

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire de Master

en

Recherche Opérationnelle

Option

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Approximation fonctionnelle des systèmes d'attente à serveur non fiable

Présenté par :

M^{elle} *MEHDAOUI* Ouarda

M^{elle} *MESSAOUI* Faouzia

Soutenu devant le jury composé de :

Présidente	M ^{me} <i>LEKADIR</i> Ouiza	M.C.A	Univ. de Béjaïa
Rapporteur	M ^r <i>ABBAS</i> Karim	M.C.A	Univ. de Béjaïa
Examinatrice	M ^{me} <i>TAKHEDMIT</i> Baya	M.A.B	Univ. de Bouira
Examinatrice	M ^{elle} <i>BACHI</i> Katia	Doctorante	Univ. de Béjaïa
Invité	M ^r <i>SOUFIT</i> Massinissa	Doctorant	Univ. de Béjaïa

Béjaïa, 2016

Remerciements

Avant tout, nous remercions le bon Dieu, le tout puissant de nous avoir donné, le courage et la volonté pour réaliser ce travail.

Nous tenons à remercier vivement *D^r* **ABBAS Karim**, pour nous avoir honoré par son encadrement, pour sa disponibilité, ses orientations, ses précieux conseils, sa gentillesse et ses encouragements tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à la présidente du jury *M^{me}* **LEKADIR Ouiza** pour nous avoir consacré de son temps en nous faisant l'honneur d'accepter de présider le jury.

Nous remercions très chaleureusement *M^{me}* **TAKHEDMIT Baya** et *M^{elle}* **BACHI Katia** d'avoir accepté d'examiner notre travail.

Nos remerciements spécifiques s'adressent à *M^r* **SOUFIT Massinissa** pour le temps qu'il nous a consacré, pour son aide et ses conseils.

Un grand merci à toutes personnes qui nous ont apporté leur soutien, leurs encouragements et leur aide pour l'accomplissement de ce travail..

Dédicaces

Avec ma gratitude et tout mon amour, je dédie ce modeste travail à :

Aux deux être les plus chers au monde qui ont donné sens à mon existence, en m'offrant une éducation digne de confiance qui m'ont soutenu jours et nuits durant tout mon parcours. j'espère que par ce modeste travail, je vous rends un peu de ce sentiment de fierté que j'éprouve d'être votre fille.

À ma soeur Massiva ;

À mes frères : Massin et Ghilas ;

À mes grands pères et grandes mères ;

À mes oncles et mes tantes ;

À ma chère amie Sassa et sa famille ;

À ma binôme Faouzia et sa famille ;

À tous mes ami (es).

Ouarda

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

À mes parents,
À mon cher frère Mourad,
À mes très chères soeurs,
À toute ma famille,
À mes amies et collègues, et tous ceux qui m'ont aidé ;
À ma binôme Ouarda et sa famille.

Faouzia

Table des matières

Table des matières	ii
Table des figures	iii
Liste des tableaux	iv
Introduction	1
1 Sur les systèmes de files d'attente à serveur non fiable	3
1.1 Introduction	3
1.2 Rappels sur les chaînes de Markov	3
1.2.1 Processus stochastique	4
1.2.2 Processus de Markov	4
1.3 Analyse des phénomènes d'attente	5
1.3.1 Structure des systèmes de files d'attente	5
1.3.2 Classification des files d'attente	6
1.3.3 Notation de Kendall	7
1.3.4 Les différentes disciplines de service	7
1.3.5 Mesures de performance d'un système de files d'attente	8
1.3.6 Analyse mathématique d'un système de files d'attente	8
1.4 Quelques systèmes de files d'attente classiques	9
1.4.1 Modèles markoviens	9
1.4.2 Modèles non markoviens	9
1.5 Les systèmes de files d'attente complexes	10
1.5.1 Systèmes de files d'attente à serveurs non fiables	11
1.5.2 Les différentes périodes de service	14
1.6 Conclusion	15
2 Développements en série de Taylor des chaînes de Markov	16
2.1 Introduction	16
2.2 Formule de Taylor	16
2.2.1 Quelques notions fondamentaux	17
2.2.2 Formules de Taylor d'une fonction à une seule variable	18
2.2.3 Formule de Taylor d'une fonction à plusieurs variables	20
2.2.4 Quelques propriétés sur les développements de Taylor	21
2.3 Développements en séries de Taylor dans une chaîne de Markov	22

2.3.1	Dérivées successives de la distribution stationnaire	23
2.3.2	Développement en série de Taylor de $\pi_{\theta+\Delta}$	25
2.4	Conclusion	27
3	Évaluation des performances du modèle d'attente M/G/1/N avec pannes classiques	28
3.1	Introduction	28
3.2	Description du modèle	28
3.3	Calcul numérique	30
3.3.1	Distribution stationnaire	31
3.3.2	Probabilité de blocage	33
3.3.3	Nombre moyen de clients dans le système	34
3.3.4	Temps moyen d'attente d'un client dans le système	36
3.4	Conclusion	37
4	Évaluation des performances du modèle d'attente M/G/1/N avec perte définitive de client	38
4.1	Introduction	38
4.2	Présentation du modèle	38
4.3	Application numérique	41
4.3.1	Distribution stationnaire	41
4.3.2	Probabilité de blocage	45
4.3.3	Nombre moyen de clients	46
4.4	Conclusion	46
	Conclusion	47
	Bibliographie	49

Table des figures

3.1	Probabilité de blocage en fonction de la capacité d'attente dans système N et du paramètre de perturbation Δ	34
3.2	Nombre moyen de clients dans le système en fonction paramètre de perturbation.	35
3.3	Nombre moyen de clients dans le système en fonction N.	35
3.4	Temps moyen d'attente d'un client dans le système en fonction de Δ et N.	36
4.1	Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{\theta+\Delta}$ par la série de Taylor d'ordre 3 du modèle $M/M/1/7$	42
4.2	Erreurs relatives absolues associées au développement de Taylor d'ordre 3 pour le modèle $M/H_2/1/7$	43
4.3	Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{\theta+\Delta}$ par la série de Taylor d'ordre 3 du modèle $M/E_2/1/7$ avec pannes	44
4.4	Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{\theta+\Delta}$ par la série de Taylor d'ordre 3 du modèle $M/D/1/7$ avec pannes	45
4.5	Probabilité de blocage en fonction de la capacité d'attente dans le système N.	45
4.6	Nombre moyen de clients dans le système en fonction de la variation de paramètre de perturbation Δ	46

Liste des tableaux

3.1	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/M/1/6$ avec pannes	31
3.2	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/H_2/1/6$ avec pannes	32
3.3	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/E_2/1/6$ avec pannes	32
3.4	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/D/1/6$ avec pannes	33
4.1	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/M/1/7$ avec pannes	41
4.2	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/H_2/1/7$ avec pannes	42
4.3	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/E_2/1/7$ avec pannes	43
4.4	Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/D/1/7$ avec pannes	44

Introduction

Les phénomènes d'attente surviennent naturellement dans la plupart des environnements rencontrés dans la vie courante et particulièrement dans les systèmes informatiques, les systèmes de production et les réseaux de télécommunication. Ces phénomènes peuvent être modéliser par une technique de la recherche opérationnelle qui est la théorie de file d'attente.

La théorie de file d'attente a pour objet l'étude de système ou des entités, appelées clients, cherchent à accéder à des ressources, généralement limitées afin d'obtenir un service. Cette théorie a été élaboré pour la premier fois par l'ingénieur danois Agner Krarup Erlang en 1917, dans le but de décrire des phénomènes de congestion et d'attente dans la communication téléphonique. Un modèle de file d'attente est un outil puissant pour l'analyse et l'optimisation des performances des systèmes à flux discret tels que les systèmes informatiques et les réseaux de communication. Pour un modèle typique de files d'attente, il est nécessaire de définir les processus d'inter-arrivées, la durée de service, la taille de la file qui peut être finie ou non et la discipline de service. Ces paramètres sont indiqués dans la notation dite Kendall (voir chapitre 1).

Lors d'étude d'un système de files d'attente, il est important de prendre en considération la non-fiabilité de serveur afin de voir l'impact des pannes sur les caractéristiques du système étudié (par exemple le nombre moyen de client dans le système). Cette étude se fait par l'introduction d'un processus stochastique comme "*les chaînes de Markov*". Ce terme est apparu pour la première fois en 1926 dans le travail de Bernstein [13], mais actuellement les processus de Markov sont applicables dans divers domaines. Il existe plusieurs méthodes d'approximation qui ont été développées pour la résolution de ces modèles stochastiques et parmi ces méthodes on retient l'approche du développements en séries de Taylor.

L'approche des développements en séries de Taylor est un outil permettant d'évaluer les mesures de performances d'un modèle d'attente. Cette méthode est applicable à tous les systèmes qui peuvent être décrit par une chaîne de Markov irréductible, apériodique et à espace d'états fini. L'intérêt d'utiliser cette méthode est que les séries de Taylor convergent vers la fonction de performance exacte et aussi permet d'obtenir une borne pour le terme du reste de développement (l'erreur commise lors d'approximation de la fonction de performance exacte par un polynôme de Taylor).

L'objectif de notre travail consistera à l'évaluation des mesures de performances principales d'un modèle de file d'attente $M/G/1/N$ à serveur non fiable en utilisant l'approche des développements en séries de Taylor. Cette dernière nous permettra de considérer la mesure de performance en question sous forme fonctionnelle, où celle-ci sera évaluée en terme de paramètre du modèle étudié. Particulièrement, la mesure de performance sera présentée en utilisant l'approche des développements en séries de Taylor [39] sous forme polynomiale, ce qui facilite son évaluation numérique.

Ce mémoire comprend une introduction générale et quatre chapitre :

- Dans le premier chapitre, nous présentons les chaînes de Markov et les concepts de base des systèmes de file d'attente. Par la suite, nous introduisons quelques systèmes de file d'attente classiques à serveur non fiable.
- Le deuxième chapitre expose les formules de Taylor et leurs différents restes. Ainsi, nous allons introduire le concept de développement en série de Taylor des chaînes de Markov.
- Dans le troisième chapitre, nous appliquons la méthode de développement en série de Taylor au système de file d'attente $M/G/1/N$ avec pannes classiques où une étude du comportement des différentes mesures de performance de ce modèle sera réalisé par rapport aux perturbation du taux de pannes.
- Le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'influence des pannes du serveur sur les performances du système d'attente $M/G/1/N$ non fiable avec perte définitive de client, en utilisant l'approche des développements en série de Taylor.
- Finalement, nous terminerons par une conclusion générale où nous mettrons l'accent sur quelques perspectives de recherche qui peuvent être induites de notre travail.

1

Sur les systèmes de files d'attente à serveur non fiable

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts généraux et quelques résultats classiques concernant les systèmes de files d'attente. Nous accordons une attention particulière à la présentation des systèmes de files d'attente à serveur non fiable.

Puisque la modélisation des systèmes de files d'attente est basée sur les chaînes de Markov, nous présentons d'abord les concepts essentiels des chaînes de Markov discrètes à espace d'état fini.

1.2 Rappels sur les chaînes de Markov

L'analyse des chaînes de Markov est une étape préliminaire important pour l'étude des systèmes de files d'attente, en particulier les chaînes de Markov sont aujourd'hui de plus en plus utilisées comme modèles mathématique de divers systèmes.

Les chaînes de Markov sont des classes de processus aléatoires qui se caractérisent par la propriété que l'état présent du processus résume toute l'information utile pour connaître son évolution future.

1.2.1 Processus stochastique

Un processus stochastique permet de modéliser l'état d'un système évoluant de manière aléatoire dans le temps. L'observation du système au cours du temps peut se faire de manière continue ou discrète et son état au temps t est représenté par la variable aléatoire X_t .

Définition 1.1. [12] On appelle processus stochastique une famille indexée $\{X_t, t \in T\}$ de variables aléatoires définies dans le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Le paramètre $t \in T$ est généralement interprété comme une date et appartient à un ensemble ordonné T .

Lorsque $T \subseteq \mathbb{Z}$, on parlera de processus à temps discret (suite stochastique) noté $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et lorsque T est un intervalle $T \subseteq \mathbb{R}$, on parlera de processus à temps continu.

1.2.2 Processus de Markov

Un processus de Markov est un processus dans lequel le comportement futur ne dépend que du passé récent. Les suites markoviennes sont appelées chaîne de Markov. On distingue donc les chaînes de Markov à espace d'états discret et celles à espace d'états continu.

Dans ce qui suit, on s'intéresse qu'aux chaînes de Markov à espace d'état fini.

Définition 1.2. On appelle chaîne de Markov à temps discret un processus stochastique à espace d'état discret et à temps discret et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire c-à-d :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i), \forall n \in \mathbb{N}, \forall i, j \in S,$$

où

X_{n+1} : l'état futur.

X_n : l'état présent.

X_0, \dots, X_{n-1} : les états passés.

S : espace d'état de la chaîne $\{X_n\}$.

On peut alors définir la probabilité de transition de l'état i à un état j , par :

$$P_{ij} = \Pr(X_{n+1} = j / X_n = i), \forall n \in \mathbb{N}.$$

La matrice de transition $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ est une matrice carrée d'ordre fini ou infini.

Les matrices de transition sont également appelées "matrices stochastiques" .

Définition 1.3. (Matrice stochastique)

On appelle matrice stochastique une matrice carrée P_{ij} qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. Leurs éléments sont non négatifs :

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in S.$$

2. La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1 :

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in S.$$

1.3 Analyse des phénomènes d'attente

L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques. On parle de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités appelées "clients" se présentent d'une manière aléatoire à des "stations", afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire.

Cette théorie est une approche mathématique permettant d'analyser les files d'attente. Elle est basée sur l'étude des équipements téléphoniques automatiques réalisée au début du XXe siècle par l'ingénieur A. K. Erlang en télécommunication. L'application de cette théorie n'a été généralisée à divers types de problèmes qu'après la Seconde Guerre mondiale.

L'objectif est de caractériser le degré de performance du système en répondant à des questions du type suivant :

- En moyenne, combien de temps attend un client avant d'être servi ?
- Quel est le nombre moyen de clients dans le système ?
- Quel est le taux d'utilisation moyen des serveurs ?

1.3.1 Structure des systèmes de files d'attente

Pour traiter l'étude des files d'attente, nous allons utiliser un modèle abstrait dénommé station de service. Cette station est composée d'un ou plusieurs serveurs représentant la ressource et d'une file d'attente contenant à tout instant les clients en attente de service (serveurs occupés). Si un poste de service est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce poste où il est servi, sinon, il prend sa place dans une file d'attente dans laquelle les clients se rangent suivant leur ordre d'arrivée.

1.3.2 Classification des files d'attente

La classification des files d'attente se base principalement sur les éléments suivants :

Processus d'arrivée :

Le processus d'arrivée spécifie les instants auxquels les clients arrivent dans le système qui est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives. Les clients arrivent au système en décrivant un processus déterminé. Ils peuvent, par exemple, être réguliers et leurs arrivées sont espacées par un temps égale à une valeur τ (c-à-d, chaque τ unités de temps on a une arrivée). Le modèle le plus simple et le plus courant est celui des arrivées complètement aléatoires, qui est caractérisé par le processus de poisson.

Processus de service :

La deuxième composante d'un système de files d'attente est la quantité de service demandée par un client, qui est définie par la distribution du temps aléatoire de service. Dans la majorité des cas, on suppose que la population des clients est homogène, ce qui entraîne que les services demandés sont identiquement distribués ou ont une distribution commune dite distribution de service. Dans la pratique, on rencontre souvent la distribution exponentielle. Cette dernière est caractérisée par la propriété d'absence de mémoire, qui pourrait être caractérisée par le fait que le temps résiduel d'un service est indépendant du temps déjà écoulé de ce service, ce qui la rend plus simple à manipuler mathématiquement.

Nombre de serveurs :

Le nombre de serveurs correspond au nombre de stations de service qui sont montées en parallèle.

Capacité de la file :

La capacité de la file correspond au nombre maximal de clients pouvant être présents dans le système à un instant quelconque qui peut être limitée ou non. Dans le premier cas, on suppose que les clients qui arrivent lorsque le système est déjà saturé le quittent immédiatement sans obtenir le service désiré. On dit que ces clients sont perdus. Dans le cas d'un système à capacité illimitée, aucun client n'est perdu (mais la longueur des files d'attente peut grandir indéfiniment).

1.3.3 Notation de Kendall

La notation suivante, introduite par Kendall permet de ramener la description textuelle des différents éléments constituant une file d'attente simple à une formule symbolique :

$$A/B/S/N/M/D,$$

tels que :

- A** : nature du processus des arrivées ;
- B** : nature du processus de service ;
- S** : nombre de serveurs ;
- N** : capacité d'accueil de la file d'attente ;
- M** : taille de la population ;
- D** : discipline de la file ;

La forme abrégé : $A/B/S$ signifie que N et M sont infinies.

Dans la description des processus d'arrivée et de service, les symboles les plus courants sont :

- M : loi Exponentielle ;
- H_k : loi Hyperexponentielle d'ordre k ;
- E_k : loi d'Erlang d'ordre k ;
- D : loi Déterministe (temps d'inter-arrivées ou de service constant) ;
- G : loi Générale (quelconque).
- GI : loi Générale indépendante.

1.3.4 Les différentes disciplines de service

La discipline de service décrit l'ordre avec lequel les arrivées dans le système vont accéder au service. Ces disciplines peuvent être :

- FIFO (First In First Out)** : Le premier arrivé est le premier servi ;
- LIFO (Last In First Out)** : Le dernier arrivé sera le premier servi ;
- Random (aléatoire)** : Les clients accèdent au serveur de manière aléatoire, indépendamment de l'ordre des arrivées ;
- Priorité relative** : Un client accède au service selon sa priorité. La file est gérée par ordre de priorité de la plus forte à plus faible ;

Priorité absolue : Le service d'un client est interrompu lorsqu'un client de priorité supérieure se présente devant la file d'attente. Le client dont ce service est interrompu est remis en tête de la file.

1.3.5 Mesures de performance d'un système de files d'attente

La théorie des systèmes d'attente a comme objectif de calculer ou estimer les performances d'un tel système à partir de la distribution stationnaire du processus $\{X(t), T \geq 0\}$. Ces performances permettent de juger le comportement opérationnel d'un système d'attente.

Ainsi les principales mesures de performance sont :

L_s : nombre moyen de clients dans le système de la file d'attente ;

L_q : nombre moyen de clients dans la file d'attente ;

W_s : temps moyen de séjour d'un client dans le système ;

W_q : temps moyen d'attente d'un client dans le système ;

ρ : l'intensité du trafic ;

P_b : la probabilité de bloquage pour les files d'attente à capacité finie.

"Formules de Little" : Les valeurs caractéristiques d'un système de file d'attente sont liées les unes aux autres par les relations suivantes :

$$L_s = \lambda W_s.$$

$$L_q = \lambda W_q.$$

Ainsi nous obtenons :

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Avec :

λ : taux d'arrivée de clients dans le système.

μ : taux de service.

1.3.6 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse

principalement au nombre de clients $X(t)$ se trouvant dans le système à l'instant $t \geq 0$.

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :
Les probabilités d'état $P_n(t) = P(X(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$. Il est évident que les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial où de la distribution initiale du processus.

Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(t) = \mathbb{P}r(X = n), (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Où, $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est appelée distribution stationnaire du processus $\{X(t), t \geq 0\}$. Le calcul explicite du régime transitoire s'avère généralement pénible, voire impossible, pour la plupart des modèles donnés. On se contente donc de déterminer le régime stationnaire.

1.4 Quelques systèmes de files d'attente classiques

1.4.1 Modèles markoviens

Les systèmes markoviens sont des systèmes où les temps des inter-arrivées et les temps de services des clients sont des variables aléatoires indépendantes, exponentiellement distribuées(modèle M/M/1). Il ya une seule station de service et la capacité d'attente est illimitée. La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles.

1.4.2 Modèles non markoviens

L'étude des modèles non markoviens est cependant beaucoup plus difficile que celles des modèles markoviens. On est ainsi amené à considérer des systèmes de files d'attente, non markoviens (modèles non markoviens), où la propriété de Markov du processus de base $\{X(t); t \geq 0\}$ facilitant l'analyse des systèmes de files d'attente markoviens n'est plus valable, ce qui rend leurs analyse très délicate, voire impossible. Grace aux nombreuses méthodes d'analytique, on se ramène à choisir un processus markovien particulier [1].

1) Méthode des étapes d'Erlang

cette méthode est proposée par E.Erlange et généralisée par D.R.Cox. son principe

est d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox, qui possède la propriété d'absence de mémoire.

2) Méthode de la chaîne de Markov induite

Cette méthode élaborée par Kendall, a pour principe de choisir une séquence d'instants t_1, t_2, \dots, t_n , de nature déterministes ou aléatoires telle que le processus induit $\{X_n, n \geq 0\}$, avec $X_n = X(t_n)$ est une chaîne de Markov homogène.

3) Méthode d'approximation

On caractérise l'état du système étudié, par :

1. Des méthodes asymptotiques décrivant l'état du système (chargé, non chargé, ...).
2. L'estimation par bornes de certaines de ces caractéristiques.

4) Simulation

La simulation est une technique de modélisation. Elle permet de représenter le fonctionnement d'un système composé de différents centres d'activité, de mettre en évidence les caractéristiques de ceux-ci et les interactions entre eux, de décrire la circulation des différents objets traités par ces processus et enfin d'observer le comportement du système.

5) Méthode des événements fictifs

Le principe de cette méthode est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de la place et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

1.5 Les systèmes de files d'attente complexes

Plusieurs variantes ont été élaborées pour l'analyse des systèmes d'attente complexes, surtout pour les plus utilisés d'entre eux, tels que les réseaux informatiques de type SITA [34, 43]. Ainsi, les systèmes d'attente complexes les plus élaborés sont :

- ▷ Système de files d'attente avec arrivées négatives [24, 40].
- ▷ Système de files d'attente avec vacances [22, 39].
- ▷ Système de files d'attente avec rappels [31, 41].
- ▷ Système de files d'attente avec serveurs non fiables [9, 15, 45].

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des systèmes d'attente avec serveur non fiable et voir l'influence de la non-fiabilité de serveur sur les caractéristiques du système.

1.5.1 Systèmes de files d'attente à serveurs non fiables

Les systèmes de files d'attente à serveurs non fiables ont été étudiés par plusieurs chercheurs [9, 15, 14]. White et Christie [45] ont étudié un système de files d'attente avec pannes et leur relation avec le modèle prioritaire. Avi-Itzhak et al [9] et Gaver [23] ont considéré le système d'attente M/G/1 à serveur sujet à des pannes sous différentes disciplines de service.

Lors de l'étude des problèmes classiques de la théorie des files d'attente, on supposait que les serveurs étaient absolument fiables. Cependant, en pratique, on dénombre souvent des cas où les serveurs sont sujet à des pannes aléatoires et par conséquent, durant un certain intervalle de temps, le service des clients est interrompu.

L'étude de tels systèmes est sans aucun doute très importante par les applications pratique car la fiabilité des serveurs influe beaucoup sur les caractéristiques du système considéré. En particulier, plus les indices de fiabilité des serveurs sont bas, plus le nombre des usagers dans la file est élevé et plus la durée d'attente de chaque usager dans la file est longue.

Les systèmes de files d'attente avec pannes aléatoires des serveurs sont de grande importance. Nous les rencontrons dans la modélisation de plusieurs applications, et en particulier dans le cadre de l'évaluation des performances des systèmes informatisés de production et de télécommunication. La fiabilité du service a une influence sur les principaux indices de performance. Par conséquent, le comportement de la file d'attente ne peut pas être étudié sans prendre en considération ces interruptions.

Dans le cas où le serveur est sujet à des pannes, une partie de la durée de service est consacrée à la réparation du serveur, du fait des pannes systématiques de ce dernier.

Concernant la nature de ces pannes, on distingue généralement les cas suivants :

– **Pannes de nature conservatrices** [11] :

Dés que la panne se produit, le service est interrompu, mais le client reste auprès du serveur et attend que ce dernier soit réparé. Après la réparation, le service reprend là où il a été interrompu (la partie de service déjà acquise est donc conservée).

– **Pannes de nature non conservatrices** [35] :

Dans ce cas, la partie de service déjà acquise est détruite. Après la réparation de la panne, le service reprend à zéro.

– **Panne avec perte définitive de client** [19] :

Dés que la panne se produit, le client quitte le système pour de bon.

– **Panne avec perte momentanée de client** [36]

Dés que la panne se produit, le client quitte le serveur et entre en orbite. Par la suite, son comportement ne diffère en rien de celui des clients qui se trouvent déjà en orbite.

Dans notre cas, nous nous limiterons à l'étude de quelques modèles présentant un intérêt pratique. Dans ce qui suit, nous allons présenter les modèles M/M/1 et M/G/1 à serveur non fiable.

• **Système M/M/1 à serveur non fiable :**

C'est le système à serveur non fiable le plus simple. Les clients arrivent à des instants successifs selon un processus de Poisson de paramètre λ , et la durée de service est exponentielle de paramètre μ . La capacité de la file est illimitée et il y a un seul serveur sujet à des pannes.

Soit α la durée de bon fonctionnement (ou la durée de vie) du serveur et β sa durée de réparation (ou la durée de renouvellement).

On suppose que α et β sont des variables aléatoires indépendantes entre elles, indépendantes des inter-arrivées λ et des durées de service μ . De plus ces variables aléatoires sont des lois exponentielles de paramètres θ et r respectivement.

Régime transitoire :

L'état du système peut être décrit par le processus aléatoire markovien :

$$S(t) = \{X(t), e(t); t \geq 0\}$$

,

où $X(t)$ est " le nombre de clients présents dans le système à l'instant t ($t \geq 0$)", et

$$e(t) = \begin{cases} 0, & \text{Si le serveur est en bon état;} \\ 1, & \text{Si le serveur est en panne.} \end{cases}$$

Régime stationnaire :

Il est facile de vérifier que les probabilités stationnaires :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} P_{0j}(t) &= P_{0j}, j \geq 0; \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} P_{1j}(t) &= P_{1j}, j \geq 1;\end{aligned}$$

sont solutions du système d'équations algébriques suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\lambda + \theta)P_{00} = \mu P_{01} + rP_{10} & ; \\ (\lambda + \mu + \theta)P_{0j} = \mu P_{0j+1} + \lambda P_{0j-1} + rP_{1j} & j \geq 1; \\ (\lambda + r)P_{10} = \theta P_{00} & ; \\ (\lambda + r)P_{1j} = \theta P_{0j} + \lambda P_{1j-1} & j \geq 1. \end{array} \right.$$

La condition d'ergodicité d'un tel système est de la forme :

$$\rho = \lambda \bar{\psi} = \lambda(1 + \theta/r) < 1, \tag{1.1}$$

où $\lambda \bar{\psi}$ est la durée moyenne de séjour du client auprès du serveur.

- **Système M/G/1 à serveur non fiable** : Soit un système de file d'attente constitué d'un serveur unique sujet à des pannes aléatoires qui peuvent survenir aussi bien lorsque le serveur est libre (pannes passives), que lorsqu'il est occupé (pannes active) par le service d'un certain client. Les clients arrivent selon une loi de Poisson de paramètre μ et la durée de service est une variable aléatoire suivant une loi quelconque. Ainsi, si à un instant t fixé le serveur s'avère être libre et en bon état (nous dirons qu'il est disponible), alors, la probabilité pour qu'une panne se produise durant un petit intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ est :

$$\theta_0 \Delta t + o(\Delta t) \quad \forall \theta_0 > 0.$$

Cela signifie que, lorsque le serveur est libre, la durée de bon fonctionnement du serveur est de loi exponentielle de fonction de répartition $F_{\theta_0}(x)$, telle que :

$$F_{\theta_0}(x) = 1 - e^{-\theta_0 x}.$$

Si par contre, à l'instant t le serveur est occupé par le service d'un certain client, alors, la probabilité de panne durant $[t, t + \Delta t]$ est égale à :

$$\theta_1 \Delta t + o(\Delta t) \quad \forall \theta_1 > 0.$$

La réparation de la panne (ou, en d'autres termes, le renouvellement des propriétés initiales du serveur avant la panne) débute immédiatement après la panne et se déroule indépendamment du processus des arrivées.

1.5.2 Les différentes périodes de service

Période d'activité :

On appelle période d'activité (période d'occupation) l'intervalle de temps durant laquelle le serveur travaille d'une manière continue. Cette période peut contenir un nombre de temps de service.

Période de panne

Durant la période d'activité, le serveur sujet à des pannes . Dans ce cas, il rentre immédiatement en phase de réparation. Cet intervalle de temps qui s'écoule entre l'instant où le serveur tombe en panne et celui où il reprend son activité est appelé période de panne.

Temps de complétion ou d'achèvement

On appelle temps de complétion de service, l'intervalle aléatoire du temps entre l'instant du début de service d'un client et l'instant du début de service du client suivant. Cette période inclut la période de réparation car le serveur est assujetti à des pannes.

Période de complétion ou d'achèvement

Dans plusieurs systèmes d'attente, le processus de service est sujet à des pannes. Ces dernières résultent :

1. Des pannes de serveurs (systèmes non fiable).
2. Des périodes d'arrêt (prévues), par exemple, entre les nuits, les week-ends et les changements de personnel.
3. De l'arrivée des clients de haute priorité (systèmes avec priorité).

On appelle période de complétion la durée de temps qui s'écoule entre la fin de la période d'inactivité et l'instant où il ne reste aucun client dans la file. Elle peut être représentée comme la somme des périodes d'activités et de périodes de pannes.

Cycle d'activité

On appelle cycle d'activité l'intervalle de temps composé de la période d'inactivité et la prochaine période d'achèvement.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les concepts et techniques de base de la théorie de files d'attente classiques. Plus précisément, nous avons donné certains résultats sur les systèmes complexes tel que les systèmes non fiables, qui seront utiles dans la description de notre modèle.

2

Développements en série de Taylor des chaînes de Markov

2.1 Introduction

Lorsque la résolution mathématique d'un problème donné n'est pas possible, on fait appel à des méthodes d'approximation. Cela permet de modéliser des situations très complexes dont la solution analytique s'avère difficile voir impossible. Parmi ces méthodes d'approximation on peut citer l'approche de développement en séries de Taylor.

Dans ce chapitre, nous allons développer une nouvelle approche, basée sur les développements en séries de Taylor, où nous calculerons la dérivée d'ordre supérieure de la distribution stationnaire en fonction de la matrice fondamentale, d'une chaîne de Markov ergodique à temps discret et à espace d'états fini.

2.2 Formule de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1712, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

Nous présentons d'abord quelques notions d'analyse, qui nous seront utiles, pour bien mener le développement en séries de Taylor.

2.2.1 Quelques notions fondamentaux

1. La continuité

Définition 2.1. [33]

Une fonction f définie au voisinage de x_0 est continue en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ telle que : } \forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Remarque 2.1. Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I de son ensemble de définition si, et seulement si, elle est continue en tout point de I .

2. La dérivabilité

Définition 2.2. [33]

Soit I un intervalle ouvert, f une fonction définie au voisinage de x_0 un point de I . On dit que f est dérivable en x_0 si la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

existe, cette limite, lorsqu'elle existe, est notée $f'(x)$. On a donc

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Remarque 2.2. On dit qu'une fonction est dérivable sur un domaine D si elle est dérivable en tout point de ce domaine.

3. Fonction de classe C^m

La fonction f est dite de classe C^m sur l'intervalle I , si $f^{(m)}$ existe et continue sur I .

Si $m = \infty$, alors f est indéfiniment dérivable (f admet des dérivées de tous ordres).

4. L'accroissements Finis

Théorème 2.1. (Théorème des Accroissements Finis[10])

Soient a et b des réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ alors :

$\exists c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Où encore, en posant $b = a + h$ alors : $\exists \theta \in]0, 1[$, tel que :

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h).$$

2.2.2 Formules de Taylor d'une fonction à une seule variable

Définition 2.3. [37]

Soit n un entier. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, tel que I est un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, f est n fois dérivable au voisinage de x_0 . Un polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 de f , est définie par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (2.1)$$

La fonction R_n définie sur l'intervalle I par :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x), \quad (2.2)$$

est appelée reste de Taylor d'ordre n en x_0 de f .

- **Défférentes formules caractérisant le reste du développement** Dans l'approximation d'une fonction f par le polynôme de Taylor P_n , l'erreur est donnée par :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (2.3)$$

1. Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 2.2. [37]

Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, de classe C^n sur cet intervalle et $(n + 1)$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$; alors il existe un point $\xi \in]a, b[$ telque :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (2.4)$$

Remarque 2.3. (a) Pour $n = 0$ on retrouve le thérème des accroissements finis.

(b) Le réel $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ est appelé reste de Lagrange .

(c) Si l'on pose $h = x - x_0$ et $\xi = x_0 + \theta h$ (avec $\theta \in]0, 1[$) dans la formule de Taylor-Lagrange avec le reste de lagrange, on obtient la formule dite formule de Mac-Laurin :

$$\exists \theta \in]0, 1[: f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^p ou dans un espace vectoriel normé E , on a le résultat suivant :

2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 2.3. [37] Si f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} (ou plus généralement dans un espace vectoriel normé E) définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, de classe C^n sur cette intervalle et $(n + 1)$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Supposons que $f^{(n+1)}$ majoré sur $]a, b[$ par une constante M . Alors :

$$\| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \| \leq \frac{M}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (2.5)$$

Si le reste de Taylor R_n est négligeable devant x^n au voisinage de x_0 , donc la fonction admet un développement limité, dont la partie polynômial est son polynôme de Taylor d'ordre n . C'est le théorème de Taylor-Young.

3. Formule de Taylor-Young

Théorème 2.4. [37]

Si l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée d'ordre n en x_0 , alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ est le reste de Young.

4. Formule de Young avec reste intégral

Théorème 2.5. [20]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction à valeurs réelles et de classe C^{n+1} sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt. \quad (2.6)$$

Le terme

$$\int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt,$$

est le reste intégrale du développement de Taylor précédent.

En posant $\Delta = x - x_0$, la série de Taylor de f peut aussi s'écrire sous la forme

$$f(x_0 + \Delta) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (\Delta)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi(\Delta))}{(n + 1)!} (\Delta)^{n+1}. \quad (2.7)$$

où $\xi \in [x_0, x_0 + \Delta]$.

Remarque 2.4. [38] Dans le cas où $x_0 = 0$, on obtient alors, avec les hypothèses précédentes, la formule de Mac-Laurin à l'ordre n avec reste intégrale.

5. Formule de Mac-Laurin[44]

• **Formule de Mac-Laurin avec le reste de Lagrange**

Lorsque $a = 0$ et $b = x$ dans la formule de Taylor-Lagrange on obtient la formule de Mac-Laurin à l'ordre n avec le reste de Lagrange :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} (x)^{n+1}.$$

Avec $0 < \theta < 1$

• **Formule de Mac-Laurin avec le reste de Young**

Lorsque $a = 0$ dans la formule de Taylor-Young, on obtient la formule dite de Mac-Laurin à l'ordre n avec le reste de Young :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(x),$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

6. Formule de Taylor-Cauchy

Théorème 2.6. [10]

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe.

La formule de Taylor-Cauchy est une variante de celle de Taylor-Lagrange, valable sous les mêmes hypothèses.

Si la fonction f est à valeurs réelles et qu'elle est dérivable sur I jusqu'à l'ordre $(n+1)$. alors il existe un nombre ξ strictement compris entre x_0 et x tel que :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - \xi)^n.$$

2.2.3 Formule de Taylor d'une fonction à plusieurs variables

Proposition 2.1. [42]

Soit une fonction f de classe C^2 , définie sur un ouvert D de \mathbb{R}^p , et x, x^* deux points de D tels que le segment des joignant soient dans D . On a :

$$f(x) = f(x^*) + \sum_{i=1}^p (x_i - x_i^*) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) + o\left(\sum_{i=1}^p (x_i - x_i^*)^2\right).$$

Le terme $o(\sum_{i=1}^p (x_i - x_i^*)^2)$ signifie que tous les termes d'ordre supérieur à 2 sont négligeables face aux termes d'ordre 1 et 2 qui apparaissent comme coefficients des

dérivées partielles premières et secondes. quand la distance séparant x de x^* tend vers 0. Cette formule de Taylor permet ainsi d'approximer une fonction de p variables par un polynôme de degré 2.

• **Différentes formules caractérisant le reste du développement**

1. Formule de Taylor-Lagrange[25]

Théorème 2.7. Soit f une fonction d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , de classe C^m sur U et $[a : a + h]$ un segment inclus dans U . Si f admet des dérivées partielles à l'ordre $(m+1)$ en tout point de $]a; a+h[$, alors il existe $\theta \in]0; 1[$ tel que :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^m \sum_{|a|=k} \frac{h^a \partial^a f}{a! \partial x^a}(a) + \sum_{|a|=m+1} \frac{h^a \partial^{m+1} f}{a! \partial x^a}(a + \theta h).$$

2. Inégalité de Taylor-Lagrange[25]

Théorème 2.8. Soit f une fonction d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , de classe C^m sur U et $[a : a + h]$ un segment inclus dans U . Si f admet en tout point de $]a; a+h[$ une différentielle d'ordre $m + 1$ et s'il existe un réel M tel que pour tout $a \in \mathbb{N}^{\times}$ et $|a| = m + 1$ et tout t de $]0; 1[$ on ait :

$\|\frac{\partial^{m+1} f}{\partial a}(a + th)\| \leq M$, alors on a :

$$\|f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^m \sum_{|a|=k} \frac{h^a \partial^k f}{a! \partial x_a}(a)\| \leq \frac{M \|h\|^{m+1}}{(m + 1)!}.$$

3. Théorème de Taylor-Young[25]

Théorème 2.9. Soit f une fonction d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , m fois différentiable au point a . alors on a :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^m \sum_{|a|=k} \frac{h^a \partial^k f}{a! \partial x_a}(a) + o(\|h\|^m).$$

2.2.4 Quelques propriétés sur les développements de Taylor

- Le développement de Taylor d'ordre n d'une fonction paire ne contient que des exposants pairs ;
- Le développement de Taylor d'ordre n d'une fonction impaire ne contient que des exposants impairs ;
- La partie régulière du développement de Taylor d'ordre n d'une somme de fonctions s'obtient en additionnant les parties régulières des développements de Taylor d'ordre n de ces fonctions ;
- La partie régulière du développement de Taylor d'ordre n d'un produit de fonctions s'obtient en effectuant le produit des parties régulières des développements de Taylor d'ordre n de ces fonctions et en tronquant le produit au degré n ;

- La partie régulière du développement de Taylor d'ordre n d'un quotient de fonctions (le diviseur commençant par une constante) s'obtient en effectuant le quotient suivant les puissances croissantes des parties régulières des développements de Taylor d'ordre n de ces fonctions et en tronquant le quotient dès que le reste est d'un degré supérieur à n ;
- Si on connaît un développement de Taylor d'ordre n de f au voisinage de 0 et si f' possède un développement de Taylor d'ordre $(n - 1)$ celui-ci s'obtient en dérivant terme à terme le développement de Taylor d'ordre n de f ;
- Si on connaît un développement de Taylor d'ordre n de f' au voisinage de 0 alors f possède un développement de Taylor d'ordre $(n + 1)$ qui s'obtient en faisant suivre la constante $f(0)$ par les termes obtenus en intégrant ceux du développement de Taylor d'ordre n de f' ;
- Si f possède un développement de Taylor d'ordre n au voisinage de 0 et si g possède un développement de Taylor d'ordre n au voisinage de 0 alors le composé des deux fonctions $g \circ f$ possède un développement de Taylor d'ordre n au voisinage de 0 obtenu en composant les parties régulières et en tronquant le résultat au degré n .

2.3 Développements en séries de Taylor dans une chaîne de Markov

L'étude du développement en série de Taylor pour l'évaluation des performances des systèmes de files d'attente a été introduite pour la première fois par M. Zazanis [46] et W.B. Gong et J. Q. Hu [26]. Le développement en série de Taylor pour la distribution stationnaire des chaînes de Markov à espace d'état fini a été élaboré par Xi-Ren Cao [18]. Cependant, c'est B.Heidergott et A.Hordijk [27] qui ont ensuite appliqué le développement en série de Taylor pour des caractéristiques stationnaires des chaînes de Markov à espace d'états général. Récemment, les mêmes auteurs ont étudié le développement en série pour les chaînes de Markov à espace d'états fini [28], puis pour les processus de Markov à espace d'états dénombrable [29]. En 2011, K. Abbas, B.Heidergott et D.Aissani [29] ont présenté une nouvelle approche pour l'analyse des perturbations des systèmes de file d'attente. Ils ont développé les performances des systèmes considérés à l'étude d'une série de Taylor par rapport à un paramètre d'intérêt.

L'utilité de cette nouvelle approche repose sur les deux facteurs :

- ▷ La capacité de calcul du terme de reste de la série de Taylor d'une manière efficace.
- ▷ convergence rapide de la série (un polynôme de Taylor d'ordre faible donne déjà une bonne approximation).

2.3.1 Dérivées successives de la distribution stationnaire

On s'intéresse à obtenir les dérivées successives d'ordre supérieur de la distribution stationnaire π_θ par rapport au paramètre θ . Ce qui nous permettra ensuite d'approcher la distribution stationnaire $\pi_{\theta+\Delta}$ par un polynôme en fonction de Δ .

La dérivée d'ordre "k" de la distribution stationnaire π_θ par rapport à θ sont exprimé en fonction de :

- Groupe inverse A considéré par Cao en 1998 [18].
- Matrice de déviation $D = Z - \Pi_\theta$ considéré par Heidergott et Hordijk en 2003 [27].
- Matrice fondamentale $Z = (I - P + \Pi)^{-1}$ considéré par Ouazine et Abbas en 2016 [39].

Dans notre cas nous considérons ces dérivées en fonction de la matrice fondamentale Z .

- ▷ **La matrice fondamentale** Considérons une chaîne de Markov ergodique $X = \{X_n, n \geq 0\}$ à espace d'état fini ($S = \{0, 1, \dots, N\}$). Soit $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$ sa matrice de transition associée tel que P est une matrice stochastique.

On suppose que la chaîne de Markov X admet une unique distribution stationnaire, notée par π dépend d'un certain paramètre θ .

La notion de "Matrice fondamentale" a été introduite, pour la première fois, par Kemey et Snell [32], et ce dans le cadre de l'analyse de perturbation des chaînes de Markov.

A l'origine, la matrice fondamentale Z est utilisée pour résoudre le système d'équations de la forme $(I - P_\theta)x = b$, où b est connu. Puisque $(I - P_\theta)$ n'est pas inversible, alors la matrice $(I - P_\theta)$ a été modifiée, tout en ajoutant la matrice Π_θ . Ce qui induit que l'inverse $Z = (I - P_\theta + \Pi_\theta)^{-1}$ existe. Cette même matrice est appelée la matrice fondamentale des chaînes de Markov ergodiques. Du point vue pratique, cette définition consiste tout d'abord à calculer la distribution stationnaire π_θ .

▷ **Quelques propriétés de la matrice fondamentale**

Théorème 2.10. [32] Soit P_θ la matrice de transition d'une chaîne de Markov si P_θ finie et ergodique, alors la matrice inverse $Z = (I - P_\theta + \Pi_\theta)^{-1}$ existe, et :

1. $P_\theta Z_\theta = Z_\theta P_\theta$;
2. $Z_\theta e = e$, où e est le vecteur unitaire ;
3. $\pi_\theta Z_\theta = \pi_\theta$;
4. $(I - P_\theta)Z_\theta = (I - \Pi_\theta)$;
5. $Z_\theta = I + \sum_{i=1}^{\infty} (P_\theta^i - \Pi_\theta)$.

L'expression de La dérivée d'ordre "k" de la distribution stationnaire π_θ par rapport à θ en fonction de la matrice fondamentale est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 2.11. [39] Supposons que toutes les composantes de la matrice de probabilités de transition P_θ sont de classe C^k par rapport à θ , où θ est point intérieur d'un certain intervalle. Alors, la k^{ieme} dérivée de la distribution stationnaire π_θ , d'une chaîne de Markov ergodique à temps discret et à espace d'états fini, par rapport au paramètre θ est donnée par :

$$\pi_\theta^{(k)} = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} \pi_\theta^{(m)} P_\theta^{(k-m)} Z_\theta, \tag{2.8}$$

où $P_\theta^{(n)}$ (resp. $\pi_\theta^{(n)}$ est la matrice (resp. le vecteur) dont ses composantes sont les dérivées n^{ieme} des composantes de P_θ (resp. π_θ) par rapport à θ .

En 2003 Heidergott et Hordijk [27] ont établi un résultat équivalent à celui énoncé ci-dessus. Ce résultat consiste à obtenir la sensibilité de la distribution stationnaire en fonction de la matrice de déviation $D_\theta = Z_\theta - \Pi_\theta$. Le théorème suivant donne la dérivée d'ordre n de la distribution stationnaire π_θ par rapport au paramètre θ et en fonction de la matrice de déviation D_θ .

Théorème 2.12. [27] Soit $\theta \in \Theta$ et soit $\Theta_0 \subset \Theta$ un intervalle ouvert contenant θ . Supposons que les composantes de la matrice de probabilités de transition P_θ sont n fois dérivables par rapport au paramètre θ . Alors, la dérivée d'ordre n de la distribution stationnaire π_θ par rapport au paramètre θ est donnée par :

$$\pi_\theta^n = \pi_\theta K_\theta(n), \tag{2.9}$$

où

$$K_\theta(n) = \sum_{1 \leq m, l_k \leq n, l_1 + \dots + l_m = n} \frac{n!}{l_1! \dots l_m!} \prod_{k=1}^m (P_\theta^{(l_k)} D_\theta), \tag{2.10}$$

et D_θ est la matrice de déviation relative à la chaîne de Markov.

2.3.2 Développement en série de Taylor de $\pi_{\theta+\Delta}$

Le problème consiste à retrouver le vecteur stationnaire du modèle perturbé sous forme d'un polynôme en fonction du vecteur stationnaire du modèle idéal et de la perturbation.

Nous nous intéressons à l'obtention de la distribution stationnaire π_θ sous une forme facilement calculable. En particulier, sous une forme polynomiale, en utilisant la formule de développement en séries de Taylor établie par Heidergott et Hordijk[27]. La distribution stationnaire π_θ est considérée comme fonction de paramètre θ . Alors la distribution stationnaire $\pi_{\theta+\Delta}$ peut -être approchée par un polynôme de Taylor, donné sous la forme suivante :

$$\pi_{\theta+\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{k!} \pi_\theta^{(k)}. \quad (2.11)$$

Où $\pi_\theta^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de π_θ .

De point de vue pratique, nous considérons un nombre limité de termes de la série de Taylor. La partie régulière de cette série est défini par :

$$H_\theta(k, \Delta) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k}{k!} \pi_\theta^{(k)}. \quad (2.12)$$

Soit $T_\theta(k, \Delta) = \frac{\Delta^k}{k!} \pi_\theta^{(k)}$ le k^{ime} élément de $H_\theta(k, \Delta)$ au point θ .

Le reste de cette série sera défini par :

$$R_\theta(k, \Delta) = \pi_{\theta+\Delta} - H_\theta(k, \Delta) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\Delta^k}{k!} \pi_\theta^{(k)}. \quad (2.13)$$

Afin de juger le comportement opérationnel d'un système d'attente on est obligé d'estimer les mesures de performance relative aux modèles de files d'attente, en utilisant toujours l'approche des developpements en series de Taylor pour approximer ces mesures (nombre moyen de clients, probabilité de blocage, temps moyen d'attente d'un client dans le système). Les différentes formules de calculs de ces performances ont été définies dans [39] par :

- **Nombre moyen de clients dans le système**

Pour toute fonction coût $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où $I = \{0, 1, \dots, N\}$, une fois que la distribution stationnaire $\pi_{\theta+\Delta}(i)$ est déjà développée en série de Taylor , nous pouvons estimer

la sensibilité de la caractéristique stationnaire $\eta_\theta = \pi_\theta f$ relative à la chaîne de Markov par rapport au paramètre θ est donnée par :

$$\eta_{\theta+\Delta} = \pi_{\theta+\Delta} \times f = \sum_{i \geq 0} f(i) \times \pi_{\theta+\Delta}(i).$$

Si nous choisissons la fonction coût comme étant l'application identique, i.e. $f(i) = i$, on obtient la sensibilité du nombre moyen de clients dans le système donnée par :

$$\begin{aligned} L_{\theta+\Delta} &= \pi_{\theta+\Delta} \times f \\ &= \sum_0^N \pi_{\theta+\Delta}(i) \times i. \end{aligned}$$

Où $\pi_{\theta+\Delta}(i)$ est ensuite approchée par la i^{ieme} composante de $H_\theta(k, \Delta)$.

- **La probabilité de blocage**

On peut également estimer une mesure importante celle de la probabilité de blocage pour une file d'attente à capacité finie pour cela il faut choisir la fonction coût f comme fonction indicatrice sur $i = k$, i.e.

$$f(i) = \mathbf{1}_{\{i=k\}} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour $k = N$, nous obtiendrons l'estimation de la probabilité de blocage :

$$Pb = Pr(i = N) = \pi_{\theta+\Delta} \times f = \pi_{\theta+\Delta}(N).$$

- **Temps moyen d'attente**

En utilisant l'estimation du nombre moyen de clients et de probabilité de blocage dans un système d'attente, on peut facilement déduire le temps moyen d'attente dans le système comme suit :

$$W_{\theta+\Delta} = \frac{L_{\theta+\Delta}}{\lambda^*}.$$

Où $\lambda^* = \lambda(1 - Pb)$ est le taux effectif des inter-arrivées.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques définitions et généralités sur les formules de développements en séries de Taylor, ce chapitre consacré également sur l'application des développements en série de Taylor dans une chaîne de Markov ergodique et à espace d'états fini. Celle-ci est obtenue en fonction de la matrice fondamentale.

3

Évaluation des performances du modèle d'attente M/G/1/N avec pannes classiques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la méthode des développements en séries de Taylor [39] pour évaluer les mesures de performance du modèle d'attente M/G/1/N avec pannes classiques. Dans ce cadre, nous présentons l'effet de la perturbation de paramètre de pannes sur les performances du ce système, en donnant les résultats numériques pour différentes mesures de performances.

3.2 Description du modèle

Considérons le système de file d'attente $M/G/1/N$ avec pannes classiques. Les clients arrivent dans ce système suivant un flux de Poisson de moyenne $1/\lambda$. La loi de la durée de service des clients est générale de paramètre μ , notons sa fonction de répartition et sa fonction de densité respectivement par $S(x)$ et $s(x)$. La capacité de la file d'attente est limitée et la discipline de service est FIFO.

Soit $\mathbf{N}(t) \in \mathbb{N}$ le nombre de clients dans le système à l'instant t et $\mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^+$ est la quantité de service déjà acquise par le client qui est entrain d'être servi dans le système, pour $t \geq 0$. Soit $\mathbf{X}(t)$ la variable aléatoire décrivant l'état du serveur telle que :

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est opérationnel;} \\ 1, & \text{si le serveur est en panne.} \end{cases}$$

Le processus stochastique $E(t) = \{X(t), N(t), Y(t); t \geq 0\}$ d'espace d'état $\{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ constitue une chaîne de Markov de matrice de probabilités de transition définie par [2] :

$$P(i, j) = \begin{cases} \bar{\beta} \int e^{-\lambda x} dS(x), & \text{si } i=0 \text{ et } j=0; \\ \bar{\beta} \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dS(x) + \bar{\beta} \sum_{k=2}^{j+1} \beta^{k-1} \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-k+1}}{j-k+1!} dS(x), & \text{si } i = 0 \text{ et } j \geq 1; \\ \int e^{-\lambda x} dS(x), & \text{si } i \geq 1 \text{ et } j = i - 1; \\ \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{j-i+1!} dS(x) + \alpha \bar{\beta} \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i}}{j-i!} dS(x) \\ + \alpha \bar{\beta} \sum_{k=2}^{j-i+1} \beta^{k-1} \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-k-i+1}}{j-k-i+1!} dS(x), & \text{si } i \geq 1 \text{ et } j \geq i + 1; \\ \int e^{-\lambda x} (\lambda x) dS(x) + \alpha \bar{\beta} \int e^{-\lambda x} dS(x), & \text{si } i \geq 1 \text{ et } j = i; \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Avec $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$ et $\alpha + \beta < 1$ telles que :

- Si le système est à l'état $\{X(t) = 0, N(t) = n, Y(t) = 0\}$, alors α est la probabilité d'avoir une transition vers l'état $X(t)=1$ et $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ de rester à l'état $X(t) = 0$.
- Si le système est à l'état $\{X(t) = 1, N(t) = n, Y(t) = 0\}$, alors β est la probabilité que le système soit à l'état $\{X(t) = 1, N(t) = n + 1, Y(t) = 0\}$ et $\bar{\beta} = 1 - \beta$ qu'il soit à l'état $\{X(t) = 0, N(t) = n + 1, Y(t) = 0^+\}$ (0^+ car un nouveau service sera commencé tout de suite).

Nous nous intéressons à déterminer la distribution stationnaire approchée associée à la chaîne de Markov par un polynôme de Taylor définie par :

$$\pi_{\alpha+\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{k!} \pi_{\alpha}^{(k)}. \tag{3.1}$$

Pour le calcul des dérivées de π_{α} par rapport à α , nous utilisons une nouvelle démarche, permettant de calculer celle-ci sous forme récursive, développé par Ouazine et Abbas [39].

La représentation explicite des dérivées de la distribution stationnaire π_α d'ordre $k = 1, 2, 3$ est donnée par :

L'ordre 1 :

$$\pi_\alpha^{(1)} = \pi_\alpha P_\alpha^{(1)} Z_\alpha,$$

L'ordre 2 :

$$\pi_\alpha^{(2)} = \pi_\alpha P_\alpha^{(2)} Z_\alpha + 2\pi_\alpha^{(1)} P_\alpha^{(1)} Z_\alpha,$$

L'ordre 3 :

$$\pi_\alpha^{(3)} = \pi_\alpha P_\alpha^{(3)} Z_\alpha + 3\pi_\alpha^{(2)} P_\alpha^{(1)} Z_\alpha + 3\pi_\alpha^{(1)} P_\alpha^{(2)} Z_\alpha.$$

3.3 Calcul numérique

Le calcul numérique des différentes performances du modèle d'attente $M/G/1/N$ avec pannes classique est réalisé à l'aide de logiciel Matlab. Les différents résultats obtenus sont présentés dans des tableaux et des figures. Ainsi, nous avons considéré quatre types de distributions du processus de services :

1. Exponentiel (M), sa fonction de densité est donnée par :

$$s(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0,$$

le processus de service exponentiel a un coefficient de variation $CV = 1$.

2. Hyper-exponentiel d'ordre 2, noté H_2 de fonction de densité définie comme suit :

$$s(x) = \gamma \mu_1 e^{-\mu_1 x} + (1 - \gamma) \mu_2 e^{-\mu_2 x}, \quad \text{avec } 0 \leq \gamma \leq 1,$$

le processus hyper-exponentiel a un coefficient de variation $CV \geq 1$. En changeant les valeurs du paramètre γ , on peut obtenir différentes valeurs de CV. Le coefficient de variation, CV, correspondant à cette distribution est donné par :

$$\sqrt{\frac{1 + (2\gamma - 1)^2}{1 - (2\gamma - 1)^2}}.$$

3. Erlang d'ordre 2, noté E_2 de fonction de densité définie par :

$$s(x) = \frac{\mu_1 \mu_2 (e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t})}{(\mu_2 - \mu_1)}, \quad t \geq 0.$$

Les valeurs du coefficient de variation de la lois d'Erlang d'ordre deux varient entre $1/\sqrt{2}$ et 1. Le coefficient de variation, CV , correspondant à cette distribution est donné par :

$$\sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2}}$$

4. Déterministe (D) de paramètre d , le processus de service déterministe a un coefficient de variation $CV = 0$.

3.3.1 Distribution stationnaire

L'approximation de la distribution stationnaire $\pi_{\alpha+\Delta}$ est obtenue par la méthode de développements en série de Taylor, par un polynôme d'ordre 3. Dans tous les cas nous posons $\alpha = 0.5$ et nous varions le paramètre de perturbation Δ relatif à α dans l'intervalle $[0, 0.1]$, ainsi nous posons $\beta = 0.2$ et la capacité d'attente dans le système $N = 6$.

Les résultats obtenus pour le modèle d'attente $M/M/1/6$ avec pannes sont présentés dans le tableau 3.1. En fixant les valeurs des différents paramètres : le taux de service $\mu = 5$, le taux d'inter-arrivées $\lambda = 1$.

$\Delta \backslash \pi$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
0	0.1287	0.1030	0.1350	0.1677	0.2079	0.2578
0.01	0.1233	0.1007	0.1336	0.1680	0.2105	0.2639
0.02	0.1180	0.0983	0.1322	0.1682	0.2132	0.2702
0.03	0.1127	0.0959	0.1306	0.1683	0.2159	0.2767
0.04	0.1074	0.0934	0.1289	0.1682	0.2185	0.2835
0.05	0.1022	0.0908	0.1272	0.1681	0.2212	0.2905
0.06	0.0970	0.0882	0.1252	0.1679	0.2239	0.2978
0.07	0.0919	0.0855	0.1232	0.1676	0.2265	0.3053
0.08	0.0868	0.0827	0.1211	0.1671	0.2292	0.3132
0.09	0.0818	0.0798	0.1188	0.1665	0.2318	0.3213
0.1	0.0769	0.0769	0.1163	0.1658	0.2344	0.3297

TABLE 3.1 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/M/1/6$ avec pannes

Pour les résultats numériques de la distribution stationnaire du modèle d'attente $M/H_2/1/6$ avec pannes, avec les valeurs des paramètres : $\lambda = 1$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 3/2$ et $\gamma = 0.8$, sont présentés dans le tableau suivant :

$\Delta \backslash \pi$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
0	0.0465	0.0680	0.1132	0.1725	0.2497	0.3501
0.01	0.0436	0.0650	0.1102	0.1708	0.2515	0.3590
0.02	0.0408	0.0621	0.1071	0.1689	0.2532	0.3681
0.03	0.0380	0.0591	0.1039	0.1668	0.2547	0.3775
0.04	0.0354	0.0561	0.1006	0.1646	0.2562	0.3871
0.05	0.0328	0.0532	0.0973	0.1622	0.2575	0.3971
0.06	0.0303	0.0503	0.0938	0.1596	0.2586	0.4073
0.07	0.0280	0.0475	0.0903	0.1568	0.2595	0.4178
0.08	0.0257	0.0447	0.0868	0.1539	0.2603	0.4286
0.09	0.0236	0.0419	0.0831	0.1507	0.2609	0.4397
0.1	0.0216	0.0392	0.0795	0.1474	0.2613	0.4511

TABLE 3.2 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/H_2/1/6$ avec pannes

De la même manière en fixant les paramètres du modèle d'attente $M/E_2/1/6$ avec pannes comme suit : $\lambda = 1/2$, $\mu_1 = 4$ et $\mu_2 = 5/2$. Nous obtiendrons les valeurs de la distribution stationnaire qui sont présentés dans le tableau suivant :

$\Delta \backslash \pi$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
0	0.0950	0.1045	0.1461	0.1845	0.2193	0.2506
0.01	0.0905	0.1016	0.1442	0.1847	0.2222	0.2569
0.02	0.0860	0.0985	0.1423	0.1847	0.2251	0.2634
0.03	0.0816	0.0954	0.1401	0.1846	0.2280	0.2703
0.04	0.0772	0.0923	0.1378	0.1843	0.2309	0.2775
0.05	0.0728	0.0890	0.1353	0.1839	0.2338	0.2851
0.06	0.0686	0.0857	0.1327	0.1832	0.2367	0.2931
0.07	0.0644	0.0823	0.1299	0.1824	0.2396	0.3014
0.08	0.0602	0.0789	0.1269	0.1814	0.2424	0.3102
0.09	0.0562	0.0753	0.1236	0.1802	0.2452	0.3194
0.1	0.0522	0.0717	0.1202	0.1788	0.2480	0.3290

TABLE 3.3 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/E_2/1/6$ avec pannes

Dans le dernier tableau, nous exhibons les résultats numériques de la distribution stationnaire correspondant au modèle d'attente $M/D/1/6$ avec pannes pour les valeurs des paramètres : $\lambda = 1$ et $d = 1/2$.

$\Delta \backslash \pi$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
0	0.0310	0.0526	0.1047	0.1731	0.2618	0.3767
0.01	0.0289	0.0501	0.1015	0.1707	0.2629	0.3858
0.02	0.0269	0.0476	0.0982	0.1681	0.2640	0.3951
0.03	0.0250	0.0452	0.0948	0.1654	0.2648	0.4048
0.04	0.0232	0.0427	0.0913	0.1625	0.2655	0.4147
0.05	0.0214	0.0403	0.0879	0.1594	0.2661	0.4250
0.06	0.0197	0.0380	0.0843	0.1561	0.2664	0.2664
0.07	0.0181	0.0356	0.0807	0.1527	0.2665	0.4463
0.08	0.0166	0.0334	0.0771	0.1491	0.2665	0.4574
0.09	0.0151	0.0312	0.0735	0.1453	0.2662	0.4688
0.1	0.0138	0.0290	0.0698	0.1413	0.2656	0.4805

TABLE 3.4 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/D/1/6$ avec pannes

3.3.2 Probabilité de blocage

Dans cette sous-section, nous illustrons le comportement de la probabilité de blocage par rapport au changement de la capacité d'attente du système N et par rapport au variation du paramètre de perturbation Δ relatif à α . Pour le calcul numérique, nous avons posé $\lambda = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$ et nous avons fixé les valeurs des paramètres de processus de service comme suit :

- Exponentiel (M) : $\mu = 1$;
- Hyper-exponentiel (H2) : $\mu_1 = 2/3$, $\mu_2 = 4$ et $\gamma = 0.3$;
- Erlang (E2) : $\mu_1 = 4/3$ et $\mu_2 = 2$;
- Déterministe (D) : $d = 0.5$.

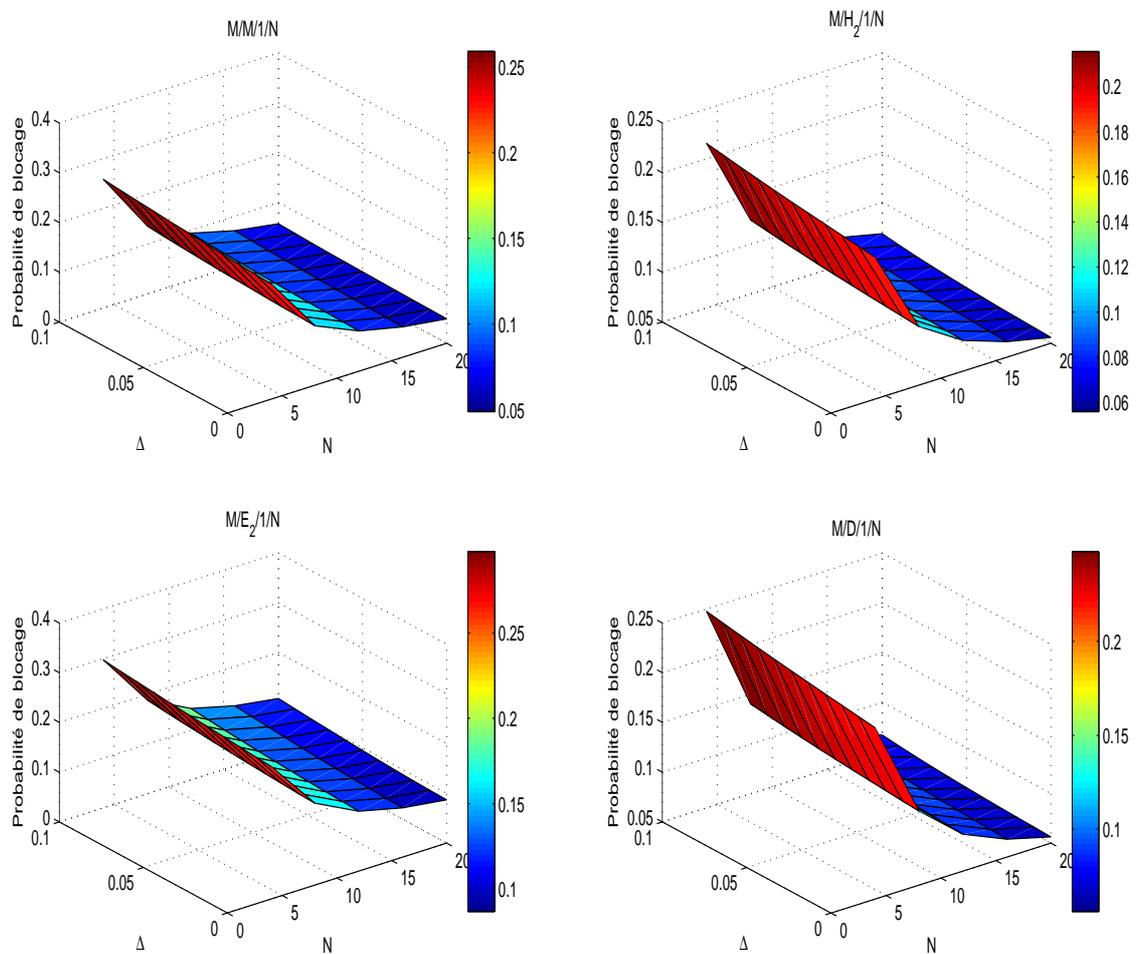


FIGURE 3.1 – Probabilité de blocage en fonction de la capacité d’attente dans système N et du paramètre de perturbation Δ .

On remarque que la probabilité de blocage se comporte de la même manière et cela pour les quatre types de distributions de la durée de service considérées, c’est à dire que à chaque fois on augmente la capacité d’attente du système N la probabilité de blocage diminue, mais elle augmente avec l’augmentation de paramètre de perturbation Δ .

3.3.3 Nombre moyen de clients dans le système

Dans la figure 3.2, nous illustrons l’effet de changement des valeurs de la probabilité α sur le nombre moyen de clients L dans le système, en prenant les même valeurs des paramètres fixés auparavant et pour les même distributions de la durée de service considéré dans l’exemple précédent.

On remarque une augmentation légère de la performance "L" par rapport à la perturbation Δ et cela pour toutes les distributions de la durée de service considérées. Ainsi, la figure 3.3 représente le nombre moyen de clients dans le système en fonction de changement de la capacité du système N.

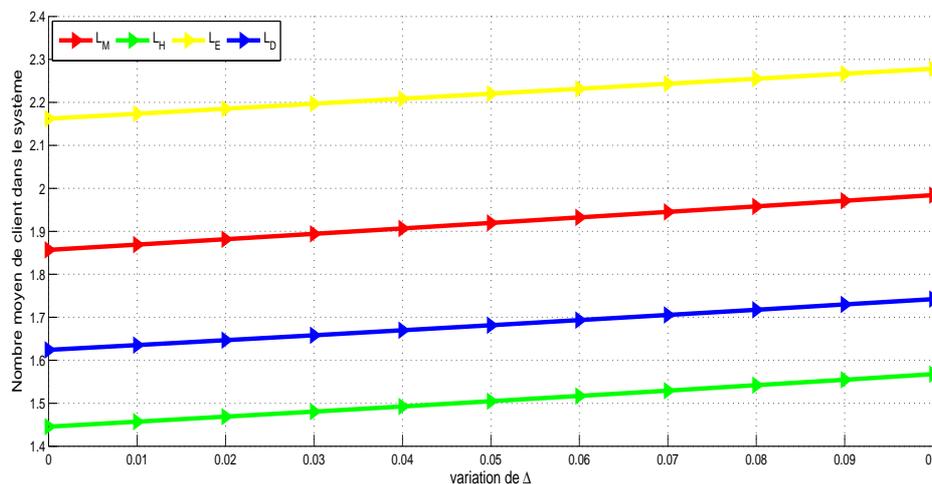


FIGURE 3.2 – Nombre moyen de clients dans le système en fonction paramètre de perturbation.

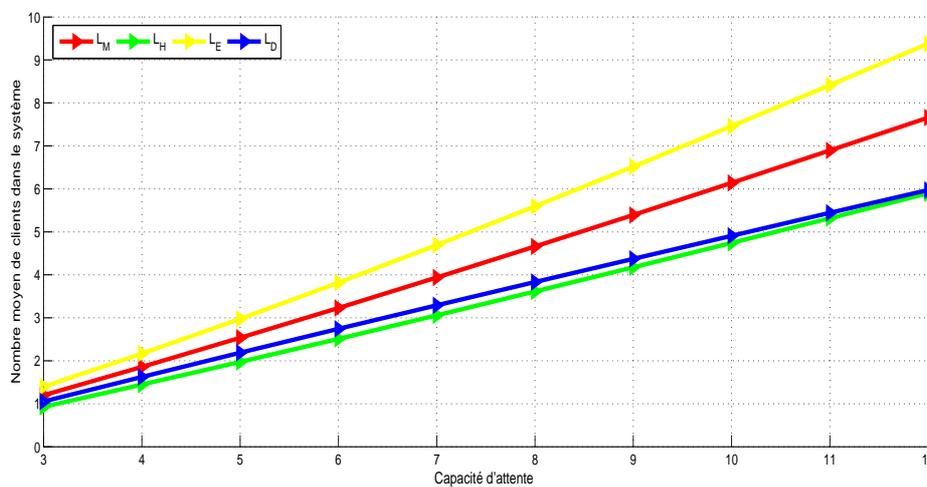


FIGURE 3.3 – Nombre moyen de clients dans le système en fonction N.

D'après l'illustration graphique de la figure 3.3, on constate que l'augmentation de la capacité d'attente dans le système engendre systématiquement une augmentation des valeurs de nombre moyen de client dans le système en question. Cela se coïncide

avec la réalité du système. En effet, plus on rajoute des places d'attente, plus le nombre de client présents dans le système augmente.

3.3.4 Temps moyen d'attente d'un client dans le système

Maintenant, nous présenterons le comportement de temps moyen d'attente d'un client dans le système par rapport au variation de paramètre de perturbation Δ et la capacité d'attente dans le système N . On voit que le temps moyen d'attente d'un client "W" dans le système augmente lorsque la capacité du système augmente et on observe la même chose par rapport à la variation de paramètre du perturbation Δ .

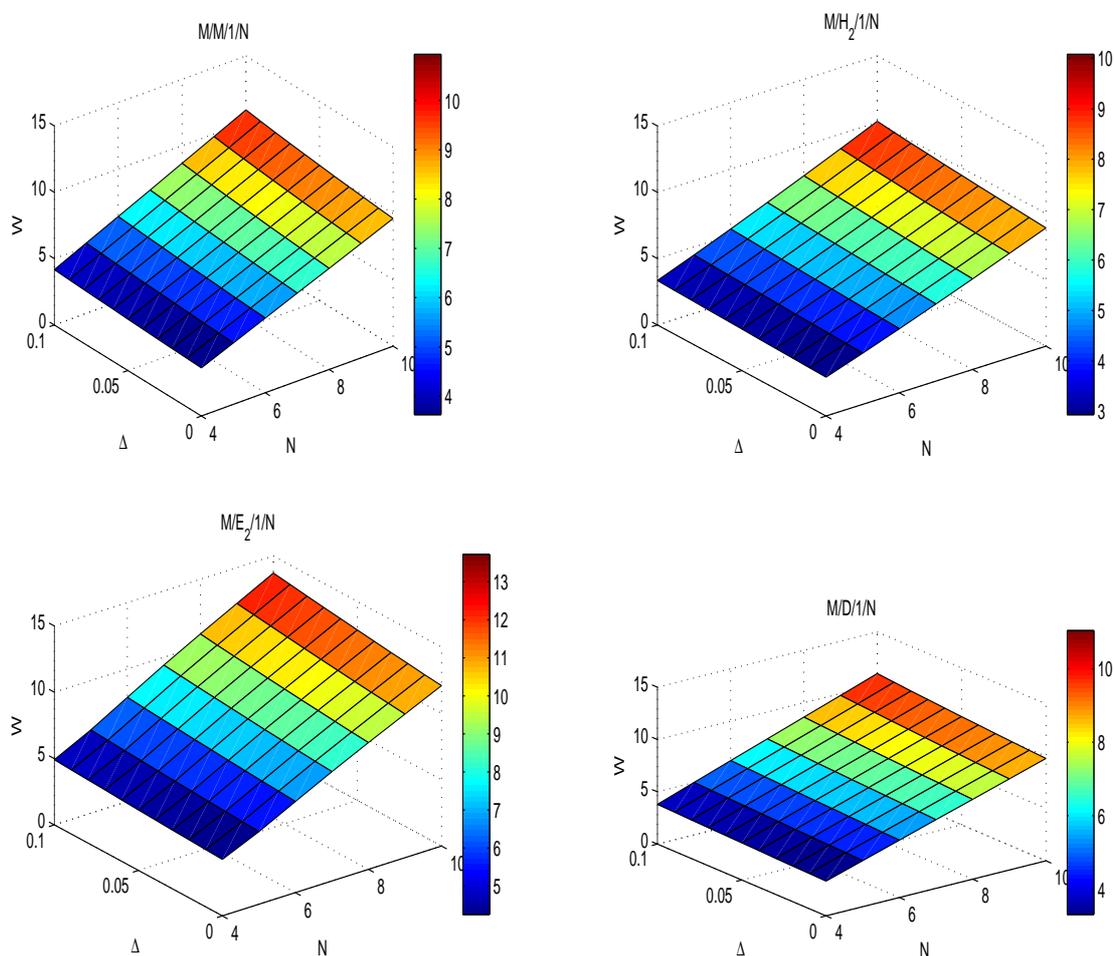


FIGURE 3.4 – Temps moyen d'attente d'un client dans le système en fonction de Δ et N .

3.4 Conclusion

Comme nous avons vu dans ce chapitre que la méthode des développements en séries de Taylor c'est un outil efficace pour approximer les différentes mesures de performance du modèle $M/G/1/N$ avec pannes classiques précisons que la perturbation considérée dans cette analyse est non-linéaire. Celle-ci correspond à la perturbation de la probabilité que le serveur tombe en panne. Ainsi, nous avons pu illustrer les résultats numériques correspondant aux mesures de performances du modèle considéré telle que la probabilité de blocage, le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen d'attente d'un client dans le système.

4

Évaluation des performances du modèle d'attente $M/G/1/N$ avec perte définitive de client

4.1 Introduction

Dans un système de file d'attente quand le serveur tombe en panne le client a le choix soit d'attendre la fin de réparation du serveur pour qu'il soit servi, ou bien de quitter le système. Dans le présent chapitre, nous considérons le système de file d'attente $M/G/1/N$ non fiable avec perte définitive de client, c-à-d dès que le serveur tombe en panne le client en cours de service quitte le système définitivement. Notre objectif est d'étudier le comportement des mesures de performance de ce système par rapport à la perturbation du taux de pannes. Cette perturbation étant linéaire, ce qui facilite le calcul des dérivés d'ordre supérieure de la distribution stationnaire.

4.2 Présentation du modèle

Considérons la file d'attente $M/G/1/N$ avec pannes. Les temps des inter-arrivées sont indépendants et identiquement distribués selon une loi exponentielle de paramètre λ . Le temps de service est réparti suivant une loi quelconque de fonction de répartition $S(x)$ et de moyenne $1/\mu$. La capacité de la file d'attente est finie et la discipline de service des clients est FIFO.

Dans ce cas, nous considérons les pannes avec perte définitive de client. Soit θ la probabilité que le client est pris en charge par le serveur et $1 - \theta$ la probabilité qu'il quitte le système lorsque le serveur est tombé en panne. La période de la réparation est exponentielle de taux $r > 0$

Soit le processus stochastique $E_t = \{N_t, X_t, Y_t; t \geq 0\}$ décrivant l'état de ce système à l'instant t , où :

N_t : est "le nombre de clients dans le système à l'instant t "

X_t : est une variable définissant l'état de serveur telle que :

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{Si le serveur est en bon état;} \\ 1, & \text{Si le serveur est en panne.} \end{cases}$$

Y_t : est une variable aléatoire, définie comme suit :

- Si $X_t = 0$ et $N_t = 0$, alors Y_t est la durée du temps qui s'écoule entre l'instant t et l'instant d'occurrence d'une panne tout en ayant le système vide.
- Si $N_t \neq 0$,
 - Si $X_t = 0$, Y_t est la durée du temps restante de service (la durée résiduelle de service).
 - Si $X_t = 1$, Y_t est la durée du temps restante de réparation (la durée résiduelle de réparation).

Le processus E_t possède la propriété de Markov de noyau de transition $P = (P_{ij})_{i,j \geq 0}$ définie comme suite [2] :

$$P_{ij} = \begin{cases} \theta \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} d(S(x)) + (1 - \theta) \frac{r}{r+\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)^j, & \text{Si } i=0; \\ \theta \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} d(S(x)) + (1 - \theta) \frac{r}{r+\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)^{j-i+1}, & \text{Si } 1 \leq i \leq j + 1; \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

La matrice de transition P_{ij} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P_\theta = \theta P_1 + (1 - \theta) P_2, \quad \theta \in [0, 1].$$

où P_1 est la matrice des probabilités de transition de la file d'attente M/G/1 et P_2 est la matrice des probabilités de transition de la file d'attente M/M/1.

On définit la dérivée d'ordre k de la matrice des probabilités de transition P_θ par rapport au paramètre θ par :

$$P_\theta^{(1)} = P_1 - P_2,$$

$$P_\theta^{(k)} = 0, \quad \forall k \geq 2.$$

Nous nous intéressons à développer la distribution stationnaire associée à la chaîne de Markov sous la forme de la série de Taylor suivant :

$$\begin{aligned} \pi_{\theta+\Delta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{k!} \pi_\theta^{(k)}, \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k}{k!} \pi_\theta^{(k)} + R_\theta(n, \Delta), \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec $R_\theta(n, \Delta)$ est le reste du développement de Taylor et $\pi_\theta^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de la distribution stationnaire.

Dans ce cas la dérivée d'ordre k de la distribution stationnaire $\pi_\theta^{(k)}$ par rapport au paramètre θ définie dans [3] par

$$\pi_\theta^{(k)} = k! \pi_\theta ((P_1 - P_2) Z_\theta)^k \tag{4.2}$$

Si on remplace $\pi_\theta^{(k)}$ par sa formule (4.2) dans la formule (4.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_{\theta+\Delta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{k!} k! \pi_\theta ((P_1 - P_2) Z_\theta)^k. \\ \pi_{\theta+\Delta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \pi_\theta ((P_1 - P_2) Z_\theta)^k. \\ \pi_{\theta+\Delta} &= \sum_{k=0}^n \Delta^k \pi_\theta ((P_1 - P_2) Z_\theta)^k + R_\theta(k, \Delta). \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.3 Application numérique

Dans le but d'évaluer les performances du modèle d'attente $M/G/1/N$ à serveur non fiable considéré dans ce chapitre, nous fournissons une série de résultats numériques pour différentes performances du modèle étudié à l'aide de logiciel Matlab.

4.3.1 Distribution stationnaire

Nous avons réalisé nos calculs en considérant toutes les distributions de la durée de service qu'on a utilisé dans le chapitre précédent. Pour chaque cas, nous fixons la probabilité de panne $\theta = 0.9$, le taux de réparation $r = 0.4$, la capacité du système $N = 7$ et le taux des inter-arrivées $\lambda = 1$. Nous effectuons des perturbations sur les valeur de la probabilité θ .

Les résultats numériques de la distribution stationnaire obtenus pour chaque cas considéré sont présentés dans les tableaux suivants :

- **La durée de service suivant une loi exponentielle : la file $M/M/1/7$ non fiable**

Nous posons le taux de service $\mu = 0.6$. La valeur estimée de l'erreur relative pour ces paramètres pour un polynôme de Taylor l'ordre 3 est présentée dans la figure 4.1.

$\Delta \backslash \pi$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
0	0.0006	0.0020	0.0063	0.0204	0.0660	0.2136	0.6911
0.01	0.0006	0.0020	0.0065	0.0208	0.0668	0.2145	0.6888
0.02	0.0007	0.0021	0.0067	0.0212	0.0676	0.2154	0.6864
0.03	0.0007	0.0022	0.0068	0.0216	0.0684	0.2163	0.6840
0.04	0.0007	0.0022	0.0070	0.0220	0.0692	0.2172	0.6816
0.05	0.0007	0.0023	0.0072	0.0225	0.0700	0.2180	0.6792
0.06	0.0008	0.0024	0.0074	0.0229	0.0708	0.2189	0.6768
0.07	0.0008	0.0025	0.0076	0.0233	0.0716	0.2198	0.6744
0.08	0.0008	0.0026	0.0078	0.0238	0.0724	0.2206	0.6719
0.09	0.0009	0.0027	0.0080	0.0242	0.0733	0.2215	0.6694
0.1	0.0009	0.0027	0.0082	0.0247	0.0741	0.2217	0.6670

TABLE 4.1 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/M/1/7$ avec pannes

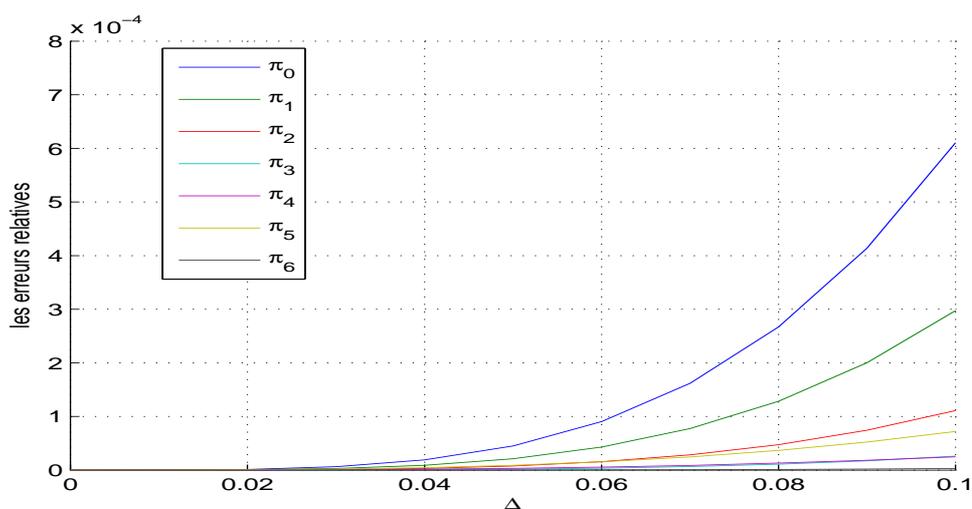


FIGURE 4.1 – Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{\theta+\Delta}$ par la série de Taylor d'ordre 3 du modèle $M/M/1/7$

- **La durée de service suivant une loi Hyperexponentielle : la file $M/H_2/1/7$ avec pannes)**

En fixant les valeurs des différents paramètres du modèle comme suit : $\mu_1 = 3/2$, $\mu_2 = 3$ et $\gamma = 0.3$. La figure 4.2 présente l'erreur relative absolue commise sur le calcul de la distribution stationnaire du modèle $M/H_2/1/7$ par un polynôme de Taylor d'ordre 3.

$\Delta \backslash \pi$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
0	0.1032	0.1239	0.1380	0.1483	0.1563	0.1626	0.1677
0.01	0.1050	0.1253	0.1388	0.1484	0.1556	0.1613	0.1657
0.02	0.1068	0.1267	0.1395	0.1484	0.1549	0.1599	0.1638
0.03	0.1086	0.1281	0.1402	0.1484	0.1542	0.1586	0.1620
0.04	0.1104	0.1294	0.1408	0.1483	0.1535	0.1573	0.1602
0.05	0.1122	0.1307	0.1415	0.1483	0.1528	0.1561	0.1584
0.06	0.1140	0.1320	0.1421	0.1482	0.1521	0.1548	0.1567
0.07	0.1158	0.1333	0.1426	0.1481	0.1514	0.1536	0.1551
0.08	0.1176	0.1346	0.1432	0.1480	0.1507	0.1524	0.1535
0.09	0.1194	0.1358	0.1437	0.1478	0.1500	0.1512	0.1520
0.1	0.1212	0.1370	0.1442	0.1477	0.1493	0.1501	0.1505

TABLE 4.2 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/H_2/1/7$ avec pannes

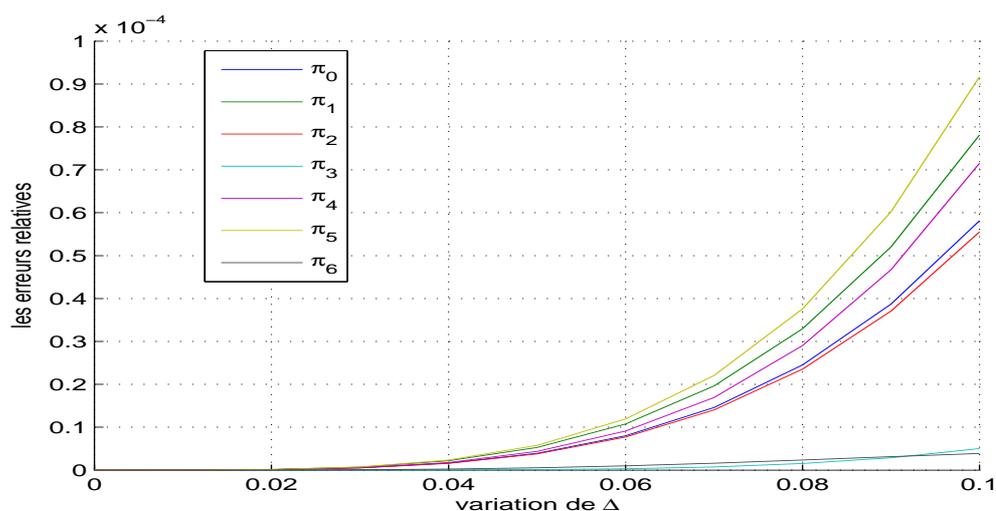


FIGURE 4.2 – Erreurs relatives absolues associées au développement de Taylor d'ordre 3 pour le modèle $M/H_2/1/7$

- **La durée de service suivant une loi d'Erlang à la file d'attente $M/E_2/1/7$ avec pannes**

Les valeurs des différents paramètres de ce modèle sont fixés de cette manière : $\mu_1 = 4$ et $\mu_2 = 2$. Les erreurs relatives correspondantes au calcul de la distribution stationnaire par un polynôme de Taylor du degré 3 sont illustrées dans la figure 4.3.

$\Delta \backslash \pi$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
0	0.0696	0.0990	0.1245	0.1473	0.1680	0.1870	0.2046
0.01	0.0712	0.1008	0.1259	0.1479	0.1675	0.1852	0.2014
0.02	0.0729	0.1025	0.1273	0.1485	0.1671	0.1835	0.1981
0.03	0.0746	0.1043	0.1287	0.1491	0.1666	0.1817	0.1950
0.04	0.0763	0.1061	0.1300	0.1497	0.1661	0.1800	0.1919
0.05	0.0781	0.1079	0.1313	0.1502	0.1655	0.1782	0.1888
0.06	0.0798	0.1096	0.1327	0.1507	0.1649	0.1765	0.1858
0.07	0.0816	0.1114	0.1339	0.1511	0.1644	0.1747	0.1829
0.08	0.0834	0.1132	0.1352	0.1515	0.1637	0.1730	0.18000
0.09	0.0852	0.1150	0.1364	0.1519	0.1631	0.1712	0.1772
0.1	0.0870	0.1167	0.1377	0.1523	0.1624	0.1695	0.1744

TABLE 4.3 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/E_2/1/7$ avec pannes

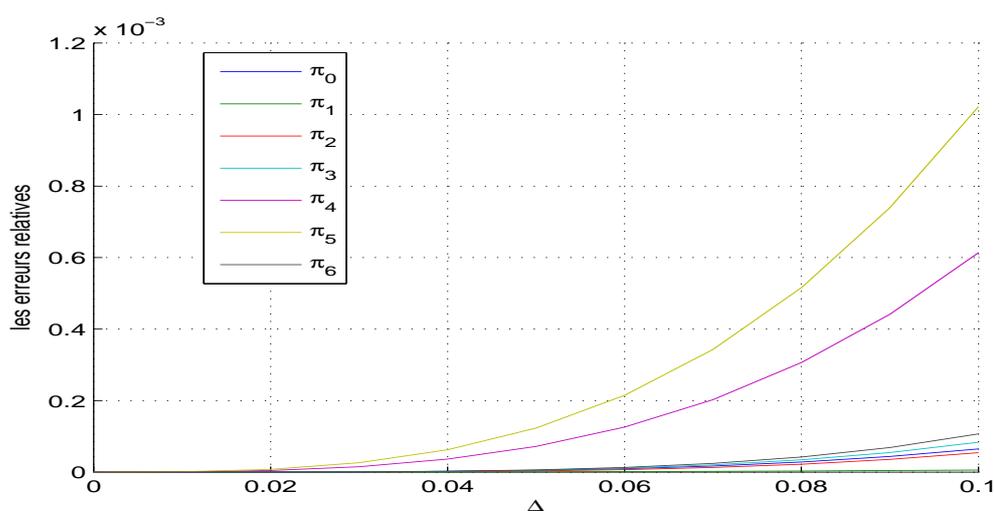


FIGURE 4.3 – Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{\theta+\Delta}$ par la série de Taylor d'ordre 3 du modèle $M/E_2/1/7$ avec pannes

- **La durée de service suivant une loi Déterministe : la file $M/D/1/7$ avec pannes**

Dans le quatrième exemple, on considère le modèle d'attente $M/D/1/7$ avec pannes. La distribution stationnaire associée à ce modèle est donnée dans le tableau 4.4 en prenant $d = 1$. Les valeurs des erreurs relatives associées au développement de Taylor d'ordre 3 présentée pour le calcul de la distribution stationnaire sont données en figure 4.4.

$\Delta \backslash \pi$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
0	0.1011	0.1244	0.1384	0.1485	0.1565	0.1629	0.1682
0.01	0.1032	0.1260	0.1393	0.1485	0.1556	0.1613	0.1659
0.02	0.1053	0.1277	0.1402	0.1485	0.1548	0.1598	0.1637
0.03	0.1074	0.1294	0.1410	0.1485	0.1540	0.1582	0.1582
0.04	0.1095	0.1310	0.1418	0.1485	0.1532	0.1567	0.1594
0.05	0.1116	0.1326	0.1426	0.1484	0.1523	0.1552	0.1574
0.06	0.1137	0.1342	0.1433	0.1482	0.1514	0.1537	0.1554
0.07	0.1158	0.1357	0.1440	0.1481	0.1506	0.1523	0.1535
0.08	0.1179	0.1373	0.1447	0.1479	0.1497	0.1509	0.1517
0.09	0.1200	0.1388	0.1453	0.1477	0.1488	0.1495	0.1499
0.1	0.1221	0.1403	0.1459	0.1475	0.1480	0.1481	0.1481

TABLE 4.4 – Distribution stationnaire du nombre de clients dans le modèle d'attente $M/D/1/7$ avec pannes

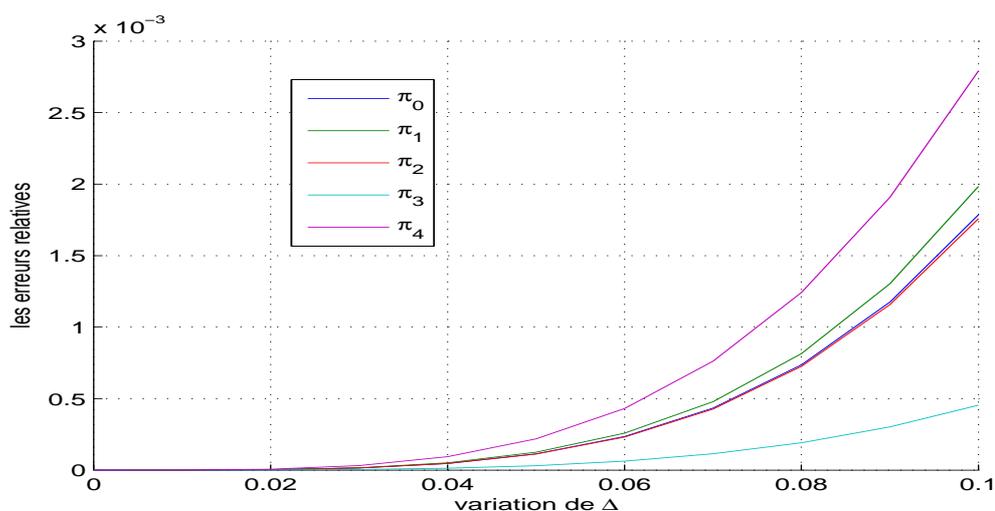


FIGURE 4.4 – Erreurs relatives dans le calcul de $\pi_{\theta+\Delta}$ par la série de Taylor d'ordre 3 du modèle $M/D/1/7$ avec pannes

4.3.2 Probabilité de blocage

Dans la figure 4.5, nous présentons la variation de la probabilité de blocage par rapport au changement de la capacité d'attente dans le système considéré. De même, on constate que l'augmentation de la capacité de système engendre la diminution de la probabilité de blocage.

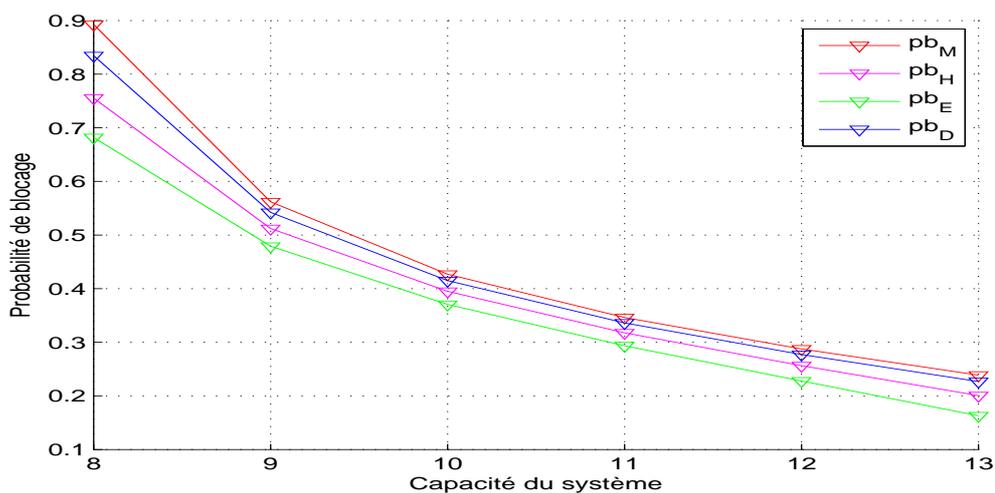


FIGURE 4.5 – Probabilité de blocage en fonction de la capacité d'attente dans le système N .

4.3.3 Nombre moyen de clients

À la différence du modèle de file d'attente étudié dans le chapitre précédent, dans le cas présent (le modèle $M/G/1/N$ non fiable avec perte définitive de client) on constate que le nombre de clients dans le système diminue par rapport à l'augmentation du paramètre de perturbation Δ . Cela s'explique par le fait que le client quitte le système lorsque le serveur tombe panne.

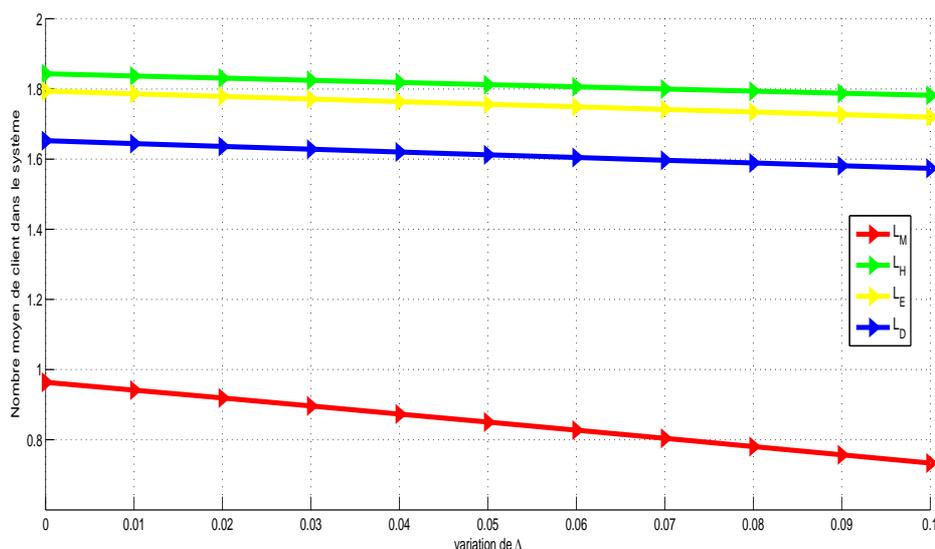


FIGURE 4.6 – Nombre moyen de clients dans le système en fonction de la variation de paramètre de perturbation Δ .

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé numériquement les différentes mesures de performance du modèle d'attente $M/G/1/N$ avec pannes (perte définitive de clients) et ce en utilisant la nouvelle approche développée par Ouazine et Abbas [39]. Celle-ci étant basée sur les développements en série de Taylor. La perturbation considérée est celle de la probabilité du pannes de serveur, précisant que celle-ci est linéaire. Ainsi, une analyse de sensibilité de plusieurs métriques stationnaires a été réalisé par rapport à la perturbation en question.

Conclusion

Les modèles de files d'attente sont reconnus largement comme outils puissants pour l'optimisation de performances des systèmes réels. Ainsi, l'analyse de ces systèmes est généralement très difficile à résoudre et à interpréter par les méthodes analytiques. Pour la résolution de ces problèmes, on fait recours souvent à des méthodes d'approximation. Parmi ces méthodes, on peut citer celle de développement en séries de Taylor des chaînes de Markov qui est un outil très efficace pour évaluer les performances des systèmes considérés. Dans ce cas, une telle mesure de performance est représentée sous forme polynômiale, ce qui facilite leurs manipulations mathématiques.

Dans ce mémoire, nous avons montré l'applicabilité et la flexibilité de la méthode de développement en série de Taylor des chaîne de Markov aux systèmes d'attente à serveur non fiable, où les dérivées de la distribution stationnaire sont exprimées en termes de la matrice fondamentale. Plus précisément, une application numérique au système $M/G/1/N$ à serveur non fiable a été réalisée.

Dans un premier temps, nous avons fait une synthèse des résultats sur les systèmes d'attente à serveur non fiable. Dans un deuxième temps, nous avons illustré l'application de l'approche des développements en séries de Taylor pour approcher quelques mesures de performance du modèle d'attente $M/G/1/N$ à serveur non fiable, où nous avons considéré deux types de perturbations, linéaires pour le modèle $M/G/1/N$ à serveur non fiable avec perte définitive de client, et non-linéaires pour le $M/G/1/N$ avec pannes classiques. L'approximation a concerné particulièrement la distribution stationnaire, la probabilité de blocage, le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen d'attente d'un client, où nous avons présenté ces performances par rapport au perturbation des paramètres de panne.

En termes de continuité de ce travail, plusieurs perspectives de recherche peuvent-être envisagées, entres autres, on peut citer :

- Elargir l'applicabilité de cette approche aux cas de réseaux de files d'attente non fiables ;
- Analyse du reste du développement de Taylor ;
- Analyse de l'incertitude paramétrique par la même approche.

Bibliographie

- [1] Abbas, K. (**2003**) Stabilité Forte dans un système d'attente M/G/1 à Serveur Non Fiable, Thèse de Magister, Université de béjaia.
- [2] Abbas, K. (**2010**) Approximation dans les systèmes de files d'attente à serveurs non fiable, Thèse de doctorat, Université de béjaia.
- [3] Abbas, K. Berkhout, J. and Heidergott, B. (**In press 2016**) A critical Account of Perturbation Analysis of Markov Chains, Markov Processes and Related Fields.
- [4] Abbas, K. Berkhout, J. and Heidergott, B. (**2015**) A critical Account of Perturbation Analysis of Markov Chains, Markov Systèmes, Research Memorandum 2015- 3, Vrije Universiteit Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands.
- [5] Abbas, K. Heidergott, B. and Aissani, D. (**2013**) A functional approximation for the M/G/1/N queue, Discrete Event and Dynamic Systems 23 : 93 - 104.
- [6] Abbas, K. Heidergott, B. and Aissani, D. (**2011**) A Taylor series expansion approach to the functional approximation of finite queues. Research Memorandum 49, Vrije Universiteit Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands.
- [7] Aissani, A and Aïssani, D. (**1986**) Fiabilité des systèmes. Systèmes de files d'attente non fiables, U. E. R. Mathématiques-Informatique, Brdj-El-Bahri, Alger, ENITA edition.
- [8] Aissani, A and Artalejo, J. R. (**1998**) On the single server retrial queue subject to breakdown, Queueing Systems, 30 :309-321.
- [9] Avi-Itzhak, B and Naor, P. (**1963**) Some Queueing Problemes with the service station subject to breakdown, Oper.Res,11 :3 :303-320.
- [10] Baba-Hamed, C. et Benhabib, K. (**1990**) Analyse 2 : Rappels de Cours et Exercices avec Solutions. Office des Publications Universitaires (OPU), Alger.
- [11] Baccelli, F. and Znati, T. (**1981**) Queueing systems with breakdowns in data base modeling. Proceedings of Performance 81 (8-th IFIP International Symposium on Comp. Perf. Model). pp. 213 – 232, North Holland, Amsterdam, The Netherlands.

-
- [12] Baynat, B. (2000) *Théorie des Files d'Attente*. Hermes, Paris.
- [13] Bernstein, S. (1996) Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités. *Math. Annalen*, Bd. 97 : 1 - 59.
- [14] Bruneel, H. (1984) A general model for the behaviour of infinite buffers with periodic service oportunities, *Euro.J.Oper.Res*, 16 :98-106.
- [15] Bruneel, H and Byung, K.G. (1993) *Discrete-Time Models for Communication Systems Incuding ATM*, Kluwer Academic Publishers.
- [16] Borovkov, A. A. (1972) *Processus probabilistes de la théorie de files d'attente*, Ed. Navka, Moscou.
- [17] Borovkov, A. A. (1980) *Méthodes asymptotique en théorie de files d'attente*, Moscou, Navka edition.
- [18] Cao, X.-R. (1998) The Maclaurin series for performance functions of Markov chaînes. *Advances in Applied Probability* 30 : 676-692.
- [19] Chan, W. Bartoszynski, R and Pearl, D. (1993) Queues with break downs and customer discouragement, *Probability and Mathematical Statistics* 14(1) :77-87.
- [20] Demailly, J. P. (2006) *Analyse Numérique et Equation Différentielle*, EDP Science, France.
- [21] Duan-Shin, L. (1997) Analysis of a single server queue with semi-Markovian service interruption, *Queueing Systems*, 27 :153-178.
- [22] Doshi, B.T. (1986) Queueing systems with vacations, *Queueing Systems* 1 :29-66.
- [23] Gaver, D. P. (1962) A waiting Line with Interrupted Service, including Priorities, *J. Roy.Stat. Soc. J, B* 25 :73-90.
- [24] Gelenbe. E. (1991) Product-form queueing networks with negative and positive customers, *Journal of Applied Probability* 28 (3) : 656-663.
- [25] Genet, J et Pupion, G. (1974) *Analyse Moderne 2*, Vuibert Broché, France.
- [26] Gong, W.B and Hu, J.K. (1992) The Maclaurin series of the GI/G/1 queues, *Journal of Applied Probability* 29 : 184-276
- [27] Heidergott, B. Hordijk, A. (2003) Taylor series expansions for stationary Markov chains. *Adv. Appl. Probab*, 35 : 1046 - 1070.
- [28] Heidergott, B. Hordijk, A. and Van Uitert, M. (2006) Series expansions for finite-state Markov chains, Technical report, Vrije Universiteit, Departement of Economics, Amsterdam, The Netherlands.

- [29] Heidergott, B. Hordijik, A. and N Leder.M. (2006) Series expansions for continuous-time Markov processes, Technical report, Vrije Universiteit, Department of Economics, Amsterdam, The Netherlands.
- [30] Ivniiski, V. A. (1969) Sur la distribution transitoire de la taille de la file dans un système constitué d'un serveur non fiable, Recueil Math. de Lituanie, N°2
- [31] Keilson, J. Cozzolino, J and Young, H. (1968) A service system with unfilled requests repeated, Operations Research 16 : 1126-1137
- [32] Kemeny J.G. and Snell J.L. (1960) Finite Markov Chains, Van Nostrand, New York.
- [33] Khalladi, A. (2013) Introduction à L'analyse Mathématique, Office des publications universitaires, Alger.
- [34] Kleinrock. L.(1975) Queueing systems, computer applications, John Wiley and Sons.
- [35] Krishnamoorthy, A. Pramod, P.K and Deepak, T.G. (2009) On a queue with interruptions and repeat or resumption of service. Nonlinear Analysis : Theory, Methods et applications, Revue 71, 1673- 1683.)
- [36] Kulkarni.V.G and Choi.B.D. (1990) Retrial Queues with server subject to break-downs and repairs, Queueing Systems, 7 :191-208.
- [37] Mercier, D. J. (2003) Formules de Taylor. Application, IUMF de Guadeloupe, France.
- [38] Messeri, M. (1985) Exercice de Mathématique de Analyse1, Librairie Classique Eugène Belin, France.
- [39] Ouazine, S. and Abbas, K. (2016) Development of computational algorithm for multiserver queue with renewal input and synchronous vacation, Applied Mathematical Modelling Journal 40 : 1137-1156.
- [40] Ouazine, S. Abbas, K and Heidergott, B. (2013) The Taylor series expansions for performance functions of queues : Sensitivity Analysis, In A, Dudin and K. de Turck (Eds), ASMTA 7984, 1-11, Springer.
- [41] Ouazine, S and Abbas, K. (2016) A Functional Approximation for Retrial Queues with two Way Communications, submitted to the Annals of operation research, DOI 10.1007/s10479-015-2083-2.
- [42] Roger, P. (2006) Mathématiques pour l'Economie et la Gestion :Application avec l'excel, Pearson Education, France.
- [43] Schwartz, M. (1981) Computer communication network sing and analysis, Prentice Hall, New jersey.

- [44] Thuillier, P. (**1980**) Cours de Mathématiques Supérieures, Masson. Paris.
- [45] White, H.C and Christie, L. S. (**1958**) Queueing with preemptive priorities or with breakdown, Oper. Res, 6 :79-95.
- [46] Zazanis, M.A. (**1992**) Analyticity for Poisson driven stochastic systems, Advances in Applied Probability 24 : 532-541.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons appliqué l'approche des développements en séries de Taylor des chaînes de Markov aux systèmes de files d'attente à serveur non fiable, nous nous sommes intéressés à l'application de cette approche pour approximer les différentes métriques de performance du modèles étudiés, où nous avons considéré deux types des modèles, le modèle M/G/1/N à serveur non fiable avec perte définitive de client où nous avons considéré une perturbation linéaires et le modèle M/G/1/N avec pannes classique dans ce cas nous avons considéré une perturbation non linéaires.

Mots-clés : Systèmes de files d'attente à serveur non fiable, Pannes, Chaîne de Markov, Matrice fondamentale, Développement en séries de Taylor.