

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira Béjaia
Faculté Des Sciences Exactes
Département Recherche Opérationnelle



Mémoire de fin de cycle
En vue de l'obtention de diplôme de Master en Recherche Opérationnelle
Spécialité : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

*Etude qualitative de l'équilibre de Nash d'un jeu
différentiel Maintenance-Production
Cas d'étude : Entreprise IFRI*

Réalisé par :

M^{lle} S. HADDAD

M^{lle} K. DAOU

Devant le jury composé de :

D ^r	O. LEKADIR	MCA	Université de Béjaia	Présidente
M ^r	N. KHIMOUM	MAA	Université de Béjaia	Encadreur
M ^{me}	N. HALIMI	MAA	Université de Béjaia	Examinatrice
M ^{lle}	F. GHELLAB	Doctorante	Université de Béjaia	Examinatrice

Table des matières

Table des matières	1
Introduction Générale	2
Conclusion Générale	2
Bibliographie	2
Annexe	5

Table des figures

Bibliographie

- [1] *Differential Games, Distributed Systems, and Impulse Control.*
- [2] *planning.cs.uiuc.edu.*
- [3] *www.master-public-economics.fr.*
- [4] A. AKKOUCHE, *Contrôle Optimal des Systèmes Décrits par des Equations aux Dérivées Partielles Basé sur la Méthode d'Itération Variationnelle*, Thèse de Doctorat université Tizi-Ouzou, 2015.
- [5] A. PALESTINI., *Some basic notes on Optimal Control Theory and Differential Games*, Department of Economics University of Bologna, Italy.
- [6] S. ARORA AND P. LELE, *A note on optimal maintenance policy and sale date of machine*, Management Sci. 17 pages 170-173, 1970.
- [7] K. ARROW, *Applications of control theory to economic growth*, in : G.B. Dantzig, A.F. Veinott (Eds.), *Mathematics of the Decision Sciences*, American Mathematical Society, Providence, pp. 85–119, 1968.
- [8] K. ARROW AND M. KURZ, *The Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1970.
- [9] A.W. STARR AND Y.C. HO, *Nonzero-sum differential games*, J. Optim Theory Appl, 3, 184–206, 1969.
- [10] C. BENNANI, *Stabilisation et Estimation de l'état des Systèmes Dynamiques non Linéaire et Application*, Mémoire de Magistère université Tizi-Ouzou, 2011.
- [11] B. GUERRIEN, *La Théorie des Jeux*, Economica, 2 édition, 1995.
- [12] L. CHERFI, *Systèmes différentiels et algébriques du type Riccati issus de la théorie des jeux*, Thèse de Doctorat de L'école Normale Supérieure de Cachan, 2005.
- [13] E. BONZON, *Modélisation des interactions entre agents rationnels : les jeux booléens*, Thèse Université Paul Sabatien de Toulouse 3.

- [14] G. FEICHTINGER, *The Nash solution of a maintenance-production differential game*, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Technische Universität Wien, A-1040 Wien, Austria, 1981.
- [15] V. V. G. FEICHTINGER, A.J. NOVAK, *Applying the Leitmann–Stalford sufficient conditions to maximization control problems with non-concave Hamiltonian*, Applied Mathematics and Computation 217 pp 1017–1022, Argentinierstr, 8/105-4, 1040 Vienna, Austria, 2010.
- [16] H. S. G. LEITMANN, *A sufficiency theorem for optimal control*, Journal Optimization Theory and Applications 8 (3) 169–174, 1971.
- [17] R. HARTL, *Optimal Maintenance and Production Rates for a Machine*, Technical University of vienna, A-1040 Wien, Austria.
- [18] —, *Optimal maintenance and straining intensity of a machine : a nonlinear economic control problem*, J, Econom, Dynamic and Control to appear.
- [19] —, *Optimal control of concave economic models with two control instruments*, Forschungsbericht Nr. 31 des Institüs für Unternehmensforschung der Technischen Universität Wien, Austria, 1980.
- [20] O. M. J.VON-NEWMANN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.
- [21] R. KALMAN, *Contribution to the theory of optimal control*, Bol.Soc. Mat Mexicana, 5, 102-119, 1969.
- [22] M. I. KAMIEN AND N. L. SCHWARTZ, *DYNAMIC OPTIMIZATION The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, J.L. Kellogg Graduate School of Management Northwestern University Evanston, Illinois U.S.A, 1992.
- [23] G. KHENNICHE, *Théorie et Application du Calcul des Variations en Commande Optimal*, Mémoire de Magistère université Skikda, 2007.
- [24] N. KHIMOUM, *Résolution Numérique d'un jeu bi-Matriciel Multicritère*, Mémoire de Magistère université Bejaïa, 2006.
- [25] C. LOBRY AND T.SARI, *Introduction à la théorie du contrôle*, l'école du CIMPA Contrôle non linéaire et Applications, Tlemcen.
- [26] O. LOISEL, *Le Modèle de Croissance à Taux d'épargne Endogène (Cass-Koopmans-Ramsey)*, ENSAE.
- [27] K. LOUADJ, *Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal*, Thèse de Doctorat université Tizi-Ouzou.

- [28] O. MANGASARIAN, *Sufficient conditions for the optimal control of non-linear systems*, SIAM Journal on Control and Optimization 4 (1) 139–152, 1966.
- [29] F. MARBACH, *Introduction au Domaine de Recherche*.
- [30] N. M.BENNOUR, C.BLOCH, *Modélisation Intégrée des Activités de Maintenance et de Production*, 3^e Conférence Francophone de Modélisation et Simulation Conception, Analyse et Gestion des Systèmes Industriels MOSIM 01 – Troyes (France).
- [31] A. N. M. MOKIME, *Modèle de Croissance Economique*, Kinshasa.
- [32] O.LABBANI., *Comparaison des théories des jeux pour l'étude du comportement d'agents*, Mémoire de DEA, 2003.
- [33] D. OUIDJA, *Principe du maximum et méthode de tir*, Mémoire de Magister université Bejaïa, 2011.
- [34] L. PONTRYAGUIN, *Les Jeux Différentiels Linéaires*, Actes, Congrès intern. Math, Tom 1, pages 163-171, 1970.
- [35] R.ISAACS, *Differential games*, John Wiley and Sons, New York, 1956.
- [36] J.-F. THISSE., *Théorie des jeux : une introduction*, Technical report.
- [37] G. THOMPSON, *Optimal maintenance and sale data of a machine*, Management Sci. 14 pages 543-550, 1968.
- [38] E. TRÉLAT, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France, 2013.
- [39] R. T. WOODWARD, *The basics of Differential Equations*, AGEC 637.

%inputannexe

Résumé

Un jeu différentiel à deux joueur à somme non nulle entre l'équipe de maintenance d'une entreprise et le département de production de la même société est considérée. Il est supposé que la maintenance préventive décélère la diminution de la qualité d'une machine, tandis que les activités de production fixées par l'entreprise permet de réduire la qualité de la machine. En raison de la structure particulière du jeu un système de deux équations différentielles pour les trajectoires non coopérative de la solutions de Nash peuvent être dérivées. Ceci permet d'obtenir un aperçu qualitative sur la structure des trajectoires de la solution par la méthode de diagramme de phases sans résoudre les conditions d'optimalité nécessaires explicitement.

Enfin une application dans l'entreprise IFRI est réaliser, il est démontré que pour de petites valeurs de récupération de la machine, les dépenses de maintenance optimales doivent diminuer au fil du temps alors que le taux de production optimales doit augmenter d'une façon monotone. **Mots clés** :contrôle optimal, jeu différentiel, équilibre de Nash, boucle ouverte, diagramme de phase.

Abstract

A simple two-person nonzero-sum differential game between the maintenance crew of a firm and the production department of the same firm is considered. It is assumed that preventive maintenance decelerates the decrease in quality of a machine, whereas the production activities set by the firm reduces the quality of the machine. Due to the special structure of the game a system of two differential equations for the non-cooperative Nash solution trajectories can be derived. This provides a possibility to obtain qualitative insights into the structure of the solution paths by phase diagram method without solving the necessary optimality conditions explicitly. For small salvage values of the machine, it is shown that the optimal maintenance expenditures decrease over time whereas the optimal production rate increases monotonically.

Finally an application in IFRI company IFRI is to realize, it is shown that for small salvage values of the machine, the optimal expenditure of maintenance must decrease over time whereas the optimal production rate must increase in a monotonous way.

Key words :optimal control, differential game, Nash-equilibrium, open-loop, phase-diagram.

Remerciements

Nous remercions Dieu tout puissant, qui nous a protégé, soutenu et donné la force de faire ce travail.

Nous tenons à remercier dans un premier temps, toute l'équipe pédagogique de l'université de Béjaïa et les intervenants professionnels responsables de la formation Recherche Opérationnelle.

On voudrait remercier notre promoteur M^r KHIMOUM.N pour sa disponibilité, sa générosité, son encouragement et son suivi attentif pour la réalisation de ce mémoire. C'est avec un réel plaisir qu'on a effectué ce travail sous sa direction.

Nos remerciements s'adressent aussi à notre tuteur de stage, le directeur de la sous direction de Contrôle de gestion M^r BELKADI et aussi M^{lle} TOUAHRI Lynda, pour leurs accueil chaleureux qu'ils nous ont accordé dès notre arrivée à l'entreprise.

Nos remerciements s'adressent aussi à la présidente des jury et les examinatrices pour l'honneur qu'ils nous font en assistant notre soutenance.

Pour toute personne qui a contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire, veuillez bien trouver ici l'expression de nos sincères remerciements.

Enfin, nous désirons remercier chaleureusement les membres de nos familles pour le soutien et l'encouragement qu'ils nous ont apporté tout au long de ce travail.

Dédicaces

A ma chère mère qui n'a jamais cessé de prier pour moi et mon chère père à qui je dois tous mes respects que Dieu les protège.

A mes chères soeurs Abla, Wissem, Leticia, soumaya et Mérisa-Celiona et mes chères frères Farouk et Juba.

A mes chères amis, Nesrine, Imene, Sara, Mohand, Hanane, Rachida et Roro et mes camarades de classe surtout mon binôme Soraya.

Merci

Kenza

Dédicaces

A ma chère mère qui n'a jamais cessé de prier pour moi et mon chère père à qui je dois tous mes respects que Dieu les protège.

A mes chers frères Abdellah, Moumouh et Rayan.

A mes chères grand mères, mes cousins Zizou et Simou et à toute ma grande famille.

A mes chers amis, Nabil, Salima, Houta, Hayet, Hanane, Hakima, Radia, Bahia et Messiva et mes camarades de classe surtout mon binôme Kenza.

Merci

Sora

Table des matières

Introduction Générale	7
1 Présentation de l'organisme d'accueil	11
1.1 Historique et évolution de l'entreprise	11
1.2 Cadre juridique	12
1.3 Situation géographique	12
1.3.1 Site Ighzer Amokrane	12
1.3.2 Site Zone activité Taharacht Akbou	12
1.4 Fiche signalétique de la SARL Ibrahim et fils IFRI	12
1.5 Missions et activités de l'organisme Ifri	13
1.5.1 Missions	13
1.5.2 Activités	13
1.6 IFRI dans le monde	15
1.7 Environnement de l'entreprise	15
1.7.1 Fournisseurs	15
1.7.2 Clients	15
1.8 Moyens et Organisation d'IFRI	16
1.8.1 Moyens humains	16
1.8.2 Moyens matériels	16
1.9 Organisation interne de l'entreprise	18
1.9.1 Structures de la Sarl IFRI	19
1.10 Processus de production	23
1.10.1 La ligne de production <i>COMBI 20</i>	24
1.11 Processus de maintenance	25

1.12	Conclusion	26
2	Contrôle Optimal	27
2.1	Introduction	27
2.2	Notions de base	27
2.2.1	Qu'est-ce que la théorie du contrôle ?	27
2.2.2	Problème de contrôle optimal	28
2.2.3	Contrôlabilité	29
2.3	Différents types de problèmes d'optimisation	30
2.3.1	Problème de Lagrange	31
2.3.2	Problème de Mayer	31
2.3.3	Problème de Bolza	31
2.4	Principe du maximum de Pontryaguine	32
2.4.1	Enoncé général	32
2.4.2	Conditions de transversalité	33
2.5	Conditions suffisantes	34
2.6	Contrôle optimal avec actualisation de l'objectif	35
2.6.1	Contrôle sur un Horizon fini	35
2.7	Conclusion	37
3	Jeux Différentiels	38
3.1	Introduction	38
3.2	Notions de base de la théorie des jeux	38
3.2.1	Classification et types de jeux	39
3.2.2	Jeux à m joueurs	40
3.2.3	Concept de solution	40
3.3	Jeux différentiels	41
3.3.1	Jeu différentiel à plusieurs joueurs	41
3.3.2	Stratégies admissibles	42
3.3.3	Structures d'information	42
3.3.4	Stratégies de Nash	43
3.3.5	Jeux différentiels à somme non nulle	44

3.4	Conclusion	46
4	Problème de maintenance-production	47
4.1	Introduction	47
4.2	Position du problème	47
4.3	Formulation du modèle	48
4.3.1	Modèle général	48
4.3.2	Modèle sous forme d'un jeu différentiel à deux joueurs	51
4.4	Equations différentielles pour un équilibre de Nash	54
4.4.1	Etapas de résolution du problème	54
4.5	Résolution du modèle	56
4.5.1	Diagramme de phase	57
4.5.2	Analyse du Diagramme de Phase	59
4.6	Quelques résultats	66
4.7	Conclusion	68
5	Adaptation du Modèle au Cas de l'entreprise IFRI	69
5.1	Introduction	69
5.2	Identification des différents paramètres du modèle	69
5.2.1	Taux de production	70
5.2.2	Coûts de maintenance	70
5.2.3	Fonction de dépréciation	71
5.2.4	Fonctions d'efficacité de la maintenance	74
5.2.5	Taux d'actualisation	77
5.2.6	Valeurs de récupération	77
5.3	Modèle	78
5.4	Résolution	78
5.5	Discussion des résultats	80
5.6	Proposition	81
5.7	Conclusion	81
	Conclusion Générale	82

Table des figures

1.1	Organigramme de la Sarl IFRI.	18
1.2	Schéma structurel de la ligne COMBI 20.	24
1.3	Organigramme de maintenance.	25
4.1	Exemple d'un diagramme de phase	57
4.2	Représentation graphique de l'isocline $\dot{u}_2 = 0$	62
4.3	Représentation graphique de l'isocline $\dot{u}_1 = 0$	63
4.4	Représentation graphique $\dot{u}_1 = 0$ et $\dot{u}_2 = 0$ sur le même plan.	63
4.5	Les quatre régions définies par $\dot{u}_1 = 0$ et $\dot{u}_2 = 0$	64
4.6	Diagramme de phase défini par $\dot{u}_1 = 0$ et $\dot{u}_2 = 0$	66
5.1	Représentation de la fonction de maintenance.	71
5.2	Approximation du taux de dégradation par une courbe.	74
5.3	Représentation de la fonction d'efficacité.	75
5.4	Approximation de la fonction d'efficacité par des polynômes d'ordre 1 et 2.	76
5.5	Approximation de la fonction d'efficacité par une courbe.	77
5.6	Diagramme de phases.	80

Introduction Générale

Les problèmes de commande des processus ont considérablement évolué au cours du dernier quart de siècle. La nécessité d'augmenter le niveau de production, tout en diminuant les coûts, a contraint les ingénieurs à élaborer des systèmes de plus en plus complexes. Par souci d'efficacité, les ingénieurs ont cherché à définir des fonctions coût mieux adaptées aux problèmes de commande. Ainsi, dans de nombreux cas, le bon fonctionnement d'un système se traduit par une solution minimisant (maximisant) un critère de performance donné. Les problèmes de commande et d'optimisation se trouvent de ce fait étroitement liés [8].

La commande optimale des processus a connu un nouvel essor après les travaux de Kalman [15]. La notion d'optimalité concerne un critère et un ensemble de contraintes. La définition d'un critère de performance peut être délicate pour un concepteur et dépend de l'objectif à atteindre. Afin de simplifier le traitement numérique des problèmes d'optimisation, le critère doit être choisi comme une forme analytique, continûment dérivable par rapport aux variables considérées. La recherche de la loi de commande optimale minimisant (maximisant) un critère donné fait appel aux techniques d'optimisation non linéaire. La méthode issue du Principe du Maximum de Pontryaguine peut être appliquée pour la recherche de la solution optimale. Cette méthode conduit à un problème dit aux "deux bouts" (PDB). La solution ainsi obtenue est une fonction d'un vecteur d'état adjoint, celle-ci est dite commande en boucle ouverte [8].

Lorsqu'un système est composé de plusieurs agents il n'est plus possible de modéliser ce problème sous un problème de commande optimal mais le définir dans le cadre de la théorie des jeux.

Les premiers concepts de théorie des jeux ont été établis dans un cadre statique par Von-Neumann et Morgenstern [14]. Leurs extensions dans le cas dynamique a été faite pour la première fois par Isaacs [13] dans le cadre d'un jeu de poursuite évacion.

La théorie des jeux différentiels a été développée dans les années "1950", comme une extension de la théorie des jeux classiques "1930" et celle du contrôle optimal. Cette théorie étudie les problèmes conflictuels de commande, où les variations de position sont décrites par des équations différentielles. On appelle conflit tout phénomène pour lequel on peut a priori déterminer qui et comment participer au conflit, quelles sont les issues possibles au conflit, qui dispose d'intérêt dans ce conflit et en quoi il consiste. Les individus prenant part à ces conflits seront désignés par des joueurs, ces derniers ne possèdent pas toujours un contrôle complet sur le déroulement du jeu. Parfois certains facteurs peuvent se présenter et influencer le déroulement du jeu [8].

Contrairement à la théorie de la commande optimale, la particularité des jeux différentiels à plusieurs joueurs est qu'il n'existe pas de principe d'optimalité unique qui corresponde à toutes les classes de jeu. Cela dépend des règles du jeu, de l'information dont dispose les joueurs et de leurs objectifs respectifs. En terme de théorie des jeux, on désignera les contrôleurs par des "joueurs" et les contrôles par des "stratégies". Ainsi, une fois la forme générale d'un jeu est établie, il devient nécessaire de définir ce qu'est une solution d'un jeu différentiel. Par solution d'un jeu différentiel, on comprendra un composé de stratégies des joueurs vérifiant une conception bien définie d'optimalité. La question d'optimalité est traitée de plusieurs manières. Pour les jeux sans coalitions, dans la grande majorité des ouvrages, les auteurs suivent la conception de l'équilibre de Nash [8].

Selon les termes de Star et Ho [33], on rencontre les jeux différentiels en boucle ouverte ou en boucle fermée. La différence qui les sépare se situe essentiellement dans les stratégies utilisées par les joueurs. Les commandes en boucle fermée sont exprimées en fonction du vecteur de position et les commandes en boucle ouverte en fonction du temps uniquement [1].

Dans ce mémoire nous allons traiter un problème de production maintenance, modélisé comme un jeu différentiel à deux joueurs à somme non nulle. En supposant que les deux joueurs (département de maintenance et celui de la production de la même entreprise) prendront une décision sur les dépenses de maintenance et le taux de production dans une ambiance non coopérative, nous rechercherons une solution dite de Nash, le principal obstacle à franchir pour la détermination des stratégies d'équilibre des deux joueurs est l'ensemble de deux équations différentielles qui formule une situation d'optimalité du jeu différentiel. Dans notre étude nous essayerons de caractériser cet équilibre qualitativement en utilisant l'analyse du diagramme de phase vu la difficulté de le déterminer analytiquement.

Ce manuscrit est réparti en cinq chapitres, le premier est consacré à la présentation de l'entreprise IFRI. Dans le deuxième et le troisième chapitre, nous proposons de faire un bilan des connaissances, sous forme de rappels des concepts de contrôle optimal ainsi que la théorie des jeux différentiels qui vont nous servir par la suite. Ensuite, dans le quatrième chapitre nous donnons un modèle d'un problème de maintenance-production qui sera modélisé sous forme d'un jeu différentiel en boucle ouverte. Enfin, une analyse descriptive des données de l'entreprise IFRI pour déterminer l'équilibre entre la maintenance et la production au sein de cet entreprise est donnée comme un exemple d'application qui fait l'objet du dernier chapitre.

Chapitre 1

Présentation de l'organisme d'accueil

1.1 Historique et évolution de l'entreprise

La SARL Ibrahim et fils " IFRI " est une société à caractère industriel, elle est spécialisée dans la production des eaux minérales et des boissons diverses, elle contribue au développement du secteur agro-alimentaire à l'échelle nationale.

La naissance de cette organisation remonte à l'année 1986 quand elle était " LIMONADERIE IBRAHIM " spécialisée dans la production de boissons gazeuses en emballage verre, créée par les fonds propres de M. Ibrahim Laid. Depuis cette date, la famille a capitalisé une riche expérience dans le domaine des boissons, ce n'est que dix ans plus tard, en 1996, que l'entreprise hérite un statut juridique de SNC (Société en Nom Collectif) puis le statut de la SARL (Société à responsabilité limitée) composé de plusieurs associés.

La SARL Ibrahim et fils IFRI, à caractère familiale (les gérants sont Ibrahim Laid et ses cinq fils), inaugure son premier atelier d'embouteillage d'eau minérale en bouteilles en polyéthylène téréphtalate (PET) le 20 juillet 1996. A cette date, plus de vingt (20) millions de bouteilles ont été commercialisées sur l'ensemble du territoire national. Ce chiffre atteint 48 millions d'unités en 1999, puis 252 millions de litres en 2004. La production franchira le cap des 541 378 351 millions de litres dans toute la gamme des produits IFRI en 2012.

1.2 Cadre juridique

La société prend la forme juridique " société à Responsabilité Limitée "(SARL).

- Son capital est de 1.293.000.000.00 DA.
- Numéro de registre de commerce est : 98B0182615.
- Numéro d'article d'imposition : 06360646615.
- Numéro d'identifiant fiscale : 099806018261598.

1.3 Situation géographique

1.3.1 Site Ighzer Amokrane

La SARL Ibrahim et fils " IFRI " est Implantée dans la commune de Ighzer-Amokrane, Daïra d'Ifri Ouzellaguen dans la wilaya de Bejaïa dans le nord de l'Algérie. Elle est localisée au sud-ouest de l'agglomération Ighzer Amokrane, soit à 400 mètres de la R.N. n° 26. Elle est implantée à l'entrée-Est de la vallée de la Soummam, en contre bas du massif montagneux de Djurdjura qui constitue son réservoir naturel d'eau.

1.3.2 Site Zone activité Taharacht Akbou

L'activité secondaire de production de jus IFRUIT est implantée à la zone Taharcht AKBOU sur un site de 20 HA destiné à recevoir les projets d'extension dans la gamme soda, jus ...etc

1.4 Fiche signalétique de la SARL Ibrahim et fils IFRI

- Raison sociale : Sarl IBRAHIM et fils-Ifri
- Forme juridique : Société à responsabilité limitée SARL
- Capital : 1293000000,00 DA
- Le fondateur de la SARL IFRI : Ibrahim Laid
- Date de création :1986
- Effectifs : 1139
- Missions : Production d'eau minérale et de Boissons diverses
- Siège social : Ighzer-Amokrane-Ifri Ouzellaguen-06010 Bejaia-Algérie

- Téléphone : 0021334351266
- E-mail : ifri@ifri-dz.com
- Site Web : www.ifri-dz.com

Pour mieux s'informer sur le domaine d'activité et les missions exercées par la Sarl Ibrahim et fils Ifri, on abordera dans ce point ci-après les principales missions tout en précisant les objectifs fondamentaux de la Sarl Ifri, puis les activités qu'elle pratique .

1.5 Missions et activités de l'organisme Ifri

1.5.1 Missions

L'entreprise IFRI a pour mission essentielle la production et la commercialisation des produits agro-alimentaires. "IFRI" est spécialisée dans la production d'eau minérale et de boissons diverses en emballage verre et PET.

La finalité de l'entreprise est d'être leader dans le domaine des eaux minérales tout en renforçant progressivement ses positions dans le segment des boissons diverses et développer ses capacités à l'international.

La Sarl IFRI a fixé ses objectifs à court, moyen et long terme à l'effet de guider de plus en plus son parcours vers l'amélioration continue dans tous les secteurs (sociale, économique, financier et productif), d'ailleurs elle a permis à la région de connaître un développement abondant surtout dans la réduction du taux de chômage. En terme financier elle vise l'amélioration de la rentabilité, la trésorerie et surtout le rapport qualité/prix, et enfin avoir une image de marque à partir d'un bon plan marketing.

1.5.2 Activités

Activité industrielle

La société travaille 24/24 Heures avec des lignes de production automatisées et équipées des systèmes de contrôle de qualité de dernière génération dans toutes les étapes de la production.

Grâce aux options technologiques qui ont prévalu lors du choix des équipements de production et de contrôle, IFRI accroît sans cesse ses capacités. En 2010, la production de l'entreprise a franchi les 536 millions de bouteilles, en 2015 la production de l'entreprise a franchi les 800 millions de

bouteilles. La Sarl IFRI veille au respect des normes d'hygiène, de sécurité et environnementales les plus strictes afin de diversifier sa gamme de production. Parmi les objectifs de l'activité industrielle on trouve :

- Formalisation de la nouvelle boisson ;
- L'embouteillage d'eau minérale naturelle plate et gazéifiée ;
- Fabrication des jus et des boissons gazeuses ;
- Apporter une qualité optimale aux produits fabriqués ;
- Etablir une politique des prix permettant à leurs clients une meilleure approche pour s'investir dans le marché ;
- Contrôle de l'eau minérale à son arrivée à l'unité ;
- Contrôle pendant la phase d'embouteillage ;
- Contrôle de produits finis.

Activité économique

La sphère économique permet à une région rurale de connaître un certain développement et amélioration du pouvoir d'achat.

Activité sociale

- Le taux de chômage de cette localité a énormément diminué du fait que le nombre du personnel recruté représente 1139 salaries ;
- La baisse du niveau de la délinquance (vol, violences,...) dans la localité.

Activité environnementale

L'impact de l'activité de la Sarl Ifri sur l'environnement est presque positif du fait qu'elle n'a aucun rejet toxique sauf quelques déchets polluant (les bouteilles en plastique).

1.6 IFRI dans le monde

Ayant couvert les besoins du marché national, grâce à une gamme de produits tellement diversifiée, IFRI est partie à la conquête de nouveaux marchés dans le monde. Aujourd'hui exporte ses produits vers la France, l'Angleterre, l'Espagne, l'Italie, l'Allemagne, la Belgique, le Luxembourg. . . par ailleurs, plusieurs contrats sont en phase de finalisation avec des partenariats étrangers soucieux d'acquérir ses produits.

L'un des principaux objectifs étant l'élargissement du réseau d'exportation vers d'autres pays. De gros efforts d'investissements sont continuellement consentis, pour permettre de réaliser des extensions de leurs capacités de production, afin de répondre à une demande du marché international en constante augmentation.

1.7 Environnement de l'entreprise

L'environnement de l'entreprise est l'ensemble des éléments constitutifs de son milieu, c'est-à-dire toutes les forces extérieures qui peuvent influencer l'entreprise d'une manière directe ou indirecte. La société opère avec des acteurs économiques locaux et étrangers.

1.7.1 Fournisseurs

Les fournisseurs de l'entreprise sont :

- Les fournisseurs de biens (matière premières, pièce de rechanges) ;
- Les fournisseurs de services (réparation et maintenance).

1.7.2 Clients

Son portefeuille client englobe, non seulement l'ensemble de la population service grâce au réseau de distribution appui par une force de vente, mais aussi, les institutions et organismes publiques, les grandes comptes et autres clients particuliers importants. Elle dispose de 1958 clients.

1.8 Moyens et Organisation d'IFRI

Les moyens de l'entreprise IFRI peuvent être classés selon deux catégories : humains et matériels, on va les détaillés dans la présente section, on traitera par la suite son organisation en précisant ses différentes structures, plus précisément la sous direction de contrôle de gestion, là où nous avons effectué notre stage pratique.

Les moyens de la SARL-IFRI sont répartis comme suit :

1.8.1 Moyens humains

La SARL Ibrahim et fils IFRI fait fonctionner un nombre de travailleur qui a déjà franchis les milles(1000) salariés.

1.8.2 Moyens matériels

L'entreprise est dotée des moyens matériels appropriés.

Présentation des produits finis :

La gestion des produits finis de la société IFRI est partagée en deux parties :

- La gestion de produit finis PET qui concerne les produits de production PET (en plastique).
- La gestion de produits finis des lignes de production des produits en verre.

Pour bien comprendre les produits multiples de la société, il est nécessaire de faire un aperçu sur les lignes de production ainsi que les différents produits.

Potentiel de production

SARL Ifri dispose de dix (10) chaînes de production qui sont :

La ligne	Type d'emballage	Le produit	Format
SASIB	PET	Eau minérale naturelle	0.5L, 0.33L, 0.5L BS
COMBI 12	PET	Eau minérale naturelle	1.5L
COMBI 20	PET	Eau minérale naturelle	1.5L
KSB	PET	Eau minérale naturelle	0.5L, 1.5L
KRONES 1	Verre	Eau minérale fruitée	0.25L, 1L
KRONES 2	Verre	Soda	0.25L, 1L
KRONES M	Verre	Eau minérale naturelle Eau minérale gazéifiée	0.25L, 0.5L, 1L
CSD	PET	Soda	0.33L, 1.25L, 2L
ASEPTIQUE	PET	Jus Ifruit Boissons au jus et au lait Boissons Biscuit 10 Fruits AZERO	0.33L, 1L, 2L 0.20L, 0.33L, 1L 0.33L, 1L 0.5L
KSB 18-2	PET	Soda	1L, 2L

TAB. 1.1 – Potentiel de Production

Superficie Bâtie

- 9 Hangars de production dont, 7 de $3000m^2$ chacun, 1 de $14000m^2$ pour la production de jus aseptique Ifruit et 1 de $35000m^2$ pour la production de sodas.
- 4 Hangars de stockage de Matière première dont, 2 de $3500m^2$ chacun ($1200m^3$ est sous froid), et 2 de $4500m^2$ chacun ($3500m^3$ est sous froid).
- 3 Hangars de stockage de produits finis dont, 2 de $3500m^2$ chacun et 1 de $17000 m^2$.

Transport et logistique :

- 302 camions de distribution (brasseurs) dont :
 - 185 de 2.5 tonnes (125 de Hyundai HD 35 et, 60 de IVECO)
 - 42 de 1.5 tonnes (Hyundai HD 100)
 - 75 de 1 tonne (Hyundai HD 72)
- 210 Charrions élévateurs de 1.5 tonne à 25 tonnes dont, 26 sont réservés aux dépositaires.

1.9 Organisation interne de l'entreprise

Comme toute entreprise la SARL IBRAHIM et FILS est hiérarchisée en structure. La notion de structure fait référence à l'organigramme de l'entreprise, donc la manière dont le travail est organisé, coordonné. IFRI est dirigée par une gérance qui veille à l'exécution optimal des tâches et à la bonne gestion de l'entreprise et de ses ressources, elle est subordonnée de huit autres directions, que nous allons identifier ci-après.

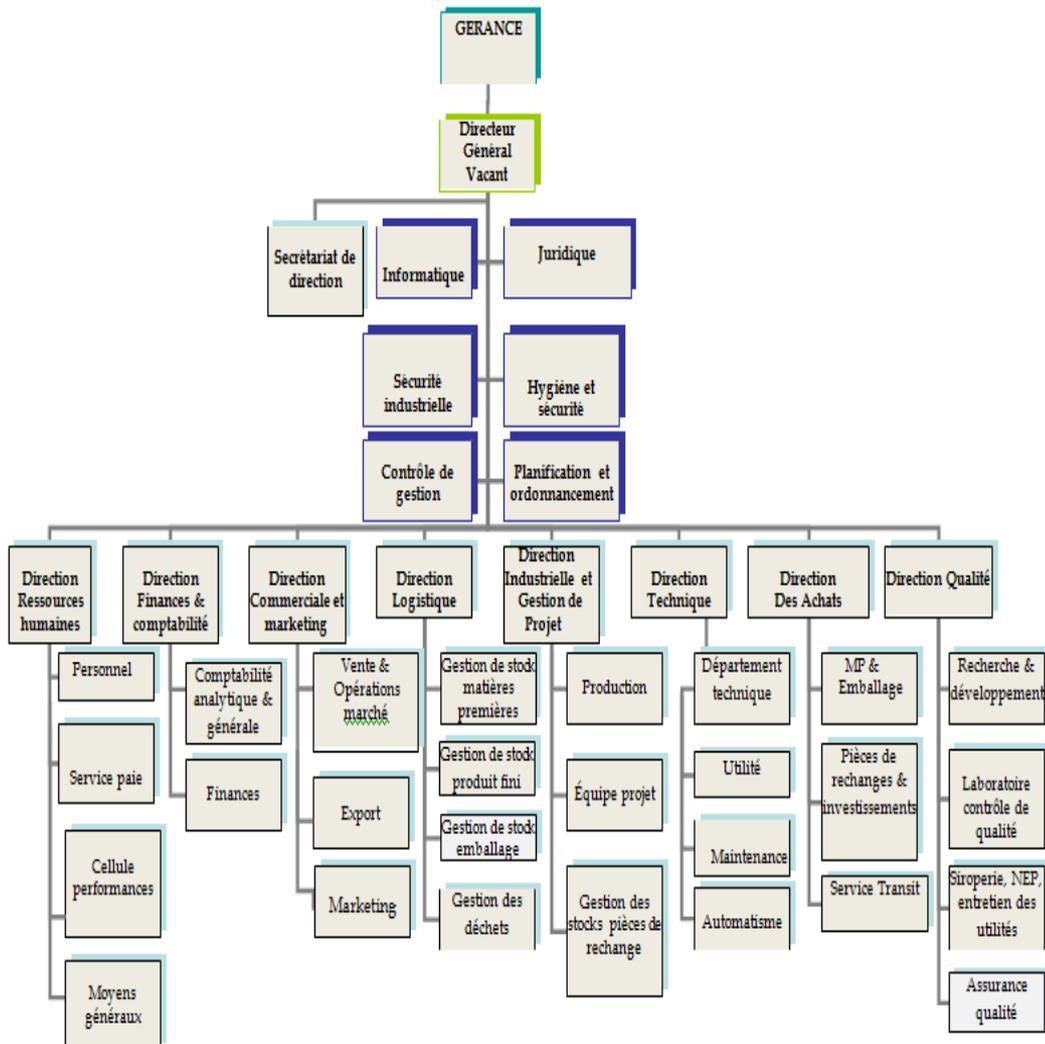


FIG. 1.1 – Organigramme de la Sarl IFRI.

1.9.1 Structures de la Sarl IFRI

La structure organisationnelle des différentes fonctions de l'entreprise ainsi que leurs missions peut être présentée comme suit :

Gérance ” la direction générale ” :

Elle est dirigée et coordonnée par un gérant et 04 cogérants qui assurent et applique les décisions prises dans les différentes assemblées générales des associés. Elle a pour mission la coordination des travaux entre les différentes Directions, s'assurer auprès des collaborateurs directs de l'exécution parfaite de ces travaux, et fixer les grandes orientations en termes d'objectifs.

Directeur général :

L'un des membres de la gérance sera désigné comme un représentant du conseil d'administration, son rôle est de définir et de contrôler la politique de la Sarl pour chaque exercice.

Secrétariat de la direction :

C'est l'organe d'accueil, il est chargé de l'enregistrement des courriers (arrivés et départ), notamment les fax du dépistage du courrier aux différents services et directions, de la réception et orientation des clients, et aussi la réception et enregistrement des appels téléphoniques.

Service hygiène et sécurité :

Il a pour mission :

- Veiller à la prévention en matière de sécurité.
- Intervenir en cas d'incendie ou d'accident.

Service informatique :

Il a pour mission :

- Le développement et la réalisation des projets informatiques.
- L'introduction de nouvelles technologies.
- La maintenance du système informatique.
- L'administration du réseau.

- La sauvegarde et l'archivage des données de l'entreprise.
- Formation du personnel dans les techniques informatique.

Sous direction de contrôle de gestion :

L'objectif principal de ce service est d'assurer le suivi et le contrôle des résultats de la société dans les différentes activités et fonction. Son rôle est :

- Analyser les données pour alerter en cas d'écart anormaux par rapport aux résultats attendus ou aux normes lorsqu'elles existent.
- Collecter des informations concernant les différents budgets prévisionnels (budget de dépenses, trésorerie prévisionnelle / budget d'investissement). Elle veille à leur bonne préparation en collaboration avec les directions concernées et elle veille en principe à l'état des réalisations au fur et à mesure.
- Le suivi de la performance.
- Elaborer des tableaux de bord pour contrôler des résultats obtenus.
- La comparaison permanente des résultats réels et des prévisions chiffrées.

Service sécurité industrielle :

Son rôle est :

- Assurer la sécurité des installations des biens.
- Assurer le maintien de l'équipement de protection individuelle.

Service juridique

Il a pour mission :

- Le conseil juridique des différents services de la Sarl IFRI.
- Le règlement des différentes affaires juridiques.
- Il s'occupe de tout ce qui est juridique (suivi des clients, fournisseurs, réclamations ...).

Sous direction de planification et ordonnancement :

Son rôle est :

- Planifier les tâches de chaque ligne de production par semaine.

- Réaliser et suivre les tableaux de bord pour chaque ligne de production, par volumes, par jours, par semaines, par mois, par trimestres, par semestres et par années.
- Il est garant du mouvement des stocks des matières premières.
- Etablir des programmes de production.

Direction Commerciale et Marketing :

Les services liés à cette direction sont les suivants : " ventes et opérations marché ", " export ", " marketing ". Cette direction s'occupe de :

- Etablir les factures pro-formats formats et les ordres de versements pour les clients.
- Recevoir les bons de commande des clients.
- Etablir et viser les factures et les bons de livraison.
- Répondre à toute de mandes de la clientèle sur les plans de la qualité et de la quantité.
- Rapprocher le plus possible le produit du consommateur (marketing).
- Etre à la disposition du consommateur pour toute réclamation ou suggestion.
- On y trouve la section vente qui s'occupe de toutes les ventes

Direction des achats :

Cette direction est composé des services suivants : " achats locaux ", " achats étrangers ", " transit ". Elle prend en charge la gestion des achats, et assure les suivis des commandes jusqu'à leur satisfaction en assurant les délais comptabilisés avec l'urgence des boissons aux moindres coûts.

Direction des Ressources Humaines :

Elle est subdivisée en quatre services principaux : " personnel ", " service paie ", " cellule performance ", " moyens généraux ". Parmi ses missions :

- Veille à la bonne tenue des stocks.
- Suivi des mouvements de la carrière du personnel.
- Elaboration de la paie.
- Veiller à la gestion des moyens généraux et les espaces verts.

Direction Technique :

Cette direction est subdivisée en services suivants : " département technique ", " utilité ", " maintenance ", " automatisme ". Elle s'occupe de toutes les tâches techniques concernant la production, à cet effet elle :

- Veille au bon fonctionnement des équipements de production.
- Réglages des machines et assurer ses maintenances.
- Assure la maintenance et l'entretien des véhicules.

Direction Industrielle et gestion de projet :

Cette direction contient les services suivants : " production ", " équipe projet ", " gestion des stocks pièces des rechanges ". Parmi ses missions on distingue :

- La production.
- La gestion des projets.
- La gestion des équipements de tous les projets.
- La gestion de stock pièces de rechange.

Direction Qualité :

Elle comprend les services suivants : " recherche et développement ", " laboratoire contrôle de qualité ", " siroperie, NEP, entretien des utilités ", " assurance qualité ". Sa mission principale est :

- La mise en place des procédures de travail de chaque structure.
- Responsable de laboratoire.
- D'assurer l'établissement, la mise en œuvre et l'entretien des processus nécessaires au système de management de la qualité.
- Contrôle physicochimique de la matière première, des eaux des forages, et des échantillons des produits finis et leur analyses.
- De représenter l'organigramme auprès des parties externes relatif au système de management et de qualité.

Direction Comptabilité et Finances :

Elle contient les deux services : " comptabilité analytique et générale ", " Finances ". Son rôle est :

- Etablir les situations financières.
- Elabore la comptabilité et gère la trésorerie.
- Fournit les déclarations fiscales et sociales et assure les relations avec les banques et assurances.
- Assurer la confrontée des opérations comptables.
- Planifier les financements et les investissements.
- Gérer les recettes et les dépenses.

Direction logistique :

Les services de cette direction sont répartis comme suit : " Gestion de stock de matières premières ", " Gestion de stock produits finis ", " Gestion de stock d'emballages ", " gestion des déchets ". Les principales activités de cette direction sont :

- La coordination des activités des magasins.
- Veiller à la bonne tenue des stocks.
- Le contrôle des différents documents relatifs aux entrées et sorties dans les différents magasins.

1.10 Processus de production

La sarl "IFRI" mène sa production a travers 10 chaines de production, chaque chaîne est recommandée à fabriquer un ensemble de produits, une chaîne de production est un ensemble des machines en série qui effectuent des opérations ordonnées afin de transformer la matière utilisée en produit finis.

La production se fait à travers un processus d'opérations, d'abord l'emballage doit être préparé, s'il s'agit d'un emballage de PET (plastique) en transforme la préforme en une bouteille s'impose des bouteilles ainsi prêtent a passé à la remplisseuse ou elles sont remplies d'un mélange préparé, par la suite elle passe par une bouchonneuse, les étiqueteuses puis le dateur.

Les bouteilles sont soit mises dans des caisses, s'il s'agit d'emballage en verre, soit mises sous formes de fardeaux s'il s'agit de l'emballage plastique, les caisses ou les fardeaux sont rassemblés en palettes qui seront dirigées vers les stocks. La production est interrompue par des arrêts pour le nettoyage des machines, il existe deux sortes d'arrêts :

- Le choc thermique : c'est un nettoyage a chaud suivi d'un rinçage a froid il est appliqué lors des passages a production d'un soda à un autre et lors du branchement d'une nouvelle cuve du même mélange.
- Les cips : c'est un mot anglais " Clearing In Place" c'est le nettoyage en place. Il est effectué périodiquement et lors du passage de la production d'un mélange a un autre ou le choc thermique n'est pas suffisant.

1.10.1 La ligne de production *COMBI 20*

Dans notre étude nous intéressons particulièrement à la chaîne de production COMBI 20 avec une capacité de production de 32000 Bouteilles par heure (le mot *COMBI 20* veut dire combinaison de plusieurs machines SIDEL, Souffleuse-Contrôleur de niveau-Etiqueteuse-Dateur-Fardeuse-Poseuse de poinées. Le chiffre 20 signifie le nombre de moules portés par la souffleuse SBO20).

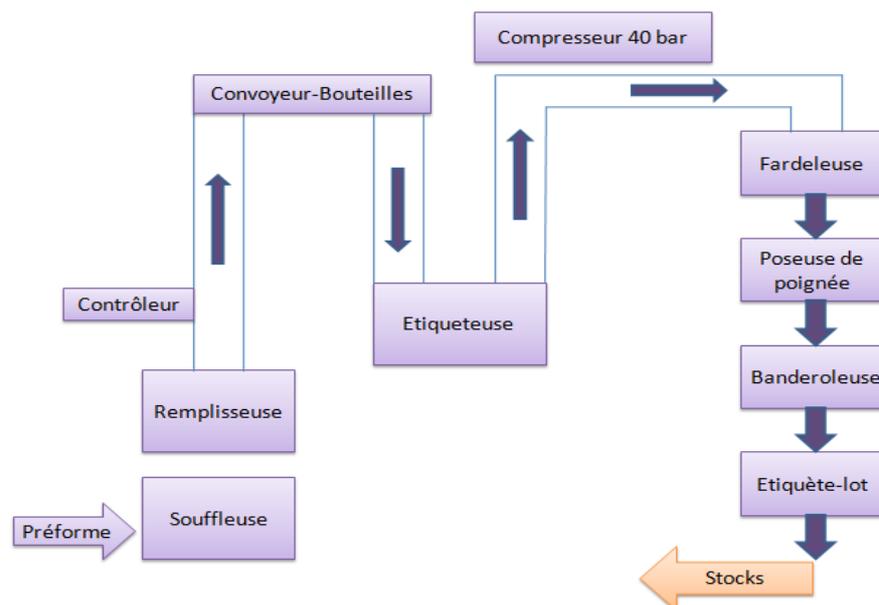


FIG. 1.2 – Schéma structurel de la ligne COMBI 20.

1.11 Processus de maintenance

L'entreprise Ifri, comme toute autre entreprise effectue sa maintenance comme le montre l'organigramme suivant :

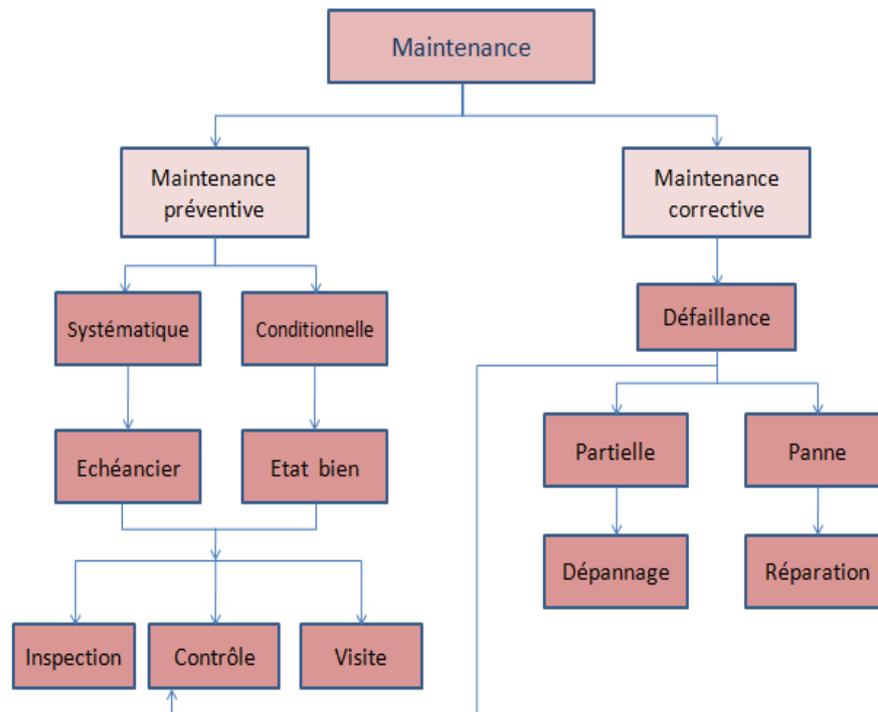


FIG. 1.3 – Organigramme de maintenance.

D'après l'organigramme précédent on distinguera deux type de maintenance :

1. Maintenance préventive : est répartie en deux phases :
 - Prévention systématique : Consiste à effectuer des opérations et ensemble des visites permettent de surveiller l'état des éléments de la machine selon soit un calendrier (à périodicité fixe), soit selon une périodicité d'usage(heures de fonctionnement). Ces visites permettent de collecter des informations pour connaître les lois de dégradation et les seuils d'admissibilité. Elles sont préconisées par les constructeurs.
 - Prévention conditionnelle : Consiste à enrichir les données de base de la liste d'intervention pour améliorer la fiabilité des périodes d'intervention ainsi le comportement de la machine.
2. Maintenance corrective(Défaillance) : Regroupe l'ensemble des activités réalisées après la déffaillance d'un bien ou la dégradation de sa fonction et on constate que :

Maintenance effectuée par défaillance.

- Défaillance : Altération ou cessation d'un bien à accomplir la fonction requise.

Nous rencontrons deux formes de défaillances : la défaillance partielle et la défaillance complète (panne).

- ✓ Défaillance partielle : Altération de l'amplitude d'un bien à accomplir la fonction requise.
- ✓ Défaillance complète : Cessation de l'amplitude d'un bien à accomplir la fonction requise.

Chapitre 2

Contrôle Optimal

2.1 Introduction

La théorie du contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont un contrôle permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser. Cette définition recouvre naturellement de très nombreux champs d'application ; un ingénieur pourra vouloir contrôler un système mécanique en lui appliquant des forces, un économiste pourra vouloir agir sur un équilibre financier en modifiant un taux, un chimiste pourra vouloir améliorer son procédé en régulant la température, etc [26].

L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal)[36].

2.2 Notions de base

2.2.1 Qu'est-ce que la théorie du contrôle ?

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles,

stochastiques, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes [29].

2.2.2 Problème de contrôle optimal

Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable. C'est le problème de contrôlabilité. Ensuite, une fois le problème résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celles qui le font en coût minimal [23].

Objet du contrôle

Un système peut comporter beaucoup de variables ou paramètres. On suppose que n variables sont nécessaires pour décrire son comportement. L'identification de ces variables et la description du système dépendant de celles-ci est une tâche très importante : c'est l'étape de modélisation mathématique. Les variables nommées variables d'états seront notées x_i , $i = 1, \dots, n$. Le système évolue dans le temps, donc les x_i sont des fonctions de temps ($x_i(t)$), on ne le notera pas explicitement, mais cela sera sous entendu. Les n variables d'états vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre sur un intervalle de temps $\tau = [t_0, T]$, ce sont des équations de la forme générale [23] :

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Avec :

$u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in U_1 \times \dots \times U_m := U \subseteq \mathbb{R}^m$, est le vecteur des variables contrôle ou les variables de décision .

$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in X_1 \times \dots \times X_n := X \subseteq \mathbb{R}^n$, est le vecteur des variables d'état.

Condition initiale du système

La condition initiale du système, $x_0 = x(t_0)$ est un vecteur donné dans un plan de phase. En réalité, les composantes de $x(t)$ et de x_0 peuvent représenter physiquement : la position, la vitesse, la température et d'autres paramètres mesurables [23].

But du contrôle

Dans un problème de contrôle, le but du contrôle consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 = x(t_0)$, ($x_0 \in M_0$) à une autre position $x^* = x(t^*)$, ($x^* \in M_1$) où M_0 est l'ensemble de départ, et M_1 l'ensemble d'arrivée [23].

2.2.3 Contrôlabilité

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle [21]. Plus précisément on pose la définition suivante.

Définition 2.1. On dit que le système (2.1) est contrôlable (ou comandable) si pour tous les états $x_0, x_1 \in M$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [t_0; T] \rightarrow U$ tel que $x_1 = x(T; x_0; u(\cdot))$.

Où M est une variété différentielle de dimension n , $x(t) \in M$. (on supposera ici que M est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n).

Contrôlabilité des systèmes linéaires

Considérons le système de contrôle linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in \tau \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t , elle est dite condition de Kalman.

Théorème 2.1. [6] : Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $t \in \tau$ est dit contrôlable en temps T , si et seulement, si la matrice $C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang égal à n .

La matrice C est appelée matrice de Kalman. La condition $\text{rang } C = n$ est appelée condition de kalman.

Dans le cas non autonome (non stationnaire), i.e, dans le cas où les matrices A et B dépendent du temps, la condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.2. [6] : Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $t \in \tau$ est dit contrôlable en temps T^* , si et seulement si, la matrice $C(T^*) = \int_0^{T^*} M(t)^{-1}B(t)B^T(t)(M(t)^{-1})^T dt$ est inversible, avec $T^* \in \tau$.

où $M(t)$ est la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. La matrice $C(T^*)$ est appelée matrice de contrôlabilité. On a $C(T^*) = C^T(T^*)$ et $x^T C(T^*)x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, i.e, $C(T^*)$ est une matrice symétrique positive

Remarque 2.1. *Si le système est autonome, on a $M(t) = \exp(tA)$ [6].*

Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Considérons le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, T]; \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

où $(x(t), u(t)) \in \Theta$, avec Θ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

La contrôlabilité des système non linéaires est une généralisation de la contrôlabilité des systèmes de contrôle optimaux linéaires. Mais, on ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité pour un système non linéaire. On a une condition suffisante de contrôlabilité local qu'on peut obtenir par linéarisation.[1]

Définition 2.2. [1] : On dit que le système (2.3) est localement contrôlable au point x_0 s'il existe un voisinage ν de x_0 tel que pour tout $x_1 \in \nu$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow U$ tel que $x_1 = x(T, x_0, u(\cdot))$.

Définissons maintenant la notion de contrôlabilité le long d'une trajectoire.

Définition 2.3. [1] : Soit $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) : [t_0, T] \rightarrow \Theta$ une trajectoire du système de contrôle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$. Le système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ est localement contrôlable le long de la trajectoire $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec $|a - \tilde{x}(0)| < \eta$ et $|b - \tilde{x}(T)| < \eta$, il existe une trajectoire $(x, u) : [t_0, T] \rightarrow \Theta$ tel que : $x(t_0) = a, x(T) = b, |u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \epsilon, t \in [t_0, T]$.

2.3 Différents types de problèmes d'optimisation

L'objectif, lors de la formulation d'un problème de contrôle, est de fournir la motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système atteint un état

désirable. Donc choisir une mesure de qualité, est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système. Les critères de qualité, appelé aussi fonctions objectif sont généralement les suivants :

2.3.1 Problème de Lagrange

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u_1(t), \dots, u_m(t)} \int_{t_0}^T f(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t) dt \\ \dot{x}(t) = g(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t); \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où

$u_i(\cdot) : i = 1, \dots, m$, sont définis sur $[t_0, T]$ et les trajectoires associées doivent vérifier $x(t_0) = x_0$ et $x(T) = x_1$ [36].

2.3.2 Problème de Mayer

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u_1(t), \dots, u_m(t)} J = S(x(T)) \\ \dot{x}(t) = g(x_1(t), \dots, x_m(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t); \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Dans cette formulation, le critère J n'est plus du type intégrale, il ne porte que sur l'état final $x(T)$ [36].

2.3.3 Problème de Bolza

Le problème de Bolza est donné sous la forme d'un système

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u_1(t), \dots, u_m(t)} S(x(T)) + \int_{t_0}^T f(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t) dt \\ \dot{x}(t) = g(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t), \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Lorsque $S = 0$ dans l'expression de la fonctionnelle du problème (2.6), on parlera d'un problème de Lagrange, lorsque $f = 0$, on parlera d'un problème de Mayer [23].

Remarque 2.2. *Les problèmes cités précédemment restent valables dans le cas des problèmes de minimisation.*

Définition 2.4. [2] : Un contrôle $u : [t_0, T] \rightarrow U$ est dit Admissible pour le problème (2.6), si la valeur initiale du problème à une solution $x(\cdot)$ dans C^1 telle que les contraintes $x(t) \in X$ et $u(t) \in U(x(t), t)$ soient vérifiées pour tout $t \in [t_0, T]$ et la fonction objectif est bien définie (i.e, sa valeur est un nombre réel unique). Autrement dit, toute fonction continue par morceaux $u(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, à valeur dans U [17].

Définition 2.5. [2] : Un contrôle $u : [t_0, T] \rightarrow U$ est dit optimal dans le problème (2.6), s'il est admissible et si l'inégalité $J(u(\cdot)) \geq J(\tilde{u}(\cdot))$ est vérifiée pour tout autre contrôle admissible $\tilde{u}(\cdot)$.

2.4 Principe du maximum de Pontryaguine

Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, sur l'ensemble des contrôles admissibles U , le problème de la commande optimale consiste à trouver un contrôle $u^* \in U$ qui transfère l'objet de la position initiale $x(t_0)$ à la position finale $x(T)$ de façon à ce que la valeur de la fonction $J(u)$ soit maximale (minimale). Pour ce faire, il existe plusieurs méthodes, parmi ces méthodes, le principe du maximum de Pontryaguine [8].

2.4.1 Enoncé général

Considérons le problème de contrôle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J = S(x(T)) + \int_{t_0}^T f(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t) dt \rightarrow \max; \\ \dot{x}(t) = g(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t), \\ x(t_0) = x_0; \\ u \in U. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

et rappelons les conditions nécessaires d'existence d'une solution optimale pour le problème de contrôle (2.7). Ces conditions sont données par le théorème suivant :

Théorème 2.3. [2] : On suppose que $g(t, \cdot, u) \in C_n^1(\mathbb{R}^n)$, $f(t, \cdot, u)$ et $S(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ pour tout $(t, u) \in [t_0, T] \times U$. Soit $(x^*(t), u^*(t))$, $t \in [t_0, T]$ une solution du problème (2.7). Alors, il existe un vecteur d'état adjoint différentiable $\lambda \in \mathbb{R}^n$, telle que la fonction hamiltonienne définie par :

$$H(t, x, u, \lambda) = \lambda^T(t)g(t, x, u) + f(t, x, u), \quad (2.8)$$

satisfait les conditions suivantes :

$$\frac{d}{dt}x^* = \nabla_\lambda H(t, x^*, u^*, \lambda), \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda = -\nabla_x H(t, x^*, u^*, \lambda), \quad (2.10)$$

$$\lambda(T) = \nabla_x g(x(T)), \quad (2.11)$$

$$H(t, x^*, u^*, \lambda) = \max_{u \in U} H(t, x^*, u, \lambda). \quad (2.12)$$

Remarque 2.3. [2] : La condition (2.12) peut être reformulée sous une hypothèse de différentiabilité sous la forme

$$\nabla_u H(t, x^*, u^*, \lambda) = 0 \quad (2.13)$$

2.4.2 Conditions de transversalité

On appelle condition de transversalité du problème (2.7) la relation suivante :

$$H^* + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)$$

${}_T\delta T + \left(\frac{\partial S^*}{\partial x^*}\right) - \lambda^*(t)_T\delta x_T = 0$ où $\delta x(t)$ est la variation de la fonction $x(t)$.

La relation (2.14) donne la condition supplémentaire qui sert à résoudre l'ensemble des équations données par les condition (2.9) et (2.10) du théorème 2.3 [17].

Différents cas de transversalité

- **Type(1)** : Puisque T et $x(T)$ sont fixes, δT et δx_T sont nuls dans la condition de transversalité (2.14), il n'y a aucune condition supplémentaire a part celles imposées par la formulation du probleme.
- **Type(2)** : T le temps final libre et $x(T)$ est fixe, alors δT est arbitraire et comme $x(T)$ est fixe, $\delta x(T)$ est nul. Le coefficient de δT dans la condition de transversalité (2.14) est nul aboutissant à :

$$\left(H + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\right)_T = 0$$

- **Type(3)** : T est fixe et $x(T)$ est libre. Donc δT est nul et $\delta x(T)$ est arbitraire. Ceci signifie que le coefficient de $\delta x(T)$ dans la condition (2.14) est nul ç-à-d

$$\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) - \lambda^*(t)\right)_T = 0$$

- **Type(4)** : T et $x(T)$ sont libres, ne sont pas reliés, δT et δx_T ne le sont pas, on a d'après la condition (2.14) le résultat suivant :

$$\left(H + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\right)_T = 0$$

$$\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) - \lambda^*(t)\right)_T = 0$$

2.5 Conditions suffisantes

Le principe du maximum de Pontryagin fournit des conditions nécessaires à l'optimalité des problèmes d'optimisation . Il est bien connu que ces conditions ne sont généralement pas suffisantes pour l'optimalité. Mangasarian [25] a montré que, en plus des conditions nécessaires de Pontryagin, la concavité du hamiltonien par rapport aux variables d'état et de contrôle est suffisante pour l'optimalité des problèmes de maximisation. Arrow [4] , voir aussi [5], le résultat étendu de Mangasarian à la concavité par rapport aux variables d'état de l'hamiltonien maximisé par rapport à la variable de contrôle. Les deux conditions sont concaves plutôt forte et non satisfaites dans de nombreuses applications.

En même temps, Leitmann et Stalford [20] dérivent des conditions de suffisance, donnée dans le théorème ci-dessous. Le théorème Leitmann-Stalford est plus général que les résultats Mangasarian-Arrow, il n'est pas facilement applicable pour des problèmes qui ne satisfont pas la condition d'Arrow (la concavité) [10].

Théorème 2.4. [10] : Soit $u^* \in U$, $t \in \tau$, soit $x^* = x(u^*)$ la trajectoire correspondante, et soit $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue. Soient les deux conditions suivantes sont vérifiées pour tout $u \in U$ et $x = x(u)$:

1. $\int_0^\infty e^{-rt} [H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) - H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - \langle \lambda^*(t) - r\lambda(t), x^*(t) - x(t) \rangle] dt \geq 0$;
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} \langle \lambda(t), x^*(t) - x(t) \rangle \leq 0$.

Alors, (u^*, x^*) est une solution optimale.

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans \mathbb{R}^n , et $H(t, x, u, \lambda) = \lambda^T(t)g(t, x, u) + f(t, x, u)$,

2.6 Contrôle optimal avec actualisation de l'objectif

Parfois la fonction intégrale est multipliée par un facteur d'escompte. En particulier, ceci peut être utile pour assurer la convergence de l'intégrale dans les problèmes à horizon infini, le problème est formulé comme suit [2] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u(t), \dots, u_m(t)} \int_{t_0}^T e^{-rt} f(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t) dt, \\ \dot{x}(t) = g(x, u, t) = g(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t); \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

où r est généralement, le taux d'escompte.

2.6.1 Contrôle sur un Horizon fini

Lorsque le problème est à horizon fini, la fonctionnelle du problème (2.15) devient :

$$\max_{u(t), \dots, u_m(t)} J = \int_{t_0}^T e^{-rt} f(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_m(t); t) dt + e^{-rt} S(x(T)), \quad (2.16)$$

La fonction hamiltonienne dans le problème (2.15) s'écrit :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = e^{-rt} f + \lambda g. \quad (2.17)$$

Habituellement il est commode de faire un changement de variables. Soient :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} e^{-rt} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} = 0. \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} = e^{-rt} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad (2.19)$$

Il est préférable de mener l'étude en terme de valeur courante au lieu de l'équivalent de la valeur à l'instant initial. Soit, d'une part :

$$H = e^{-rt} [f + \lambda e^{rt} g], \quad (2.20)$$

où $\lambda(t)$ représente la valeur marginale à l'instant t . La formule (2.20) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= e^{rt} H \\ &= e^{rt} (e^{-rt}) [f + \lambda e^{rt} g] \\ &= f + \lambda e^{rt} g \\ &= f + \psi g, \text{ avec } \psi = \lambda e^{rt}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

où \tilde{H} est appelé le Hamiltonien courant. D'autre part, on a :

$$\psi = \lambda e^{rt} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{\psi} = r e^{rt} \lambda + \dot{\lambda} e^{rt}, \quad (2.22)$$

d'où

$$\dot{\psi} = r\psi - e^{rt} \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2.23)$$

En remplaçant $H = e^{-rt} \tilde{H}$ dans (2.23), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= r\psi - e^{rt} \frac{\partial(e^{-rt} \tilde{H})}{\partial x}, \\ &= r\psi - e^{rt} e^{-rt} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}, \\ &= r\psi - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}, \\ &= r\psi - \frac{\partial f}{\partial x} - \psi \frac{\partial g}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

De plus, $\frac{\partial H}{\partial u}$ peut être réécrit comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \frac{\partial e^{-rt} \tilde{H}}{\partial u} \\ &= e^{-rt} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} &= 0 \end{aligned}$$

Puisque, $\tilde{H} = f + \psi g$, la quantité \dot{x} peut être décrite par la relation :

$$\dot{x} = g = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi} \quad (2.25)$$

En final, l'hamiltonien et les formules (2.21) et (2.24) deviennent :

$$\tilde{H} = f(x, u, t) + \psi g(x, u, t) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \psi \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \quad (2.27)$$

$$\dot{\psi} = r\psi - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \quad (2.28)$$

Par conséquent, la fonction adjoint prend la forme suivante :

$$\dot{\psi} = r\psi - \psi \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (2.29)$$

2.7 Conclusion

Généralement, dans les problèmes de contrôle optimal, la variable de contrôle qui fait progresser l'état du système est le choix d'un seul preneur de décision. Pourtant, il existe beaucoup de situations où cet état est déterminé par plus d'une seule entité, dont chacune agit indépendamment soit, pour affecter une variable d'état commune soit chacune d'entre elles affecte sa propre fonction de gains à travers le temps. Ces situations sont souvent modélisées sous forme de *Jeux différentiels* [16].

Chapitre 3

Jeux Différentiels

3.1 Introduction

La théorie des jeux différentiels peut être vue comme évolution des jeux statiques et de l'optimisation dynamique [2], c'est une prolongation de la théorie des jeux séquentiels au cas continu . Elle est définie quand il peut y avoir plus d'un décideur, chacun a sa propre fonction objectif qu'il essaie de maximiser (ou minimiser), sujet à un ensemble d'équations différentielles [28].

D'abord nous introduisons quelques notions de base sur la théorie des jeux classiques, ensuite nous aborderons le sujet des jeux différentiels.

3.2 Notions de base de la théorie des jeux

La théorie des jeux s'intéresse à des situations où des *joueurs* ou *agents* prennent des décisions, chacun étant conscient que ses gains dépendent non seulement de sa propre décision, mais aussi des décisions prises par les autres joueurs. Un joueur peut prendre plusieurs décisions et il en choisit une qui sera la meilleure pour lui. En termes mathématiques, on traduit la phrase *la meilleure pour lui* par l'introduction d'une fonction pour chacun des joueurs qui reflète ses préférences, appelée *utilité*. L'utilité d'un joueur peut dépendre non seulement de ses décisions mais aussi de celles de tous les autres joueurs. L'utilité est une fonction croissante par rapport aux préférences : l'utilité d'un joueur est plus élevée pour un choix de décisions par rapport à un autre s'il préfère le premier choix à l'autre.

Le concept de solution d'un jeu non-coopératif est souvent l'équilibre de Nash : c'est un choix de décision de tous les joueurs tel qu'aucun ne peut tirer avantage (ne peut augmenter sa fonction d'utilité) en changeant seul (unilatéralement) sa décision.

Définition 3.1. Un jeu est une situation où des individus (les joueurs) sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance (les règles du jeu), qui permet de déterminer qui peut faire quoi et quand. Les résultats de ces choix constituent une issue du jeu laquelle est associée un gain pour chacun des participants. Ces résultats ne dépendent pas de la décision d'un seul joueur et ne dépendent pas non plus uniquement du hasard, bien que celui-ci puisse intervenir[19].

Définition 3.2. Un joueur est un acteur (entité) pouvant être une personne(groupe de personne), une entreprise, un gouvernement, une cellule, un virus,un pays . . . , agissent dans leur propre intérêt selon le principe de la rationalité individuelle [34].

3.2.1 Classification et types de jeux

La littérature tend à distinguer entre les jeux selon plusieurs éléments à savoir :

- Les choix effectués par les joueurs dans un jeu peuvent être simultanés ou séquentiels, cette distinction met en évidence deux types de jeux, **jeux statique** lorsque les joueurs choisissent leurs actions simultanément et **jeu dynamique** lorsque ils choisissent leurs actions alternativement [18].
- L'information dont dispose chaque joueur au moment de jouer est capitale pour décrire un jeu et les stratégies dont dispose chaque joueur, l'information est dite **parfaite** si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs,**imparfaite**, lorsque un joueur ignore certains des choix qui ont été effectués avant le sien, et elle est dite **complète** si chaque joueur connaît les ensembles des stratégies et les fonctions de gain de tous les autres joueurs. Dans le cas contraire, le jeu est dit en information **incomplète** [18].
- Selon le type de relation existant entre les joueurs, on peut distinguer entre deux grandes familles des jeux, **jeu coopératif**, lorsque les joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante, et jeu non coopératif, lorsque les joueurs n'ont pas la possibilité de former des coalitions [18].
- Le jeu sous forme normale est dit **fini**, lorsque l'ensemble des stratégies est fini, et il est dit **infini** dans le cas contraire [18].

- Les jeux dits à **somme nulle** lorsque pour toute situation possible du jeu, la somme des gains des deux joueurs est nulle, dans le cas contraire le jeu est dit à somme générale [11].

3.2.2 Jeux à m joueurs

Un jeu sous forme normale peut être représenté sous la forme suivante :

$$J_m = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N} \rangle, \quad (3.1)$$

où $N = \{1, 2, \dots, m\}$ est l'ensemble des joueurs désigné par l'indice i , $i \in N$.

$X_i \subset \mathbb{R}$ désigne l'ensemble des stratégies du joueur $i \in N$.

$X = \prod_{i=1}^m x_i$ est l'ensemble des issues du jeu.

$f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de gain du i^{me} joueur. Chaque joueur connaît les ensembles des stratégies et les fonctions de gain de tous les autres joueurs. Lorsque l'ensemble des joueurs est réduit à deux $N = \{1, 2\}$, le jeu est dit jeu fini à deux joueurs et il est dit à somme nulle, si dans toute situation du jeu les valeurs des fonctions de gain des deux joueurs sont diamétralement opposées [18].

3.2.3 Concept de solution

Un concept de solution peut être défini comme un ensemble de lois représentées par des équations mathématiques, permettent de sélectionner parmi toutes les issues possible du jeu, un sous-ensemble d'issues satisfaisant certaines propriétés, jugées désirable par les joueurs qui par hypothèse, possède certaines facultés de raisonnement ou de comportement (rationalité, prudence, ...).

Définition 3.3 (Equilibre de Nash [7]). Une situation $x^* = (x_i^*, x_{-i}^*) \in X_i \times X_{-i}$ est un équilibre de Nash du jeu (3.1) si et seulement, si pour chaque joueur $i \in N$, on a :

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*), \quad \forall x_i \in X_i. \quad (3.2)$$

où

X_i est l'ensemble des stratégies du i^{me} joueur.

X_{-i} est l'ensemble des stratégies des joueurs sauf le i^{me} joueur.

En d'autres termes, un équilibre de Nash est une issue du jeu dont aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de la stratégie d'équilibre.

Une extension de la théorie des jeux classiques "1930" et du contrôle optimal s'est développée dans les années "1950" ce qui a donné naissance à la théorie des jeux différentiels. Cette théorie étudie les problèmes conflictuels de commande, où les variations de position sont décrites par des équations différentielles [8]. Cette théorie sera l'objet de la section qui suit.

3.3 Jeux différentiels

La théorie des jeux différentiels, située à l'intersection de la théorie des jeux classiques et le contrôle optimal, a été initiée en 1954 par Isaccs Rufus [13]. La théorie des jeux différentiels est considérée comme un prolongement naturel des jeux décrits pour un cadre dynamique, dans le sens où elle permet d'analyser des conflits dans des systèmes dont l'état est gouverné par des équations différentielles contrôlées par un ou plusieurs joueurs sur un intervalle de temps $[t_0, T]$. Les jeux différentiels traitent ainsi des problèmes où m acteurs, les joueurs, agissent sur un système dynamique en temps continu, modélisé par une équation différentielle paramétrée par m contrôles choisis par chacun des joueurs. Le but de chaque joueur est de minimiser un coût qui dépend de la trajectoire et des contrôles des $m - 1$ autres joueurs.

Cependant, le cas des jeux à deux joueurs à somme nulle est un cas particulier, où un exemple des questions modélisées concerne les jeux de poursuite : deux joueurs dans le plan ont chacun une dynamique, l'un essaie d'attraper au plus vite l'autre, qui lui, essaie d'éviter la capture le plus longtemps possible.

3.3.1 Jeu différentiel à plusieurs joueurs

Dans cette partie, nous présentons les différents paramètres pouvant définir un jeu différentiel à plusieurs joueurs. Les jeux que nous allons considérer sont des jeux sous forme normale [8].

Définition 3.4 (Jeu différentiel à m joueurs). Un jeu différentiel à m joueurs se déroulant dans un intervalle de temps $\tau = [t_0, T]$ peut être décrit par :

$$\Gamma_m = \langle N, \Sigma, U_i, J_i \rangle_{i=1..m} \quad (3.3)$$

où

– $N = \{1, \dots, m\}$ représente l'ensemble des joueurs,

– Σ décrit un système d'équations différentielles défini par :

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \dots, u_m), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.4)$$

où f est une application continue par morceaux définie par :

$$f : \tau \times X \times U_1 \times \dots \times U_m \rightarrow X.$$

X est un espace vectoriel de dimension finie pouvant être égal à \mathbb{R}^n ou à un sous espace de celui-ci.

- $U_i, 1 \leq i \leq m$, sont des espaces euclidiens de dimension finie.
- J_i sont des fonctions réelles définies sur $U_1 \times \dots \times U_m \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 3.1. [8] Dans la littérature, l'ensemble X est désigné par l'espace d'état et l'ensemble $U_i, 1 \leq i \leq m$ par l'espace des stratégies (ou espace des contrôles). Le système différentiel Σ est dit *contrainte dynamique du problème considéré*. J_i est la fonction gain (ou la fonction coût) du i^{me} joueur. L'intervalle τ est dit *temps (ou horizon) d'optimisation* qui peut être fini ou infini.

3.3.2 Stratégies admissibles

En termes de jeu différentiel à m joueurs, la notion de stratégies admissibles, consiste en un choix judicieux d'un composé de stratégies de façon à ce que le système différentiel (3.4) admette une solution unique.

Définition 3.5. [8] : Un composé de stratégies $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)) \in U_1 \times \dots \times U_m$ est dit admissible pour le système défini par l'application f , s'il existe une unique trajectoire $x(\cdot) = x(\cdot, u) : \tau \rightarrow X$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $x(\cdot)$ est absolument continue sur τ ,
- $\dot{x} = f(t, x(t), u_1(t), \dots, u_m(t))$, presque partout sur τ ,
- $x(t_0) = x_0, t_0 \in \tau, x_0 \in X$.

3.3.3 Structures d'information

La formulation d'un composé de stratégies admissibles, dépend de l'information que possède chacun des joueurs par rapport à l'état du système. Cet ensemble est dit *structure d'information* du i^{me} joueur, ($1 \leq i \leq m$) et sera noté $\eta_i(t)$, pour tout $t \in \tau$. Lorsque le i^{me} joueur ne connaît

que l'état initial du système, on dira que la structure d'information est en boucle ouverte. Par contre si, celui-ci connaît aussi les variations de l'état du système durant le temps d'optimisation, on dira que la structure d'information est en boucle fermée.

Définition 3.6. (Boucle ouverte [8]) On considère un jeu différentiel à m joueurs Γ_m défini sur un horizon fini τ . On dit que le i^{me} joueur possède une structure d'information en boucle ouverte, si

$$\eta_i(t) = x_0, \forall t \in \tau.$$

Définition 3.7. (Boucle fermée [8]) On considère un jeu différentiel à m joueurs Γ_m défini sur un horizon fini τ . On dit que le i^{me} joueur possède une structure d'information en boucle fermée, si

$$\eta_i(t) = x(t), \forall t \in \tau.$$

3.3.4 Stratégies de Nash

La situation d'équilibre de Nash est le principe d'optimalité le plus utilisé et le plus étudié dans la littérature sur la théorie des jeux à plusieurs joueurs. Les concepts de base ont tout d'abord été introduits en économie par Nash pour les jeux statiques, son extension aux jeux différentiels a été faite par Isaacs [8].

Définition 3.8. [8] : Une situation $u^* = (u_1^*, \dots, u_m^*) \in U$ est dite équilibre de Nash du jeu différentiel (3.3) avec la position initiale $(t_0, x_0) \in [t_0, T] \in \mathbb{R}^n$, si pour toute stratégie $u_i \in U_i$, on a :

$$J_i(u^*) \geq J_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_m^*), \forall i \in N. \quad (3.5)$$

Proposition 3.1. [8] : Dans un jeu différentiel non coopératif à deux joueurs

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma, U_i, J_i \rangle_{i=1,2} \quad (3.6)$$

il suffit qu'un joueur utilise sa stratégie de Nash et en informe l'autre joueur pour que ce dernier puisse se trouver dans l'obligation d'utiliser sa stratégie de Nash.

Remarque 3.2. [8] Une situation d'équilibre de Nash est, d'une manière générale améliorable, i.e, il peut exister une situation $\bar{u} \in U$ telle que :

$$J_i(\bar{u}) \geq J_i(u^*), i \in \{1 \dots m\}.$$

Certains jeux différentiels n'admettent pas de situations d'équilibre de Nash. Malgré ces insuffisances, le principe d'optimalité de Nash demeure le principe le plus utilisé dans les jeux différentiels non coopératifs.

Définition 3.9. [2] : Une situation $\bar{u}_i \in U_i$ pour le i^{me} joueur est dite :

- en boucle ouverte si elle dépend du temps t et de la condition initiale x_0 .
- en boucle fermée si elle dépend de t, x, x_0 et si elle est continue en t et uniformément lipschitzienne en x pour tout $t \in \tau$.
- en feedback si elle dépend de t, x et si elle est continue en t et uniformément lipschitzienne en x pour tout $t \in \tau$.

Définition 3.10. [2] : Une situation $u^* = (u_1^*, \dots, u_m^*) \in U$ telle que

$$J_i(u^*) \geq J_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_m^*), \forall i \in N. \quad (3.7)$$

est un équilibre de Nash en :

- boucle ouverte si u_i^* est une stratégie en boucle ouverte pour tout i et si la condition (3.7) est vérifiée pour toute stratégie u_i en boucle ouverte.
- boucle fermée si u_i^* est une stratégie en boucle fermée pour tout i et si la condition (3.7) est vérifiée pour toute stratégie u_i en boucle fermée .
- feed back si u_i^* est une stratégie en feed-back pour tout i et si la condition (3.7) est vérifiée pour toute condition initiale (t_0, x_0) possible du problème (3.3).

3.3.5 Jeux différentiels à somme non nulle

Dans cette section supposons que nous avons m joueurs, $m \geq 2$. Soit $u_i \in U_i, i = 1, \dots, m$ représente la variable de contrôle pour le i^{me} joueur, où U_i est l'ensembles des contrôles dans lequel le i^{me} joueur prend ses choix [28]. Soit l'équation d'état définie comme :

$$\dot{x} = g_i(x; u_1, \dots, u_m; t). \quad (3.8)$$

Soit J_i définit par

$$J_i = S_i(x(T)) + \int_{t_0}^T f_i(x; u_1, \dots, u_m; t) dt \quad (3.9)$$

dénote la fonction objectif que le i^{me} joueur veut maximiser. Dans ce cas, la solution de Nash est définie par un ensemble U de m trajectoires admissibles,

$$U = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*\} \quad (3.10)$$

qui ont la propriété suivante :

$$J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*) = \max_{u_i \in U_i} J_i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_m^*) \quad (3.11)$$

pour $i = 1, \dots, m$

L'équilibre de Nash en boucle ouverte est défini quand (3.10) est donnée comme des fonctions de temps satisfiant (3.11). Pour obtenir les conditions du principe du maximum on définit l'hamiltonien suivant :

$$H_i = f_i + \lambda_i g$$

pour $i = 1, \dots, m$, avec λ_i satisfait,

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial H_i}{\partial x}; \\ \lambda_i(T) &= \frac{\partial S_i}{\partial x}. \end{aligned}$$

Le contrôle de Nash u_i^* pour le i^{me} joueur est obtenue en maximisant le i^{me} hamiltonien H_i par rapport à u_i , i.e, u_i^* doit satisfaire

$$H_i(x^*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i^*, u_{i+1}^*, \dots, u_m^*, \lambda, t) \geq H_i(x^*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_m^*, \lambda, t), t \in [t_0, T]. \quad (3.12)$$

pour tout $u_i \in U_i, i = 1, \dots, m$.

Jeu différentiel à deux joueurs à somme non nulle

Considérons le jeu différentiel [8]

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma, U_i, J_i \rangle_{i=1,2} \quad (3.13)$$

Le jeu est caractérisé par la donnée de :

$J_1(u_1, u_2)$:est la fonction gain (ou la fonction coût) du 1^{ier} joueur.

$J_2(u_1, u_2)$:est la fonction gain (ou la fonction coût) du 2^{me} joueur.

3.4 Conclusion

Après le développement du principe du maximum de pontryaguine, il est devenu clair qu'il y'avait un lien entre les jeux différentiels et la théorie de contrôle optimal, les problèmes des jeux différentiels représentent une généralisation de contrôle optimal dans le cas où il ya plus d'un contrôleur ou joueur [28].

Les applications de la théorie des jeux différentiels sont nombreuses en économie, aéronautique, sociologie et politique, notre objectif est justement d'essayer d'appliquer cette théorie à un problème de maintenance-production.

Chapitre 4

Problème de maintenance-production

4.1 Introduction

Dans l'industrie, les unités de production fonctionnent à plein régime et la mise en place d'une politique de maintenance préventive efficace devient cruciale pour garantir la disponibilité des équipements. Pourtant l'exécution des opérations de maintenance qu'elle nécessite entrent en conflit avec les impératifs de production puisqu'elles requièrent une immobilisation temporaire des ressources, plus précisément à cause des objectifs contradictoires qu'ils ont fixés. En effet, généralement il existe d'une part un ordonnancement de la production, destiné à satisfaire les délais exigés par les clients, et d'autre part un plan de maintenance préventive, tendant à éviter l'apparition de défaillances et à maintenir une certaine qualité des équipements.

Ces deux éléments ayant été établis séparément, l'intégration de ces deux types d'activités dans le fonctionnement effectif de l'atelier pose un problème, qui est souvent appelée problème maintenance-production. Nous proposons par conséquent un modèle intégrant les deux types d'opérations qui sera modéliser sous forme d'un jeu différentiel à deux joueurs à somme non nulle [24].

4.2 Position du problème

Considérons le département d'une entreprise responsable de la maintenance des machines de production et le département de production de la même entreprise comme son concurrent. La situation de conflit découle du faite que le processus de production réalisée par l'entreprise réduit la qualité de la production des machines. Le service de maintenance est intéressé par une haute

qualité de la machine et il dépense de l'argent pour maintenir cette qualité.

L'objectif du service de maintenance est d'équilibrer intertemporellement l'utilité instantanée de la qualité de la machine contre les dépenses de la maintenance préventive. La qualité de la machine peut être également conçu comme facteur de production dans le sens qu'une meilleure qualité de la machine provoque une augmentation des profits de production. Ainsi, le département de production déterminera une politique de production avec le compromis optimal entre le gain de production instantanée qui dépend du taux de production et la qualité d'une part, et la réduction de la qualité par cette intensité de production d'autre part.

Comme le service de maintenance dépense de l'argent pour ralentir la diminution de la qualité, il serait plausible d'obliger le service de production à payer à l'agence une certaine quantité par unité de son facteur de production "de la qualité de la machine". Le point crucial qui définit une situation de jeu est que l'état de la machine est influencé par les décisions des deux concurrents. Le problème est de déterminer le comportement intertemporel optimal des deux joueurs, où la non-coopération entre eux est supposée.

4.3 Formulation du modèle

Le point de départ du modèle de *Feichtinger* [9] est une légère extension du modèle linéaire de maintenance de *Thompson* [35] donné par *Arora* et *Lele* [3].

4.3.1 Modèle général

Soient $x(t)$ un vecteur représentant la qualité de la machine à tout instant t et $d(t)$ le taux de détérioration composé de deux éléments :

1. Taux d'obsolescence $a(t)$: qui est dû au progrès technologique, et est indépendant de la qualité de la machine.
 2. Taux de dépréciation $k(t)x(t)$: qui est dû au changement des caractéristiques physiques et à la performance de la machine, il dépend et est proportionnel à la valeur de récupération courante de la machine.
- Les dépenses de maintenance améliorent la qualité par une fonction d'efficacité $h(u)$ supposée linéaire en u par *Thompson* [35] et *Arora* et *Lele* [3] mais concave par *Hartl* [32, 31].

Evolution du taux de qualité de la machine

Considérons une variation de la qualité de la machine dans un intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, décrite par l'équation :

$$\begin{aligned} x(t, t + \Delta t) &= x(t) - a(t)x(t)\Delta t - k(t)x(t)\Delta t + h(u)\Delta t, \\ \Rightarrow x(t, t + \Delta t) - x(t) &= -a(t)\Delta t - k(t)x(t)\Delta t + h(u)\Delta t \\ \frac{x(t, t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= -a(t)x(t) - k(t)x(t) + h(u) \\ \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t, t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) &= \dot{x}(t) = -a(t) - k(t)x(t) + h(u) \end{aligned}$$

Donc le taux de variation de la qualité de la machine dans le temps est donné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = -a(t) - k(t)x(t) + h(u) \quad (4.1)$$

La qualité d'une machine signifie qu'une pièce produite par cette machine à une valeur x . Par unité de temps, p pièces sont produites (p est le taux de production) de sorte que le revenu brut égal à px diminué par les coûts de maintenance. C'est-à-dire, d'une part la firme produit $p\Delta t$ pièces de valeur $px(t)\Delta t$ dans un intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ et d'autre part, $u(t)$ est le coût de maintenance à l'instant t , donc, dans $[t, t + \Delta t]$ le coût serait égal à $u(t)\Delta t$. D'où le profit brut de l'entreprise sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, prend la forme suivante :

$$\Pi(t, u) = px(t)\Delta t - u(t)\Delta t, \quad (4.2)$$

ce qui implique que sur un horizon fini T , et en prenant en considération l'actualisation des gains futurs ainsi qu'une valeur de récupération de la machine à la date T , nous obtiendrons :

$$\max \int_0^T e^{-rt}(px(t) - u(t))dt + e^{-rT}S(x(T)) \quad (4.3)$$

où

- T : est un horizon de planification donné.
- r : un taux d'actualisation.
- $S(x)$: la valeur de récupération de la machine.
- x_0 : la qualité initiale de la machine.

A présent, le problème considéré prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \int_0^T e^{-rt} (px(t) - u(t))dt + e^{-rt} S(x(T)) \\ \dot{x} = -a - kx + h(u); \\ x(0) = x_0; \\ u \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Dans leurs analyse, les auteurs *Arora* et *Lele* [3] supposent que $k(t)$ est une fonction de temps donnée qui ne peut pas être influencée tandis que *Hartl*, [32, 31] introduit la vitesse de fonctionnement de la machine comme un deuxième paramètre de contrôle réduisant la qualité avec un taux $k(v)$ [9]. Donc, faire fonctionner la machine avec une intensité v et dépenser u comme coûts de maintenance fournit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = -a - k(v)x + h(u) \quad (4.5)$$

En remplaçant dans (4.3) la fonction p par la variable de contrôle v , la valeur actuelle du revenu net est donnée par :

$$\max \int_0^T e^{-rt} (v(t)x(t) - u(t))dt + e^{-rt} S(x(T)) \quad (4.6)$$

La structure de ce modèle de contrôle optimal peut être récapitulée comme suit :

- ✓ L'état du modèle peut être amélioré par un paramètre de contrôle $u(t)$, qui cause des coûts et est réduit par un autre paramètre $v(t)$, qui rapporte un taux de bénéfice.
- ✓ Le but est de déterminer les niveaux optimaux de ces paramètres dans le temps d'une manière à maximiser la valeur actuelle du revenu.

Étant donnée la qualité initiale $x(0) = x_0$, le problème de contrôle optimal est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \int_0^T e^{-rt} (v(t)x(t) - u(t))dt + e^{-rt} S(x(T)) \\ \dot{x} = -a - k(v)x + h(u); \\ u \geq 0; \\ v \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

4.3.2 Modèle sous forme d'un jeu différentiel à deux joueurs

Supposons maintenant deux preneurs de décision au lieu d'un seul. Cette situation peut être représentée par un jeu à deux joueurs qui se déroulera dans un intervalle de temps fixé $[0, T]$ [9]. Le premier joueur représente le responsable de la maintenance préventive de la machine considérée, tandis que le deuxième joueur représente le responsable de la production d'un bien en exécutant cette machine. Soient $x(t)$ une variable représentant l'état de la machine, $u_1(t)$ la variable de contrôle du premier joueur responsable de la maintenance et $u_2(t)$ la variable de contrôle du deuxième joueur responsable de la production.

Pour définir l'équation d'état nous supposerons sans perte de généralités les propriétés suivantes :

Propriétés de la fonction d'efficacité

La fonction d'efficacité h vérifie les propriétés d'*Inada* [22] :

✓ h est strictement croissante :

$$h'(u_1) > 0, \quad \text{pour} \quad u_1 > 0. \quad (4.8)$$

✓ h est strictement concave :

$$h''(u_1) < 0 \quad \text{pour} \quad u_1 > 0. \quad (4.9)$$

✓ et :

$$h(0) = 0, \quad h(u_1) > 0. \quad (4.10)$$

$$\lim_{u_1 \rightarrow 0} h'(u_1) = \infty, \quad \lim_{u_1 \rightarrow \infty} h'(u_1) = 0. \quad (4.11)$$

Les conditions d'*Inada* sont des conditions aux bornes qui garantissent l'existence d'une solution [27].

Propriétés de la fonction détérioration ([9])

Le taux de détérioration causé par le taux de production u_2 est une fonction convexe

$$k(0) = 0, \quad k(u_2) > 0. \quad (4.12)$$

✓ k est strictement croissante :

$$k'(u_2) > 0, \quad \text{pour } u_2 > 0 \quad (4.13)$$

✓ k est strictement convexe :

$$k''(u_2) > 0 \quad \text{pour } u_2 > 0 \quad (4.14)$$

✓

$$k'(0) = 0, \quad \lim_{u_2 \rightarrow \infty} k'(u_2) = \infty \quad (4.15)$$

Ainsi, l'équation d'état décrivant le comportement dynamique du jeu est donnée par :

$$\dot{x}(t) = h(u_1(t)) - k(u_2(t))x(t) \quad (4.16)$$

Remarque 4.1. *Sans perte de généralité, pour une simplicité, on a posé $a = 0$.*

Fonctions objectifs des deux joueurs

L'état initial de la machine $x(0) = x_0$ est supposé donné.

► Pour le 1^{er} joueur

L'objectif du 1^{er} joueur est de garantir une qualité maximale de la machine en prenant en considération les coûts de maintenance [9].

On suppose une répartition linéaire de la qualité.

Notons par $q_1 > 0$ l'utilité du 1^{er} joueur par unité de qualité. Son indice de performance est donné par :

$$J_1 = \int_0^T e^{-r_1 t} (q_1 x(t) - u_1(t)) dt + e^{-r_1 T} S_1(x(T)) \rightarrow \max \quad (4.17)$$

où r_1 est le taux d'actualisation non négatif du joueur 1 et S_1 la valeur de récupération d'une unité de qualité de la machine à la fin du jeu.

► **Pour le 2^{me} joueur**

Le rendement obtenu par le 2^{me} joueur dépend de l'état de la machine. Puisque par unité de temps, $u_2(t)$ pièces sont produites et une pièce produite par cette machine à une valeur $x(t)$ à l'instant t . La quantité $u_2(t)x(t)$ est le revenu brut du 2^{me} joueur à la période t [9]. Soit, en outre q_2 le montant qui doit être payé par le producteur à l'équipage de maintenance pour une unité de qualité. Puisque le 1^{er} joueur doit dépenser u_1 comme coût de maintenance pour fournir une certaine qualité, il paraît raisonnable qu'il récupère ces coûts au moins partiellement de son concurrent [9].

Pour inclure q_2 , q_1 devra vérifier :

$$q_1 = q_2 + \delta, \quad \text{avec} \quad \delta > 0, \quad (\delta = cst) \quad (4.18)$$

Remarque 4.2. *Notons qu'en cas $q_2 = 0$ le 2^{me} joueur, remporte seulement le profit résultant du processus de production.*

La fonction objectif du producteur est la valeur actuelle du revenu net donnée par [9] :

$$J_2 = \int_0^T e^{-r_2 t} (u_2 x(t) - q_2 x(t)) dt + e^{-r_2 T} S_2(x(T)) \rightarrow \max \quad (4.19)$$

où r_2 est le taux d'actualisation non négatif du joueur 2 et S_2 est la valeur de récupération d'une unité de qualité de la machine à la fin du jeu.

Le but des joueurs est de maximiser J_1 et J_2 respectivement. Sujet de la restriction dynamique (4.16) et les contraintes de non négativité $u_1 > 0$, $u_2 > 0$.

Remarque 4.3. ✓ *Noter que le 1^{er} joueur contrôle les dépenses de maintenance $u_1(t)$, tandis que le producteur (2^{me} joueur) maximise J_2 en ce qui concerne le taux de production $u_2(t)$.*
 ✓ *Le dilemme de décision surgit parce que l'intensité de production ainsi que la qualité de la machine fournit un gain instantané mais cause d'autre part une réduction de la qualité. Ceci a pour résultat un jeu différentiel à deux joueurs, à somme non nulle avec $x(t)$ comme variable d'état, le taux des dépenses de maintenance préventive et le taux de production comme paramètre de contrôle du joueur 1 et 2 respectivement.*
 ✓ *Puisque u_j est absent dans J_i pour $j \neq i$, avec $i = \{1, 2\}$ et $j = \{1, 2\}$, la décision du concurrent influence indirectement la fonction d'utilité du joueur.*

4.4 Equations différentielles pour un équilibre de Nash

Il est bien connu que le concept de solution des jeux différentiels à somme non nulle est ambigu. Puisque la possibilité semble irréaliste que les joueurs ne coopèrent pas, l'équilibre de Nash en boucle ouverte sera un concept approprié de solution pour notre jeu de maintenance [9].

Pour tous les trajectoires admissibles du contrôle u_i , ($i = 1, 2$), aucun joueur n'a intérêt à dévier de son contrôle de Nash unilatéralement puisqu'il ne peut pas améliorer son gain par une telle déviation .

4.4.1 Etapes de résolution du problème

L'objectif est de construire les conditions nécessaires d'optimalité. nous développons la solution du problème à travers les étapes suivantes :

Etape 1 : *Hamiltonien*

Les solutions de Nash candidates en boucle ouverte sont données par les conditions nécessaires suivantes, formulées au moyen des hamiltoniens des deux joueurs. Notons par

$$\tilde{H}_1 = q_1x - u_1 + \psi_1[h(u_1) - k(u_2)x] \quad (4.20)$$

$$\tilde{H}_2 = -q_2x + u_2x + \psi_2[h(u_1) - k(u_2)x] \quad (4.21)$$

la valeur courante hamiltonienne des joueurs 1 et 2 respectivement.

Etape 2 : *Etat adjoint*

La variable adjoint $\psi_i(t)$ mesure la sensibilité des bénéfices à une petite perturbation dans l'état, en économie le multiplicateur ψ est interprété comme un prix virtuel (shadow price). Ainsi le i^{me} joueur attribue un prix virtuel à la qualité de l'environnement.

$\psi_i(t)$ satisfait l'équation adjointe $\dot{\psi}_i = r_i\psi_i - \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial x}$. Pour ($i = 1, 2$), on obtient

$$\dot{\psi}_1 = \psi_1[r_1 + k(u_2)] - q_1 \quad (4.22)$$

$$\dot{\psi}_2 = \psi_2[r_2 + k(u_2)] - u_2 + q_2 \quad (4.23)$$

Puisque nous limitons notre analyse aux solutions de Nash en boucle ouverte (données comme fonctions du temps seulement et pas de l'état). C'est la forme spéciale des hamiltoniens qui rend l'analyse suivante possible.

Etape 3 : Condition de transversalité

On à T est fixe et $x(T)$ est libre, d'après la formule (2.14) (type 3), on à

$$\left(\frac{\partial S_i}{\partial x} - \psi_i(t)\right)_T = 0$$

Alors la condition de transversalité sera donnée par

$$\psi_i(T) = S_i x(T), \quad i = 1, 2. \quad (4.24)$$

Etape 4 : Condition d'optimalité

Selon le principe du maximum, le contrôle optimal du joueur 1 maximise son hamiltonien à chaque instant [9]. Sous la supposition additionnelle

$$\lim_{u_1 \rightarrow 0} h'(u_1) = \infty \quad (4.25)$$

$u_1 = 0$ peut être exclu comme suboptimal, et la condition du premier ordre pour un maximum, $\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow -1 + \psi_1 h'(u_1) = 0$ ce qui donne,

$$\psi_1 = [h'(u_1)]^{-1}. \quad (4.26)$$

Le prix virtuel de la qualité de la machine attribué par l'agence gouvernementale est simplement réciproque à l'efficacité marginale des dépenses de maintenance. D'une manière analogue, la condition du première ordre pour un maximum intérieur de $\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow x - \psi_2 k'(u_2)x = 0$, et sous l'hypothèse

$$k'(0) = 0 \quad (4.27)$$

on aura la condition nécessaire suivante

$$\psi_2 = [k'(u_2)]^{-1}. \quad (4.28)$$

pour le producteur.

Etape 5 : Equations d'état

Notons que les prix virtuel des deux joueurs sont non négatifs .

Pour éliminer les variables adjoints, on dérive (4.26) et (4.28) par rapport au temps et on obtient

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{h''}{h'^2} \dot{u}_1, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{k''}{k'^2} \dot{u}_2 \quad (4.29)$$

En remplaçant (4.29) dans les équations (4.22) et (4.23) respectivement, nous obtenons le système des équations différentielles non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{h'(u_1)}{h''(u_1)} [q_1 h'(u_1) - k(u_2) - r_1]; \\ \dot{u}_2 = \frac{k'(u_2)}{k''(u_2)} [(u_2 - q_2)k'(u_2) - k(u_2) - r_2]. \end{cases} \quad (4.30)$$

Les trajectoires $\{u_1^*, u_2^*\}$, candidates pour être solution optimal de Nash en boucle ouverte doivent satisfaire le système d'équations différentielles non linéaire (4.30).

La possibilité de dériver un système d'équations différentielles pour les variables de contrôle optimal dépend essentiellement de la linéarité du problème dans la variable d'état aussi bien que sur la structure spéciale des Hamiltoniens [9].

Les conditions finales du système (4.30) sont obtenues à partir des conditions de transversalité (2.14) et le principe du maximum (4.26) et (4.28)

$$h'(u_1(T)) = S_1^{-1}, \text{ et } k'(u_2(T)) = S_2^{-1} \quad (4.31)$$

En raison de $h'(u_1) > 0$, $k'(u_2) > 0$ pour $u_2 > 0$ et les conditions (4.25) et (4.27), le système (4.30) est soluble uniquement pour une paire (S_1, S_2) tel que $S_i \geq 0$ ($i = 1, 2$) de plus les relations (4.11) et (4.15) sont vérifiées.

Les solutions $\{u_1(T), u_2(T)\}$ de (4.30) sont les valeurs finales de contrôle optimal des deux joueurs.

Remarque 4.4. Notons que $u_i(T)$ ne dépend pas de $u_j(T)$ pour $i \neq j$ et $i = 1, 2$

D'ailleurs, puisque \dot{u}_2 dans (4.30) ne contient pas u_1 , la politique optimale du 2^{me} joueur ne dépend pas du comportement de son concurrent. D'autre part, la solution optimale de Nash du 1^{ier} joueur n'est pas indépendante du contrôle du 2^{me} joueur. Ainsi, le 1^{er} joueur choisit son équilibre non coopératif à l'égard de la politique de producteur, tandis que le 2^{me} joueur produit sans prendre en compte les efforts du département de maintenance.

4.5 Résolution du modèle

Dans les problèmes de contrôle optimal les plus simples, nous avons une équation de \dot{u} et la variable d'état adjoint, $\dot{\psi}$. Mais dans d'autres cas nous pourrions avoir deux variables d'état. Sans résoudre explicitement, pour un temps entier, les trajectoires des deux variables de contrôle, nous

pouvons nous apprendre énormément une partie sur la nature des deux variables du système en utilisant ce qu'est appelé "Diagramme de Phase" [37].

4.5.1 Diagramme de phase

Définition 4.1. [37] Un diagramme de phase présente les équilibres, la stabilité et l'évolution dynamique d'un système. Il permet de représenter graphiquement la dynamique d'un système différentielle d'ordre 1 (ne comprenant qu'une dérivée première de la fonction), on trace la courbe de $\dot{u} = f(u)$ dans le repère orthogonal (\dot{u}, u) .

Remarque 4.5. [37] Le diagramme de phase est approprié seulement si on a deux équations différentielles autonomes (indépendantes de t).

Exemple 4.1. [37] Un exemple d'un diagramme de phase est montré ci-dessous.

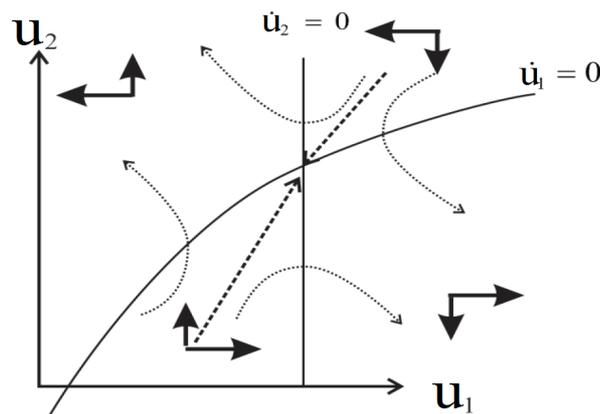


FIG. 4.1 – Exemple d'un diagramme de phase

Le type de d'équilibre représenté ici est connu sous le nom de point-selle et il est fréquemment rencontré dans les modèles économiques.

- Les lignes continues s'appellent les isoclines, indiquant que le long de ces lignes il n'y a aucune pression directe pour qu'une variable change, $\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0$.
- L'équilibre se produit lorsque les isoclines se croisent, où les deux variables ne changent pas.
- Les lignes discontinues se dirigeant vers l'équilibre s'appellent les séparatrices puisqu'elles séparent l'espace telles que aucune trajectoire ne croise jamais ces lignes.
- Les lignes pointillées décrivent les trajectoires représentatives et non pas les séparatrices.

Notons que, quand une trajectoire croise une isocline sa pente est conformée à l'isocline. Par exemple, la trajectoire droite inférieure est horizontale au point où elle croise l'isocline $\dot{u}_2 = 0$.

Comme il est dit précédemment, on utilise le diagramme de phase pour identifier l'équilibre, mais il est également souvent intéressant de connaître le comportement des variables autour de cet équilibre, par exemple si u_1 et u_2 tendent vers l'équilibre ou s'éloignent de cet équilibre.

Analyse de la nature de l'équilibre dans les systèmes d'équations différentiels

La nature de l'équilibre d'un système d'équations différentielles peut être déterminé en regardant les valeurs propres du système. Considérons un système d'équations différentielles prenant la forme suivant : $\dot{u} = Ju$ après linéarisation [37].

où J est la matrice jacobien.

En fonction des valeurs propres λ , on peut déterminer si le système est stable (convergeant vers l'équilibre) ou instable. Notons que :

- **Condition 1** : Un système a un équilibre stable, si et seulement, si ses valeurs propres sont des parties réelles négatives.
- **Condition 2** : Un point selle se produit, si et seulement, si le déterminant de J est négatif.
- **Condition 3** : Une condition suffisante pour l'instabilité est que la trace de J soit négative ($\lambda_1 + \lambda_2 < 0$) ou si le déterminant de J est positive.

Approche pour analyser les systèmes des équations différentielles

Voici les étapes à suivre pour analyser la dynamique d'un système de deux équations différentielles. Il y a une variété d'approches pour dessiner les diagrammes de phase ; voici une manière qui paraît tout à fait intuitive et qui aide à éviter des erreurs négligentes [37].

1. Trouver une forme réduite pour les expressions \dot{u}_1 et \dot{u}_2 en termes seulement de u_1 et u_2 et les paramètres exogènes. Toutes autres variables doivent être éliminées des équations ou supposées être constantes.
2. Résoudre les inégalités $\dot{u}_1 \geq 0$ et $\dot{u}_2 \geq 0$. On devrait nous retrouver avec deux inégalités en termes de u_1 et u_2 qui, si satisfaites, ça signifie que $\dot{u}_1 \geq 0$ et $\dot{u}_2 \geq 0$.
3. Trouver les équilibres : les valeurs de u_1 et de u_2 tels que $\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0$.
4. Représenter graphiquement les isoclines, c-à-d. des fonctions $\dot{u}_1 = 0$ et $\dot{u}_2 = 0$ dans le plan (u_1, u_2) .

5. En utilisant les inégalités trouvées en 2, déterminer la trajectoire pour u_1 et u_2 de chaque côté des isoclines. C'est-à-dire, sur quel côté des isoclines les variables sont croissantes ($\dot{u}_1 > 0$ et $\dot{u}_2 > 0$) et où elles sont décroissantes ($\dot{u}_1 < 0$ et $\dot{u}_2 < 0$). Il est plus facile si on effectue les étapes 4 et 5 séparément pour chaque isocline avant de les mettre ensemble sur le même plan.
6. Faire une approximation linéaire de la dynamique du système dans le voisinage de chaque équilibre et l'exprimer comme une matrice de la forme $\dot{u} = Ju$.
7. Vérifier si l'une des trois conditions citées précédemment sont satisfaites. Alors, au besoin, trouver les valeurs propres de système des équations et, évaluer la stabilité du système.

4.5.2 Analyse du Diagramme de Phase

Pour en tirer des idées structurelles dans les solutions optimales de Nash, nous calculons le point d'équilibre du système (4.30). D'abord nous prouvons les résultats simples suivants :

Lemme 4.1. [9] *Il existe toujours une solution d'équilibre :*

$$\Phi_2(u_2) = (u_2 - q_2)k'(u_2) - k(u_2) - r_2 = 0 \quad (4.32)$$

pour les valeurs non négatives de u_2 .

pour $r_2 > 0$: cette solution disons \hat{u}_2 , est positive et unique.

pour $r_2 = 0$ et $q_2 > 0$, (4.32) est résolu par $u_2 = 0$ et $u_2 = \hat{u}_2 > q_2$.

pour $r_2 = 0$ et $q_2 \leq 0$, l'unique solution est zéro.

Preuve. nous avons,

$$\Phi_2'(u_2) = (u_2 - q_2)k''(u_2) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad \text{pour} \quad u_2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} q_2 \quad (4.33)$$

et selon (4.11) et (4.14)

$$\Phi_2(0) = -r_2 \leq 0 \quad (4.34)$$

$$\lim_{u_2 \rightarrow +\infty} \Phi(u_2) = \infty \quad (4.35)$$

Ce qui nous a permet de tracer le tableau de variation suivant :

u_2	0	q_2	$+\infty$
$\Phi'_2(u_2)$	-		+
		0	
$\Phi_2(u_2)$	$-r_2$		$+\infty$
	\searrow	$-k(u_2) - r_2$	\nearrow

TAB. 4.1 – Tableau de variation de Φ_2 .

D'après le tableau de variation ci-dessus la preuve du lemme découle. Noter que \hat{u}_2 , solution positive de (4.32) satisfait :

$$\hat{u}_2 > q_2 \tag{4.36}$$

ainsi, l'isocline

$$\dot{u}_2 = 0 \Leftrightarrow \Phi_2(u_2) = 0 \tag{4.37}$$

du système (4.30) est horizontal et coupe l'axe u_2 au point $(0, \hat{u}_2)$, où \hat{u}_2 est une solution maximale non négative de(4.32).

Lemme 4.2. [9] L'isocline

$$\dot{u}_1 = 0 \Leftrightarrow q_1 h'(u_1) - k(u_2) - r_1 = 0 \tag{4.38}$$

est inclinée vers le bas et se rapproche de l'axe des ordonnées asymptotiquement. Si $r_1 > 0$, elle coupe l'abscisse au point $(\tilde{u}_1, 0)$, où \tilde{u}_1 est positif et est fourni par :

$$h'(\tilde{u}_1) = r_1 q_1^{-1} \tag{4.39}$$

Dans le cas où $r_1 = 0$, l'axe u_1 est une asymptote pour $\dot{u}_1 = 0$

Preuve. soient :

$$\Phi_1 = q_1 h'(u_1) - k(u_2) - r_1 \tag{4.40}$$

$$\Phi'_1 = q_1 h''(u_1) < 0 \tag{4.41}$$

et Selon (4.11)

$$\Phi_1(0, u_2) = +\infty \quad (4.42)$$

$$\lim_{u_1 \rightarrow +\infty} \Phi_1 = -r_1. \quad (4.43)$$

Ce qui nous a permet de tracer le tableau de variation suivant :

u_1	0	$+\infty$
Φ'_1		-
Φ_1	$+\infty$	$-r_1$

TAB. 4.2 – Tableau de variation de Φ_1 .

La fonction Φ_1 s'annule au point \tilde{u}_1 ζ -à-d :

$$q_1 h'(\tilde{u}_1) - k(u_2) - r_1 = 0 \quad (4.44)$$

$$\Rightarrow q_1 h'(\tilde{u}_1) - k(0) - r_1 = 0 \quad (4.45)$$

$$\Rightarrow q_1 h'(\tilde{u}_1) - r_1 = 0 \quad (4.46)$$

$$\Rightarrow h'(\tilde{u}_1) = r_1 q_1^{-1} \quad (4.47)$$

Proposition 4.3. [9] Dans le cas où, $r_2 > 0$ et $r_2 = 0$, $q_2 > 0$ il existe un unique équilibre (\hat{u}_1, \hat{u}_2) du système (4.30) à l'intérieur du premier quadrant du plan (u_1, u_2) étant un noeud instable.

pour $r_2 = 0$, $q_2 \leq 0$ il y a un seul point stationnaire à l'axe u_1 (dans le cas $r_1 > 0$) ou un équilibre infini (dans le cas où $r_1 = 0$).

Preuve. Soit u_2 la solution maximale non négative de (4.32) (voir le lemme 4.1). Remplaçant u_2 par \hat{u}_2 ($u_2 = \hat{u}_2$) dans (4.38), on obtient

$$h'(u_1) = [k(\hat{u}_2) + r_1]q_1^{-1} \quad (4.48)$$

D'après le lemme 4.2 il existe un unique point stationnaire (\hat{u}_1, \hat{u}_2) de (4.30) déterminé comme point de croisement des isoclines (4.37) et (4.38) excepté dans le cas $r_2 = 0$, $q_2 \leq 0$, $r_1 = 0$, où les isoclines s'approchent asymptotiquement.

Pour $r_2 > 0$ et $r_2 = 0$, $q_2 > 0$, (\hat{u}_1, \hat{u}_2) est à l'intérieure de la première région du plan de phase.

Pour $r_2 = 0$, $q_2 \leq 0$ mais $r_1 > 0$ l'équilibre se trouve a l'abscisse, c'est $(\tilde{u}_1, 0)$.

Dans le cas où $r_1 > 0$, $r_2 = 0$, $q_2 > 0$ il existe deux équilibres à savoir (\hat{u}_1, \hat{u}_2) et $(\tilde{u}_1, 0)$.

Ces résultats sont récapitulés dans le tableau suivant :

	$r_2 > 0$	$r_2 = 0$	$r_1 > 0$	$r_1 = 0$
$q_2 > 0$	$u_2 = \hat{u}_2$	$u_2 = 0$ $u_2 = \hat{u}_2$	$u_1 = \hat{u}_1$	Asymptote \tilde{u}_1
$q_2 \leq 0$	$u_2 = \hat{u}_2$	un point stationnaire à l'axe u_1 ou un équilibre infini	$u_1 = \tilde{u}_1$	Asymptote

TAB. 4.3 – Tableau récapitulatif des résultats précédent.

Détermination du point d'équilibre

Pour ce faire en doit d'abord représenter graphiquement les isoclines $\dot{u}_1 = 0$ et $\dot{u}_2 = 0$. En utilisant le résultat démontré du lemme 4.1, l'isocline $\dot{u}_2 = 0$ sera représentée comme suit :

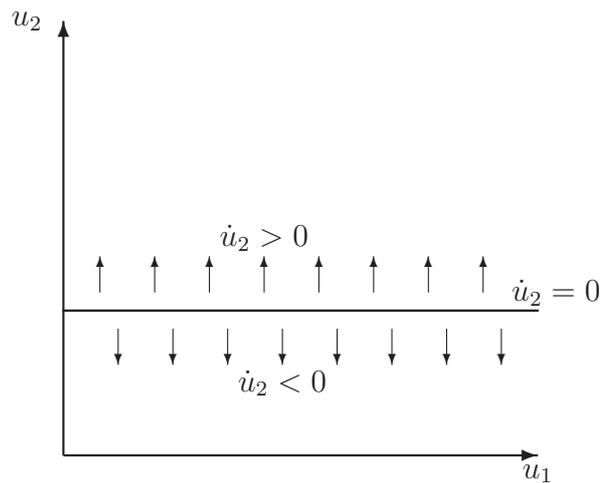


FIG. 4.2 – Représentation graphique de l'isocline $\dot{u}_2 = 0$.

En utilisant le résultat démontré du lemme 4.2, l'isocline $\dot{u}_1 = 0$ sera représentée comme suit :

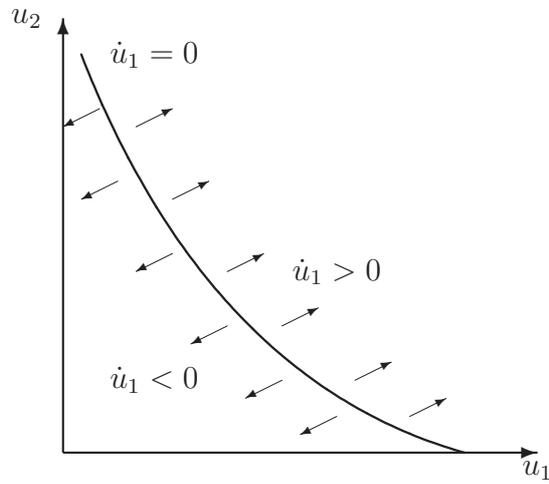


FIG. 4.3 – Représentation graphique de l'isocline $\dot{u}_1 = 0$.

En mettant les deux graphes ensemble on aura :

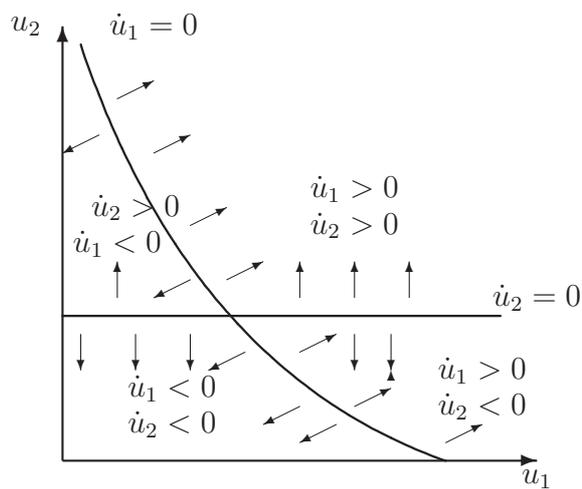


FIG. 4.4 – Représentation graphique $\dot{u}_1 = 0$ et $\dot{u}_2 = 0$ sur le même plan.

Ce dernier nous permettra d'identifier quatre régions dans le premier quart du plan (u_1, u_2) qui sont subdivisées par les isoclines $\dot{u}_1 = 0$ et $\dot{u}_2 = 0$, à savoir :

- Région I où $\dot{u}_1 < 0$ et $\dot{u}_2 > 0$.
- Région II où $\dot{u}_1 > 0$ et $\dot{u}_2 < 0$.
- Région III où $\dot{u}_1 > 0$ et $\dot{u}_2 > 0$.
- Région IV où $\dot{u}_1 < 0$ et $\dot{u}_2 < 0$.

qui seront représentées dans le graphe suivant :

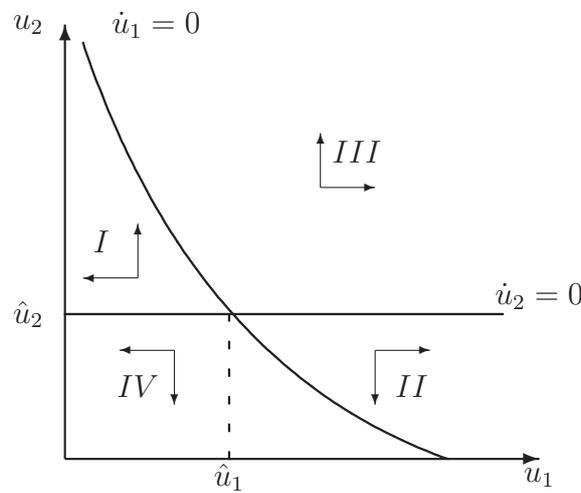


FIG. 4.5 – Les quatre régions définies par $\dot{u}_1 = 0$ et $\dot{u}_2 = 0$.

Le point d'équilibre donc est (\hat{u}_1, \hat{u}_2) .

Propriétés de stabilité du point d'équilibre

Pour déterminer les propriétés de stabilité du point stationnaire (\hat{u}_1, \hat{u}_2) appartenant à l'intérieur du première quart, nous calculons d'abord la matrice jacobien du système (4.30) au point d'équilibre (\hat{u}_1, \hat{u}_2) .

La matrice jacobienne J donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

A l'équilibre les dérivées partielles précédentes seront simplifiées, à l'aide des résultats (4.31) et (4.38) du lemme 4.1 et lemme 4.2 respectivement, ainsi :

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial u_1} \Big|_{(\hat{u}_1, \hat{u}_2)} = q_1 h'(\hat{u}_1), \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial u_2} \Big|_{(\hat{u}_1, \hat{u}_2)} = \frac{h'(\hat{u}_1)}{h''(\hat{u}_1)} k''(\hat{u}_2), \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial u_1} \Big|_{(\hat{u}_1, \hat{u}_2)} = 0, \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial u_2} \Big|_{(\hat{u}_1, \hat{u}_2)} = (\hat{u}_2 - q_2) k'(\hat{u}_2). \quad (4.53)$$

d'où, le déterminant Jacobien du système (4.30) évalué à l'équilibre (\hat{u}_1, \hat{u}_2) est positif :

$$\Delta(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial u_2} \\ 0 & \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \Big|_{(\hat{u}_1, \hat{u}_2)} = q_1 h'(\hat{u}_1) (\hat{u}_2 - q_2) k'(\hat{u}_2) > 0 \quad (4.54)$$

Ainsi, (\hat{u}_1, \hat{u}_2) est un noeud instable, comme mentionné avant, l'équilibre à l'intérieur est unique.

Remarque 4.6. ([9]) Dans le cas où $r_1 > 0$, $r_2 = 0$, $q_2 > 0$ le déterminant de la matrice Jacobien évaluée dans le deuxième équilibre $(\tilde{u}_1, 0)$ est nul :

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial u_1} \Big|_{(\tilde{u}_1, 0)} = q_1 h'(\tilde{u}_1) - r_1 = 0, \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial u_2} \Big|_{(\tilde{u}_1, 0)} = \frac{h'(\tilde{u}_1)}{h''(\tilde{u}_1)} k''(0), \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial u_1} \Big|_{(\tilde{u}_1, 0)} = 0, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial u_2} \Big|_{(\tilde{u}_1, 0)} = 0. \quad (4.58)$$

$$\Delta(\tilde{u}_1, 0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial u_2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Big|_{(\tilde{u}_1, 0)} = 0 \quad (4.59)$$

Dans le cas général, on aura trois points stationnaires additionnels. On peut montrer, que $(0, 0)$ est un noeud stable, tandis que $(0, \hat{u}_2)$ et $(\tilde{u}_1, 0)$ sont des points selle. Cependant, puisque le comportement qualitatif de la solution de Nash n'est pas influencé par ces équilibres de frontière, nous analysons le cas général des fonctions d'efficacité concaves et convexes. Puisque le coût de maintenance et le taux de production ne peuvent pas être négatifs, alors on ne considérera que le premier quart du plan (u_1, u_2) qui est subdivisé en quatre régions (I-IV) par les isoclines

(4.37) et (4.38). Selon (4.54) toutes les trajectoires s'éloignent de l'équilibre instable (\hat{u}_1, \hat{u}_2) . Le comportement de l'équilibre de Nash est différent dans les quatre régions. En utilisant ces résultats, le plan de phase (u_1, u_2) est récapitulé dans le graphe suivant :

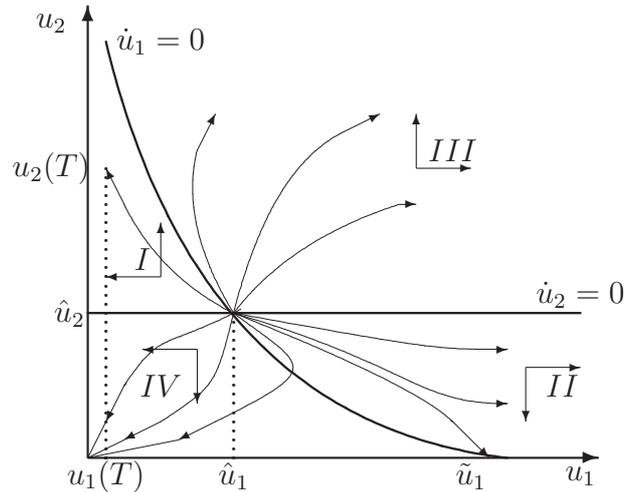


FIG. 4.6 – Diagramme de phase défini par $\dot{u}_1 = 0$ et $\dot{u}_2 = 0$.

4.6 Quelques résultats

Selon (4.31) la valeur terminale $u_i(T)$ est donnée par $S_i, i = \{1, 2\}$. Les trajectoires éventuelles du contrôle optimal sont données dans le tableau suivant :

	$u_1(t)$	$u_2(t)$	Région
$S_1 = \infty$ $S_2 = 0$	$u_1(T) = \infty$	$u_2(T) = \infty$	III
S_1 très grand mais fini S_2 très petit mais supérieure à 0	$u_1(T)$ très grand mais fini tel que : $u_1(T) > \hat{u}_1$	tel que : $u_2(T) > \hat{u}_2$	III
$S_1 = \epsilon_1$ $S_2 = \epsilon_2$ $\epsilon_i > 0, i = 1, 2$	$u_1(T)$ très petit $u_1^*(t)$ décroît d'une manière monotone	$u_2(T)$ très grand $u_2^*(t)$ croît d'une manière monotone	I
S_1 très grand S_2 très grand	$u_1^*(t)$ croît d'une manière monotone	$u_2^*(t)$ décroît d'une manière monotone	II
S_1 très petit S_2 très grand	$u_1(t)$ décroît d'une manière monotone	$u_2(t)$ décroît d'une manière monotone	IV

TAB. 4.4 – Tableau des trajectoires du contrôle optimal selon les valeurs de récupération.

- ✓ Pour des valeurs intermédiaires de S_1 , le taux des dépenses de maintenance $u_1^*(t)$ évolue d'une manière non monotone au fil du temps (T est suffisamment grand).
- ✓ Pour des grands valeurs de S_2 , $u_1^*(t)$ croît d'une façon monotone jusqu'à ce qu'il atteigne la valeur maximal en $\dot{u}_1 = 0$ et décroît ensuite.
- ✓ Pour des petits valeurs de S_2 , la partie décroissante de la trajectoire u_1^* précède la partie croissante.

Remarque 4.7. • *La longueur des trajectoires dépend de la durée du jeu différentiel T .*

- *Notons que le taux de production optimal est toujours monotone, croît pour des petits valeurs de S_2 et décroît pour des grands valeurs de S_2 .*
- *Dans le cas où l'équipe de maintenance est intéressée par une qualité final élevée de la machine, alors que le producteur n'évalue pas positivement l'état final de la machine alors les dépenses de maintenance et les taux de production croissent d'une façon monotone :*

$$u_1^*(t) > 0, \quad u_2^*(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

4.7 Conclusion

Jusqu'à présent seulement peu de classes des jeux différentiels qui sont solubles puisqu'ils tiennent compte de la caractérisation qualitative de leurs solutions ont été isolées dans l'océan des jeux différentiels à somme non nulle. Pour le progrès de la théorie des jeux différentiels et ses applications il serait intéressant de formuler les situations concurrentielles dynamiques dont les solutions pourraient être soit déterminées analytiquement ou au moins caractérisées qualitativement [9]. Le modèle traité précédemment fournit un exemple d'un jeu différentiel qualitativement soluble dans le cas de deux joueurs où la solvabilité dépend du système de deux équations différentielles qui est satisfait par l'équilibre non coopératif de Nash en boucle ouverte . Le comportement qualitatif de ces solutions est analysé par le diagramme de phase .

Chapitre 5

Adaptation du Modèle au Cas de l'entreprise IFRI

5.1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'amener le modèle défini dans le chapitre précédent au cas réel en l'appliquant à la ligne *COMBI 20* de l'entreprise IFRI. Cette application sera réalisée à travers deux étapes, la première consiste à définir les différentes fonctions du modèle à l'aide de l'historique de l'entreprise (de 2010 à 2015) et en utilisant le logiciel MATLAB, tandis que la deuxième étape est consacrée à la détermination d'un équilibre entre les coûts de maintenance préventive et le taux de production, cela nous donnerons la possibilité d'obtenir un aperçu qualitatif sur les trajectoires à suivre en fonction de la valeur de récupération de la production et celle de la maintenance désirée par l'entreprise si la fin de la durée de vie de la ligne est estimée à 2020.

Les résultats obtenus et les propositions données sont déduits en analysant le diagramme de phase.

5.2 Identification des différents paramètres du modèle

Cette étape consiste à procéder à une identification précise des données nécessaires, puis les collecter. Il est très important de distinguer les paramètres et les fonctions qui définissent notre modèle, pour ce faire nous nous sommes basées sur l'historique de l'entreprise, de 2010 jusqu'à 2015.

5.2.1 Taux de production

Le taux de production est défini comme suit :

$$\text{Taux de production} = \frac{\text{Réalisation de production}}{\text{Objectif de production}}$$

Les taux de production collectés au sein de l'entreprise sont donnés dans le tableau suivant :

Années (t)	Taux de production
2015	70.53 %
2014	72 %
2013	73.36 %
2012	73.62 %
2011	71.56 %
2010	71.48 %

TAB. 5.1 – Taux de production

5.2.2 Coûts de maintenance

Dans notre étude nous considérons que les coûts de maintenance préventive sont égaux aux coûts de pièces de rechange (coûts techniques) et les frais du personnel. Ces coûts sont donnés dans le tableau suivant :

Années	Coût de pièces de rechange	Frais du personnel	Coûts total de maintenance
2015	37014403 DA	12649910 DA	49664313 DA
2014	12477757 DA	79730265 DA	92208022 DA
2013	49584965 DA	68520371 DA	118105336 DA
2012	38927203 DA	60824917 DA	99752120 DA
2011	30219611 DA	55114787 DA	85334398 DA
2010	24542295 DA	55368050 DA	79910345 DA

TAB. 5.2 – Coûts de maintenance

Le graphe représentatif des variations de ces coûts à travers les six dernières années est donné dans la figure ci-dessous :

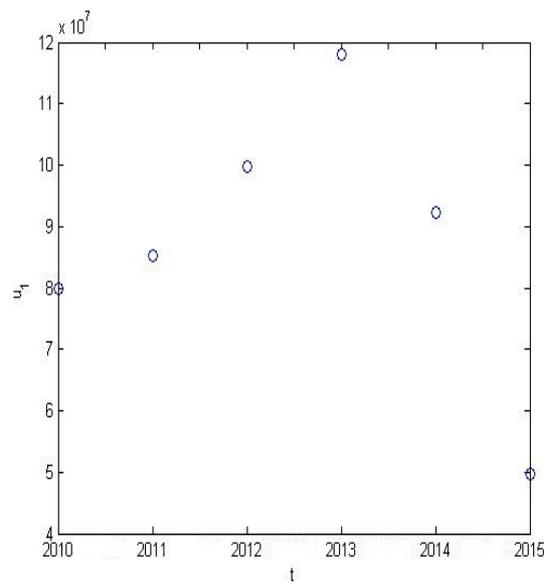


FIG. 5.1 – Représentation de la fonction de maintenance.

La figure (5.1) montre bien que les dépenses de maintenance augmentent jusqu'à atteindre plus de cents millions en 2013 puis ils diminuent, cela est dû aux coûts de pièce de rechange utilisée ainsi que aux frais du personnel.

5.2.3 Fonction de dépréciation

La dépréciation est la constatation de la dégradation de la valeur d'un élément résultant de l'usage, du temps, de changement technique et de toute autre cause.

Quels sont les indices de perte de valeur ?

- dégradation physique du bien,
- baisse des performances,
- diminution de la valeur de marché.

Vu le manque de données, nous avons essayé de déterminer cette fonction à l'aide juste des trois dernières années et nous avons considéré que la dépréciation de la ligne est due uniquement à sa dégradation physique. Cette dégradation est mesurée par le taux de pannes suite aux effets d'usure et de l'environnement.

Le tableau suivant donne les taux de dégradation ainsi que les taux de pannes qui nous ont servi pour calculer la dépréciation .

Années (t)	Taux de pannes	Taux de dégradation
2015	29.80 %	0.94 %
2014	28.86 %	1.37 %
2013	27.49 %	1.79 %
2012	25.7 %	-

TAB. 5.3 – Taux de dégradation

Le taux de dégradation pour une année donnée est calculé à partir des taux de panne de l'année précédente et l'année en cours.

Méthodologie utilisée

Trouver la fonction $k(u_2)$ qui est le taux de dépréciation en fonction du taux de production :

Pour trouver cette fonction, on doit d'abord trouver un polynôme :

$$k(u_2) = a_n u_2^n + a_{n-1} u_2^{n-1} + \dots + a_1 u_2^1 + a_0 u_2^0 + \varepsilon$$

La courbe de celui-ci passe par la majorité des points et dont la $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ est minimale.

on obtient ce polynôme avec la fonction "polyfit" de MATLAB, qui procède par estimation des coefficients a_i du polynôme $k(u_2)$ au sens des moindres carrés ;

$$k(u_2) = \begin{cases} k(u_2) & u_2 \geq 0; \\ 0 & u_2 < 0. \end{cases}$$

Application

Dans notre cas, l'application de la fonction "polyfit" sur les deux échantillons, la dépréciation k et u_2 a donnée un polynôme de degré trois qui correspond à :

$$k(u_2) = a_3 u_2^3 + a_2 u_2^2 + a_1 u_2^1 + a_0 u_2^0;$$

où l'estimateur a donné les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 = 439.10^{-8}; \\ a_2 = 33.10^{-4}; \\ a_1 = -2412.10^{-4}; \\ a_0 = 0. \end{array} \right.$$

Ce qui donne :

$$k(u_2) = 439.10^{-8}u_2^3 + 33.10^{-4}u_2^2 - 2412.10^{-4}u_2.$$

Les conditions de départ posées sur la fonction $k(u_2)$ (la convexité) nous ont poussé à considérer $a_1 = 0$ et $a_3 = 0$. En manipulant les valeurs de a_2 et en utilisant la fonction "polyval", on obtient les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 = 0; \\ a_2 = 0,3124.10^{-3}; \\ a_1 = 0; \\ a_0 = 0. \end{array} \right.$$

Notre polynôme aura donc la forme :

$$k(u_2) = 0.3124.10^{-3}u_2^2.$$

Pour déduire l'erreur entre les valeurs expérimentales et le modèle obtenu par la fonction "polyfit", on utilise la fonction "polyval" qui retourne la valeur du polynôme $k(u_2)$ pour toutes les composantes u_2 .

Ainsi cette fonction donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} k(70.53) = 1.5540; \\ k(72) = 1.6195; \\ k(73.36) = 1.6812. \end{array} \right.$$

Ainsi, le taux de dégradation en fonction du taux de production est approximé par la courbe suivante :

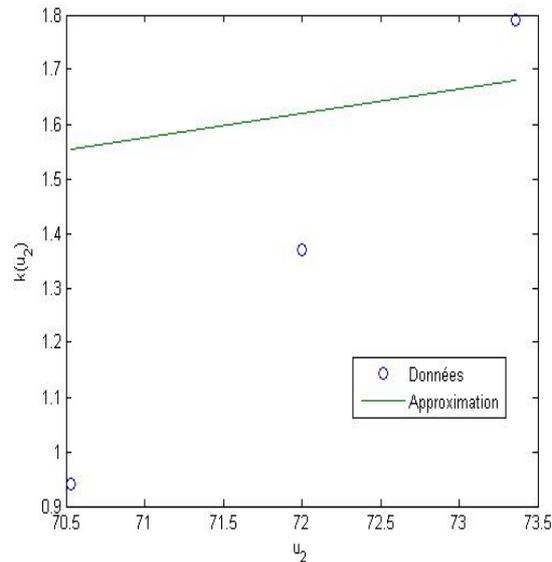


FIG. 5.2 – Approximation du taux de dégradation par une courbe.

Par conséquent l'erreur est :0.45108369

5.2.4 Fonctions d'efficacité de la maintenance

Une politique de maintenance préventive permet dans une entreprise la recherche de plus en plus la réduction des coûts et d'anticiper les dysfonctionnements des moyens de production afin d'éviter au maximum les arrêts de production. La maintenance préventive contribue non seulement à améliorer la fiabilité des moyens de production mais également la qualité des produits fabriqués. Elle se traduit souvent par la mise en place d'un plan de prévention identifiant des actions à mener (graissage, nettoyage, remplacement d'une pièce d'usure, par exemples) à des fréquences données. La sûreté de fonctionnement du système de production dépend naturellement étroitement de l'efficacité de ces opérations de maintenance.

L'efficacité de la politique de maintenance préventive est mesurée par rapport à la maintenance corrective (nombre de pannes, coûts liés) pour qu'ils puissent réduire leurs coûts dans le temps. L'efficacité de la maintenance de la *ligne COMBI 20* est résumé dans le tableau suivant :

Années (t)	Taux d'efficacité
2015	80.31 %
2014	93.73 %
2013	99.26 %
2012	95.91 %
2011	91.80 %
2010	90.57 %

TAB. 5.4 – Taux d'efficacité

Notre objectif est d'observer l'évolution de l'efficacité de la maintenance en fonction de ses coûts. Cette évolution est élucidée dans le graphe suivant :

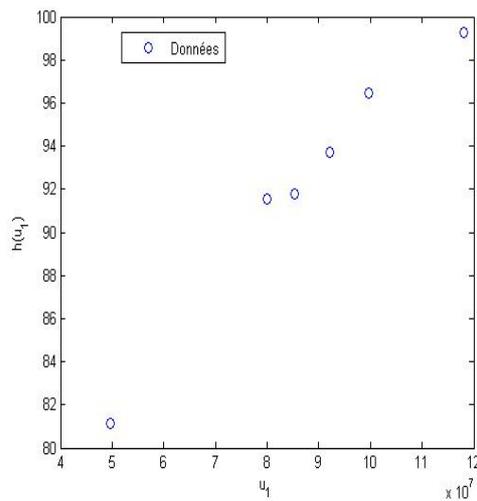


FIG. 5.3 – Représentation de la fonction d'efficacité.

En approximant avec MATLAB ce nuage de point par un polynôme d'ordre 1 et d'ordre 2 on obtient la figure suivante :

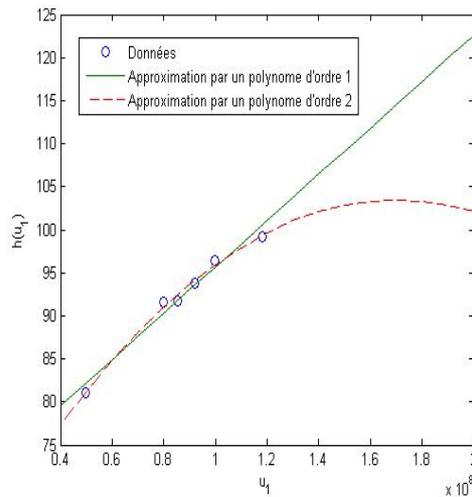


FIG. 5.4 – Approximation de la fonction d'efficacité par des polynômes d'ordre 1 et 2.

Mais un message apparaît demande de réduire le degré du polynôme, '*reduce the degree of the polynomial*', car la variance de l'erreur d'interpolation est grande.

Vue les conditions initiales posées sur la fonction d'efficacité h et le résultat d'avant nous avons supposé que la fonction h prend la forme :

$$h(u_1) = au_1^\alpha, \quad a \geq 1, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (5.1)$$

Ce qui donne

$$h(u_1) = u_1^{1/4.04}.$$

Le taux d'efficacité en fonction des coûts de maintenance est alors approximé par la courbe suivante :

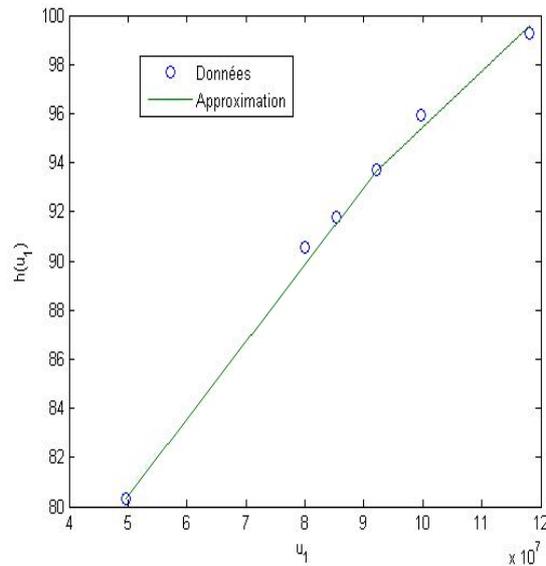


FIG. 5.5 – Approximation de la fonction d'efficacité par une courbe.

Pour déduire l'erreur entre les valeurs expérimentales et le modèle obtenu, on calcul la valeur du polynôme $h(u_1)$ pour toutes les composantes u_1 .

Ainsi l'erreur est :0.38003574

5.2.5 Taux d'actualisation

Le taux d'actualisation r est une mesure de la valeur du temps. En ramenant à des valeurs actuelles, il rend possible la comparaison des coûts et des bénéfices qui se produisent à des dates différentes.

Dans notre étude nous considérons que le taux d'actualisation est égal au taux d'actualisation du dinars ($r=r_1 = r_2 = 2\%$).

5.2.6 Valeurs de récupération

La valeur de récupération par rapport à la maintenance notée S_1 est la valeur estimée de la ligne qu'elle va réaliser lors de sa vente à la fin de sa vie utile (estimé à 2020).

La valeur de récupération par rapport à la production notée S_2 est le rendement de la ligne *COMBI 20* que l'entreprise souhaite réaliser jusqu'à 2020.

5.3 Modèle

Jusqu'ici nous avons juste défini les fonctions qui vont nous servir dans notre étude. Cette dernière sera effectuée sur un horizon de 5 ans (de $t_0 = 2016$ jusqu'à $T = 2020$).

Considérons alors que le premier joueur est le service de maintenance de l'entreprise IFRI tandis que le deuxième joueur est le service de production.

L'entreprise IFRI récompense les agents de maintenance (Personnel technique) pour avoir réalisé une certaine qualité (Primes) $q_1 > 0$. De l'autre côté le service de production ne paye pas le service de maintenance pour avoir réalisé une certaine qualité de la ligne ç-à-d : ($q_2 = 0$).

Étant donnée la qualité initiale $x(t_0) = x_0$, notre jeu différentiel est donc le suivant :

✠ Pour le premier joueur :

$$J_1 = \int_{t_0}^T e^{-r_1 t} (q_1 x(t) - u_1(t)) dt + e^{-r_1 T} S_1(x(T)) \rightarrow \max$$

s.c

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u_1^{1/4.04} - 0.3124 \cdot 10^{-3} u_2^2 x(t); \\ u_1 \geq 0; \end{cases}$$

✠ Pour le second joueur :

$$J_2 = \int_{t_0}^T e^{-r_2 t} u_2 x(t) dt + e^{-r_2 T} S_2(x(T)) \rightarrow \max$$

s.c

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u_1^{1/4.04} - 0.3124 \cdot 10^{-3} u_2^2 x(t); \\ u_2 \geq 0; \end{cases}$$

5.4 Résolution

Avant de passer à la résolution, construisons d'abord les conditions nécessaires d'optimalité, pour ce faire suivons nous les étapes données dans le chapitre précédent. Ce qui donne le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{-4.04}{3.04} u_1 \left[\frac{q_1}{4.04} u_1^{-3.04/4.04} - 0.3124 \cdot 10^{-3} u_2^2 - 2 \right]; \\ \dot{u}_2 = u_2 [0.3124 \cdot 10^{-3} u_2^2 - 2]. \end{cases} \quad (5.2)$$

Nous analysons à présent le système (5.2) et en utilisant les résultats vus dans le chapitre quatre.

On a :

$$\dot{u}_2 = 0 \Rightarrow 0.3124 \cdot 10^{-3} u_2^2 - 2 = 0$$

Soit :

$$\Phi_2(u_2) = 0.3124 \cdot 10^{-3} u_2^2 - 2$$

$$\Phi_2'(u_2) = 0 \Rightarrow u_2 = 0.$$

Les variations de Φ_2 sont données dans le tableau suivant :

u_2	0	∞
$\Phi_2'(u_2)$	+	
	0	
$\Phi_2(u_2)$		∞
	-2	↗

TAB. 5.5 – Tableau de variation de Φ_2

$\Phi_2(u_2)$ s'annule au point \hat{u}_2 avec : $\hat{u}_2 = 80.01\%$

De même :

$$\dot{u}_1 = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{4.04} u_1^{-3.04/4.04} - 0.3124 \cdot 10^{-3} u_2^2 - 2]$$

Soit :

$$\Phi_1 = \frac{q_1}{4.04} u_1^{-3.04/4.04} - 0.3124 \cdot 10^{-3} u_2^2 - 2$$

$$\Phi_1' = -q_1 \frac{3.04}{16.32} u_1^{-7.08/4.04} < 0$$

Ainsi nous obtiendrons le tableau des variations suivant :

u_1	0	∞
Φ'_1	-	
Φ_1	∞	↘ -2

TAB. 5.6 – Tableau de variations de Φ_1

Φ_1 s'annule au point \tilde{u}_1 avec : $\tilde{u}_1 = \left(\frac{q_1}{8.08}\right)^{4.04/3.04}$ et $\hat{u}_1 = \left(\frac{q_1}{16}\right)^{4.04/3.04}$

Enfin, l'équilibre est $(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \left(\left(\frac{q_1}{16}\right)^{4.04/3.04}, 80\%\right)$. Notons que cet équilibre est instable.

Les résultats obtenus ci-dessus nous ont permis de tracer le diagramme de phase suivant ainsi de déterminer les quatre régions.

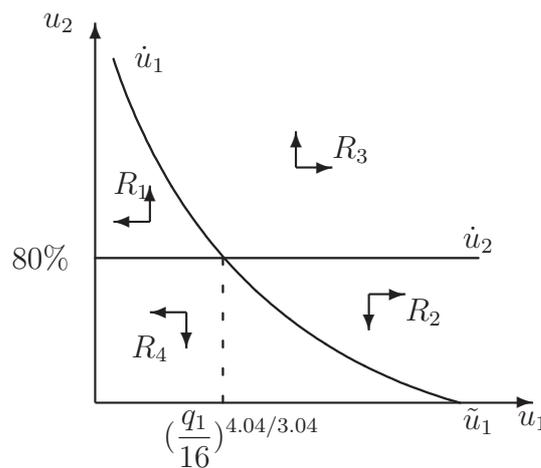


FIG. 5.6 – Diagramme de phases.

5.5 Discussion des résultats

D'après le diagramme de phase ci-dessus il s'avère que l'entreprise IFRI se trouve dans la région quatre. En d'autres termes l'entreprise est intéressée par une grande valeur de S_2 tandis qu'elle s'intéresse moins à la valeur de S_1 . Alors pour de petites valeurs de récupération de la

ligne, les dépenses de maintenance optimales doivent diminuer au fil du temps alors que le taux de production optimale doit augmenter d'une façon monotone.

5.6 Proposition

En analysant le diagramme de phase, quelques propositions ont été faites, à savoir :

- ✓ Si elle s'intéresse à une grande valeur de S_1 mais à une petite valeur de S_2 , l'entreprise doit produire avec un taux supérieur à 80% et dépenser plus que $(\frac{q_1}{16})^{4.04/3.04}$ pour la maintenance préventive (faire croître $u_1(t)$ et $u_2(t)$).
- ✓ Si elle s'intéresse à de petites valeurs de S_1 et S_2 , l'entreprise doit produire avec un taux supérieur à 80% et dépenser moins que $(\frac{q_1}{16})^{4.04/3.04}$ pour la maintenance préventive (faire décroître $u_1(t)$ et croître $u_2(t)$ d'une manière monotone).
- ✓ Si elle s'intéresse à de grandes valeurs de S_1 et S_2 , l'entreprise doit produire avec un taux inférieur à 80% et dépenser plus que $(\frac{q_1}{16})^{4.04/3.04}$ pour la maintenance préventive (faire croître $u_1(t)$ et décroître $u_2(t)$ d'une manière monotone).
- ✓ Enfin si l'entreprise est toujours intéressée par une grande valeur de S_2 et une petite valeur de S_1 elle n'a qu'à diminuer les coûts de maintenance au fil du temps et à augmenter le taux de production d'une façon monotone comme mentionné avant.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre une caractérisation qualitative de la solution de Nash au sein de l'entreprise IFRI est donnée, nous avons pu déterminer qu'à présent l'entreprise IFRI est intéressée par une grande valeur de récupération de la production et moins à la valeur de récupération de la maintenance et enfin quelques propositions ont été données.

Conclusion Générale

Aujourd'hui, l'une des premières actions d'un processus de prise de décision hiérarchique d'une entreprise est le développement des plans optimaux (production, maintenance).

Il est question de trouver le meilleur plan de production et la meilleure stratégie de maintenance requise par l'entreprise pour satisfaire les clients. C'est une tâche complexe car il existe une variété d'incertitudes liées à ce processus de décision. Généralement, elles sont dues à des facteurs externes et internes. Les facteurs externes peuvent être associés à l'incapacité de définir précisément le comportement de la demande pendant les périodes de production. Les facteurs internes peuvent être associés à la disponibilité des ressources matérielles de la société.

Du point de vue mathématique, un tel problème peut être modélisé sous forme d'un jeu différentiel à deux joueurs à somme non nulle. Dans une entreprise, le département de maintenance est responsable de l'entretien des machines employées par le département de production. Les dépenses de maintenance améliorent la qualité des machines mais engendrent des coûts importants. La production, d'autre part, rapporte un revenu à l'entreprise, mais réduit la qualité des machines. La difficulté principale bloquant l'application de tels modèles de jeu est qu'il est extrêmement difficile de déterminer ou caractériser les stratégies d'équilibre.

Dans ce mémoire basé sur les travaux de Feichtinger et Hartl nous avons essayé de caractériser cette solution dite de Nash qualitativement en utilisant l'analyse de diagramme de phase. Cette analyse nous a permis de déduire le comportement de l'équilibre. Ensuite nous avons proposé une adaptation de ce modèle au cas de l'entreprise IFRI, les résultats obtenus ont montré que les plans optimaux de production et de maintenance sur lesquels l'entreprise doit décider dépendent principalement de la valeur qu'elle souhaite récupérer de la ligne à la fin de sa durée de vie.

Bibliographie

- [1] A. AKKOUCHE, *Contrôle Optimal des Systèmes Décrits par des Equations aux Dérivées Partielles Basé sur la Méthode d'Itération Variationnelle*, Thèse de Doctorat, Université Tizi-Ouzou, 2015.
- [2] A.PALESTINI., *Some basic notes on Optimal Control Theory and Differential Games*, Cours of Department of Economics, University of Bologna, Italy, 2010.
- [3] S. ARORA AND P. LELE, *A note on optimal maintenance policy and sale date of machine*, Management Sci. 17 pages 170-173, 1970.
- [4] K. ARROW, *Applications of control theory to economic growth*, in : G.B. Dantzig, A.F. Veinott (Eds.), *Mathematics of the Decision Sciences*, American Mathematical Society, Providence, pp. 85–119, 1968.
- [5] K. ARROW AND M. KURZ, *The Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1970.
- [6] C. BENNANI, *Stabilisation et Estimation de l'état des Systèmes Dynamiques non Linéaires et Applications*, Mémoire de Magistère, Université Tizi-Ouzou, 2011.
- [7] E. BONZON, *Modélisation des interactions entre agents rationnels :les jeux booléens*, Thèse Université Paul Sabatier de Toulouse 3, 2007.
- [8] L. CHERFI, *Systèmes différentiels et algébriques du type Riccati issus de la théorie des jeux*, Thèse de Doctorat de L'école Normale Supérieure de Cachan, 2005.
- [9] G. FEICHTINGER, *The Nash solution of a maintenance-production differential game*, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Technische Universität Wien, A-1040 Wien, Austria, 1981.

- [10] V. V. G. FEICHTINGER, A.J. NOVAK, *Applying the Leitmann–Stalford sufficient conditions to maximization control problems with non-concave Hamiltonian*, Applied Mathematics and Computation 217 pp 1017–1022, Argentinierstr, 8/105-4, 1040 Vienna, Austria, 2010.
- [11] B. GUERRIEN, *La Théorie des Jeux*, Economica, 2 édition, 1995.
- [12] R. HARTL, *Optimal Maintenance and Production Rates for a Machine*, Technical University of vienna, A-1040 Wien, Austria, 1983.
- [13] R. ISAACS, *Differential games*, John Wiley and Sons, New York, 1956.
- [14] O. M. J. VON-NEWMANN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.
- [15] R. KALMAN, *Contribution to the theory of optimal control*, Bol.Soc. Mat Mexicana, 5, 102–119, 1969.
- [16] M. I. KAMIEN AND N. L. SCHWARTZ, *Dynamic Optimization, The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, J.L. Kellogg Graduate School of Management Northwestern University Evanston, Illinois U.S.A, 1992.
- [17] G. KHENNICHE, *Théorie et Application du Calcul des Variations en Commande Optimal*, Mémoire de Magistère, Mathématiques, Université Skikda, 2007.
- [18] N. KHIMOUM, *Résolution Numérique d’un jeu bi-Matriciel Multicritère*, Mémoire de Magistère, Recherche Opérationnelle, Université Bejaïa, 2006.
- [19] O. LABBANI., *Comparaison des théories des jeux pour l’étude du comportement d’agents*, Mémoire de DEA, France, 2003.
- [20] G. LEITMANN AND H. STALFORD, *A sufficiency theorem for optimal control*, Journal Optimization Theory and Applications 8 (3) 169–174, 1971.
- [21] C. LOBRY AND T.SARI, *Introduction à la théorie du contrôle*, Cours de l’école du CIMPA Contrôle non linéaire et Applications, Tlemcen, 2003.
- [22] O. LOISEL, *Le Modèle de Croissance à Taux d’épargne Endogène (Cass-Koopmans-Ramsey)*, ENSAE.
- [23] K. LOUADJ, *Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal*, Thèse de Doctorat, Mathématiques, Université Tizi-Ouzou, 2012.

- [24] N. Z. M. BENNOUR, C. BLOCH, *Modélisation Intégrée des Activités de Maintenance et de Production*, 3^e Conférence Francophone de Modélisation et Simulation Conception, Analyse et Gestion des Systèmes Industriels MOSIM 01 – Troyes (France), 2001.
- [25] O. MANGASARIAN, *Sufficient conditions for the optimal control of non-linear systems*, SIAM Journal on Control and Optimization 4 (1) 139–152, 1966.
- [26] F. MARBACH, *Notes de cours, Introduction au Domaine de Recherche*, 2012.
- [27] A. N. M. MOKIME, *Notes de cours, Modèle de Croissance Economique*, Kinshasa, 2012.
- [28] G. OLSDER, *Differential Games, Distributed Systems, and Impulse Control*.
- [29] D. OUIDJA, *Principe du maximum et méthode de tir*, Mémoire de Magister, Recherche Opérationnelle, Université Bejaïa, 2011.
- [30] L. PONTRYAGUIN, *Les Jeux Différentiels Linéaires*, Actes, Congrès intern. Math, Tom 1, pages 163-171, 1970.
- [31] H. W. R. HARTL, *Optimal maintenance and straining intensity of a machine : a nonlinear economic control problem*, J, Econom, Dynamic and Control to appear, 1983.
- [32] S. R. HARTL, *Optimal control of concave economic models with two control instruments*, Forschungsbericht Nr. 31 des Institüs für Unternehmensforschung der Technischen Unversität Wien, Austria, 1980.
- [33] A. STARR AND Y. HO, *Nonzero-sum differential games*, J.Optim Theory Appl, 3, 184–206, 1969.
- [34] J. THISSE, *Théorie des jeux : une introduction*, Technical report, 2005.
- [35] G. THOMPSON, *Optimal maintenance and sale data of a machine*, Management Sci. 14 pages 543-550, 1968.
- [36] E. TRÉLAT, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France, 2013.
- [37] R. T. WOODWARD, *The basics of Differential Equations*, AGECE 637, 2013.

Résumé

Un jeu différentiel à deux joueurs à somme non nulle entre l'équipe de maintenance d'une entreprise et le département de production de la même entreprise est considéré. Il est supposé que la maintenance préventive décélère la diminution de la qualité d'une machine, tandis que les activités de production fixées par l'entreprise permet de réduire la qualité de la machine. En raison de la structure particulière du jeu un système de deux équations différentielles pour les trajectoires non coopérative de la solution de Nash peuvent être dérivées. Ceci permet d'obtenir un aperçu qualitatif sur la structure des trajectoires de la solution par la méthode du diagramme de phases sans résoudre les conditions d'optimalité nécessaires explicitement.

Enfin une application dans l'entreprise IFRI est réalisée, il est démontré que pour de petites valeurs de récupération de la machine, les dépenses de maintenance optimale doivent diminuer au fil du temps alors que le taux de production optimale doit augmenter d'une façon monotone.

Mots clés : contrôle optimal, jeu différentiel, équilibre de Nash, boucle ouverte, diagramme de phase.

Abstract

A simple two-person nonzero-sum differential game between the maintenance crew of a firm and the production department of the same firm is considered. It is assumed that preventive maintenance decelerates the decrease in quality of a machine, whereas the production activities set by the firm reduces the quality of the machine. Due to the special structure of the game a system of two differential equations for the non-cooperative Nash solution trajectories can be derived. This provides a possibility to obtain qualitative insights into the structure of the solution paths by phase diagram method without solving the necessary optimality conditions explicitly. For small salvage values of the machine, it is shown that the optimal maintenance expenditures decrease over time whereas the optimal production rate increases monotonically.

Finally an application in IFRI company is to realize, it is shown that for small salvage values of the machine, the optimal expenditure of maintenance must decrease over time whereas the optimal production rate must increase monotonically.

Key words : optimal control, differential game, Nash-equilibrium, open-loop, phase-diagram.