



Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Physique théorique

Thème

Contribution à l'étude des ondes hydrodynamiques dans les écoulements à surface libre

Présentée par

Melle ROUHA Nedjma

Soutenu le: 14/06/2016

Devant le Jury composé de:

MAHTOUT	Sofiane	MCA	Président
OULEBSIR	Nadia	MCA	Examineur
NESSAS	Houria	MAA	Examineur
MEHIDI BOUAM	Nadia	MCA	Rapporteur

Résumé

Les écoulements dans les conduites courbes sont présents dans des applications industrielles diverses, tels que les échangeurs de chaleur, les systèmes de refroidissement des turbines et des chambres de combustion, les réacteurs chimiques et dans de nombreux procédés de revêtements comme les fibres optiques. Dans ce travail on se limitera à l'étude des films liquides en écoulement bidimensionnels à l'intérieur ou à l'extérieur d'une paroi courbe. Mathématiquement le problème est décrit par les équations de Navier Stokes incompressibles en prenant en considération la faible épaisseur de l'écoulement. L'objet de ce travail est qu'à partir de ces équations de présenter l'adimensionnement avec l'introduction des nombres sans dimension, puis développer un modèle décrivant les ondes qui se développent à la surface libre à partir d'une méthode basée sur les résidus pondérés. Ces ondes sont amorties ou amplifiées selon les paramètres de contrôle de l'écoulement.

Mots clés : écoulements laminaires ; fluides visqueux ; films minces ; interface ; instabilité capillaire ; instabilité hydrodynamique.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents, qui m'ont fait connaître les

Portes du s'avoir. Merci pour votre générosité,

Ouverture d'esprit, votre patience et votre

Endurance

A mes très chers frères : GHANO et AMINE

A mes très chers sœurs : KAHINA et SOUHILA

A tous mes amis

NEDJMA ROUHA

REMERCIEMENTS

Au nom d'Allah, le miséricordieux. Je remercie en premier lieu, le dieu le tout puissant qui m'a donné la force et la volanté pour accomplir ce modeste travail.

Je dois remercier ma famille : Père, Mère, Frères et sœurs et je tiens à exprimer mes remerciements et hommages à tous mes enseignants de la formation qui m'ont transmis leur savoir et connaissances.

Je tiens à remercier **Mme MEHIDI Nadia** pour avoir accepté de m'encadrer et pour m'avoir beaucoup aidée.

Mes remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont apporté à ce travail :

Mr. MAHTOUT Sofiane président de jury ainsi que **Mme OULEBSIR Nadia** et **Mme NESSAS Houria** .

J'adresse mes chaleureux remerciements à mes collègues de travail à Barbacha chacun de son nom ainsi qu'à mes élèves.

Je tiens aussi à témoigner ma sincère gratitude à tous ceux qui m'ont assisté de prés ou de loin.

TABLES DES MATIERES.....	4
Notation.....	7
Introduction générale	9
- Motivations.....	10
- Plan du travail.....	10
ChapitreI- Caractérisation rhéologiques des fluides et équations de base	
I.1 Introduction	13
I.2 Notation fondamentales de la rhéologie.....	13
I.2.1 Tenseur gradient de vitesse.....	13
I.2.2 Tenseur taux de déformation.....	13
I.3 Tenseur des contraintes.....	14
I.3.1 Notion de viscosité des fluides	15
I.3.2 Propriétés physiques de quelques fluides.....	16
I.4 classification des fluides selon leur comportement rhéologique.....	16
I.4.1 Loi de comportement pour un fluide newtonien.....	16
I.4.2 Fluides non newtoniens.....	16
I.5 Equation de Navier-Stokes incompressibles.....	18
I.5.1 Développement en coordonnées cartésiennes.....	18
I.5.2 Développement en coordonnées cylindriques.....	19

ChapitreII – Formulation générale d’un problème d’écoulement par gravité

II.1 Introduction.....	21
II.2 Formulation mathématique.....	21
II.2.1 Equations de Navier-Stokes.....	21
II.2.2 Conditions aux limites.....	21
II.3 Ecoulement d’un film mince autour d’un cylindre.....	22
II.3.1 Equations du mouvement.....	23
II.3.2 Conditions aux limites pour un écoulement bidimensionnel.....	24
II.3.3 Système d’équations complet pour un écoulement bidimensionnel.....	24
II.4 Equations régissant un écoulement plan 2D.....	26

ChapitreIII –Modélisation d’un écoulement d’un film autour d’un cylindre

III.1 Introduction.....	29
III.2 Ecoulement de base.....	29
III.2.1 Ecoulement de base pour un écoulement axisymétrique.....	29
III.2.2 Ecoulement de base pour un écoulement sur un plan incliné.....	31
III.2.3 Etude comparative : Effet de la courbure.....	32
III.3 Représentation adimensionnelle des équations.....	33
III.3.1 Echelles caractéristiques	33
III.3.2 Nombres sans dimension.....	35
III.4 Mise en Œuvre de la méthode aux résidus pondérés.....	35

Chapitre IV –Résultats de stabilité linéaire

Introduction.....	39
IV 1.Stabilité linéaire.....	39

IV 1.Stabilité marginale.....	40
IV.1.1 Influence de la courbure.....	40
IV.1.2 Influence de la tension superficielle.....	42
Conclusion et perspectives.....	45
Références bibliographiques.....	46

NOTATIONS

Symboles Romains	
\mathbf{V}	Vecteur vitesse
\mathbf{g}	Accélération gravitationnelle
t	Temps
(x, y, z)	Coordonnées cartésiennes
(r, θ, z)	Coordonnées cylindriques
(u, v)	Composantes de la vitesse suivant les axes x et y
p_a	Pression atmosphérique
p	Pression
$F(x, y, z, t)$	Equation de la surface libre
\mathbf{n}	Normale à l'interface
\mathbf{t}	Vecteur unitaire tangent à l'interface
R_c	Rayon du cylindre
h	Epaisseur du fluide
h_N	Epaisseur du film uniforme
Symboles Grecs	
θ	Angle d'inclinaison du plan incliné
μ	viscosité dynamique du fluide
η_0	viscosité de dilatation du fluide
ν	viscosité cinématique du fluide
ρ	Masse volumique du fluide
γ	Tension de surface du fluide
χ	Courbure de l'interface

λ	Longueur d'onde
θ	Coordonnée azimutale
ω	Pulsation de l'onde
ω_r	Pulsation réelle
ω_i	Taux d'amplification de l'onde
Nombres sans dimensions	
Re	Nombre de Reynolds
We	Nombre de Weber
$\varepsilon = \frac{h}{\lambda}$	Paramètre du film onde longue
η	courbure du cylindre
Tenseurs	
$\bar{\mathbf{I}}$	Tenseur identité
$\bar{\mathbf{G}}$	Tenseur gradient des vitesses
$\bar{\mathbf{T}}$	Tenseur des contraintes
$\bar{\boldsymbol{\tau}}$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\bar{\mathbf{D}}$	Tenseur des taux de déformation
Opérateurs	
∇	Opérateur divergence
$\overline{\text{grad}}$	Opérateur gradient
Δ	Opérateur laplacien
$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial r}$	Dérivée particulaire

INTRODUCTION GENERALE

Un film liquide tombant représente une couche liquide mince avec une importante surface libre qui s'écoule sur une paroi. L'écoulement peut être constitué d'une ou de plusieurs couches de fluides [1, 2, 3, 4]. Mathématiquement, l'écoulement est décrit par les équations de Navier Stokes incompressibles en prenant en compte la faible épaisseur de l'écoulement. Ces écoulements présentent des phénomènes hydrodynamiques complexes et importants pour les applications industrielles. Dans les écoulements visqueux, des effets inertiels faibles peuvent être à l'origine d'instabilités qui se manifestent par l'apparition d'ondes de surface [5, 6, 7]. Ces ondes résultent de la compétition entre les effets de la gravité qui déstabilisent aux grandes longueurs d'ondes et les effets de la tension superficielle qui sont stabilisants aux courtes longueurs d'ondes. Parallèlement à ces ondes gravitaires, le cisaillement d'un liquide par un gaz peut entraîner l'apparition d'ondes à l'interface [8, 9, 10].

Les films minces interviennent comme éléments constitutifs dans de nombreux processus industriels comme :

- Mise en forme des polymères
- Procédés de revêtements: enduction de surfaces
- Dépôt de couches minces: bandes magnétiques, films photographiques
- Évaporateurs à films tombants (agroalimentaire: production de lait concentré)

- Tours de refroidissement des centrales nucléaires (dissiper la chaleur d'une eau chaude par interaction avec un écoulement d'air à contre-courant). Les films tombants sont au cœur de ces procédés

Signalons que selon les applications les instabilités seront recherchées car elles augmentent les surfaces d'échanges et favorisent ainsi les transferts thermiques et de masse. Dans d'autres situations, l'instabilité doit être absolument évitée afin de garantir la qualité des produits en assurant l'uniformité des épaisseurs des films.

En raison de leurs multiples applications industrielles, Les instabilités à l'interface de films minces liquides en écoulement sur des parois planes ou courbes ont suscité de nombreuses études théoriques et expérimentales. La construction de modèles d'écoulements de fluides en films minces est donc très importante et fait déjà l'objet de nombreuses publications [11, 12,13,14] sur la dynamique des films minces.

- **Motivation**

Dans le cadre de ce mémoire l'accent est mis sur les écoulements de film mince en régime laminaire. Nous nous sommes intéressées au cas d'un écoulement d'un fluide visqueux s'écoulant par gravité de manière axisymétrique sur un cylindre vertical. Le film s'écoulant par gravité est soumis à deux instabilités : une instabilité hydrodynamique et une instabilité capillaire. On s'intéresse aux phénomènes physiques mis en jeu et à l'analyse de l'influence des différents paramètres du problème sur la stabilité de l'interface. Le but de ce travail est donc de contribuer théoriquement au développement d'un modèle analytique permettant une analyse correcte de la dynamique de l'écoulement étudié. Afin de réduire la dimension du problème qui conduit à des calculs très lourds en général, nous avons suivi une méthode basée sur celle développée par Ruyer Quil et Manneville [11] dans le cas d'un écoulement visqueux sur un plan incliné et pour un fluide newtonien. Elle améliore l'approche intégrale couche limite de Shkadov [15] en combinant un développement en gradient du profil de vitesse avec une méthode aux résidus pondérés.

- **Plan du travail**

Ce travail fait suite à de nombreuses études effectuées au sein du laboratoire de physique théorique à l'université de Béjaia [16, 17]. Il répond à plusieurs objectifs :

- ❖ établir sur une base mathématique rigoureuse un modèle simplifié pour décrire les instabilités de grandes longueurs d'ondes intervenant à faible nombre de Reynolds dans l'écoulement d'un film mince sur une paroi courbée.
- ❖ Assimiler des concepts de base comme l'adimensionnement des équations, la linéarisation autour d'un état d'équilibre et déterminer une relation de dispersion analytique.

Le premier chapitre résume les étapes essentielles de la mécanique nécessaires pour établir les équations de Navier-Stokes incompressibles. Ces équations proviennent de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement et de la loi de comportement rhéologique des fluides newtoniens. Dans le second chapitre, nous écrivons les équations générales décrivant l'écoulement étudié et nous calculerons une solution simple indépendante du temps qui définit l'écoulement de base . Nous procédons ensuite à une analyse dimensionnelle des équations bidimensionnelles obtenues afin de les simplifier. Nous Commencerons le chapitre trois par une brève revue des principaux modèles existants dans la littérature sur l'écoulement des

films minces. Nous donnerons ensuite les outils et méthodes de calculs nécessaires pour développer un modèle simplifié basé sur une méthode aux résidus pondérés largement inspirée du travail de Ruyer-Quil et Manneville [11] où ils font une étude d'écoulement d'un film mince visqueux sur un plan incliné. Le modèle développé est utilisé dans le dernier chapitre pour analyser l'effet de certains paramètres sur les caractéristiques des ondes tels que ; le nombre de Weber, la courbure de la surface libre, le Nombre de Reynolds et le nombre de Froude. Ces effets sont analysés à travers une étude de la stabilité linéaire du modèle.

CHAPITRE I

Caractérisation rhéologique des fluides et équations de base

I.1 Introduction

Dans ce chapitre on définira les équations de base qui servent à l'étude de la propagation des ondes à la surface d'un fluide. Ces équations appelées équations de Navier-Stokes incompressibles sont basées sur trois principes de conservation : la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie (qui ne fera pas l'objet de notre étude). A cela il faut ajouter une loi de comportement rhéologique pour le fluide, défini par une relation entre contraintes appliquées et vitesse du fluide. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous développerons les équations de Navier-Stokes dans un système de coordonnées cartésiennes et cylindriques. Ces développements nous seront utiles pour l'étude de deux exemples d'écoulements qui seront présentés dans notre étude.

I.2 Notions fondamentales de la rhéologie

I.2.1 Tenseur gradient de vitesse

Les déformations subies par un fluide en mouvement sont décrites par les variations spatiales du champ de vitesse \mathbf{V} de composantes (u, v, w) . On peut calculer un gradient du champ de vitesse qui fait apparaître les vecteurs gradients de chacune des composantes. On introduit le tenseur gradient du champ de vitesse $\overline{\overline{\text{grad}\mathbf{V}}} = \overline{\overline{\mathbf{G}}}$. Ce qui s'écrit, sous forme matricielle et en coordonnées cartésiennes :

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

On note que $d\mathbf{V} = \overline{\overline{\mathbf{G}}} \cdot d\mathbf{l}$ où $d\mathbf{l}$ représente le déplacement élémentaire.

I.2.2 Tenseur taux de déformation

La décomposition du tenseur gradient de vitesse en une somme d'un tenseur symétrique $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ et d'un tenseur antisymétrique $\overline{\overline{\boldsymbol{\omega}}}$ est réalisé pour bien séparer les différentes causes du mouvement d'un fluide. On pose : $\overline{\overline{\mathbf{G}}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \overline{\overline{\boldsymbol{\omega}}}$.

Le tenseur symétrique $\bar{\mathbf{D}}$ ($d_{ij} = d_{ji}$) est appelé tenseur des taux de déformation. Ses composantes d_{ij} sont des taux de déformation. Ce tenseur décrit un mouvement qui est dû à la déformation du fluide.

Quant au tenseur antisymétrique $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ ($\omega_{ij} = \omega_{ji}$, $\omega_{ii} = 0$), c'est le tenseur des taux de rotation, il décrit un mouvement de rotation du fluide.

En notation indicielle, on a $d_{ij} = d_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Avec $i, j = x, y, z$ ou $i, j = 1, 2, 3$.

Les éléments du tenseur $\bar{\mathbf{D}}$ s'écrivent alors:

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{I.2})$$

En coordonnées cartésiennes (x, y, z) , les éléments du tenseur taux de déformation s'écrivent:

$$d_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad d_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad d_{zz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$d_{xy} = d_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$d_{xz} = d_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$d_{yz} = d_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , les éléments d_{ij} sont:

$$d_{rr} = u_r, d_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{r} v_\theta + \frac{u}{r} \right), d_{zz} = w_z$$

$$d_{rz} = d_{zr} = \frac{1}{2} (w_r + u_z)$$

$$d_{r\theta} = d_{\theta r} = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} u_\theta \right)$$

$$d_{z\theta} = d_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(v_z + \frac{1}{r} w_\theta \right)$$

I.3 Tenseur des contraintes

Pour évaluer les efforts exercés sur un domaine fluide, on définit un tenseur des contraintes $\bar{\mathbf{T}}$ tel que $\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}$, où \mathbf{T} représente le vecteur tension, appelé aussi force de contact en un point

donné sur le domaine fluide considéré et \mathbf{n} sa normale extérieure. En notation indicielle, le tenseur des contraintes $\overline{\mathbf{T}}$ est représenté par les éléments T_{ij} . Les éléments T_{ii} représentent les contraintes normales et les éléments $T_{ij} = T_{ji}$ ($i \neq j$) sont les contraintes tangentielles ou de cisaillement. Ces contraintes de cisaillement tendent à faire glisser les éléments de surface parallèle les uns par rapport aux autres.

I.3.1 Notion de viscosité des fluides

Un exemple de cisaillement simple est représenté sur la figure II. 1. Il s'agit d'un fluide confiné entre deux plans parallèles. L'une des parois se déplace parallèlement à l'autre avec une vitesse relative U_e . On considère un écoulement laminaire, le fluide est alors constitué par une superposition de couches infiniment minces d'épaisseur dy parallèles aux parois et animées de vitesses différentes.

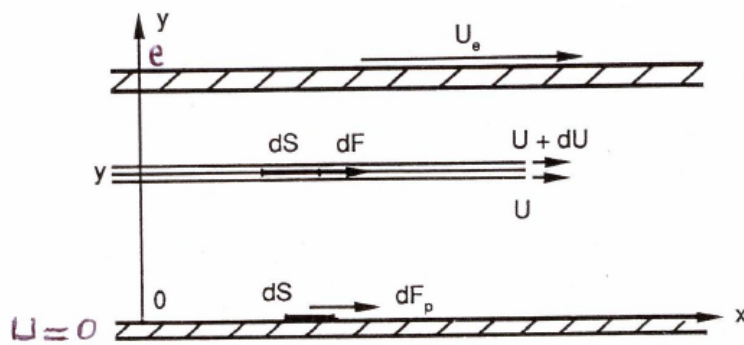


Figure I. 1 : Ecoulement de cisaillement plan [18].

Il en résulte des forces de frottements appelées forces de cisaillement, qui s'exercent tangentiellement à la surface de chaque couche de fluide. On définit alors une contrainte tangentielle τ proportionnelle au gradient transversal de vitesse, donnée par la loi de Newton :

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \mu \frac{dU}{dy} \quad (I.3)$$

Où le coefficient μ est la viscosité dynamique qui est une caractéristique de chaque fluide.

On définit la viscosité cinématique d'un fluide par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ρ représente la masse volumique du fluide.

Si ν est grand, μ est grand, donc les forces de frottement sont importantes, la masse volumique ρ est petite donc l'inertie mécanique est faible, ce qui favorise le retour du fluide à un état de repos.

I.3.2 Propriétés physiques de quelques fluides

corps	Viscosité dynamique $\mu(p_a \cdot s)$
air	2×10^{-6}
eau	10^{-3}
huile d'olive	0.1
miel	1 – 10
sirop d'érable	100
bitume	10^8

Tableau I : Valeurs de la viscosité de quelques fluides à la température ambiante [19].

I.4 Classification des fluides selon leur comportement rhéologique

Les comportements rhéologiques des écoulements fluides sont déterminés expérimentalement à l'aide de rhéomètres qui permettent de mesurer la contrainte τ et la vitesse de déformation. On distingue alors deux classes de fluides : les fluides newtoniens et les fluides non newtoniens.

I.4.1 Loi de comportement pour un fluide newtonien

La loi de comportement la plus simple est donnée sous la forme :

$$\bar{\mathbf{T}} = -p\bar{\mathbf{I}} + \eta_0 \nabla \cdot \mathbf{V} \bar{\mathbf{I}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (\text{I.4})$$

Où $\bar{\mathbf{I}}$ est le tenseur identité, p la pression, η est appelé viscosité de dilatation du fluide. Dans le cas d'un écoulement incompressible on pose $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. la relation précédente devient :

$$\bar{\mathbf{T}} = -p\bar{\mathbf{I}} + \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (\text{I.5})$$

Le tenseur $\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu\bar{\mathbf{D}}$ est le tenseur des contraintes de viscosité qui caractérisent les forces d'origine visqueuse qui apparaissent sous écoulements.

Un grand nombre de liquide et de gaz ont leur viscosité μ constante et sont qualifiés de fluide newtonien. Citons par exemple l'eau, l'huile, l'air...

I.4.2 Fluides non newtoniens

Il existe une autre catégorie de fluides appelés fluides non newtoniens dont la viscosité change en fonction des contraintes qui leurs sont appliquées.

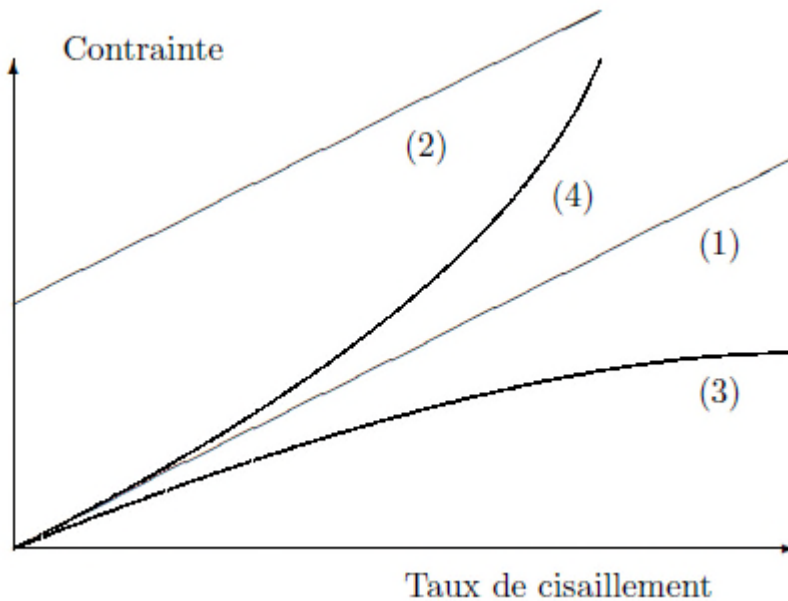


Figure : Contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement : (1) Fluide newtonien ; (2) fluide de Bingham ; (3) Fluide dilatant (rhéofluidifiant) ; (4) Fluide dilatant (rhéoépaississant) [20].

La figure montre la variation de la contrainte de cisaillement τ en fonction du taux de cisaillement qui représente la vitesse de déformation du fluide, exprimée en s^{-1} .

On voit clairement qu'il existe trois classes de fluides non newtoniens :

- Les fluides de Bingham (2) et les fluides plastiques. Ces fluides se comportent comme un solide parfait (loi de Hook) au dessous d'une contrainte seuil. Leur comportement devient celui d'un fluide lorsqu'ils sont soumis à une contrainte supérieure à la contrainte seuil (loi de Newton). Exemple le dentifrice.
- Les fluides pseudo plastiques ou fluides rhéofluidifiants (3). La viscosité de ces fluides diminue à mesure que la contrainte appliquée augmente. Exemple le sang.
- Les fluides dilatants, on les appelle aussi rhéoépaississants (4), ces fluides ont leur viscosité qui augmente à mesure que la contrainte de cisaillement augmente. Exemple les pâtes constituées d'un mélange d'eau et d'amidon.

I.5 Equation de Navier-Stokes incompressibles

Par des calculs prenant en considération la conservation de la masse et la dérivée temporelle de la quantité de mouvement qui est égale à la résultante des forces appliquées, que nous n'allons pas développer ici, on aboutit aux équations décrivant le mouvement d'un fluide incompressible. Il s'agit du système :

$$\begin{cases} \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \mathbf{V} \right) = \mathbf{f} + \nabla \bar{T} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Où \mathbf{V} et p représentent les inconnues tandis que ρ , μ et \mathbf{f} représentent les données du problème, qui sont respectivement la masse volumique, la viscosité dynamique et la force extérieure agissant sur le fluide par unité de volume. Dans notre travail la force extérieure sera la force de gravité. Nous allons donc écrire les équations de Navier-Stokes pour des écoulements de fluides incompressibles dans un champ de pesanteur :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{V} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Pour résoudre des problèmes pratiques on doit ajouter à ces équations des conditions aux limites.

I.5.1 Développement en coordonnées cartésiennes

Dans un système d'axes en coordonnées cartésiennes (ox, oy, oz) les équations de bilan de la quantité de mouvement et l'équation de continuité sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.9})$$

I.5.2 Développement en coordonnées cylindriques

u étant la composante axiale, v la composante radiale et w la composante azimutale du vecteur vitesse dans un système défini en coordonnées cylindriques. Les équations sont développées en exprimant les opérateurs laplacien, gradient et divergence en coordonnées cylindriques.

Equations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
 &= \frac{f_x}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\} \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} \\
 &= \frac{f_r}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} \quad (\text{I.10}) \\
 & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v w}{r} \\
 &= \frac{f_\theta}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{r^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{I.11})$$

CHAPITRE II

Formulation général d'un problème d'écoulement par gravité

II.1 Introduction

On considère dans ce chapitre deux exemples d'écoulements de films minces avec une importante surface libre. Les fluides seront soumis à l'action de leur propre poids. Ces écoulements sont utilisés pour introduire les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites correspondantes. Dans la suite du chapitre nous regrouperons sous forme de tableau toutes les équations décrivant les deux configurations étudiées.

II.2 Formulation mathématique

Les écoulements des films liquides sur un substrat solide sont décrits mathématiquement par les équations de Navier-Stokes incompressibles. A ces équations on associe des conditions aux limites aux frontières.

II.2.1 Equations de Navier-Stokes

Nous allons écrire les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible s'écoulant par gravité sur un substrat solide. Le fluide est soumis à l'action de la gravité et de l'inertie. Comme le fluide est incompressible, l'équation de la conservation de la masse appelée aussi équation de continuité se réduit à la divergence nulle de la vitesse.

- **Equation bilan de la quantité de mouvement :**

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{V} \quad (\text{II.1})$$

- **Equation de continuité :**

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{II.2})$$

II.2.2 Conditions aux limites

Le fluide est soumis aux conditions aux limites suivantes :

- **Condition d'adhérence à la paroi solide**

$$\mathbf{V} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Les conditions à l'interface gaz-liquide peuvent être de deux types : les conditions cinématiques et les condition dynamiques.

➤ **Condition cinématique**

Cette condition traduit l'imperméabilité de l'interface, la surface libre du fluide est décrite par l'équation $r = h(x, \theta, t)$ dans le cas d'un écoulement sur une paroi cylindrique [17] et $y = h(x, z, t)$ dans le cas d'un écoulement plan [16,11].

La condition cinématique à la surface libre s'écrit :

$$uh_x + wh_z + h_t = v \quad (\text{II.4})$$

➤ **Condition dynamique**

L'air étant supposé au repos et de pression constante P_0 , la condition dynamique de continuité des contraintes à l'interface se traduit par :

$$\bar{\mathbf{T}}\mathbf{n} = (-P_0 + \gamma\mathcal{K}(h))\mathbf{n} \quad (\text{II.5})$$

Pour un fluide newtonien le tenseur des contraintes $\bar{\mathbf{T}}$ est égale à $-\bar{p}\bar{\mathbf{I}} + 2\mu\bar{\mathbf{D}}$ et

$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \mathbf{V} + \overline{\text{grad}} \mathbf{V}^T)$ le tenseur des déformations.

γ la tension superficielle du fluide,

$\mathcal{K}(h)$ la courbure de la surface libre et s'écrit [5] :

$$\mathcal{K}(h) = -\nabla \cdot \mathbf{n}$$

Le vecteur \mathbf{n} représente la normale à l'interface et on définit un vecteur tangent à l'interface par \mathbf{t} . La tangente se déduit facilement de \mathbf{n} car $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\|\mathbf{t}\| = 1$

Les expressions des deux vecteurs sont exprimées respectivement en coordonnées cylindriques et coordonnées cartésiennes dans les mémoires [16] et [17].

II.3 Ecoulement d'un film mince autour d'un cylindre

Nous considérons l'écoulement d'un film liquide mince par gravité le long de la paroi externe d'une conduite cylindrique verticale de section circulaire et de rayon R_c (Figure II.1). la gravité sera notée par : $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_x$, la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ . Notre étude est faite dans un référentiel muni d'un système de coordonnées cylindriques $(r; \theta; x)$. La coordonnée axiale x est selon la direction de l'écoulement, r est la coordonnée radiale, θ est la coordonnée azimutale. Dans notre étude nous considérons un écoulement bidimensionnel axisymétrique, on pose alors, $(\frac{\partial}{\partial \theta} = 0, w = 0)$ et les variables ne dépendent que des coordonnées r et x . Le vecteur vitesse est noté : $\mathbf{V} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_r$

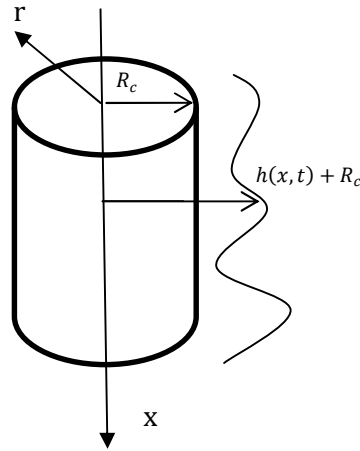


Figure II.1 Ecoulement d'un fluide d'épaisseur $h(x, t)$ le long d'un cylindre vertical.

Les hypothèses prises en compte pour cette étude sont :

- Le liquide est newtonien, visqueux et incompressible.
- L'écoulement est laminaire et isotherme.
- L'air n'intervient que par sa pression p_0 supposée constante.
- Le liquide possède une tension interfaciale γ constante.
- La hauteur initiale du film liquide est prise uniforme est égale à h_N .

II.3.1 Equations du mouvement

Dans ces conditions, les équations régissant l'écoulement sont les équations de Navier-Stokes et de continuité. Les équations de Navier-Stokes projetées sur les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_r s'écrivent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \quad (\text{II.7})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \quad (\text{II.8})$$

Où on désigne par :

- u la composante axiale de la vitesse
- v la composante radiale de la vitesse
- p la pression
- g l'accélération de la pesanteur
- μ la viscosité dynamique
- ρ la masse volumique

Pour résoudre ce problème il faut considérer des conditions aux limites.

II.3.2 Conditions aux limites pour un écoulement bidimensionnel

- La condition d'adhérence à la paroi du cylindre de rayon R_c s'écrit :
$$u = v = 0 \text{ en } r = R_c$$
- Les projections de la condition dynamique Eq.(II.5) sur un axe tangent \mathbf{t} et un axe normale \mathbf{n} à l'interface $r = R_c + h(x, t)$ s'écrivent respectivement :

$$P - P_0 = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} + 2\mu(\overline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (\text{II.9})$$

$$(\overline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{t} = 0 \quad (\text{II.10})$$

- La condition cinématique à l'interface Eq. (II.4) devient :

$$uh_x + h_t = v \quad (\text{II.11})$$

II.3.3 Système d'équations complet pour un écoulement bidimensionnel

Toutes les équations obtenues sont résumées dans le tableau I.1 suivant :

Equations de Navier –Stokes

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]$$

Condition d'adhérence $r = R_c$

$$u(x, r, t) = v(x, r, t) = 0$$

Condition cinématique $r = R_c + h(x, t)$

$$v = h_t + u h_x$$

continuité de la contrainte tangentielle $r = R_c + h(x, t)$

$$\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = 0$$

Condition sur la contrainte normale à l'interface $r = R_c + h(x, t)$

$$p - p_0 = \frac{2\mu}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)} \left[\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$- \frac{\gamma}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{R_c + h} \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) \right]$$

Tableau I.1 : Equations pour un écoulement bidimensionnel cylindrique.

II.4 Equations régissant un écoulement plan 2D

Pour l'écoulement d'un film mince sur un plan incliné, on va travailler en coordonnées cartésiennes (x, y) , les hypothèses et les notations sont les mêmes que dans la configuration cylindrique sans variation azimutale. On utilise la notation u pour désigner la vitesse suivant la direction de l'écoulement x et v pour désigner la vitesse suivant la direction perpendiculaire y . Les composantes du vecteur vitesse sont donc $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

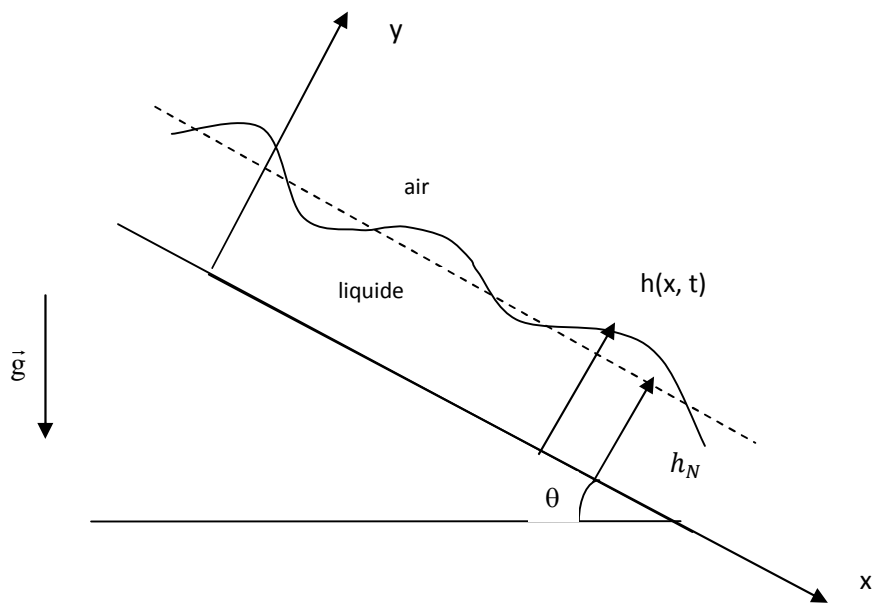


Figure II.2 Ecoulement d'un fluide d'épaisseur $h(x, t)$ le long d'un plan incliné.

Pour cet écoulement le système d'équations est résumé dans le tableau I.2 suivant :

<p>Equations de Navier –Stokes</p> $u_x + v_y = 0$ $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$ $\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]$
<p>Condition d'adhérence $y = 0$</p> $u(x, y, t) = v(x, y, t) = w(x, y, t) = 0$
<p>Condition cinématique $y = h(x, z, t)$</p> $v = h_t + u h_x$
<p>Conditions de continuité des contraintes tangentielles $y = h(x, z, t)$</p> $\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = 0$
<p>Condition sur la contrainte normale à l'interface $y = h(x, z, t)$</p> $p - p_0 = \frac{2\mu}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{\gamma}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]$

Tableau I.2 : Equations pour un écoulement bidimensionnel plan.

CHAPITRE III

Modélisation d'un écoulement d'un film mince autour d'un cylindre

III.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'écoulement par gravité d'un film mince sur une paroi cylindrique. Le but étant de développer un modèle décrivant les instabilités qui se manifestent par l'apparition d'ondes de surface à partir des équations de Navier Stokes 2D. Pour obtenir le modèle, on part des équations de Navier Stokes en utilisant une technique basée sur une méthode aux résidus pondérés combinées à un développement en gradient du champ de vitesse [21, 22]. Nous débuterons le chapitre par le calcul de la solution uniforme stationnaire.

III.2 Ecoulement de base

Les équations de Navier Stokes admettent une solution uniforme et stationnaire. Ces équations seront résolues dans les deux configurations considérées dans le chapitre précédent.

III.2.1 Ecoulement de base pour un écoulement axisymétrique

Pour étudier l'écoulement à surface libre, on va considérer deux régimes d'écoulement : un régime d'écoulement uniforme et un régime d'écoulement stationnaire.

- Régime d'écoulement uniforme : les caractéristiques de l'écoulement, hauteur et vitesse sont constantes suivant la direction de l'écoulement.
- Régime d'écoulement permanent ou stationnaire les caractéristiques de l'écoulement ne dépendent pas du temps.

On montre facilement que les solutions stationnaires pour un écoulement uniforme d'épaisseur constante h_N sont de la forme $u(x, r, t) = U(r)$, $v = 0$ et $h(x, t) = h_N$ où le profil $U(r)$ est solution des équations de Navier-Stokes Eq.(II.7, II.8) et des conditions aux limites correspondantes [22]:

$$0 = \rho g + \mu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right] \quad (\text{III.1})$$

Cette équation exprime l'équilibre entre la force de gravité et les forces visqueuse.

soit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\mu} g \quad (\text{III.2})$$

Par intégration cette équation (III.2) donne la solution générale

$$U(r) = -\frac{\rho g}{2\mu} \frac{r^2}{2} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (\text{III.3})$$

La condition d'adhérence $U(r) = 0$ donne

$$C_2 = \frac{\rho g}{4\mu} (R_c)^2 - C_1 \ln(R_c) \quad (\text{III.4})$$

A la surface libre, en $r = R_c + h_N$, on a $\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{R_c+h_N} = 0$; entraîne $C_1 = \frac{\rho g (R_c+h_N)^2}{2\mu}$

$$\text{D'où } C_2 = \frac{\rho g}{4\mu} R_c^2 - \frac{\rho g (R_c+h_N)^2}{2\mu} \ln(R_c)$$

On en déduit l'expression de l'écoulement de base pour un écoulement d'un fluide visqueux sur un cylindre.

$$U(r) = \frac{\rho g}{4\mu} \left(2(R_c + h_N)^2 \ln\left(\frac{r}{R_c}\right) - (r^2 - R_c^2) \right) \quad (\text{III.5})$$

On détermine la vitesse à l'interface notée U_i , en posant $r = R_c + h_N$ dans l'Equation (III.5) :

$$U_i = \frac{\rho g R_c^2}{4\mu} \left(2 \left(1 + \frac{h_N}{R_c}\right)^2 \ln\left(1 + \frac{h_N}{R_c}\right) - \left(\left(1 + \frac{h_N}{R_c}\right)^2 - 1 \right) \right) \quad (\text{III.6})$$

Le débit q_N représente le flux de l'écoulement par unité de temps à travers la surface de l'écoulement, appelé débit volumique, il s'écrit :

$$q_N = \int_{R_c}^{R_c+h_N} 2\pi r U(r) dr \quad (\text{III.7})$$

Ce débit correspond à une vitesse moyenne donnée par : $U_m = \frac{q_N}{\pi(R_c+h_N)^2 - \pi(R_c)^2}$

On trouve

$$q_N = \frac{1}{16} \frac{g R_c^3}{\nu} \left[4 \left(1 + \frac{h_N}{R_c}\right)^4 \ln\left(1 + \frac{h_N}{R_c}\right) - \frac{h_N}{R_c} \left(\frac{h_N}{R_c} + 2\right) \left(2 + 3 \frac{h_N}{R_c} \left(2 + \frac{h_N}{R_c}\right)\right) \right] \quad (\text{III.8})$$

III.2.2 Ecoulement de base pour un écoulement sur un plan incliné

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné, soumis aux seules forces de gravité [11,12]. On appelle θ l'angle du plan incliné avec un plan horizontal. La direction de l'écoulement est l'axe Ox (axe de plus grande pente) et on choisit Oy perpendiculaire à l'axe Ox .

En projetant sur les axes Ox et Oy , l'équation de Navier-Stokes donne

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \rho g \sin \theta \quad (\text{III.9})$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta \quad (\text{III.10})$$

Par intégration de la deuxième équation Equation (III.10), on obtient

$$p(x, y) = \rho g \cos \theta y + C(x) \quad (\text{III.11})$$

La condition $p(y = h_N) = p_0$ impose $C(x) = p_0 - \rho g \cos \theta h_N$

On voit alors que la pression est indépendante de x , elle s'écrit :

$$p(y) = p_0 + \rho g \cos \theta (y - h_N) \quad (\text{III.12})$$

La première équation (III.9) se simplifie et devient :

$$\mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\rho g \sin \theta \quad (\text{III.13})$$

La solution est obtenue en intégrant l'équation Eq(III.13) avec les conditions aux limites $U(0) = 0$ et $\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{h_N} = 0$.

$$U(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left(y h_N - \frac{y^2}{2} \right) \quad (\text{III.14})$$

On trouve un profil de vitesse parabolique avec une vitesse maximale à l'interface $y = h_N$. En régime stationnaire les forces de viscosité compensent exactement la composante suivant Ox des forces de gravité. On voit que plus le fluide est visqueux, plus la vitesse est faible. La vitesse à l'interface, notée $U_i = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} h_N^2$ est déterminée en posant $y = h_N$ dans l'équation(III.14)

La vitesse moyenne dans le cas plan est donnée par :

$$U_m = \frac{1}{h_N} \int_0^{h_N} U(y) dy = \frac{g \rho \sin \theta h_N^3}{\mu} \quad (\text{III.15})$$

III.2.3 Etude comparative : Effet de la courbure

Dans les deux configurations étudiées, on obtient une vitesse nulle sur la paroi cylindrique et sur la paroi plane et une vitesse maximale à l'interface ;

Pour l'écoulement axisymétrique et l'écoulement plan, les profils de vitesse sont présentés sur la figure III.1. Le profil de la configuration cylindrique est proche du profil parabolique obtenu dans le cas d'un film s'écoulant sur un plan. L'effet de la courbure, est représenté par le terme logarithmique et commence à devenir significatif lorsque $h_N > R_c$ [22].

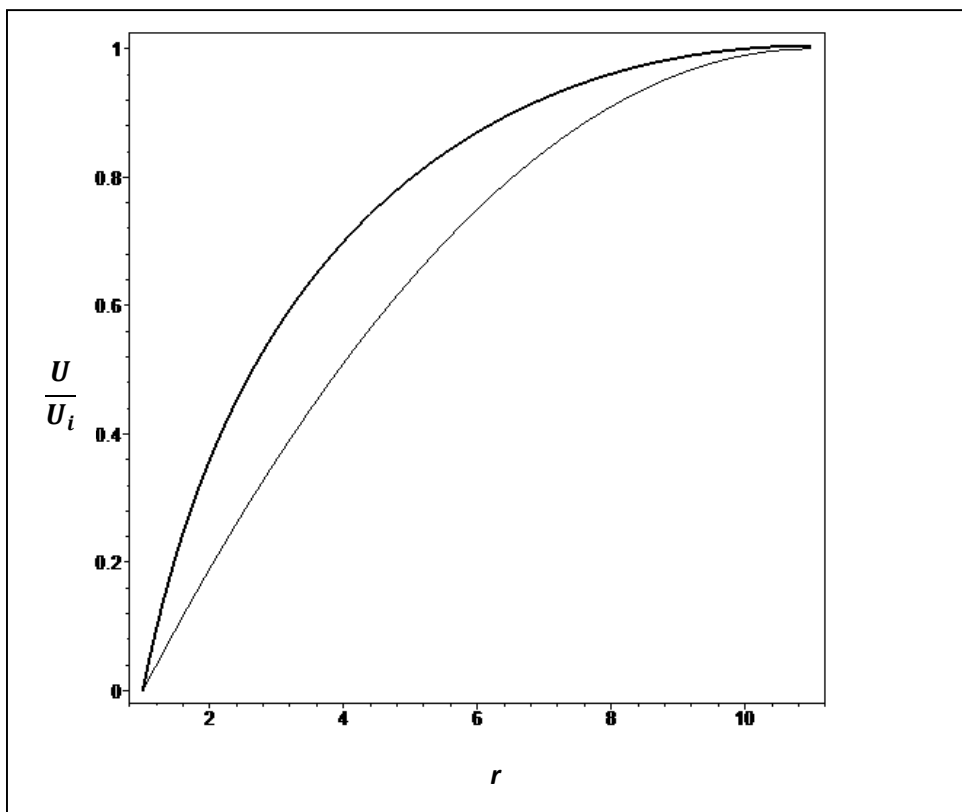


Figure III.1 Profils de vitesse adimensionnés par la vitesse à l'interface pour $\frac{R_c}{h_N} = 0.1$,

$h_N = 1.1\text{cm}$.

— Ecoulement plan ; — Ecoulement cylindrique

On trace $h_N = f(q_N)$ les courbes sont représentées sur les figure III.2 (a) et III.2(b) pour deux valeurs du rayon du cylindre (a) $R_c = 0.5\text{cm}$ et (b) $R_c = 1.5\text{cm}$.

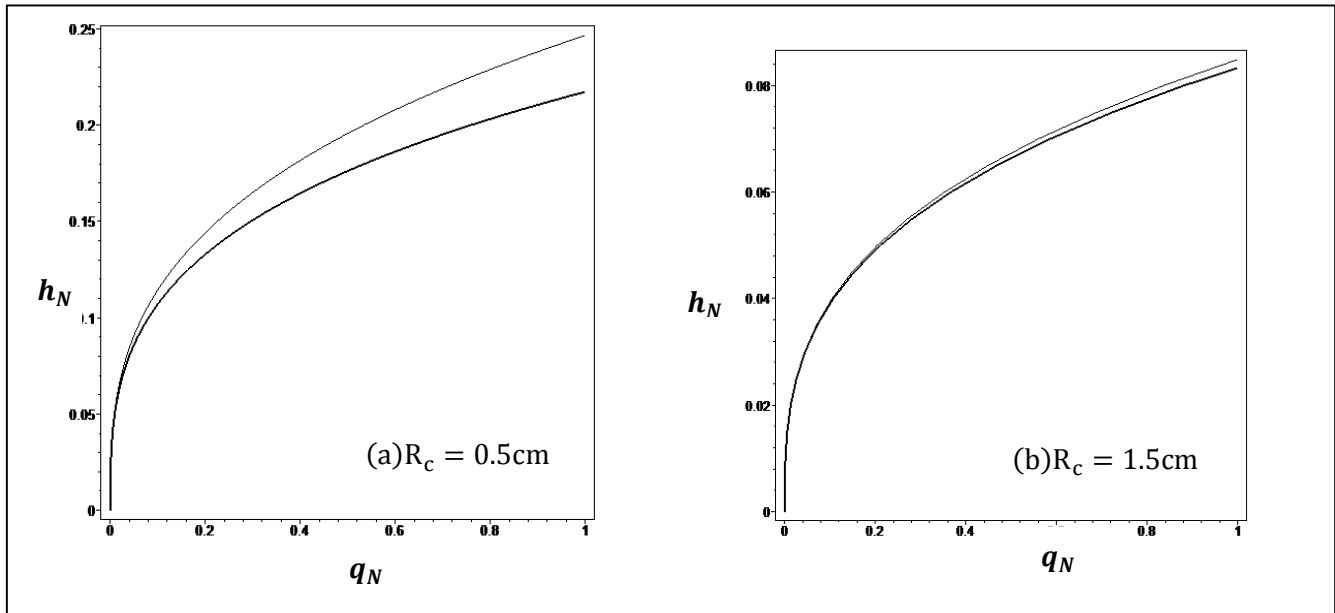


Figure III.2 Epaisseur h_N (cm) en fonction du débit q_N pour $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ et $\sin \theta = 1$ (plan vertical).

——— Ecoulement plan vertical ; - - - - - Ecoulement cylindrique

La dimension de la viscosité cinématique ν est L^2T^{-1} et celle de la viscosité dynamique μ est $ML^{-1}T^{-1}$.

On voit clairement sur la figure III.2 que l'écart entre l'épaisseur h_N de l'écoulement sur un cylindre vertical et celle d'un écoulement sur un plan incliné est négligeable à partir de $R_c > 1.5 \text{ cm}$ [23].

III.3 Représentation adimensionnelle des équations

Afin de simplifier le système d'équations décrivant l'écoulement d'un fluide sur un cylindre, on va procéder à son étude dimensionnelle. Cette étude nous permet de déterminer les ordres de grandeurs de chacun des termes d'une équation.

III.3.1 Echelles caractéristiques

Les grandeurs caractéristiques de l'écoulement sont définies par l'écoulement réel :

- λ est la longueur d'onde de la perturbation dans la direction x de l'écoulement.
- U_m est la vitesse moyenne de l'écoulement de base.
- h_N épaisseur de l'écoulement de base.

La mise sous forme adimensionnelle des équations du mouvement et des conditions aux limites est obtenue à l'aide des variables sans dimension suivantes :

$$u^* = \frac{u}{U_m}, r^* = \frac{r}{h_N}, x^* = \frac{x}{\lambda}, v^* = \frac{v\lambda}{h_N U_m}, t^* = \frac{t U_m}{\lambda}, p^* = \frac{p h_N^2}{\mu U_m \lambda} \quad (\text{III.16})$$

Nous écrivons les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites sous forme adimensionnée, les primes sont omis. Pour tenir compte de l'hypothèse grande longueur d'onde, on introduit un petit paramètre $\varepsilon = h_N/\lambda \ll 1$. On néglige alors dans ces équations les termes d'ordre supérieur à ε^2 . L'hypothèse grande longueur d'onde impose ε petit devant l'unité et $R_e \varepsilon = \mathcal{O}(1)$ et $W_e \varepsilon = \mathcal{O}(1)$, ce qui correspond aux fluides usuelles avec une grande tension superficielle. La tension superficielle de l'eau en contact avec l'air à 20°C est égale à $\gamma = 72.8 \cdot 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$.

L'écoulement fluide est compris entre $R_c < r < R_c + h$ (figure II.1). Dans le cas d'un écoulement axisymétrique, on pose, $(\partial_\theta = 0, w = 0)$. On note $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ la dérivée partielle de la grandeur f par rapport à la variable x . Les équations s'écrivent :

Equation projetée suivant l'axe radial :

$$R_e \varepsilon p_r = \varepsilon^2 \left(v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \frac{v}{r^2} \right) \quad (\text{III.17})$$

Equation projetée suivant l'axe axial :

$$R_e \varepsilon (u_t + v u_r + u u_x) = -\varepsilon R_e p_x + \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \varepsilon^2 u_{xx} \right) + G \quad (\text{III.18})$$

Equation de continuité :

$$\frac{v}{r} + v_r + u_x = 0 \quad (\text{III.19})$$

Conditions aux limites:

-condition d'adhérence à la paroi $r = \eta$

$$v(r = \eta) = u(r = \eta) = 0 \quad (\text{III.20})$$

-La condition de saut cinématique à l'interface 2D en $r = \eta + h(z, t)$ est la suivante

$$v = h_t + u h_z \quad (\text{III.21})$$

-Conditions aux limites à l'interface du fluide en $r = \eta + h(z, t)$

-Condition sur les contraintes normales

$$P = 2\varepsilon(v_r) + \varepsilon W_e \left[\frac{1}{h} - \frac{\varepsilon^2 h_x^2}{2h} - \varepsilon^2 h_{xx} \right] \quad (\text{III.22})$$

-Condition sur les contraintes tangentielles

$$u_r = \varepsilon^2(2h_x u_x - 2h_x v_r - v_x) \quad (\text{III.23})$$

III.3.2 Nombres sans dimension

L'écoulement étudié est le siège des forces suivantes :

- Forces de gravité,
- Forces de frottement du à la viscosité du fluide
- Forces de tension superficielle
- Les forces d'inertie

Soient ε , W_e , R_e , F_r et η les paramètres sans dimension que fait intervenir l'écoulement.

- $\varepsilon = h_N/\lambda$, paramètre de l'onde avec l'hypothèse onde longue : $\varepsilon \ll 1$
- $W_e = \frac{\gamma}{\mu U_m}$ le nombre de Weber compare les forces de tension superficielles et les contraintes normales qui sont dues à la gravité.
- $R_e = \frac{\rho h_N U_m}{\mu}$, le nombre de Reynolds définit le rapport entre forces d'inertie et forces de viscosité.
- $G = \frac{g \lambda R_e \varepsilon}{U_m^2} = \frac{R_e}{F_r^2}$
- $F_r = \frac{U_m}{\sqrt{g h_N}}$, le nombre de Froude est le rapport entre les forces de gravité et les forces d'inertie.

III.4 Mise en Œuvre de la méthode aux résidus pondérés

La méthode aux résidus pondérés est utilisée afin de déterminer une équation d'évolution de la surface libre $h(x, t)$ et du débit $q(x, t)$ de l'écoulement [11, 13]. Cette méthode est utilisée dans la résolution d'équations aux dérivées partielles, elle consiste à éliminer la coordonnée r radiale normale au cylindre et à formuler un modèle ne dépendant que de la position x et du temps t . On projete le champ de vitesse axiale sur un ensemble de fonction test satisfaisant les conditions aux limites.

On pose
$$u(x, r, t) = \sum_{k=0}^K a_k(x, t) f_k(r) \quad (\text{III.24})$$

Avec

$$u(x, r, t) = u_0(x, r, t) + \varepsilon u_1(x, r, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{III.25})$$

Où $u_0(x, r, t)$ correspond à la solution à l'ordre zéro, elle à la forme de l'écoulement de base.

$$\text{On écrit } u_0(x, r, t) = \frac{1}{h(x, t)} a_0(x, t) (\eta^2 - r^2) + a_1(x, t) \ln\left(\frac{r}{\eta}\right) \quad (\text{III.26})$$

La condition aux limites de la continuité de la contrainte tangentielle et le débit nous permettent de déterminer les paramètres $a_0(x, t)$ et $a_1(x, t)$.

$$a_0(x, t) = - \frac{2 q(x, t)}{\pi (4 \eta^2 + 4 \eta h(x, t) + h(x, t)^2)}$$

Et

$$a_1(x, t) = - \frac{4 q(x, t) \eta^2}{\pi h(x, t)^2 (4 \eta^2 + 4 \eta h(x, t) + h(x, t)^2)}$$

La pression est éliminée des équations du mouvement, suivant l'étude réalisée par Ruyer-Quil [11] sur la dynamique d'un film mince s'écoulant sur un plan incliné, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \text{relation1} = R_e \varepsilon \frac{Du}{Dt} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - G + W_e \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} - \varepsilon^2 \frac{\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2}{2h} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) - \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{\eta+h} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^{\eta+h} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) dr \right] \quad (\text{III.27}) \end{aligned}$$

La méthode des résidus pondérés permet de nous éviter le calcul du terme $u_1(x, r, t)$ si on choisit correctement les fonctions poids $g(x, r, t)$. La projection de l'équation (III.27) sur des fonctions poids s'écrit :

$$\int_{\eta}^{\eta+h(x, t)} (\text{rel1}) g(x, r, t) dr = 0 \quad (\text{III.28})$$

Pour déterminer la fonction poids utilisée dans ce travail, le détail des calculs se trouve dans l'article [11] développé pour un écoulement de deux couches de fluides à l'intérieur d'une conduite cylindrique.

On trouve :

$$g(x, r, t) = \frac{1}{4}(r^2 - \eta^2) - \left(\frac{\eta^2}{2} + \eta h(x, t) + \frac{1}{2}h(x, t)^2 \right) \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) \quad (\text{III.29})$$

L' équation d'évolution de la surface libre obtenue peut être mise formellement sous la forme suivante :

$$F_0(q, h) + \varepsilon R_e \left\{ F_1(q, h) \frac{\partial q}{\partial t} + \tilde{F} \left(\frac{\partial}{\partial x}, q, h \right) \right\} + \varepsilon^2 F_2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2}, q, h \right) = 0 \quad (\text{III.30})$$

A partir de la définition du débit $q(x, t) = \int_{\eta}^{\eta+h(x,t)} 2\pi u(x, r, t) dr$ le relèvement intégrale consiste à écrire la condition cinématique (II.6) sous la forme :

$$\frac{q_x}{2\pi} + h h_t = 0 \quad (\text{III.31})$$

Les équations (III.30) et (III.31) forment le modèle développé décrivant les instabilités de grande longueur d'onde se développant à la surface libre d'un film s'écoulant par gravité sur la surface d'un cylindre vertical.

CHAPITRE IV

Résultats de stabilité linéaire

Introduction

L'analyse de la stabilité linéaire consiste à étudier l'évolution d'une petite perturbation, cette étude conduit à la détermination des conditions critiques d'apparition des instabilités en fonctions des paramètres de l'écoulement qui sont les nombres adimensionnels décrits au chapitre précédent.

IV 1.Stabilité linéaire

La linéarisation des équations (III.30) et (III.31) autour de l'état de la solution de base définie par (h_N, q_N) , nous permet de négliger les termes non linéaire de l'équation d'évolution (III.29) et de mettre en évidence l'influence des nombreux paramètres sur les instabilités de l'écoulement en réponse à une perturbation périodique. On note (\tilde{H}, \tilde{Q}) la perturbation de l'état de base et on pose

$$h(x, t) = 1 + \tilde{H}(x, t) \text{ et } q(x, t) = Q_0 + \tilde{Q}(x, t) \quad (\text{IV.1})$$

En termes de modes normaux, la perturbation peut être écrite sous forme suivante :

$$\tilde{H}(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \text{ et } \tilde{Q}(x, t) = B e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{IV.2})$$

où k est le nombre d'onde réel et $\omega = \omega_r + i\omega_i$ est la pulsation complexe de l'onde. Cette approche correspond à regarder l'amplification temporelle de perturbations spatiales. Dans le cas où ω_i le taux de croissance de l'onde est négatif l'écoulement est linéairement stable, alors que si ω_i est positif l'écoulement est linéairement instable et $\omega_i = 0$ correspond à une stabilité marginale ou neutre. Dans ces conditions la résolution du système (III.30)-(III.31) donne la relation de dispersion mise sous la forme suivante :

$$D(k, \omega, \eta, R_e, W_e, F_r) = 0 \quad (\text{IV.3})$$

IV 1.Stabilité marginale

La stabilité marginale est caractérisée par un taux d'amplification nul ($\omega_i = 0$). Les courbes de stabilité marginale sont obtenues en séparant partie réelle et partie imaginaire du déterminant et on trace les courbes dans le plan (R_e, k) . On obtient des zones stables et des zones instables (figure IV. 1).

IV.1.1 Influence de la courbure

Nous avons représenté sur la figure IV.1 des courbes correspondant à différentes valeurs de η qui représente la courbure du cylindre. Nous avons pris $\eta = 0.5, 0.4, 0.35$ et 0.32 .

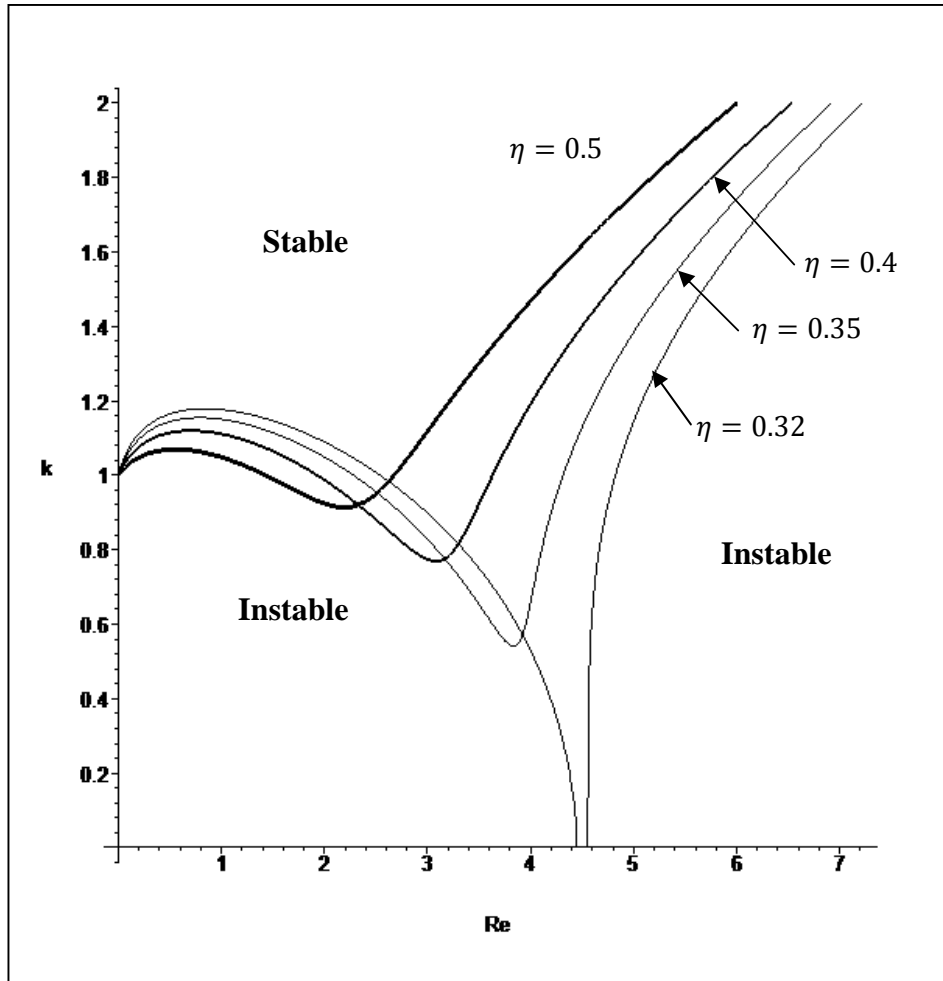


Figure IV.1 Courbe de stabilité marginale dans le plan (Re, k) , les valeurs des paramètres sont $F_r = 1$ et $W_e = 100$.

La figure IV.1 montre un changement dans la forme de la courbe de stabilité marginale pour $\eta = 0.32$. Pour cette valeur on voit clairement apparaître une deuxième branche à des nombres d'onde plus élevés. Cette branche correspond à la stabilité hydrodynamique déjà observée pour un écoulement sur un plan incliné [1,11] et dans l'écoulement de deux couches de fluides dans un canal [4, 22]. La courbe correspondant à des nombres d'onde plus petits correspond à une instabilité capillaire mise en évidence dans l'écoulement de deux couches de fluides à l'intérieur d'une conduite cylindrique [12].

Nous avons choisis de représenter le taux d'amplification correspondant à deux valeurs de la courbure $\eta = 0.5$ et $\eta = 0.32$ et cela pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Elles sont représentées respectivement sur les figures IV.2 et V.I.3.

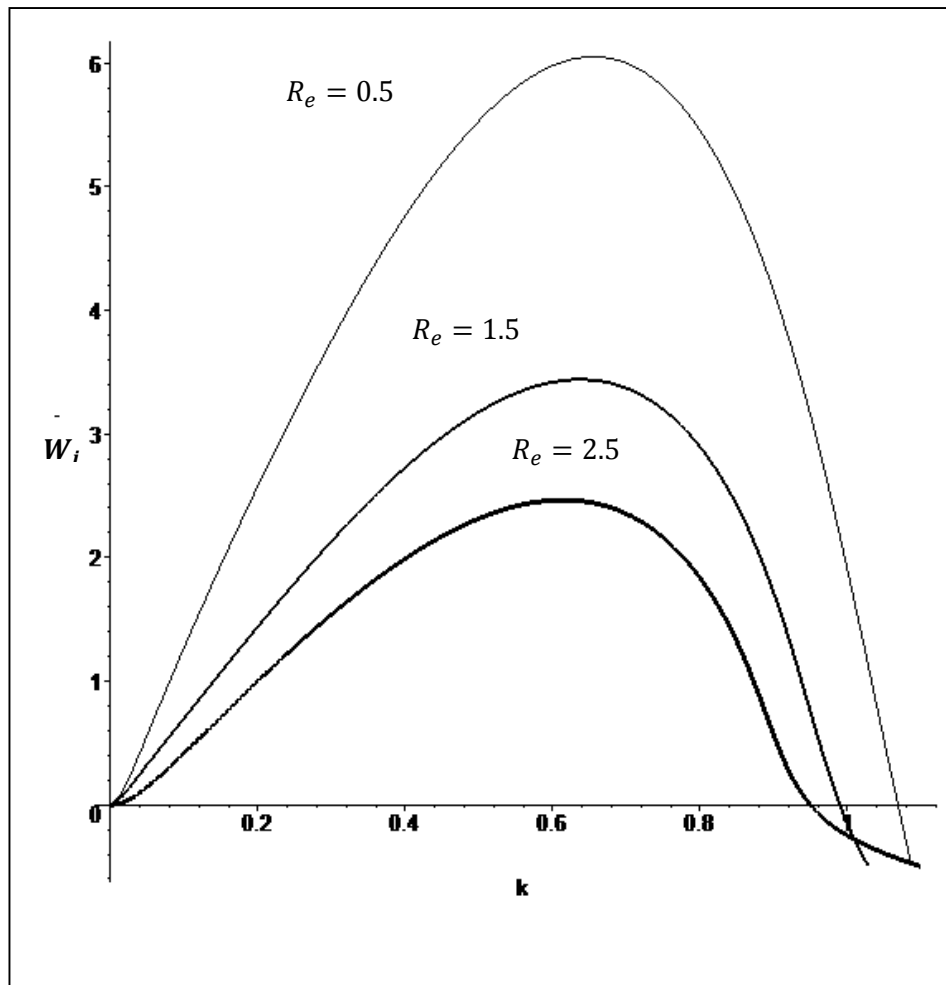


Figure IV.2. Taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'onde k pour $\eta=0.5$, $W_e=100, F_r=1$ et $Re=0.5, 1.5$ et 2.5 .

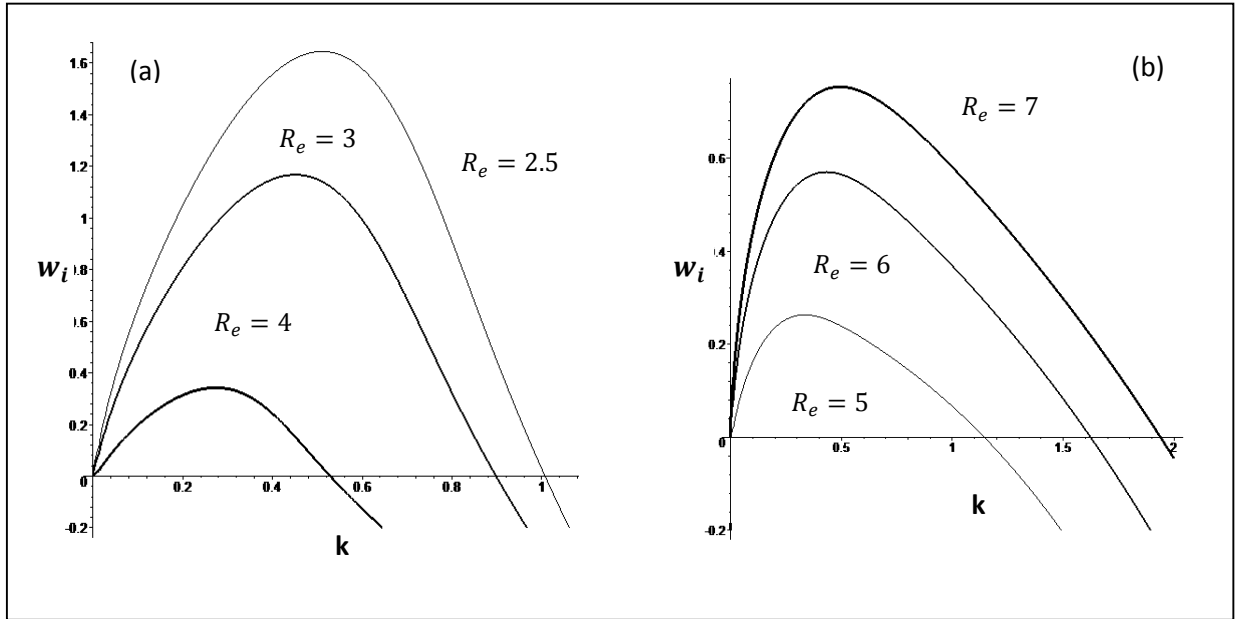


Figure IV.3. Taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'onde k pour $\eta=0.32$, $W_e=100, F_r=1$ et (a) Instabilité capillaire et (b) Instabilité hydrodynamique.

Les taux d'amplification ont des valeurs plus grandes dans le cas de l'instabilité capillaire (figure IV.3 (a)) par rapport à ceux donnés par l'instabilité hydrodynamique (figure IV.3 (b)).

IV.1.1 Influence de la tension superficielle

L'influence du nombre de Weber sur les deux instabilités mise en évidence par le modèle développé est représentée sur la figure IV.4 pour différentes valeurs du nombre de Weber. La figure IV.4 montre qu'augmenter le nombre de Weber les zones d'instabilités. Le taux d'amplification correspondant aux nombre de Weber $W_e = 10, 50$ et 100 et à $\eta = 0.32, F_r = 1$ est représenté sur la figure IV.5.

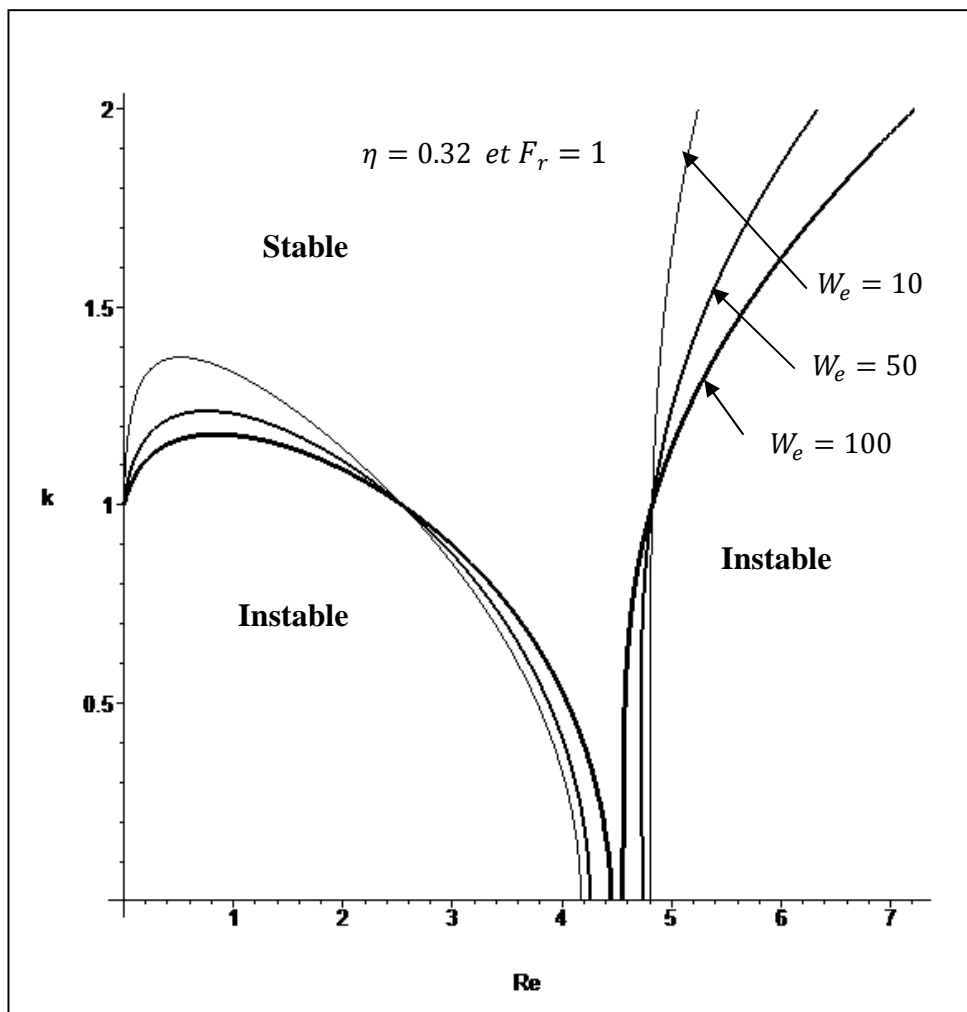


Figure IV.4 Courbe de stabilité marginale dans le plan (Re, k) , les valeurs des paramètres sont $F_r = 1$ et $\eta = 0.32$.

On observe sur la figure IV.5 une variation significative du taux d'amplification en fonction du nombre de Weber, ainsi augmenter le nombre de Weber réduit considérablement le taux d'amplification pour l'instabilité capillaire qui se produit à de faible nombre d'onde. L'inverse est observé pour l'instabilité hydrodynamique qu'on peut observer sur la figure IV.5 (a) et (b).

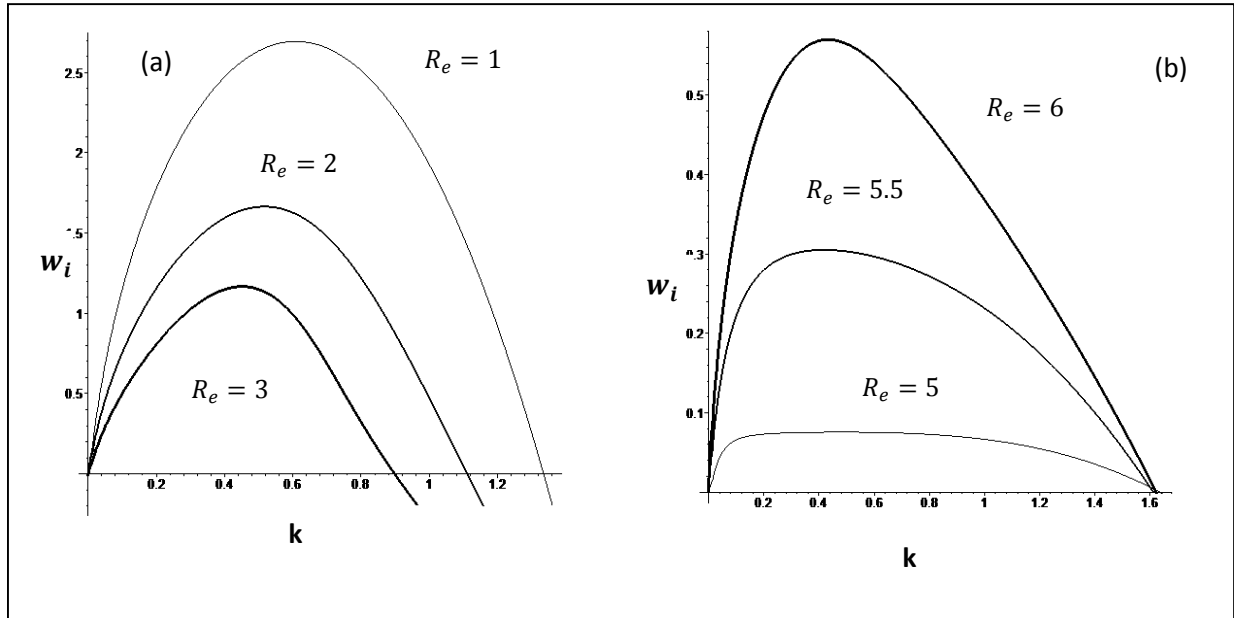


Figure IV.5. Taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'onde k pour $\eta=0.32$, et $Fr = 1$, $We = 100$ et (a) Instabilité capillaire et (b) Instabilité hydrodynamique.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce mémoire porte sur l'étude de l'écoulement d'un film liquide visqueux tombant sous l'effet de la gravité sur un cylindre vertical. L'objectif de ce travail est de décrire les instabilités qui se développent à la surface libre de cet écoulement. Après avoir posé le problème en termes d'équations du mouvement et de continuité avec les conditions aux limites correspondantes, nous avons défini les échelles caractéristiques du problème.

Le problème obtenu nous a permis de mettre en œuvre une technique de résolution basée sur une méthode aux résidus pondérés. Combinée à un développement en gradient de vitesse. Cette technique nous a permis d'avoir accès à une équation d'évolution de la surface libre de l'écoulement en fonction des paramètres adimensionnels du problème. La stabilité de l'écoulement est alors analysé dans le cadre de la stabilité linéaire, qui consiste à regarder l'évolution d'une perturbation infinitésimale pour ensuite établir des critères d'apparition des instabilités. Nous avons tracé les courbes de stabilité marginales et mis en évidence deux instabilités différentes. Les taux d'amplification de ces instabilités ont été déterminés en fonction des différents paramètres de l'écoulement ;

La linéarisation nous permet de négliger les termes non linéaires de l'équation d'évolution, nous pouvons continuer l'étude en regardant l'influence des termes non linéaires. Le modèle développé dans le cadre de ce mémoire peut être validé par une étude numérique ou par un développement asymptotique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIES

- [1] P. L. Kapitza and S. P. Kapitza, *Wave flow of thin layers of a viscous fluid*, Zh. Eksp. Teor.Fiz 19 ,pp105–120, (1949).
- [2] Lee, J.-J. and Mei, C.C., *Stationary waves on an inclined sheet of viscous fluid at high Reynolds and moderate Weber numbers*. J. Fluid Mech. 307 , pp191-229,(1996).
- [3] C. E., Hickox, *Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow*, Phys. Fluids 14 (1971).
- [4] L. Preziosi, K. Chen, D.D. Joseph, *Lubricated pipelining: stability of core-annular flow*, J. Fluid Mech. 201 (1989).
- [5] C. Ruyer-Quil, *Dynamique d'un film mince s'écoulant le long d'un plan incliné*, thèse Ph.D., Ecole Polytechnique, (1999).
- [6] A. Oron, S. H. Davis, and S. G. Bankoff, *Long-scale evolution of liquid films*, Rev.Mod. Physics 69, n° 3 (1997).
- [7] H.-C. Chang et E. A. Demekhin, *Complex wave Dynamics on Thin Films*. Elsevier Science, Amsterdam. ISBN 0 444 50970 4,(2002).
- [8] J.M. Floryan, S.H. Davis and R.E. Kelly, *Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane*, Phys. Fluids 30 (4), 983 (1987).
- [9] C. Ruyer-Quil and P. Manneville, *Improved modeling of flows down inclined planes*. Eur. Phys. J. B 15, 357 (2000).
- [10] F.Charru, and E.J. Hinch, "Phase diagram of interfacial instabilities in a two layer Couette flow and mechanism of the long wave instability," J. Fluid. Mech., vol. 414, pp. 195-223, July 2000.
- [11] C. Ruyer-Quil and P. Manneville, *Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted-residual approximations*. *Physics of Fluids*, 14(1):170–183, (2002).
- [12] N Mehidi, N. Amatusse, *Modélisation d'un écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides visqueux* , C. R. Mécanique, vol. 337, pp. 112-118, (2009).
- [13] M. Amaouche, N. Mehidi, N. Amatusse, *Linear stability of a two layer film flow down an inclined channel : A second-order weighted residual approach*, Phys. Fluids **19** (2007).
- [14] C.Nakaya, *Long waves on a thin fluid layer flowing down an inclined plane*. Phys. Fluids 18 :pp. 1407-12, (1975).

- [15] V.Y.a Shkadov, *Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity*.Izv.Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi.Gaza 2 : 43-51,(1967).
- [16] S.Boukorras, *Etude de la stabilité d'écoulements gravitaires de films liquides*, mémoire de master ,(2015).
- [17] L.Boudjmil, *Instabilité inertielle d'un fluide en écoulement sur un substrat solide*, mémoire de master ,(2015).
- [18] J.Padet, *Fluides en écoulement Méthodes et modèles* , Elsevier Masson (2008).
- [19] C. Ancey , *Notes de cours-Mecanique des Fluides* EPFL (2016).
- [20] E. Guazzelli, *Rhéologie des fluides non newtoniens*, (2001).
- [21] C. Ruyer-Quil, P.Trevelyan, F. Giorgiutti, C. Duprat and S. Kalliadasis, *Modelling film flows down a fibre*, J. Fluid. Mech., vol. 603, pp. 431-2462,May (2008).
- [22] C. Duprat, *Instabilités d'un film liquide en écoulement sur une fibre verticale*,Thèse de Doctorat, UPMC, Paris VI, (2009).
- [23] S. Ndoumbe, F. Lusseyran, B. Izrar, *Contribution à la modélisation d'un film annulaire tombant*, C. R. Mecanique 331 pp 173–178, (2003).