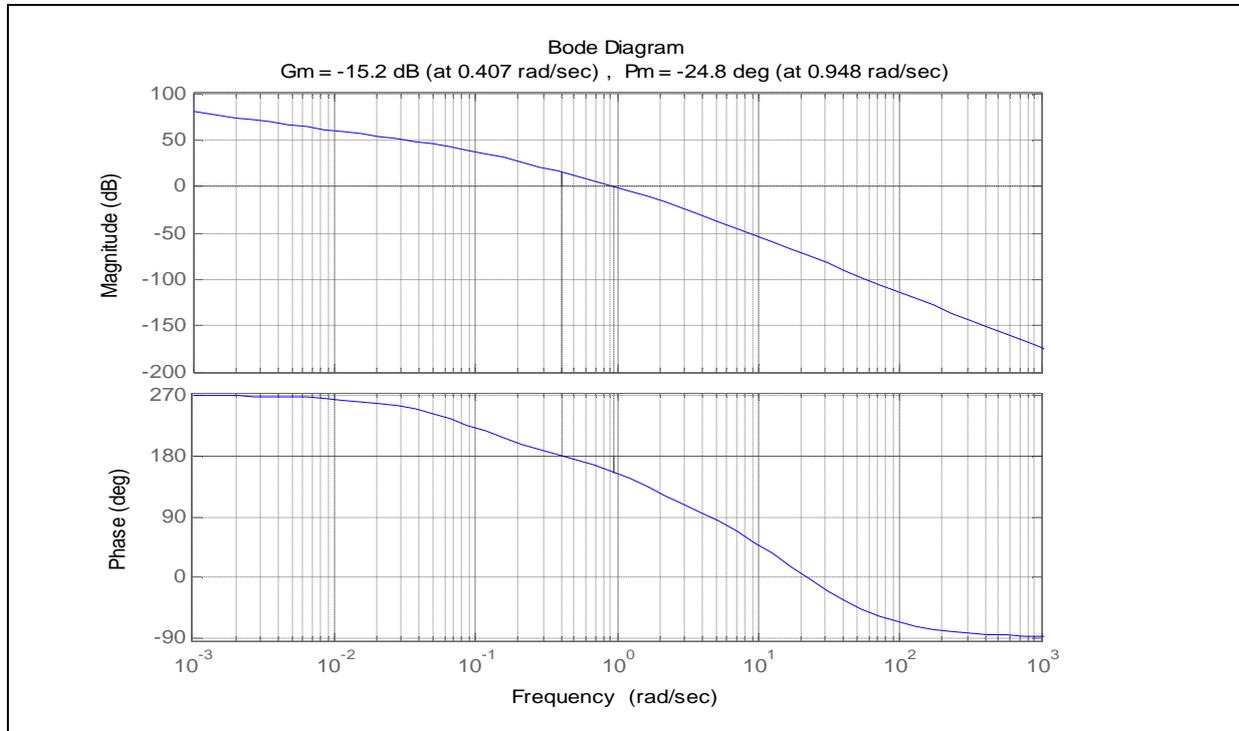


Figure –III.10- Marge de gain et de phase du système nominal

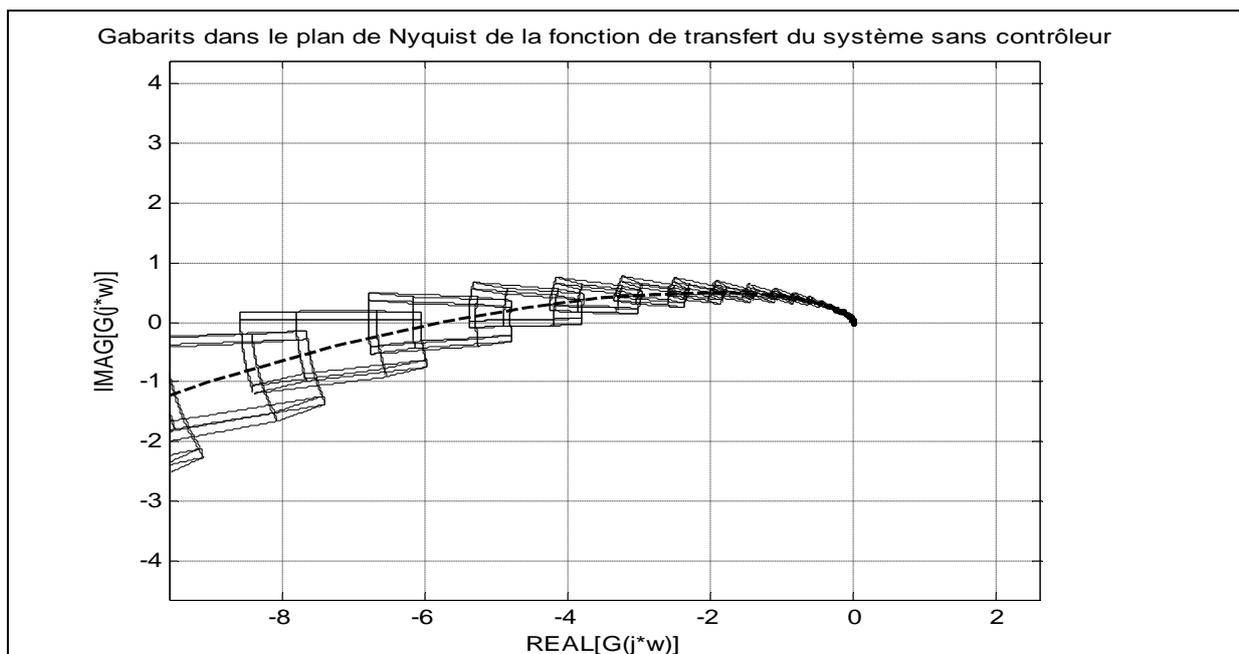


Figure –III.11- Gabarits de la réponse fréquentielle dans le plan de Nyquist du système

sans le contrôleur

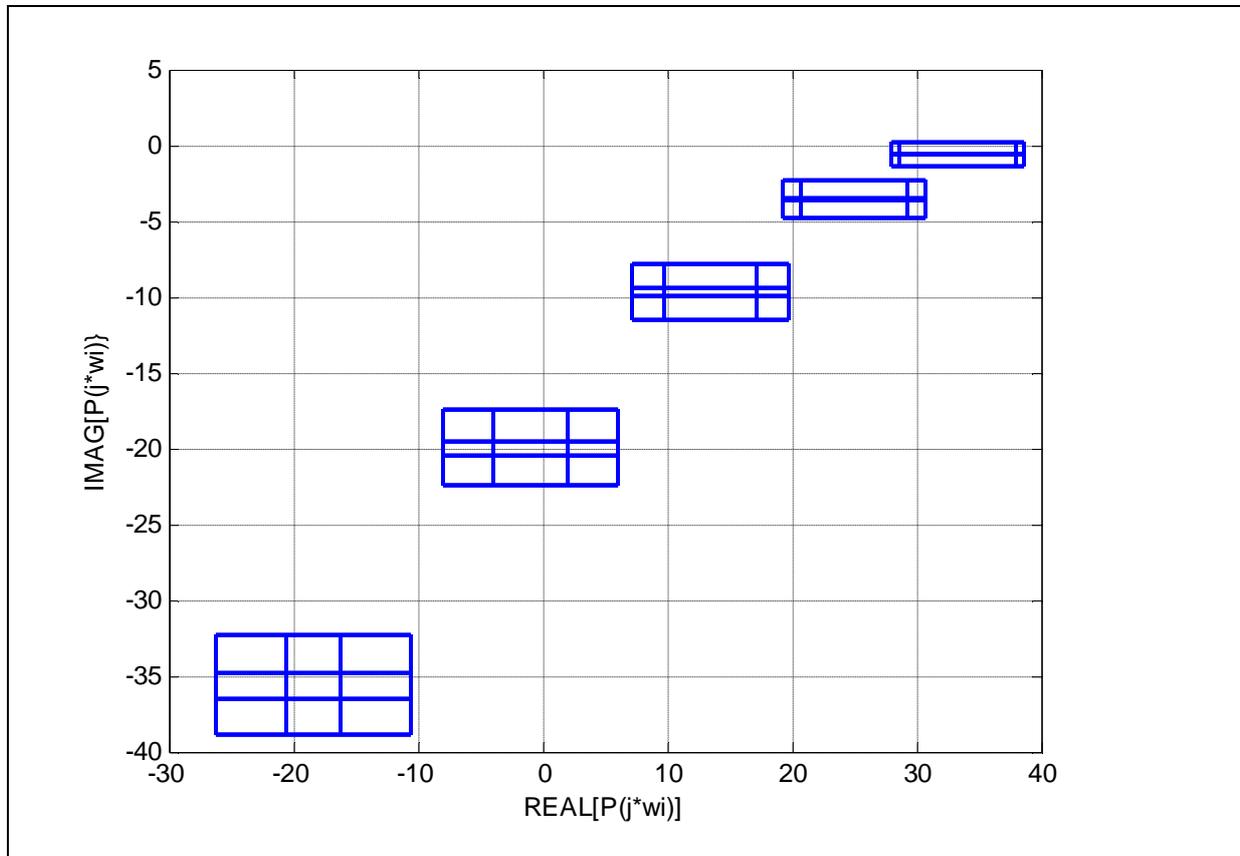


Figure –III.12- Ensemble image du polynôme intervalle caractéristique du système sans contrôleur

Nous allons utiliser la courbe des enveloppes de Bode pour concevoir un compensateur à avance de phase qui permet d'obtenir un système robustement stable avec une marge de phase supérieure à $+45^\circ$ et ceci pour toutes les combinaisons des valeurs de paramètres (Performance robuste).

L'expression de la fonction de transfert du contrôleur à avance de phase est donnée par :

$$C(s) = -\left(\frac{s+z}{s+p}\right); \quad p > z \quad \text{(III.28)}$$

Nous commençons par calculer l'avance de phase nécessaire pour obtenir la marge de phase désirée ϕ_m en degrés.

$$\phi_m = \phi_p - \phi_z = 45 + 33 = 78^\circ \quad \text{(III.29)}$$

A partir de cette avance de phase, on peut calculer la valeur de .

$$= \frac{(\quad)}{(\quad)} = 90.52 \quad (\text{III.30})$$

A partir de la courbe de gain, on remarque que la pulsation à laquelle le gain est égale à $-10 \log (\quad) = -19.5676$ est $= 2.3 /$. Ainsi :

$$= \sqrt{\quad} = 0.0457 \quad (\text{III.31})$$

Maintenant, nous allons examiner les performances du système compensé en boucle fermée en utilisant les méthodes classiques (Bode, Nyquist) combinées avec les propriétés des segments extrême de Kharitnov introduits par le théorème de Kharitonov généralisé.

Si on examine les gabarits de Nyquist du système compensé on remarque qu'ils passent tous à droite du point $(-1,0)$ ce qui signifie qu'il n'y a aucun encerclement du point critique par toutes les fonctions de transfert de la famille du système intervalle ceci signifie que le système est robustement stable.

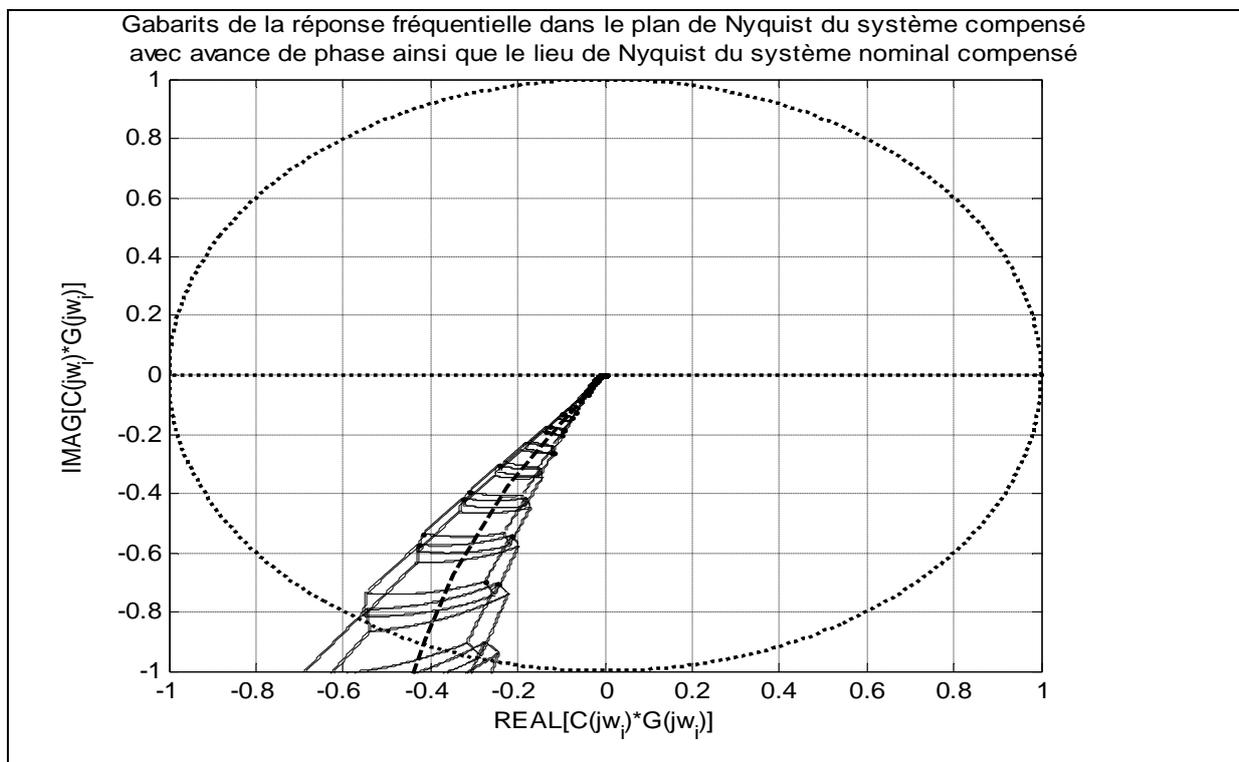


Figure –III.13- Lieu de Nyquist du système intervalle compensé par le compensateur à avance de phase conçu pour garantir la robustesse contre les incertitudes paramétriques.

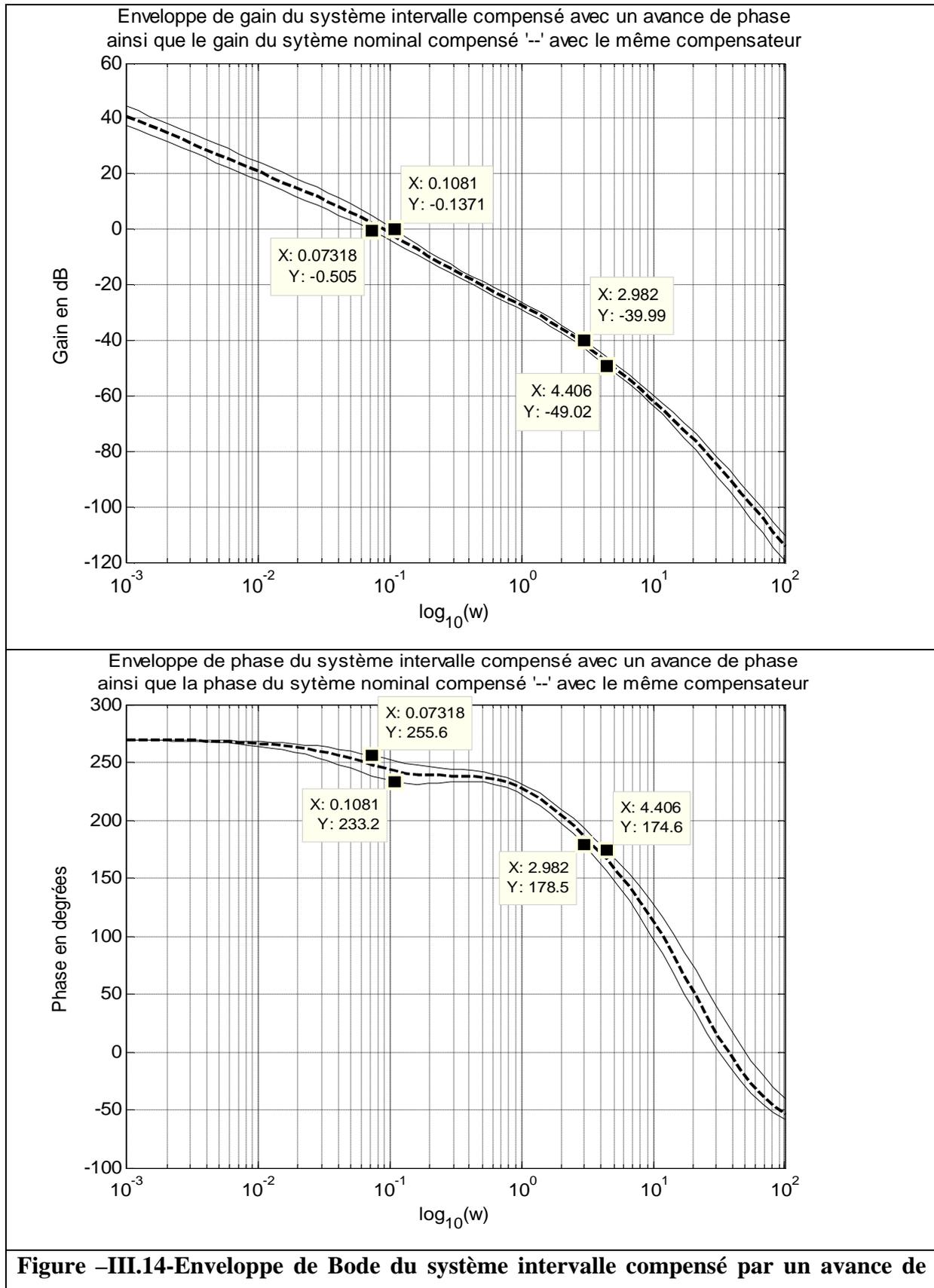


Figure –III.14-Enveloppe de Bode du système intervalle compensé par un avance de

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

$$\text{phase}(\cdot) = \frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots}$$

A partir des enveloppes de gain on peut estimer les valeurs maximale et minimale de la marge de gain garanties par le compensateur. On remarque que $40 \leq \dots \leq 49.2$. La marge de phase est incluse dans l'intervalle $233.2 - 180 = 53.2^\circ \leq h \leq 255.6 - 180 = 75.6^\circ$. Les valeurs de ces marges pour le système nominal compensé sont données par les courbes suivantes :

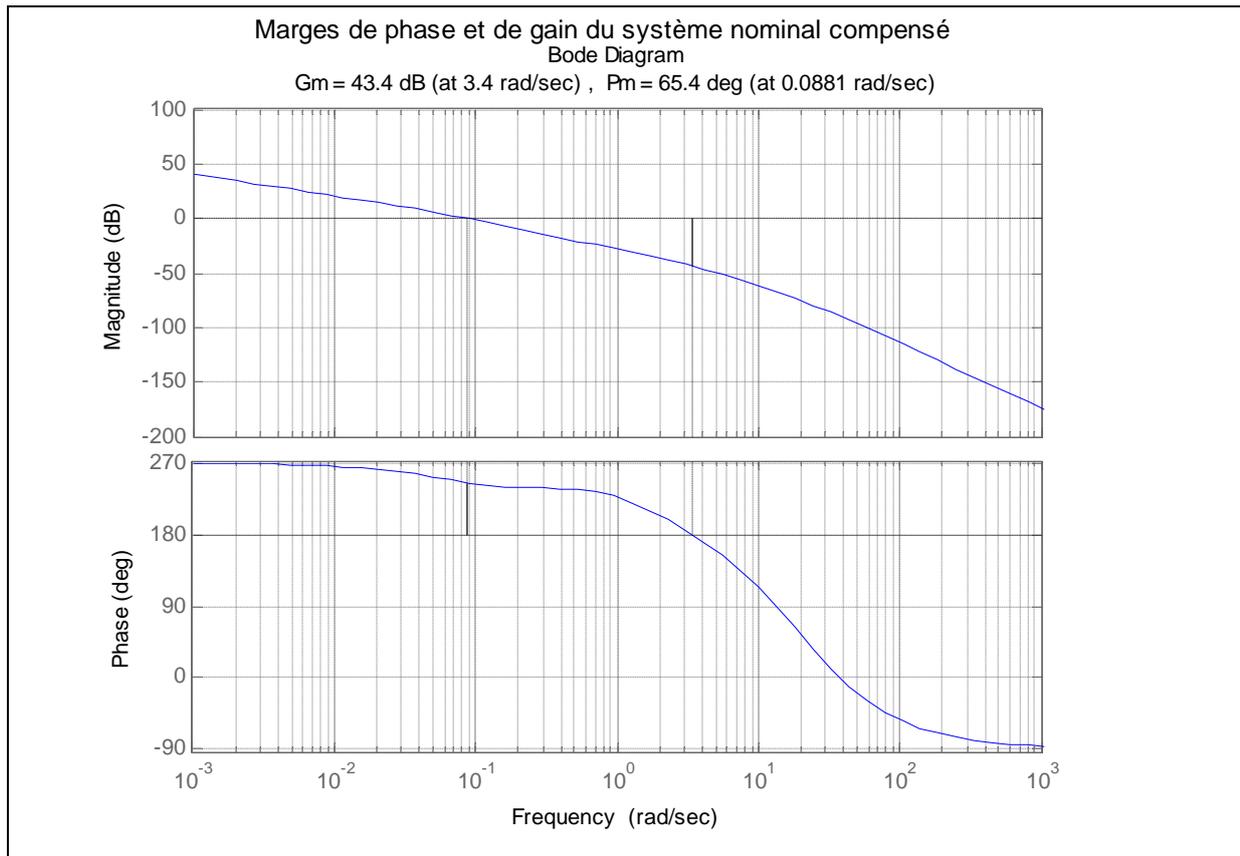
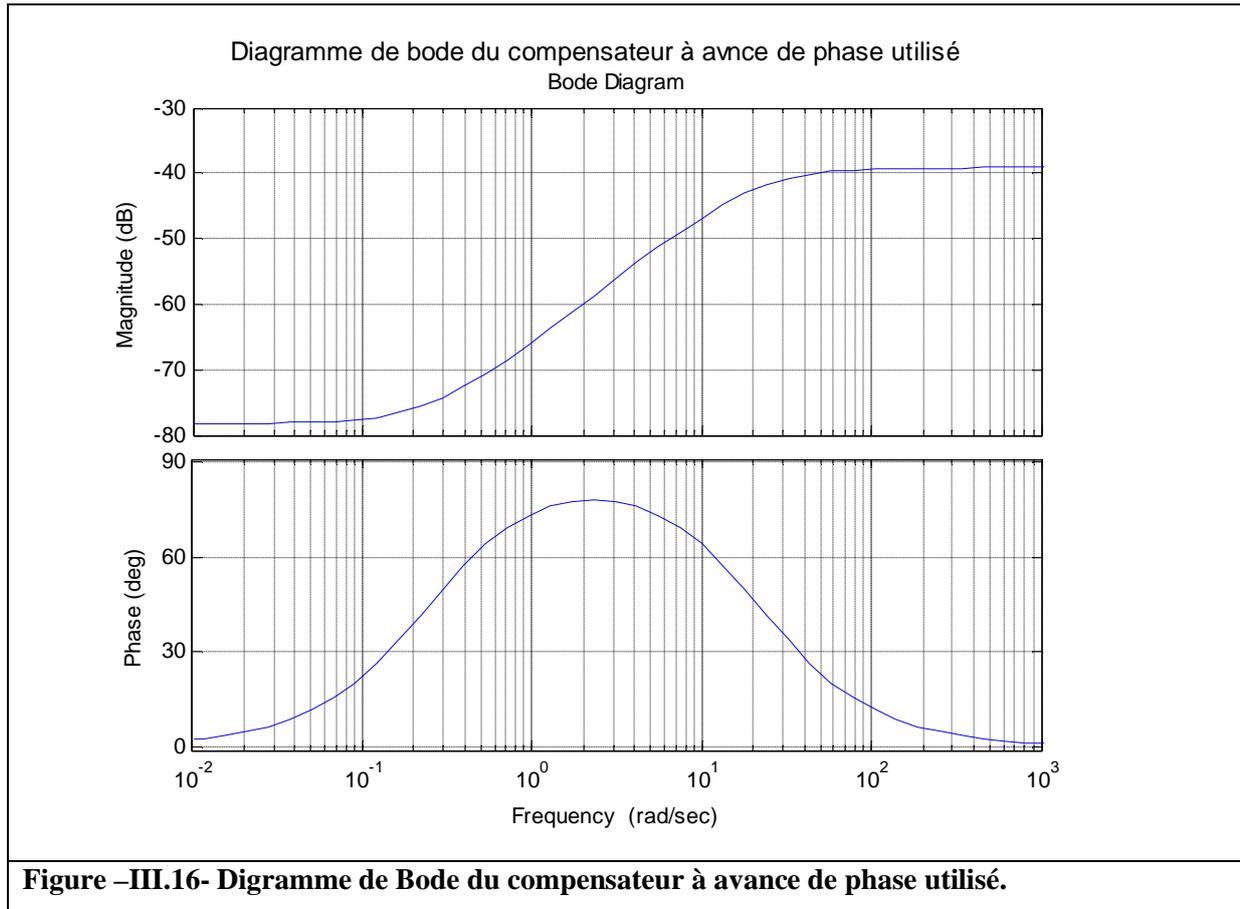


Figure –III-15- Marges de phase et de gain du système nominal compensé par un avance de phase.

Le système nominal étant stable alors on peut vérifier la robustesse en stabilité du système intervalle en boucle fermée en appliquant le principe d'exclusion du zéro. Les gabarits de l'ensemble image dans le plan complexe du polynôme caractéristique du système intervalle en boucle fermée compensé par avance de phase, pour un ensemble de valeurs de la pulsation, sont données dans la figure suivante. On remarque que ces gabarits excluent complètement l'origine, ce qui signifie que le système est robustement stable.



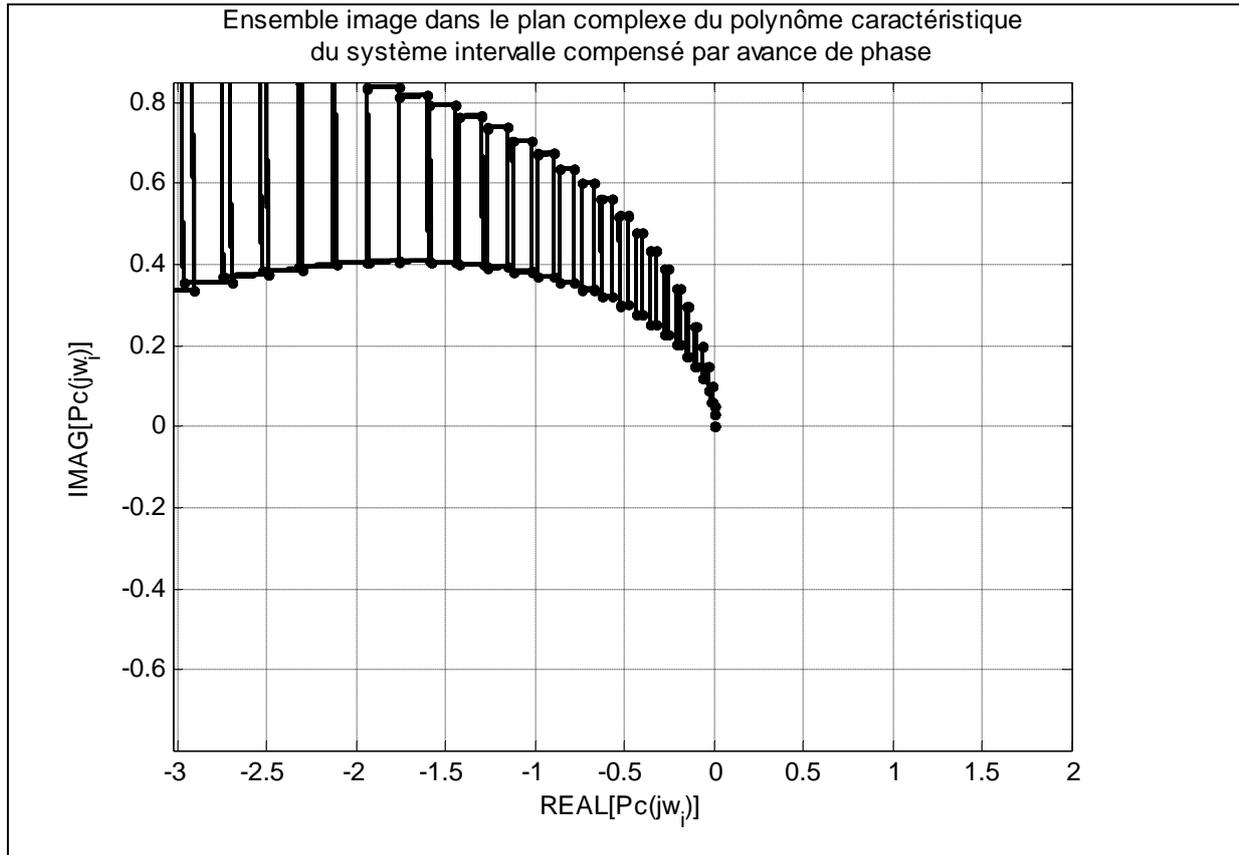


Figure –III.17- Ensemble image du polynôme caractéristique du système intervalle compensé par avance de phase.

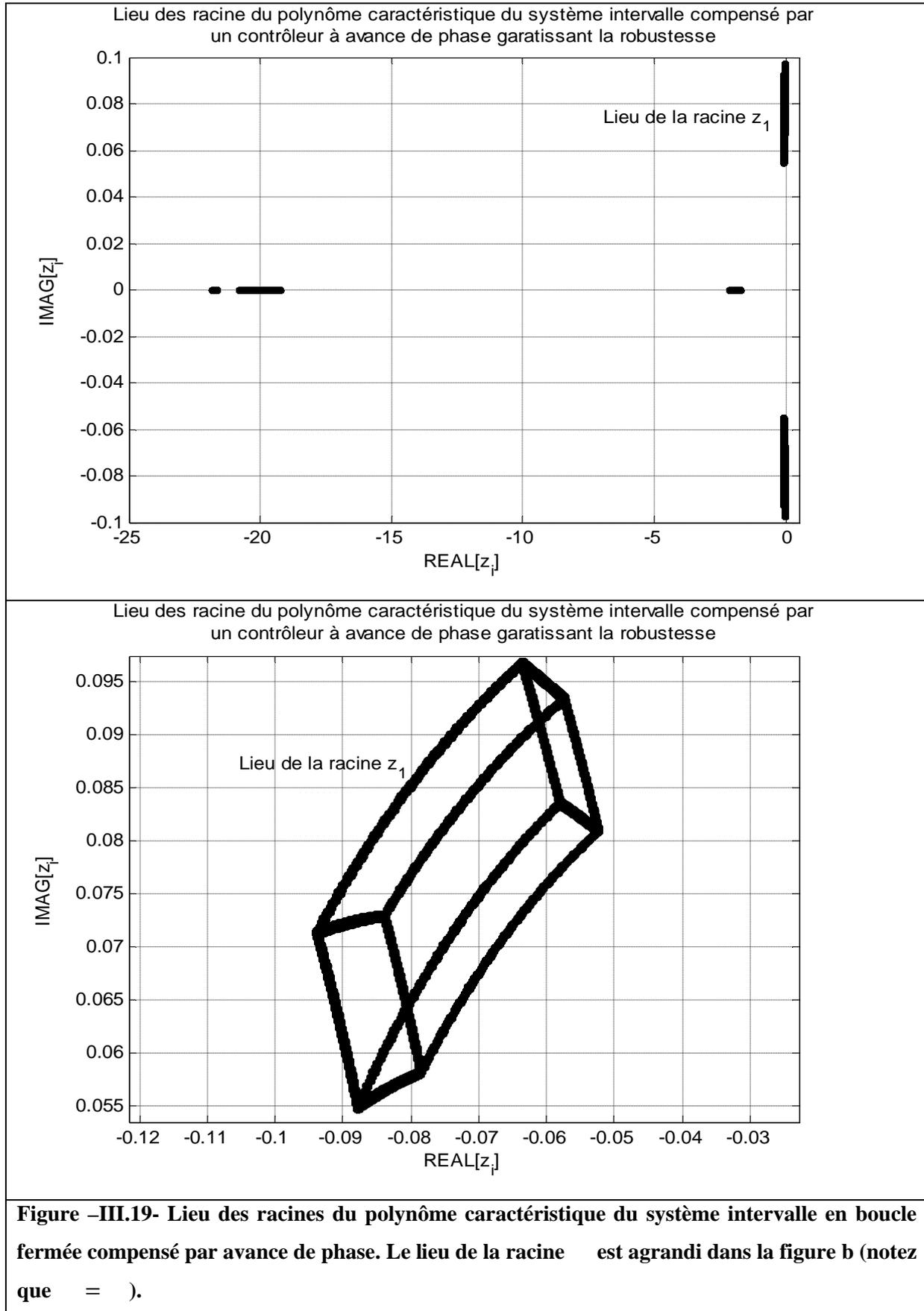
La robustesse en stabilité du système intervalle peut aussi être vérifiée en examinant le lieu des racines du polynôme caractéristique du système compensé par avance de phase en boucle fermée. Ce lieu des racines est obtenu après la transformation du polynôme caractéristique sous forme poly-topique ensuite l'application de théorème de frontière (EDGE Theorem) qui dit que le lieu des racines d'une famille poly-topique est compris dans courbe des lieux des racines des segments exposées. Cette transformation est obtenue en écrivant le polynôme caractéristique sous la forme :

$$\Delta(s) = \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} + \frac{N_3(s)}{D_3(s)} + \frac{N_4(s)}{D_4(s)} + \frac{N_5(s)}{D_5(s)} + \frac{N_6(s)}{D_6(s)}$$

Avec $N(s)$ et $D(s)$ sont le numérateur et le dénominateur du compensateur et les $N_i(s)$ et $D_i(s)$ sont les coefficients du dénominateur et numérateur de la fonction de transfert du système.

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

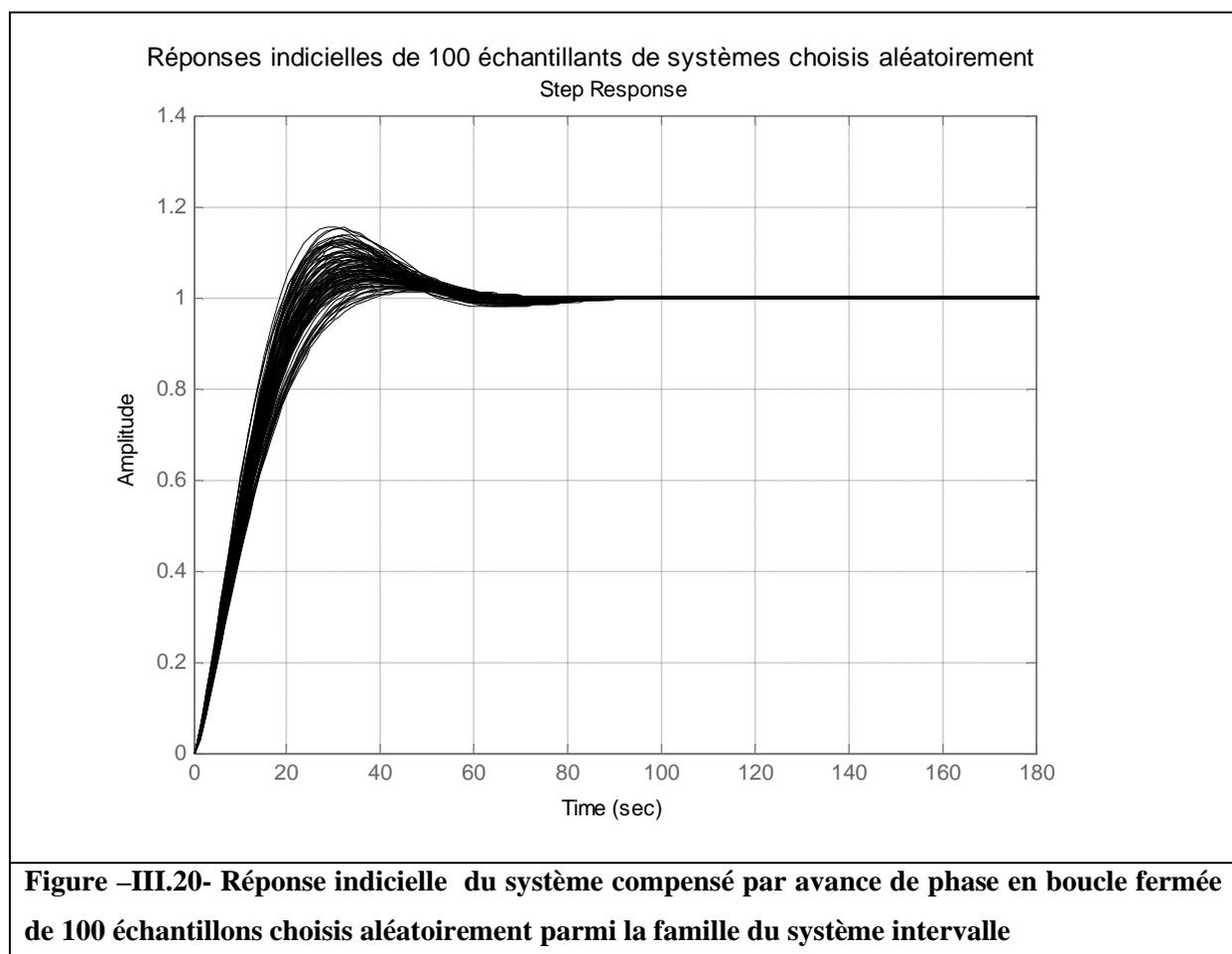
Le lieu des racines du système intervalle est donné dans la figure suivante. Les racines du polynôme caractéristique sont situées complètement dans le demi-plan ouvert de gauche est sont à partie réelle négative alors le système est robustement stable.



Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

Les réponses indicielles (à l'échelon) de 100 échantillons choisis aléatoirement de la famille du système intervalle sont calculées en utilisant les fonctions du toolbox de la commande robuste. Au début on crée les paramètres réelles incertains (les δ et les ϵ) en introduisant leurs valeurs nominales et leurs intervalles de variation (fonction MATLAB 'ureal'). Ensuite on crée le modèle du système incertain en utilisant ces paramètres (fonction MATLAB 'uss'). L'échantillonnage de 100 combinaisons aléatoires des paramètres se fait en utilisant la fonction MATLAB 'usample'. Enfin, on substitue ces paramètres dans la modèle du système en boucle fermée (fonction MATLAB 'usubs') et trace les réponses indicielles des systèmes obtenus.

Les réponses indicielles des échantillons sélectionnés sont données dans la figure suivante. Il est clair que non seulement le système est robustement stable, mais les performances sont aussi robustes.



III.6. Exemple 3 :

Dans cet exemple, nous allons utiliser le modèle d'incertitude additive pour remplacer les incertitudes paramétriques, ensuite utiliser une procédure de conception de compensateurs garantissant la robustesse contre des incertitudes additives non structurées à norme bornée. La théorie des systèmes intervalles est utile ici pour pouvoir exactement majorer les incertitudes paramétriques, ce qui permettra d'imposer une contrainte sur l'incertitude en utilisant une fonction de transfert rationnelle stable à coefficients réels ($\in \mathbb{R}$) et à phase minimale.

Le système intervalle que nous allons traiter est spécifié comme suit :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{(III-32)}$$

$a_1 \in [0.95, 1.05]$, $a_2 \in [-6.2, -5.8]$, $a_3 \in [10.7, 11.3]$, $a_4 \in [-6.2, -5.8]$, $a_5 \in [1, 1]$. Le système nominal est donné par :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{(III-33)}$$

L'incertitude additive est exprimée par $\Delta(s) = G(s) - G_n(s)$ pour $G(s)$ appartenant à la famille du système intervalle (correspond à une combinaison valide des paramètres).

Nous commençons par trouver une fonction de transfert rationnelle à coefficients réels stable et à phase minimale $G_n(s)$ qui vérifie $|\Delta(s)| < |G_n(s)|$. Pour ce faire, nous allons majorer l'incertitude paramétrique par une incertitude additive que nous allons calculer en utilisant les propriétés de l'ensemble extrême de Kharitonov correspondant au système intervalle. Pour chaque pulsation ω , nous calculons l'incertitude additive maximale et ceci en examinant tous les points dans tous les segments polynomiaux de l'ensemble extrême.

La figure suivante donne les gabarits de la réponse fréquentielle dans le plan de Nyquist accompagnés par la réponse du système nominal et les courbes de gain maximal et minimal ainsi que les points donnant l'incertitude additive maximale. Il faut noter que cette courbe n'est pas toujours confondue avec la courbe de gain maximale ou la courbe de gain minimale car les gabarits peuvent être étalés à l'intérieur de la bande délimitée par ces deux courbes ce qui donnera un point d'incertitude additive maximale complètement différent. Ceci signifie

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

qu'en utilisant le modèle d'incertitude additive pour une incertitude paramétrique, on introduit un certain conservatisme.

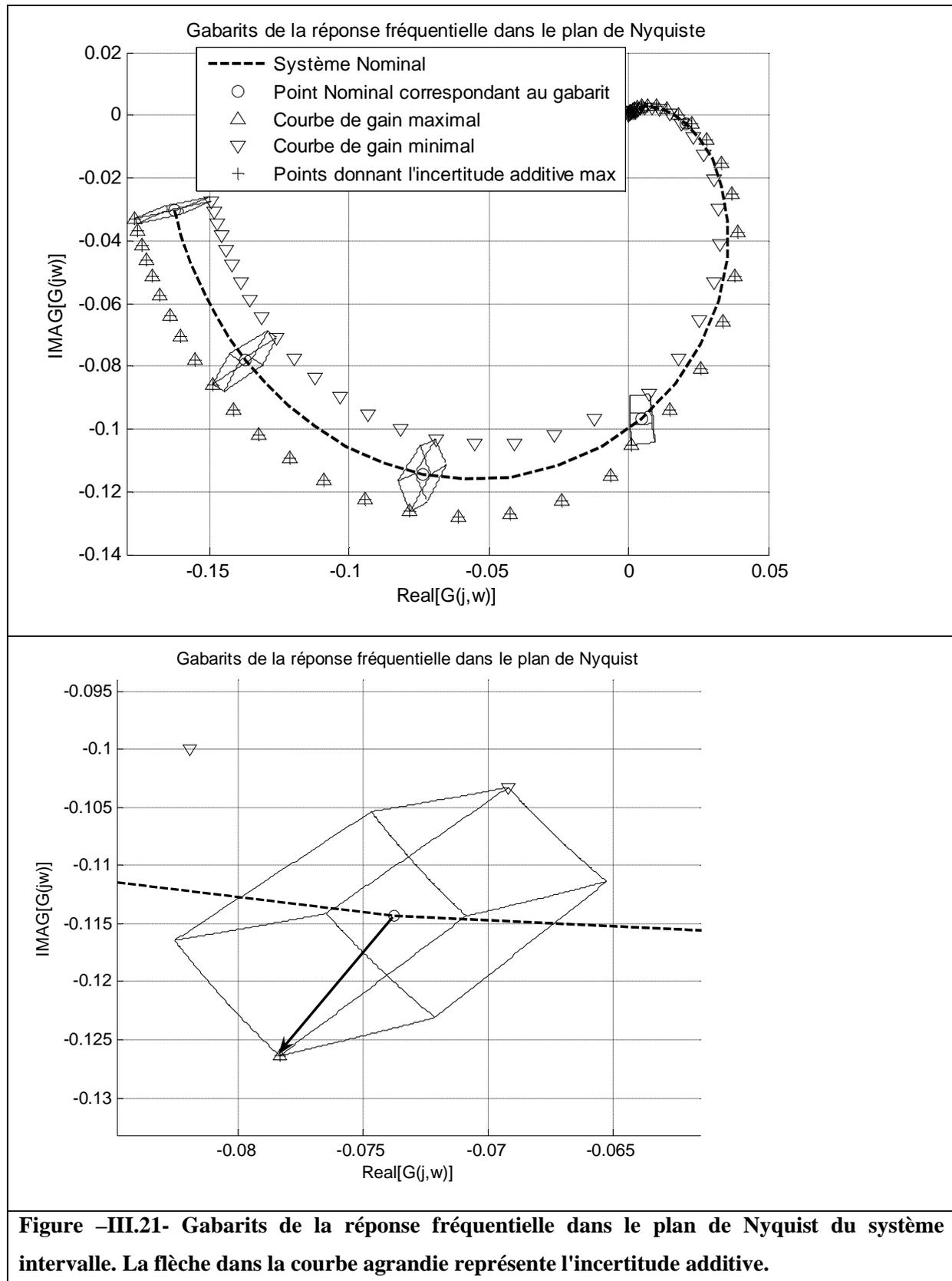


Figure –III.21- Gabarits de la réponse fréquentielle dans le plan de Nyquist du système intervalle. La flèche dans la courbe agrandie représente l'incertitude additive.

En faisant le calcul de l'incertitude additive maximale pour chaque pulsation on obtient une courbe qui est représentée dans le plan de Bode sur la figure –III.22-. A partir de cette courbe on peut concevoir un filtre () qui sera utilisé pour la majoration de l'incertitude additive. Pour simplifier le calcul du compensateur, nous avons choisi un filtre ayant un degré relative égal à 1.

$$() = 4 * 10^{-\dots} \quad (III-34)$$

La réponse fréquentielle de ce filtre et aussi représenté sur la figure suivante.

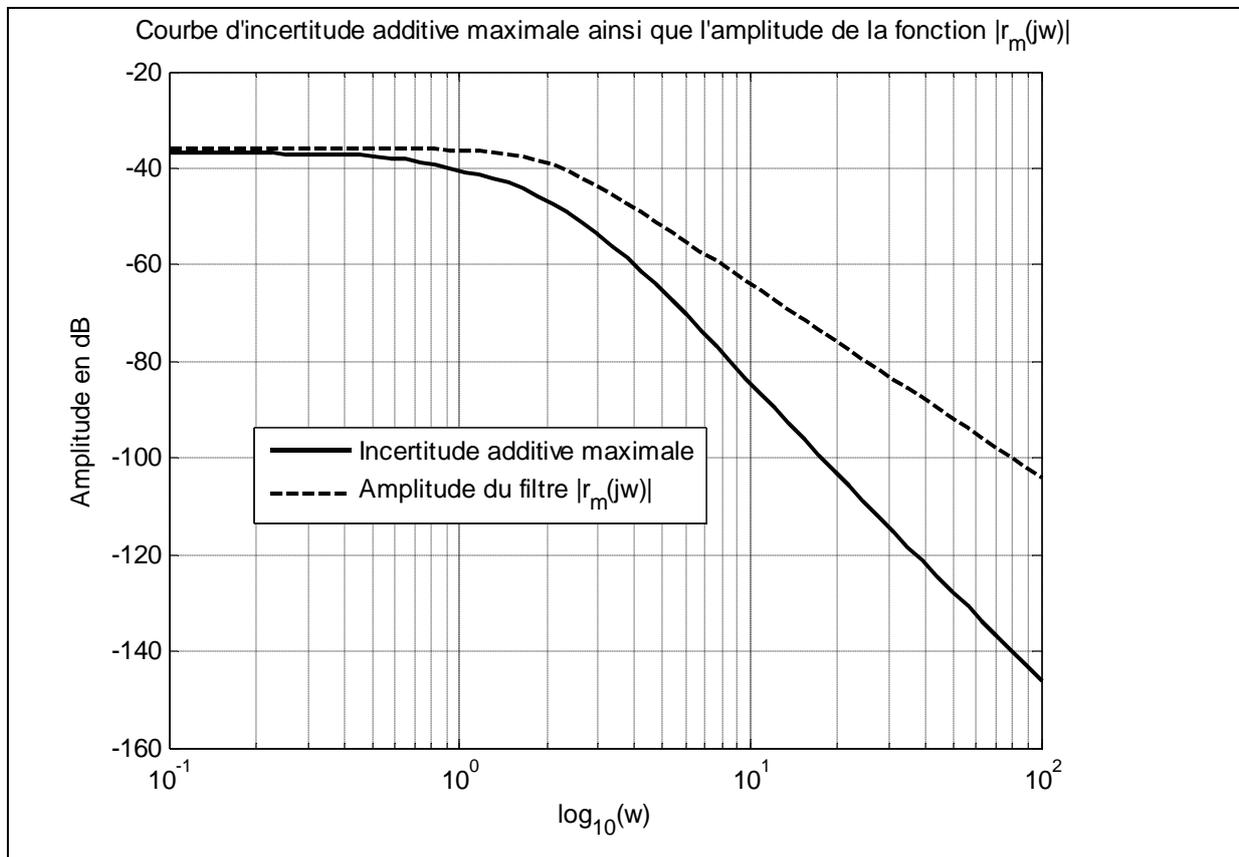


Figure –III.22- Amplitude de l'incertitude additive maximale due à l'incertitude paramétrique du système intervalle accompagnée de la réponse en amplitude du filtre utilisé pour la majoration.

Maintenant vient l'étape de la conception du compensateur. Pour ce faire, nous avons utilisé la méthode d'interpolation connue sous le nom de l'algorithme Nevanlinna-Pick [15]. On

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

commence par former le produit de Blaschke correspondant aux pôles instables du système nominal donné par :

$$B(s) = \frac{-1}{s+1} \times \frac{-2}{s+2} \times \frac{-3}{s+3}$$

Ensuite on calcule une fonction de transfert $G(s) = B(s) * C(s)$

$$G(s) = B(s) * C(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Alors le calcul de compensateur est ramené au calcul d'une fonction $H(s)$ de norme inférieure à l'unité et qui interpole les points :

$$\begin{aligned} (1) = \frac{G(1)}{C(1)} &= \frac{96.0096}{7.8} 10^{-3}; & (2) = \frac{G(2)}{C(2)} &= \frac{240.48}{13.6} 10^{-3}; & (3) = \frac{G(3)}{C(3)} \\ &= \frac{481.44}{21.4} 10^{-3}; & (\infty) = \frac{G(\infty)}{C(\infty)} &= 0 \end{aligned}$$

Le point d'interpolation à l'infini est du au fait que le filtre $G(s)$ à un degré relatif égale à 1. Le programme que nous avons fait pour l'algorithme de Nevanlinna-Pick nous a permis d'obtenir la fonction $H(s)$ suivante :

$$H(s) = \frac{6.9937s^2 - 7.8904s + 5.9764}{0.5847s^3 + 8.1144s^2 + 10.3864s + 6.9299}$$

Le compensateur sera, alors donnée par :

$$C(s) = \frac{H(s)}{1 - B(s) * G(s)}; \quad G(s) = \frac{H(s) * C(s)}{C(s)}$$

Après simplification nous obtenons :

$$C(s) = \frac{188683,32(s^2 - 1.128s + 0.8545)(s^2 + 2.8s + 4)}{(s + 999.8)(s + 23.28)(s^2 + 2.791s + 4.109)}$$

Pour vérifier que ce compensateur garantie vraiment la robustesse en stabilité, nous avons transformé le polynôme caractéristique en boucle fermée sous la forme polytopique ensuite nous avons appliqué le théorème des segments exposés (Edge theorem) pour calculer le lieu des racines de ce polynôme. Ce lieu des racines est donné par la figure suivante. On remarque que les pôles en boucle fermée sont complètement situés dans le demi plan de gauche ce qui

Chapitre III : Application des méthodes d'analyse et de conception des systèmes intervalles

signifie que la robustesse en stabilité est garantie pour toutes les combinaisons valides des paramètres du système intervalle.

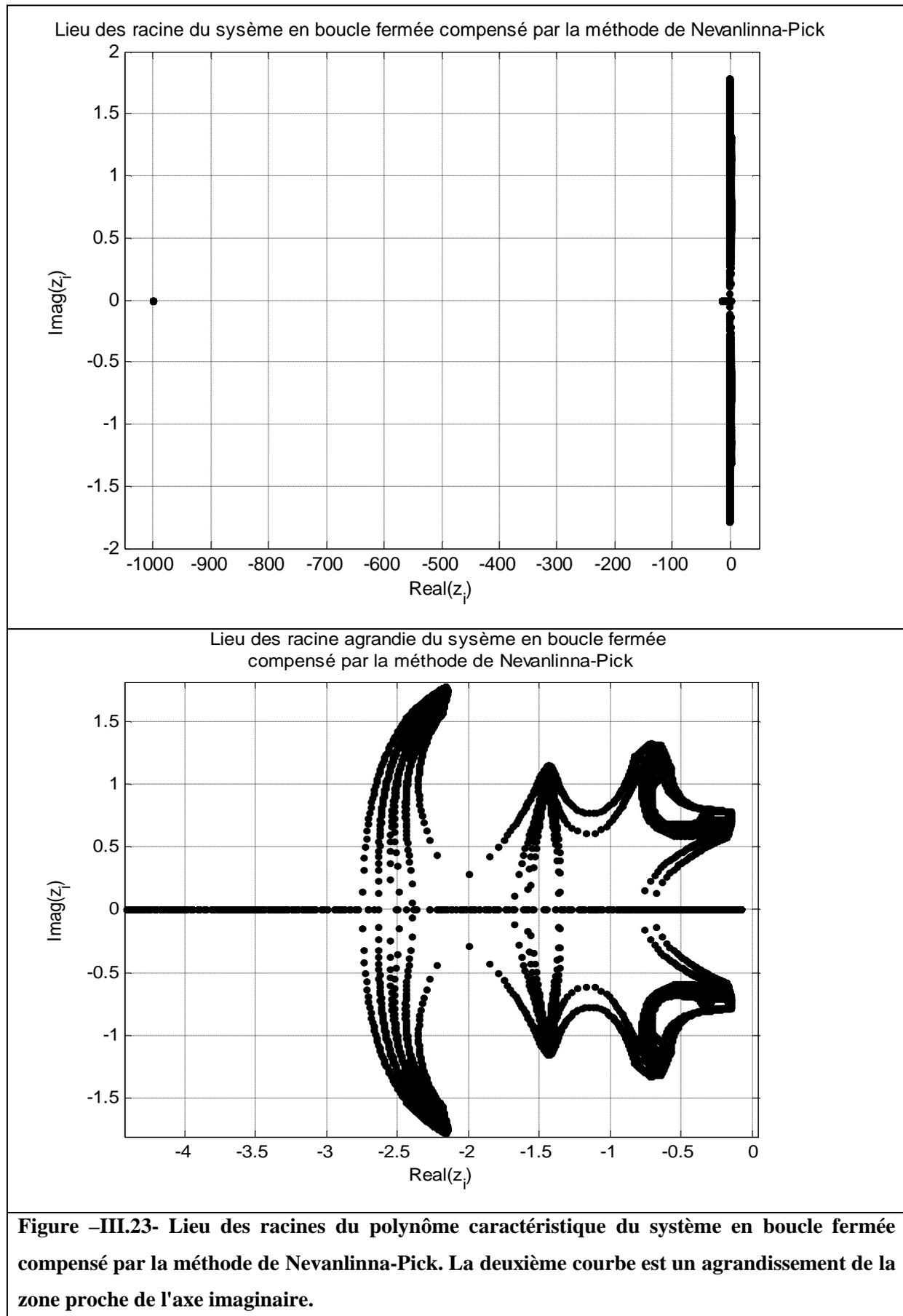


Figure –III.23- Lieu des racines du polynôme caractéristique du système en boucle fermée compensé par la méthode de Nevanlinna-Pick. La deuxième courbe est un agrandissement de la zone proche de l'axe imaginaire.

III.7. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons mis en œuvre les outils de conception et d'analyse des systèmes intervalles. Nous avons commencé par l'évaluation des performances d'un contrôleur conçu pour le système nominal sans prendre en considération les incertitudes paramétriques. Les méthodes d'analyse des systèmes intervalles permettent de tester la robustesse en stabilité, d'évaluer les marges de gain et de phase maximales garanties par le contrôleur quand les paramètres varient dans des intervalles prédéfinis.

Ensuite nous avons utilisé un algorithme de conception de la commande par retour d'état robuste pour concevoir la commande du système précédent. Les mêmes outils d'analyse ont été utilisés pour s'assurer des performances de la commande. La robustesse en stabilité de la commande a été montrée en utilisant différents moyens (lieu des racines, théorème de Kharitonov). L'algorithme de conception de la commande par retour d'état robuste permet de concevoir une commande qui garantit la robustesse en stabilité mais il ne prend pas en charge les performances de la commande.

Dans le dernier exemple, nous avons combiné les méthodes classiques de conception de compensateurs qui utilisent les marges de gain et de phase avec les procédures qui permettent le calcul des enveloppes des réponses fréquentielles des systèmes intervalles en utilisant les ensembles extrémaux pour faire la conception d'un compensateur qui permet d'imposer certaines performances en plus de garantir la robustesse en stabilité du système intervalle en boucle fermée. La robustesse en performance et en stabilité a été testée en utilisant les mêmes techniques utilisées avant.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié quelques méthodes d'analyse et de conceptions de la commande des systèmes intervalles. Nous avons commencé par présenter les principaux concepts liés à ce genre de système (notation, modélisation et théorème de base). Ensuite nous avons donné dans une étude quelques méthodes utilisées pour l'analyse et la conception de la commande (théorème de Kharitonov, théorème de Kharitonov généralisé, ensembles extrêmes, théorème des segments exposés, principe d'exclusion de zéro).

Nous avons commencé par le théorème de Kharitonov qui constitue l'outil de base pour le test de la stabilité des polynômes intervalles. Ce théorème permet d'emmener le test de la stabilité d'une famille entière de polynômes en un test de seulement quatre polynômes construits à partir des bornes des intervalles de coefficients. Ce théorème est basé sur la supposition que les paramètres varient de façon indépendante les uns des autres. Cette supposition, qui n'est pas généralement remplie pour la majorité des problèmes pratiques, est restrictive car la condition imposée par le théorème de Kharitonov devient restrictive dans le cas où les paramètres sont interdépendants. Le théorème de Kharitonov généralisé permet de surmonter ce problème pour le cas où les paramètres sont liés de façon linéaire ce qui est généralement le cas pour les systèmes intervalles avec contrôleur linéaire. Ce théorème emmène le test de la stabilité d'une famille multiparamétrique de systèmes en un test d'un ensemble de problèmes à un seul paramètre chacun et sous certaines conditions particulières à un test d'un ensemble de polynômes. Ceci en introduisant un ensemble extrême de segments polynomiaux linéaires appelé ensemble extrême de Kharitonov.

Cet ensemble extrême joui de plusieurs propriétés intéressantes pour l'étude des systèmes intervalle. Il contient la frontière du lieu des racines de la famille intervalle. Il peut être utilisé pour calculer les enveloppes des réponses fréquentielles de la boucle et permet d'obtenir les cas les plus pires de marge de stabilité. Cet ensemble permet aussi d'obtenir les gabarits de la réponse fréquentielle du polynôme caractéristique et des différentes fonctions de transfert de la boucle.

Ces différents outils combinées avec les concepts classiques d'analyse et de conception de la commande des systèmes linéaires fixes nous ont permis de faire l'analyse et la conception de la commande des systèmes intervalles contenant des incertitudes paramétriques. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de ces méthodes dans ce domaine.

Les procédures de calcul de l'ensemble extrême, des gabarits de la réponse fréquentielle, des enveloppes des différentes fonctions de transfert, du lieu des racines, de calcul du retour d'état robuste et de calcul du compensateur garantissant la robustesse en performance ont été tous programmées sous MATLAB et ensuite appliquées avec succès à des exemples de simulation.

Références bibliographiques

Références Bibliographiques

Bibliographie

- [1] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, L. Huang, « Root locations of an entire polytope of polynomials : It suffices to check the edges », *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 1 (1988) 61-71.
- [2] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L. H. Keel, « Robust Control : The Parametric Approach, Upper Saddle River » , NJ : Prentice-Hall, 1995.
- [3] V. L. Kharitonov, « Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations », *Differential Equations*, 14, 2086-2088, 1978.
- [4] H. Chapellat, S. P. Bhattacharyya, « A generalization of Kharitonov's theorem: robust stability of interval plants », *IEEE Trans Automat Contr* vol AC-34,no.3,1989,pp .306-311.
- [5] Rihem Farkh. « COMMANDE PID DES SYSTEMES A RETARD ». *Automatic. _Ecole Nationale d'Ing_eneurs de Tunis*, 2011. French. <tel-00587529v1>
- [6] Ahmad, S. S., Keel, L. H. and Bhattacharyya, S. P. « Computer aided robust control design for interval control system. » In *Proceedings of the IEEE Symposium on Computer Aided Control System Design* (Napa, CA, 1992), pp. 82 – 89.
- [7] Bartlett, A. C., Hollot, C. V. and Lin, H. « Root location of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. » *Mathematics of Controls, Signals and Systems* 1 (1988), 61 – 71.
- [8] Bhattacharyya, S. P. Robust parametric stability: The role of the CB segments. In *Control of Uncertain Dynamic Systems*, S. P. Bhattacharyya and L. H. Keel, Eds. CRC Press, Littleton, MA, September 1991.
- [9] Bartlett, A. C. Vertex results for the steady state analysis of uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 37, 11 (November 1992), 1758 – 1762.
- [10] Bhattacharyya, S. P. Vertex results in robust stability. Tech. rep., TCSP Report, Texas A&M University, April 1991.

Références Bibliographiques

- [11] V. L. Kharitonov, "The Routh-Hurwitz problem for families of polynomials and quasipolynomials", *Math. Phis.* 26 (1979) 69-79.
- [12] H. Nyquist. Regeneration theory. *Bell Systems Technical Journal*, 11 :126{147, January 1932.
- [13] V. Kapila and W. M. Haddad. Memoryless H1 controllers for discrete-time systems with time delay. *Automatica*, 34(9) :1141{1144, 1998.
- [14] Pontryagin, L. S. "On the Zeros of Some Elementary Transcendental Function", *American Mathematical Society Translation*, Vol. 2, pp. 95-110, 1955.
- [15] Ph.Delsarte, Y.Genin, Y.Kamp, The Nevanlinna-Pick problem for matrix valued functions, *SIAM J.Appl.Math.* 36: 47-61, 1979.
- [16] K. S. Narendra and S. S. Tripathi. Identifcation and optimization of aircraft dynamics. *Journal of Aircraft*, 10(4) :193-199, April 1973.

Annexes