

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
ABDERRAHMANE MIRA BÉJAIA  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister  
en mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Systèmes Dynamiques

Par

Mouzaia Rafik

**THÈME**

Dynamique et Architecture des Singularités  
des Systèmes Découplés

Soutenu publiquement, le / /2009 devant le jury composé de :

Mr.	<b>N. AKROUNE</b>	Maître de Conférences	U.A.M.B.	Président
Mme.	<b>I. DJELLIT</b>	Professeur	U.B.M.A.	Rapporteur
Mr.	<b>A. AIT SAIDI</b>	Maître de Conférences	U.A.M.B.	Examineur
Mme.	<b>S. TASS</b>	Maître de Conférences	U.A.M.B.	Examineur

---

# *Remerciements*

J'exprime mes plus vifs remerciements à :

Madame Ilhem Djellit, Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba pour avoir dirigé ce travail de thèse, pour ses conseils et son encouragement.

Monsieur Nordine Akroune Maître de conférences à l'université de Béjaia pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance, et corrigé ce travail.

Monsieur Ahmed Ait Saidi, Maître de conférences à l'université de Béjaia pour avoir lu et fait un rapport sur ma thèse, et pour avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Madame Tass Maître de conférences à l'université de Béjaia, pour avoir lu et fait un rapport sur ma thèse, et pour avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Je remercie tous les membres du département de mathématiques de l'université de Béjaia.

Je tiens à remercier Monsieur Taha Abdel-Kaddous de m'avoir proposé ce sujet et dirigé ce travail.

Enfin, je tiens à exprimer mes sincères sentiments de gratitude et d'affection à mes Parents qui m'ont toujours poussé à aller plus loin dans mes études, ainsi qu'à tous mes collègues de la post graduation, particulièrement à mon ami Azzedine Benouaret, de leurs encouragements et aussi d'avoir veillé à ce que je termine mon Mémoire dans les meilleures conditions.

---

# Dynamique et Architecture des Singularités des Systèmes Découplés

## Résumé

**Résumé :** Dans ce travail nous présentons les résultats d'une étude qualitative d'un système dynamique chaotique modélisé par une récurrence bidimensionnelle

$T(x, y) = (f(y), ay + h(x))$ , où  $a$  est un paramètre réel. Notre étude se compose de deux parties. La première pour  $a = 0$ , dans ce cas cette récurrence est dite récurrence découplée dont le but de cette étude est de montrer la propriété du multistabilité (coexistence de plusieurs attracteurs) et la structure particulière des cycles et leurs bassins d'attraction, l'étude de cette dernière fait appel à l'étude d'une récurrence unidimensionnelle. Dans la deuxième partie on considère la même récurrence avec  $a \neq 0$ . On s'intéressera aux bifurcations de contact entre la frontière d'un attracteur et la frontière de son bassin d'attraction. On montrera qu'il existe généralement un lien, entre cette bifurcation de contact et la bifurcation homocline d'un point col (ou d'un cycle col) se trouvant sur la frontière du bassin d'attraction.

Pour l'étude des bifurcations, qui mènent vers le chaos, on fait appel à certaines notions des systèmes dynamiques comme les lignes critiques, les attracteurs et les bassins d'attraction.

**Abstract :** In this memory, we present the qualitative results of a dynamical system modeled by a bidimensional transformation  $T(x, y) = (f(y), ay + h(x))$ , when  $a$  is a real parameter, and  $f, h$  are two continuous functions.

Our study is composed of two parts. In the first part, we put  $a = 0$ , in this case  $T$  is called decoupled transformation. The aim of this study is to show the property of multistability (coexistence of several attractors), and a particular structure of the cycles and their attraction basins.

---

In the second part  $a \neq 0$ , we are interested by contact bifurcations between a border of an attractor and its attraction basin. We shall see, that there exists a link between the contact bifurcation and the homoclinic bifurcation of saddle point (saddle cycle) located on the border of the attraction basin.

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions Générales sur les transformations bidimensionnelles non inversibles</b>	<b>3</b>
1.1 introduction . . . . .	3
1.2 Quelques généralités sur les transformations ponctuelles . . . . .	4
1.2.1 Singularités . . . . .	4
1.2.2 Stabilité des singularités . . . . .	5
1.2.3 Ensemble invariant et absorbant . . . . .	6
1.2.4 Bassin d'attraction . . . . .	7
1.3 Le chaos . . . . .	8
1.3.1 Le chaos stable ou attracteur étrange . . . . .	8
1.3.2 Le chaos instable ou répulseur étrange . . . . .	9
1.4 Les bifurcations . . . . .	9
1.4.1 La bifurcation fold ou noeud-col . . . . .	9
1.4.2 La bifurcation flip . . . . .	10
1.4.3 La bifurcation Naïmark-Hopf . . . . .	10
1.5 La cascade de Myrberg . . . . .	11
1.6 Représentation en Structure feuilletée . . . . .	12
1.6.1 Définitions des zones de communication . . . . .	14
1.7 Structure de bifurcations . . . . .	15
1.7.1 La structure boîtes-emboîtées . . . . .	16

1.8	Définition mathématique des lignes critiques . . . . .	17
1.8.1	Feuilletage du plan de phase pour les transformations non inversibles bidimensionnelles quadratiques . . . . .	18
1.8.2	Bifurcations homoclines . . . . .	19
1.9	Propriétés générales d'une transformation découplée . . . . .	21
1.9.1	La stabilité des points fixes et des 2-cycles de $T$ . . . . .	24
1.9.2	Les cycles de $T$ générés à partir d'une bifurcation fold où flip d'un cycle de $F$ . . . . .	28
1.9.3	Etude des lignes critiques de $T$ . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Etude d'une transformation bidimensionnelle non inversible</b>	<b>32</b>
2.1	Etude de la transformation $T$ avec $a = 0$ . . . . .	33
2.1.1	Etude paramétrique de $T$ . . . . .	33
2.1.2	Bifurcations locales . . . . .	34
2.1.3	Architecture des cycles . . . . .	40
2.1.4	Les ensembles critiques . . . . .	44
2.1.5	Bifurcation globales . . . . .	50
2.2	Etude de la transformation $T$ avec $a \neq 0$ . . . . .	53
2.2.1	Etude du plan des paramètres . . . . .	53
2.2.2	Lignes critiques . . . . .	54
2.2.3	Bifurcations globales . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Etude de la transformation découplée généralisée d'ordre <math>n</math></b>	<b>73</b>
3.1	Etude des points fixes . . . . .	75
3.2	Etude des cycles d'ordre $k(k > 1)$ . . . . .	75
3.3	Etude de lignes critiques . . . . .	92
	<b>Conclusion</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>96</b>

---

# Introduction

L'histoire des systèmes dynamiques moderne est relativement récente, elle commence par Henri Poincaré (1854\_1912) qui fut le premier à entreprendre l'étude formelle d'un système dynamique chaotique, il avait la conviction que le comportement global de toute solution d'un système dynamique était plus important que le comportement local, cette conviction l'a conduit à développer une théorie qualitative des équations différentielles via l'étude du mouvement des trois corps célestes, qui consistait à savoir si les orbites décrites par ses corps était stables où instables.

Vint ensuite le mathématicien Birkhoff qui développa au début de  $XX^{eme}$  siècle l'étude des systèmes dynamiques discrets, qui selon lui permettait de mieux comprendre la dynamique la plus complexe résultant des équations différentielles.

Le travail sur les systèmes dynamiques fut poursuivi par Lyapounov et Pontrjagin, qui développèrent notamment la notion de stabilité d'une solution d'un système différentiel, et l'influence de la perturbation des conditions initiales sur le comportement asymptotique de ses solutions.

Ensuite dans les années 60 vinrent Moser, Smale, Péixoto, Kolmogorov, Arnold, et Sinai, qui utilisèrent des techniques différentielles topologiques pour développer cette théorie.

Ces dernières années plusieurs applications ont vu le jour précisément en météorologie, en économie, en astrophysique, où encore en physique des particules.

Dans ce travail nous présentons les résultats d'une étude qualitative d'un système dynamique chaotique modélisé par une récurrence bidimensionnelle,  $T(x, y) = (f(y), ay + h(x))$ , où  $a$  est un paramètre réel. Notre étude se compose de deux parties : la première

partie a concerné le cas  $a = 0$ , ce type de récurrence est dit récurrence découplée très répandue dans le domaine économique dont l'étude a consisté à cerner plusieurs phénomènes entre autres la propriété du multistabilité (coexistence de plusieurs attracteurs), la structure particulière des cycles et la représentation de leurs bassins d'attraction, dans la seconde partie a fait l'objet de l'étude de certaines bifurcations globales pour  $a \neq 0$ .

Toutes les routes ou mécanismes de bifurcations qui menent vers le chaos ont été explorées, qu'elle soient locales (doublement de période) où globales (bifurcations de contacts et d'ensembles invariants), un important outil a été utilisé qui est la notion de ligne critique pour l'étude des bifurcations de bassins d'attractions.

Ce travail est divisé en trois chapitres et une introduction :

Dans le premier, nous donnons les notions élémentaires des transformations ponctuelles bidimensionnelles, nous rappelons les différents types de singularités et bifurcations, et la structure de bifurcation boîtes-emboîtées. Le cas de dimension un est toujours présent comme un cas particulier. A la fin de ce chapitre, nous donnons les propriétés des récurrences découplées.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un exemple de système découplé de la forme  $T(x, y) = (y, ay + h(x))$ , où  $a$  est un paramètre réel et  $h$  est une fonction continue dans  $\mathbb{R}$ . Cette étude est constituée de deux parties : La première partie est liée à  $a = 0$  et  $T$  appelée transformation symétriquement découplée, la deuxième parties  $a \neq 0$ , on fait l'étude de certaines bifurcations globales (de contacts).

Dans le dernier chapitre, nous généralisons l'ordre de la récurrence  $T$  à  $n$ , et on fait l'étude pour  $a = 0$ . Ici l'étude ce faite suivant le paramètre  $n$  pair ou impair.

---

# Notions Générales sur les transformations bidimensionnelles non inversibles

## 1.1 introduction

Nous donnons dans ce chapitre quelques notions de base de la théorie des systèmes dynamiques et plus précisément une représentation des récurrences ou transformations ponctuelles .

De nombreux systèmes dynamiques sont tels que leur comportement peut être décrit par le système d'équations différentielles d'ordre  $p$  défini sous la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \Lambda, t) \quad , \quad X \in \mathbb{R}^P \quad , \Lambda \in \mathbb{R}^q, \quad (1.1.1)$$

ou décrit par une transformation ponctuelle :

$$X_{n+1} = T(X_n, \Lambda, n) \quad , \quad X \in \mathbb{R}^P \quad , \Lambda \in \mathbb{R}^q. \quad (1.1.2)$$

Si le système (1.1.1)(resp. (1.1.2) ) dépend explicitement du temps  $t$  (resp.  $n$  ) on dit que

le système est non autonome, dans le cas contraire on dit que le système est autonome. Nous nous intéressons dans ce travail aux transformations ponctuelles autonomes d'ordre deux ce qui nous permet d'avoir une représentation graphique.

## 1.2 Quelques généralités sur les transformations ponctuelles

Soit la transformation ponctuelle  $T$

$$X_{n+1} = T_{\Lambda}(X_n) = F(X_n, \Lambda), \quad (1.2.1)$$

telle que  $F \in C^k$ ,  $k \geq 1$  par rapport à la variable réelle  $X$  et au paramètre  $\Lambda$ .

$X_{n+1}$  est le conséquent de rang 1 de  $X_n$ .

$X_n$  est l'antécédent de rang 1 de  $X_{n+1}$ .

$F^{-n}(X)$  l'ensemble des antécédents de rang  $n$  de  $X$ .

Si  $T$  admet un inverse unique donc inversible alors  $T$  est dit un difféomorphisme.

S'il existe des points de l'espace de phase qui n'ont pas d'antécédents de rang 1 ou qui en ont plusieurs (1.2.1) est dite non inversible et  $T$  est dit un endomorphisme dont l'étude est plus complexe.

Si la récurrence est non inversible c'est-à-dire endomorphisme on peut parler de notion de point critique ou ligne critique.

- Pour  $X \in \mathbb{R}$ , un point critique est un point qui a plusieurs antécédents de premier rang confondus.
- Pour  $X \in \mathbb{R}^2$ , on définit les lignes critiques par l'ensemble des points ayant plusieurs antécédents de rang 1 confondus.

Les lignes critiques divisent le plan de phases en régions ayant un nombre différent d'antécédents.

### 1.2.1 Singularités

On a deux types de singularités, les points fixes et les cycles appelés encore orbites périodiques.

**les points fixes**

Un point fixe  $X^*$  est un point de l'espace de phases vérifiant :  $F(X^*) = X^*$

**les cycles d'ordre  $k$**

On considère la récurrence obtenue après  $k$  applications de  $F$  notée  $F^{(k)}$ , avec  $F^{(k)} = F \circ F \circ \dots \circ F$ ,  $k$  fois, donc un cycle d'ordre  $k$

(ou une orbite périodique d'ordre  $k$ )  $k > 1$  est un ensemble de  $k$  points  $X_i^*$ ,  $i = 1, \dots, k$  qui vérifient les deux relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_2^* = F(X_1^*) \\ X_3^* = F(X_2^*) \\ \vdots \\ X_K^* = F(X_{K-1}^*) \\ X_1^* = F(X_K^*) \end{array} \right. \quad (1.2.2)$$

$$X_i^* \neq F^j(X_i^*), \quad 1 \leq j \leq k-1 \quad (j \text{ et } k \text{ entiers}) \quad (1.2.3)$$

Un cycle d'ordre  $k = 1$  est un point fixe.

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre  $k$  est appelé point périodique d'ordre  $k$ .

**1.2.2 Stabilité des singularités**

Lorsque  $F$  est différentiable aux points  $X_i^*, i = 1, \dots, k$ , on utilise la notion de multiplicateurs pour caractériser la stabilité des singularités.

- Pour  $X \in R$ , on définit le multiplicateur  $S$  d'un point fixe  $X = X_i^* = X^*$  par :

$$S = \frac{dF}{dX} \Big|_{x=x^*} \quad (1.2.4)$$

et multiplicateur  $S$  d'un cycle d'ordre  $k$  est défini par :

$$S = \prod_{i=1}^k \frac{dF}{dX} \Big|_{x=x_i^*} \quad (1.2.5)$$

Si  $|S| < 1$ , Un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  est dit attractif ou asymptotiquement stable.

Et si  $|S| > 1$ , il est répulsif ou instable.

- Pour  $X \in \mathbb{R}^2$ , on a une récurrence bi-dimensionnelle :  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$

Un cycle d'ordre  $k$  possède deux multiplicateurs  $S_1, S_2$  valeurs propres de la matrice jacobienne de  $F^{(K)}$ , ( $K \geq 1$ )

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dx_{n+k}}{dx_n} & \frac{dy_{n+k}}{dx_n} \\ \frac{dx_{n+k}}{dy_n} & \frac{dy_{n+k}}{dy_n} \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

- Si  $|S_1| < 1$  et  $|S_2| < 1$ , alors le point fixe (resp cycle) est attractif.
- Si  $|S_1| > 1$  ou  $|S_2| > 1$ , alors il est répulsif.
- Si  $|S_1| = 1$  ou  $|S_2| = 1$ , alors le point fixe ou le cycle est indifférent. et on dit qu'il y-a une bifurcation.

Et si un point (resp cycle) est attractif, alors pour tout  $X$  de son voisinage les conséquents successifs de  $X$  convergent vers ce point fixe (resp cycle).

Soit  $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$ , on définit deux types de points fixes ou cycles d'ordre  $k$ , noeud et col.

- $|S_1| < 1$  et  $|S_2| < 1$ , le point fixe ou cycle d'ordre  $k$  est un noeud stable.
- $|S_1| > 1$  et  $|S_2| > 1$ , on a un noeud instable.
- $|S_1| > 1$  et  $|S_2| < 1$ , on a un col, il est toujours instable.

quand  $S_1, S_2 \in \mathbb{C}$ , deux multiplicateurs complexes conjugués :

$$S_1 = \rho e^{i\theta}, S_2 = \rho e^{-i\theta}$$

Le point fixe ou cycle d'ordre  $k$  est de type foyer.

- Si  $\rho < 1$ , le point fixe ou cycle est un foyer stable.
- Si  $\rho > 1$ , le point fixe ou cycle est un foyer instable.

Il peut apparaitre des singularités de codimension un. Ce sont les courbes invariantes par la transformation  $T$  ou  $T^K$  d'équation  $\varphi(X) = cst$ .

### 1.2.3 Ensemble invariant et absorbant

**Définition 1.2.1** On dit qu'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est absorbant si:

- ses bornes sont des points critiques (de différents rang) de  $F$ .
- $F(I) \subseteq I$ .
- $I \subset B(I)$ .

**Définition 1.2.2** Un ensemble  $A$  du plan des phase est un ensemble invariant si  $A$  vérifié  $T(A) = A$  et dit attractant s'il est invariant et il existe un voisinage  $U$  de  $A$  tel que :  $T(U) \subset U$  et  $T^n(X) \rightarrow A$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $X \in U$ .

### 1.2.4 Bassin d'attraction

**Définition 1.2.3** Un bassin d'attraction d'un ensemble attractant  $A$  est l'ensemble des initialisations telles que les étirés issus de celles-ci tendent vers l'attracteur considéré, et on le note  $B(A)$ . et on écrit :  $B(A) = \{x : T^n(x) \rightarrow A, n \rightarrow \infty\}$ .

Un bassin d'attraction peut être simplement connexe, multiplement connexe, non connexe, où à frontière floue.

Pour les systèmes linéaires, le seul attracteur possible, sauf cas dégénéré, est un point fixe stable, et son bassin d'attraction est l'espace de phase complet.

Pour les systèmes non linéaires, l'attracteur peut être constitué d'un ou de plusieurs points fixes, d'un cycle d'ordre  $k$ , d'une courbe invariante fermée, ou d'un attracteur chaotique.

Plusieurs attracteurs peuvent coexister dans l'espace de phase.

La Figure (1.1) donne une représentation des courbes invariantes au voisinage d'un point fixe.

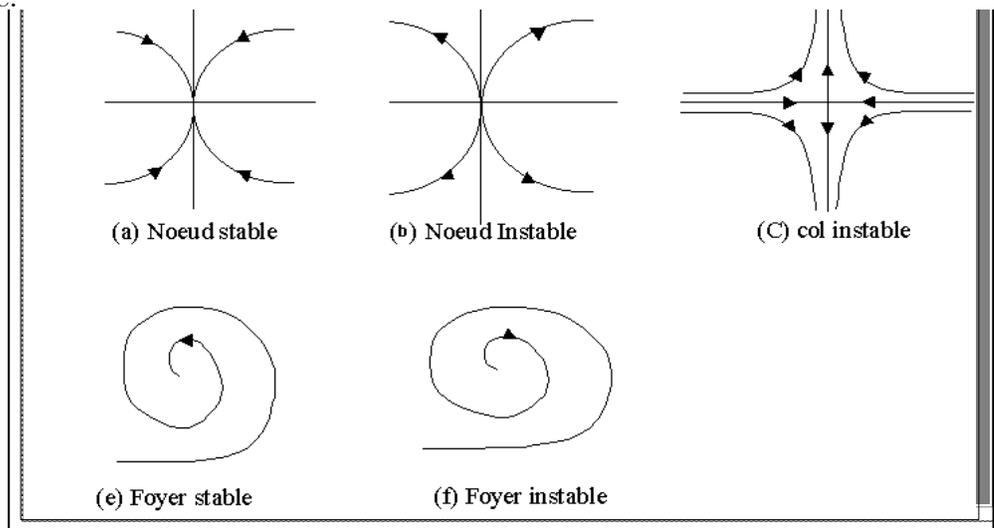


Fig (1.1) : Ensembles invariants de différents points.

Par un point fixe de type noeud passe deux variétés invariantes de même stabilité que le point fixe.

Par un point fixe de type col passe deux courbes invariantes de stabilités opposées.

## 1.3 Le chaos

Il n'existe pas de définition précise du chaos, ce phénomène est très irrégulier sur une période ou dont la période, est trop grande pour être mise en évidence le chaos englobe divers comportements non périodiques. Un tel comportement est caractérisé par :

- Existence de cycles attractifs d'ordre infini.
- Coexistence d'une infinité de cycles répulsifs.
- L'absence de cycles attractifs d'ordre fini.

Et dans la transformation que nous allons voir, les mouvements chaotiques sont généralement associés à l'existence d'une infinité de cycles instables, qui influencent le comportement du système vers un comportement chaotique.

On distingue deux types du chaos :

### 1.3.1 Le chaos stable ou attracteur étrange

Le système évolue d'une manière très désordonnée dans une zone de l'espace sans en sortir.

Les caractéristiques de cet attracteur sont :

- Dans l'espace des phases, l'attracteur est de volume nul.
- La dimension de l'attracteur est fractale (non-entière).
- Sensibilité aux conditions initiales.

**Définition 1.3.1** Soient  $(X, \delta)$  un espace métrique compact,  $F : X \rightarrow X$  une fonction.

On dit que  $F$  admet une Sensibilité aux conditions initiales s'il existe un nombre réel  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $x_0 \in X$ , et pour tout  $\beta > 0$ , il existe un point  $y_0 \in X$ , et un entier  $k > 0$ , vérifiant :  $\delta(x_0, y_0) < \beta \Rightarrow \delta(x_n, y_n) > \epsilon$ .

### 1.3.2 Le chaos instable ou répulseur étrange

Le système évolue d'une manière similaire, mais diverge après un certain nombre d'itérations.

## 1.4 Les bifurcations

En dynamique, on dit qu'il y a une bifurcation lorsqu'un changement qualitatif des solutions, se produit à l'occasion de la variation d'un paramètre  $\Lambda$ . Autrement dit, n'importe quelle variation même très petite d'un paramètre  $\Lambda$  entraîne une modification qualitative des solutions et changement de stabilité d'une singularité, etc...

La structure des singularités d'une récurrence est différente pour les valeurs du paramètre  $\Lambda$  alors ces dernières sont appelées valeurs de bifurcation.

Nous donnons ici les types de bifurcations :

### 1.4.1 La bifurcation fold ou noeud-col

Elle correspond à l'apparition de deux points fixes ou cycles d'ordre  $k$  l'un stable et l'autre instable, les deux cycles sont confondus, et possèdent un multiplicateur  $S = +1$ .

• Pour la transformation d'ordre 1, le schéma de cette bifurcation est donné par :

$$\phi \underset{S=+1}{\leftrightarrow} A^k + R^k$$

Où  $\phi$  signifie l'absence de cycles.

$A^k$  désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  attractif.

$R^k$  désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  répulsif.

• Pour la transformation d'ordre 2, la bifurcation fold donne un cycle noeud stable, et un cycle col.

le schéma de cette bifurcation est donné par :

$$\phi \underset{S=+1}{\leftrightarrow} N_s^k + C^k$$

$N_s^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type noeud stable.

$C^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type col.

Les courbes qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Lambda_{(k)_0}^j$  où  $k$  représente l'ordre du cycle et  $j$  caractérise l'ordre d'échange de ces points, deux cycles différents peuvent comporter la même nombre de points, mais leur d'échange est différent.

### 1.4.2 La bifurcation flip

Si le multiplicateur prend la valeur  $S = -1$ , un point fixe (cycle) d'ordre  $k$  change de stabilité et donne naissance à un cycle d'ordre deux (cycle d'ordre  $2k$ ) de même stabilité que le cycle d'origine.

- Pour la transformation d'ordre 1, cette bifurcation est notée par :

$$A^k \underset{S=-1}{\leftrightarrow} R^k + A^{2k}$$

Ou

$$R^k \underset{S=-1}{\leftrightarrow} A^k + R^{2k}$$

- Pour la transformation d'ordre 2, elle est notée par :

$$N_s^k \underset{S=-1}{\leftrightarrow} N_i^k + N_s^{2k}$$

Ou

$$N_i^k \underset{S=-1}{\leftrightarrow} N_s^k + N_i^{2k}$$

$N_i^k$  (resp  $N_s^k$ ) désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  instable (resp stable).

Les deux cycles résultant sont confondus pour la valeur de la bifurcation  $S = -1$ , la courbe où a lieu une bifurcation flip est notée :  $\Lambda_k^j$

### 1.4.3 La bifurcation Naïmark-Hopf

Un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type foyer de multiplicateur  $S_2 = \overline{S_1} = \rho e^{j\phi}$ ,  $j^2 = -1$  change de stabilité lorsque  $\rho = 1$ , et donne naissance à une courbe fermée invariante de même stabilité que le cycle d'origine, elle est notée :

$$F_s^k \underset{\rho=1}{\leftrightarrow} F_i^k + CFI_s$$

Ou

$$F_i^k \underset{\rho=1}{\longleftrightarrow} F_s^k + CFI_i$$

$F_s^k$  (resp  $F_i^k$ ) désigne un cycle d'ordre  $k$  de type foyer stable (resp foyer instable).

$CFI_s$  (resp  $CFI_i$ ) désigne un courbe fermée invariante stable (resp instable).

la courbe ou a lieu une bifurcation de Neïmark-Hopf est notée  $\Gamma_k^j$ , et comme  $\rho$  est commensurable à  $2\pi$ , C'est à dire  $\rho = 2\pi \frac{p}{q}$ ,  $p$  et  $q$  premiers entre eux, cette bifurcation donne lieu à deux cycles d'ordre  $q$  ; un cycle noeud stable et un cycle col.

## 1.5 La cascade de Myrberg

Le système possède successivement un cycle d'ordre  $k$  stable puis un cycle d'ordre  $2k, 4k, 8k, \dots$  et ainsi de suite, on observe une suite croissante de valeurs du paramètre  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  qui correspondent à une série infinie de bifurcations d'une orbite périodique instable de période  $2^i$ .

Les différentes bifurcations flip dans la cascade de Myrberg se passent de la manière suivante :

Par exemple si la première bifurcation :  $N_s^i \longleftrightarrow C^i + N_s^{2i}$ . celle-ci est alors suivie des bifurcations :

$$N_s^{2i} \longleftrightarrow C^{2i} + N_s^{4i}, N_s^{4i} \longleftrightarrow C^{4i} + N_s^{8i}, \dots$$

Ce qui va donner de façon globale :

$$N_s^i \longleftrightarrow C^i + N_s^{2i} \longleftrightarrow C^i + C^{2i} + N_s^{4i} \longleftrightarrow C^i + C^{2i} + C^{4i} + N_s^{8i} \longleftrightarrow \dots$$

Cette accumulation de singularités instables, donc d'un grand nombre de variétés invariantes instables, est à l'origine de l'apparition du chaos.

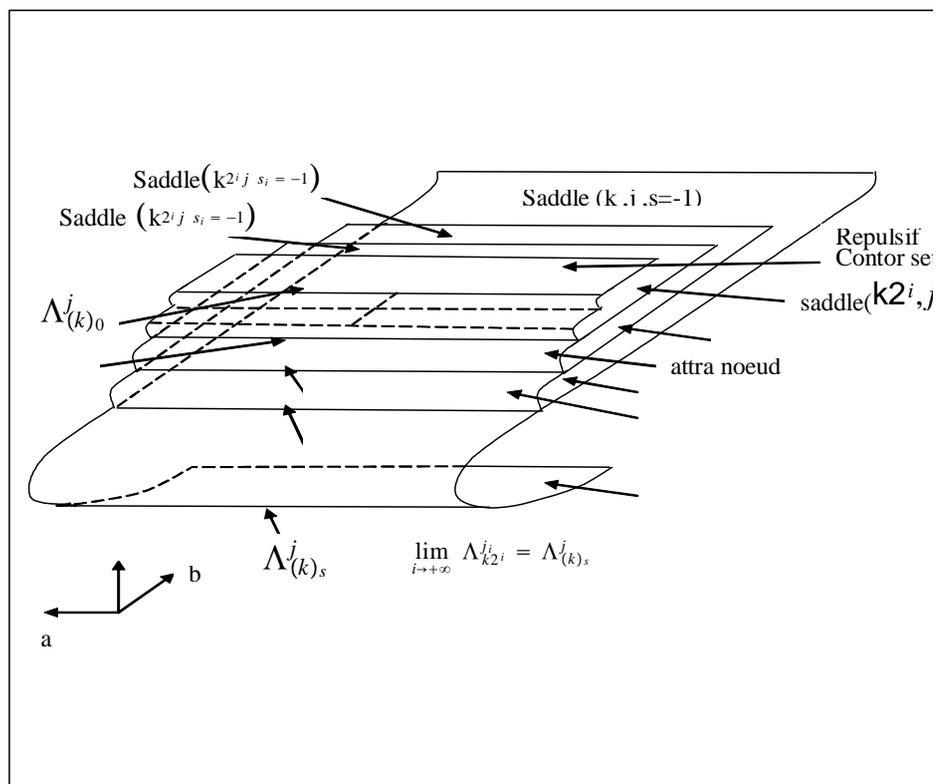
La courbe de bifurcation  $\Lambda_{(k)_s}^j$  est le point d'accumulation des bifurcations  $\Lambda_{k2^i}^{j_i}$ , elle est définie :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Lambda_{k2^i}^{j_i} = \Lambda_{(k)_s}^j.$$

## 1.6 Représentation en Structure feuilletée

On utilise la représentation tridimensionnelle des bifurcations dans l'espace  $(a, b, |X|)$ , où  $|X|$  est une norme qualitative associée au cycle considéré, pour représenter le domaine d'existence des différentes singularités de la transformation ponctuelle définie par l'équation (1.2.1) avec  $\Lambda = (a, b)$ , on prend par exemple la distance moyenne entre les  $k$  points du cycle.

Cette représentation met en évidence une structure feuilletée, chaque feuillet correspond à un cycle bien défini, les courbes de jonction entre ces feuillets sont des courbes de bifurcations fold et flip. Il peut apparaître d'autres types de jonctions plus complexes dues à l'existence de points de tangence entre les courbes de bifurcation, dits points cuspidaux ou points de codimension deux, voir [1], [2]. Ces zones de jonction sont dites zones de communication. Les communications entre feuillets, sont définies à partir des courbes de bifurcations fold et flip dans le plan paramétrique, et les points de tangence entre ces courbes. La figure (1-02) donne un exemple de feuilletage associé à une courbe fold.



Fig(1.02) : Organisation des feuillets dans le cas de la Cascade de Myrberg

### 1.6.1 Définitions des zones de communication

#### a) Zone Echangeur(ZE)

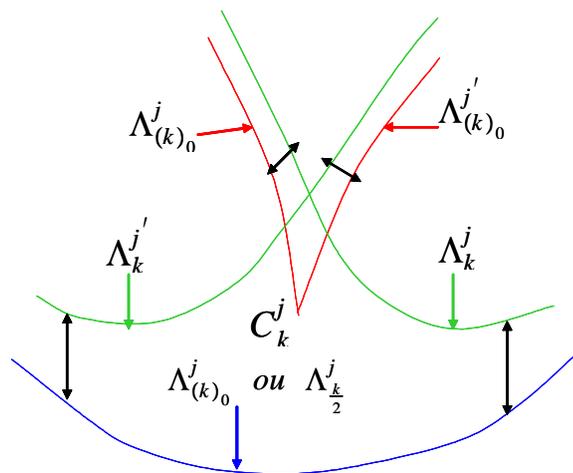
Une telle zone est constituée par les courbes fold  $\Lambda_{(k)_0}^j, \Lambda_{(k)_0}^{j'}$  qui sont tangentes au point cuspidal  $C_k^j$ , et de deux courbes flip  $\Lambda_k^j, \Lambda_k^{j'}$ , ainsi qu'une autre courbe qui peut être une courbe fold  $\Lambda_{(k)_0}^j$  ou une courbe flip  $\Lambda_{(\frac{k}{2})}^j$ . Les zones échangeurs peuvent se succéder et constituer une cascade de doublement de période.

#### b) Zone Source (ZS)

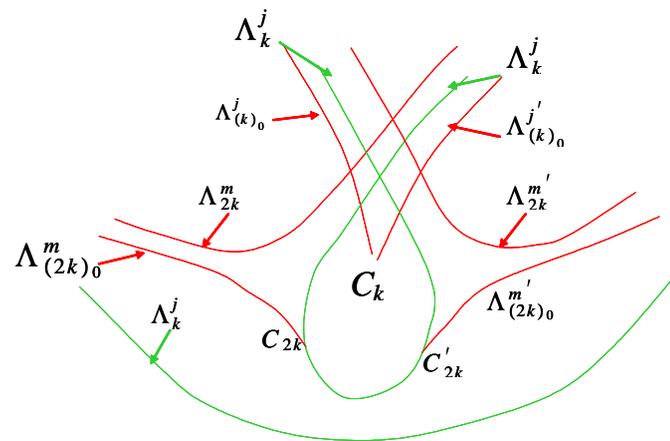
La zone source est caractérisée par l'existence d'un point cuspidal  $C_k$  sur une bifurcation fold  $\Lambda_{(k)_0}^j$ , entouré par une courbe flip  $\Lambda_k^j$  qui forme une boucle fermée. Cette courbe est tangente à des courbes fold  $\Lambda_{(2k)_0}^m$  et  $\Lambda_{(2k)_0}^{m'}$  formant ainsi deux points cuspidaux  $C_{2k}, C'_{2k}$  respectivement, ainsi qu'une autre courbe de bifurcation flip  $\Lambda_k^j$ .

#### c) Zone Col (ZC)

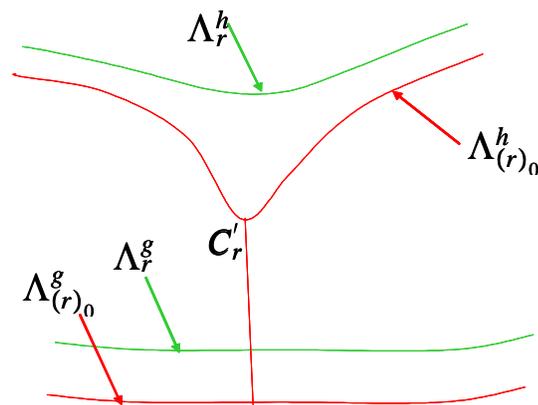
La zone col est caractérisée par un point cuspidal  $C'_r$  sur une courbe de bifurcation fold  $\Lambda_{(r)_0}^h$ , d'une autre courbe fold  $\Lambda_{(r)_0}^g$ , ainsi que deux courbes flip  $\Lambda_r^h, \Lambda_r^g$ .



Zone échangeur



Zone source



Zone col

Fig. (1-3) : Zones de communication

## 1.7 Structure de bifurcations

Une étude de plusieurs chercheurs (C. Mira, I Gumowski, D. Fournier, H. Kawakami) mis en évidence d'une organisation remarquable de l'ensemble des bifurcations, sur l'axe du paramètre appelée structure de bifurcation "boîtes-emboîtées".

### 1.7.1 La structure boîtes-emboîtées

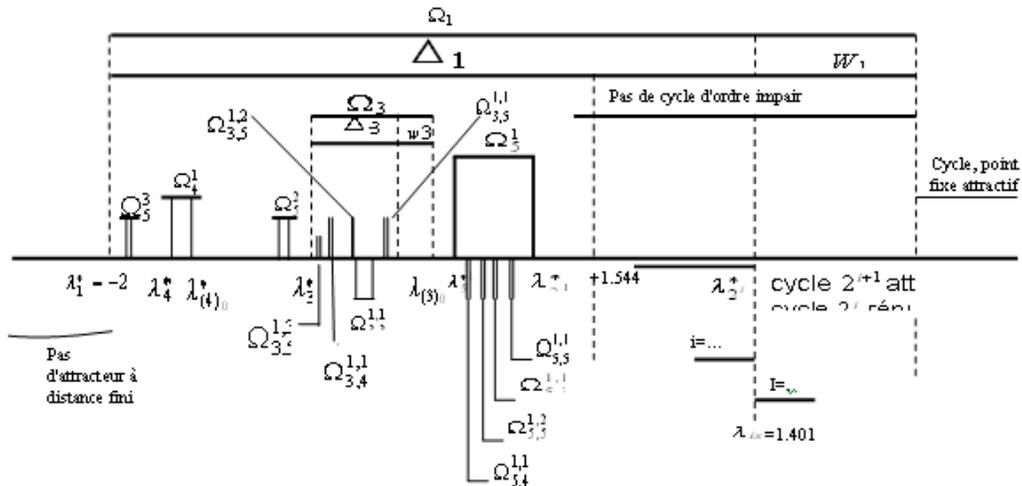
Cette structure a été mise en évidence par Myrberg pour l'endomorphisme  $T$  d'ordre 1. Une description détaillée peut être trouvée dans [14], [15].

$$x_{n+1} = x_n^2 + \lambda = T(x_n), \quad x \in IR, \lambda \in R \tag{1.7.1}$$

Il existe un intervalle  $\Omega_1$  l'ensemble des valeurs de  $\lambda$ , admet une plus petite valeur  $\lambda_1^*$ , et une plus grande valeur  $\lambda_{(1)0}$  contenant toutes les valeurs de bifurcations de l'endomorphisme (1.7.1), en dehors duquel il n'existe aucun autre attracteur d'ordre fini à distance finie.  $\Omega_1$  contient une infinité de boîtes  $\Omega_k^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k = 2, 3, \dots$ . Chacune est relative à l'ensemble des bifurcations de  $T^k$ , les valeurs  $\lambda_{k_0}^j$  correspondant à la naissance de bifurcation fold, les valeurs  $\lambda_k^{*j}$  correspondant à la fusion du cycle né instable avec un point critique de rang  $k + 1$ .

Chaque boîte  $\Omega_k^j$  contient une infinité des boîtes de rang 2  $\Omega_{kk_1}^{jj_1}$ ,  $k_1 = 3, 4, \dots$ ,  $j_1 = 1, 2, 3, \dots$  qui contiennent des boîtes de rang 3  $\Omega_{kk_1k_2}^{jj_1j_2}, \dots$ . Ainsi chaque boîte de rang  $n$  contient une infinité de boîtes de rang  $n + 1$ , et toutes ces boîtes possèdent une structure similaire à  $\Omega_1$ .

Cette structure est dite Fractale, c'est à dire qu'elle possède la propriété d'auto-similarité, à l'intérieur de chacune des boîtes nous retrouvons une organisation similaire de type boîtes-emboîtées, elle correspond de plus à un classement des cascades de Myrberg.



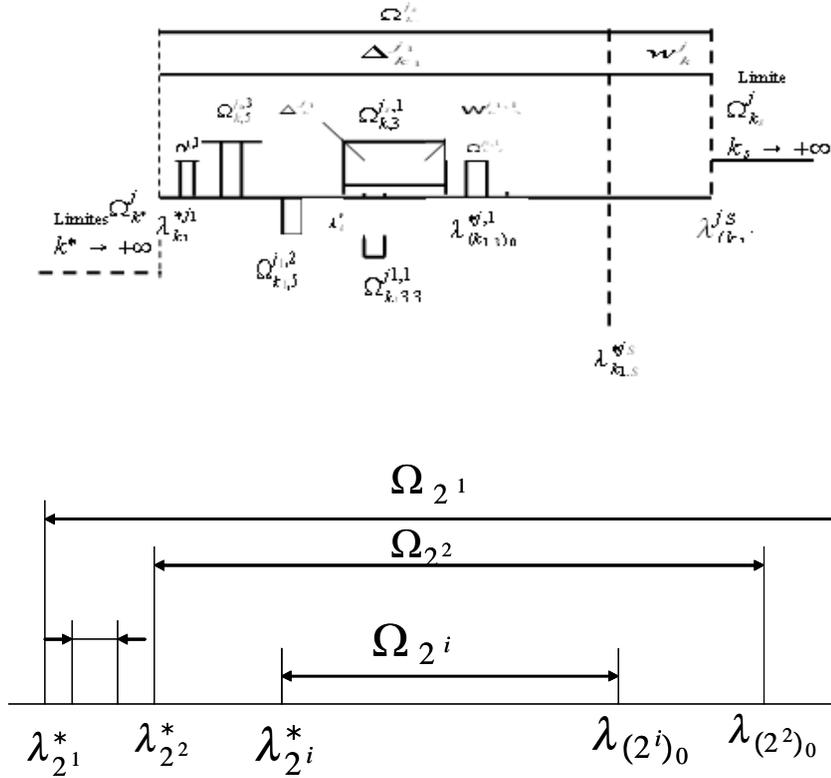


Fig 1.5: Schéma de structure de bifurcation d'après Mira (voir référence).

## 1.8 Définition mathématique des lignes critiques

Les transformations bidimensionnelles non inversibles sont caractérisées par l'existence des singularités sont des lignes critiques, ces dernières jouent un rôle important dans l'étude de bifurcations globales ou de contacts soit avec des frontières des bassins d'attractions, soit avec des courbes invariantes fermées.

Dans le cas où  $T$  est différentiable, et  $X \in \mathbb{R}$ , les points critiques sont les conséquents de rang 1, définis par :  $\frac{dT}{dX}(X) = 0$ .

Pour  $X \in \mathbb{R}^2$ , les lignes critiques  $LC$  sont les courbes conséquentes de rang 1 des courbes  $LC_{-1}$  définies par le lieu des points pour lequel le déterminant  $J(X)$  du jacobien de  $T$

s'annule. Par conséquent, les courbes critiques de rang  $k$  ( $k \geq 0$ ) sont consécutives du rang  $k$  de  $LC_{-1}$  notées par :

$$LC_{k-1} = T^k (LC_{-1}) = T^{k-1} (LC) \text{ et } LC_0 = LC.$$

Et donc une courbe  $LC_{-1}$  est l'ensemble suivant :  $\{ X \in \mathbb{R}^2, \det J(X) = 0 \}$

Dans le cas où  $T$  est non différentiable, une courbe  $LC_{-1}$  est l'ensemble :

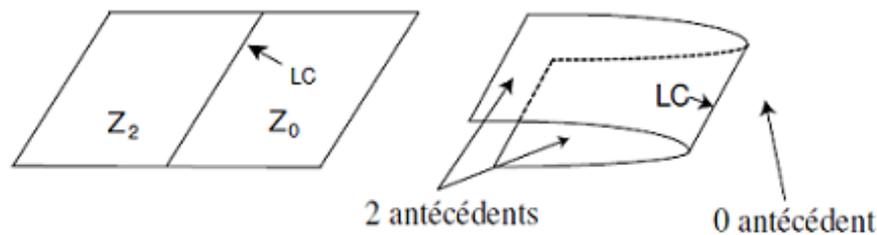
$$\{ X \in \mathbb{R}^2, T \text{ non différentiable en } X \}.$$

### 1.8.1 Feuilletage du plan de phase pour les transformations non inversibles bidimensionnelles quadratiques

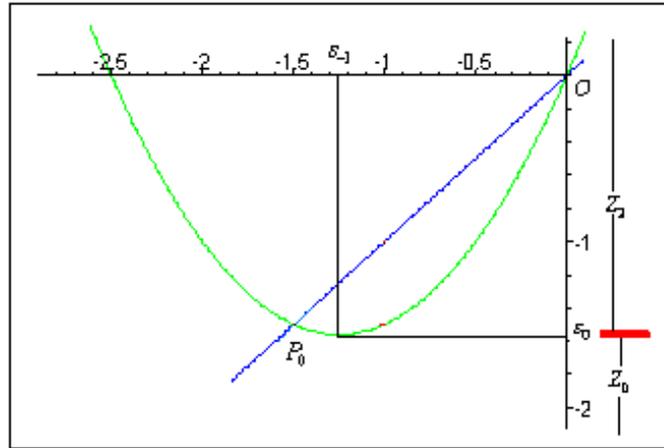
La notion de feuilletage du plan de phases est fondamentale pour la compréhension des propriétés relatives aux transformations non inversibles (TNI), dans ce cas les courbes critiques divisent le plan de phases en régions  $Z_k$ , ( $k \geq 0$ ).

#### •Transformation de type ( $Z_0 - Z_2$ )

On a une seule ligne critique lieu des points  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  qui sépare le plan  $\mathbb{R}^2$  en deux régions, une région  $Z_0$  Pour laquelle les points  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  n'ont pas d'antécédents, une région  $Z_2$  pour laquelle les points  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  ont deux antécédents de rang 1.



Fig(1.8.a) : Plan de phases d'une TNI de type ( $Z_0 - Z_2$ )



Fig(1.8.b) : Deux zones séparées un point critique

$$f(x) = 2.5x + x^2$$

De même pour une récurrence d'ordre 1, on a un seul point critique  $C_1$  qui sépare le plan  $\mathbb{R}$  en deux régions  $Z_0, Z_2$ .

## 1.8.2 Bifurcations homoclines

### Définition d'un ensemble stable et instable d'un point fixe

Considérons une transformation ponctuelle  $f$  dans  $\mathbb{R}^p$  définissant un système dynamique discret  $(\mathbb{R}^p, \mathbb{N}, T)$ , et soit un point fixe  $x^*$  de  $T$  et  $U$  un voisinage de  $x^*$ .

**Définition 1.8.1** Soit  $x^*$  un point fixe répulsif.

On appelle  $W_{loc}^u(x^*)$  ensemble instable local ou variété instable local de  $x^*$ , l'ensemble des points de  $U$  ayant une séquence d'antécédents successifs dans  $U$ , qui converge vers  $x$ .

On appelle  $W^u(x^*)$  ensemble instable global de  $x^*$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^p$  ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers  $x^*$ . Ces ensembles s'écrivent:

$$W_{loc}^u(x^*) = \{x \in U : x_{-n} \in T^{-n}(x) \rightarrow x^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x^* \in U\}$$

$$W^u(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^p : x_{-n} \in T^{-n}(x) \rightarrow x^*\} = \cup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^u(x^*))$$

$W^u(x^*)$  est invariant par rapport à  $T$ ;  $T(W^u(x^*)) = W^u(x^*)$ .

$W^u(x^*)$  n'est pas invariant par rapport à  $T^{-1}$ , Si  $T$  est un endomorphisme et on écrit

$$W^u(x^*) \subset T^{-1}(W^u(x^*)).$$

si  $T$  est inversible,  $W^u(x^*)$  est invariant par rapport à  $T^{-1}$ .

**Définition 1.8.2** Soit  $x^*$  un point fixe de  $T$ , attractif ou répulsif.

On appelle  $W_{loc}^s(x^*)$  ensemble stable local ou variété stable locale de  $T$ , l'ensemble des points de  $U$  dont la séquence d'images successives appartient à  $U$  et converge vers  $x^*$ .

On appelle  $W^s(x^*)$  ensemble stable global de  $T$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^p$  dont la séquence d'images successives converge vers  $x^*$ .

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^s(x^*) = \{x \in U : x_n = T^n(x) \rightarrow x^*, \forall n \in \mathbb{N}, x^* \in U\}$$

$$W^s(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^p : x_n = T^n(x)\} = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(W_{loc}^s(x^*)).$$

$W^s(x^*)$  est invariant par rapport à  $T^{-1}$ ;  $T^{-1}(W^s(x^*)) = W^s(x^*)$ .

$W^s(x^*)$  n'est pas invariant par rapport à  $T$ , Si  $T$  est un endomorphisme on écrit :

$$T(W^s(x^*)) \subset W^s(x^*).$$

L'invariance de  $W^s(x^*)$  par rapport à  $T$  a lieu lorsque  $T$  est inversible.

L'ensemble stable global d'un point fixe attractif est son bassin d'attraction.

Si  $T$  est un difféomorphisme, les ensembles stable et instable globaux sont des variétés.

**Définition 1.8.3** Soit  $S$  un point fixe répulsif de  $T$ .

1. Un point  $q$  est appelé homocline à  $S$  si  $q \in W^s(S) \cap W^u(S)$ .

2. On appelle orbite homocline  $\tau(q)$  associée au point homoclinique  $q$  appartenant à  $U(S)$  (voisinage de  $S$ ) un ensemble des itérés successifs de  $q$ , et d'une séquence infinie d'antécédents obtenus par la transformation locale inverse de  $T_{loc}^{-1}$  dans  $U(S)$ .

$$\tau(q) = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

Où  $q_n = T^n(q) \rightarrow S$ , et  $q_{-n} = T_{loc}^{-1}(q) \rightarrow S$ .

Il existe une infinité d'orbites homoclines associées à un point homocline. Celles-ci ont la même demie-trajectoire positive, mais diffèrent par leur demie-trajectoire négative.

**Définition 1.8.4** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux points fixes répulsifs de  $T$ .

1— Un point  $q$  est appelé hétérocline si  $q \in W^s(S_1) \cap W^u(S_2)$ .

2— Une orbite hétérocline de  $q$  est un ensemble des itérés successifs de  $q$ , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse de  $T$ . Les orbites homoclines et hétéroclines sont classifiées par rapport à l'ensemble des antécédents de premier rang confondus  $LC_{-1}$  et l'ensemble suivant :

$$J_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \det(DT(x, y)) = 0, \text{ où } T \text{ n'est pas différentiable en } (x, y)\}.$$

Une orbite homocline ou hétérocline qui contient un point de  $J_0$  est appelée orbite dégénérée, et si de plus elle contient un point de  $LC_{-1}$  sera appelée orbite dégénérée critique.

## 1.9 Propriétés générales d'une transformation découplée

Les systèmes dynamiques découplés sont des systèmes très répandus dans le domaine économique et sont connus sous le nom les systèmes de Cournot, le but de ce modèle est d'organiser la stabilité du taux de production entre deux concurrents de même produit parallèlement à la stabilité du prix et le profil de chacun. Les systèmes découplés ont été traités par de nombreux auteurs, dont on citera les travaux de Bischi, Mammana et Gardini [11], et Lupini, Lenci[09].

$T$  est une transformation symétriquement découplée de dimension deux si elle est sous forme :  $T(x, y) = (f(y), g(x)) \in X \times Y$ .

où  $f : Y \longrightarrow X$  et  $g : X \longrightarrow Y$  ( $X, Y \subset \mathbb{R}$ ) sont deux fonctions continues.  $T$  s'appelle transformation de Cournot.

Posons

$$T(x, y) : \begin{cases} x' = f(y) \\ y' = g(x) \end{cases}$$

et  $F = f \circ g$ , et  $G = g \circ f$ .

Les propriétés suivantes sont établies dans [BMG], et [LLG].

**Propriété 1 :**

$$T^{2k} : \begin{cases} x' = F^k(x) \\ y' = G^k(y) \end{cases}$$

$$T^{2k+1} : \begin{cases} x' = f(G^k(y)) \\ y' = g(F^k(x)) \end{cases}$$

Cette propriété indique que la deuxième itération de  $T$  donne une récurrence dite découplée.

**Propriété 2 :**

Pour  $n \geq 1$ , les deux récurrences unidimensionnelles  $F$  et  $G$  satisfont :

$$f \circ G^n(y) = f \circ g \circ f \circ \dots \circ g \circ f(y) = F^n \circ f(y)$$

$$g \circ F^n(x) = g \circ f \circ g \circ \dots \circ f \circ g(x) = G^n \circ g(x).$$

Nous déduisons de cette propriété que les cycles de la récurrence  $F$  et ceux de  $G$ , et leurs propriétés de stabilité sont strictement liés.

La correspondance entre les cycles de  $F$  et ceux de  $G$  est donnée dans la propriété suivante.

**Propriété 3 :**

Si  $\{a_1, \dots, a_n\}$  un cycle de  $F$  d'ordre  $n$ , alors:  $\{b_1, \dots, b_n\}$ , tel que :  $b_i = g(a_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , est un cycle de  $G$  d'ordre  $n$ .

Et si  $\{b_1, \dots, b_n\}$  un cycle d'ordre  $n$  de  $G$ , alors :  $\{a_1, \dots, a_n\} = \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$  est un cycle d'ordre  $n$  de  $F$ .

On appelle ces cycles, des cycles conjugués. la stabilité est déduite par cette relation :

$$S = \prod_{i=1}^{i=n} F'(a_i) = \prod_{i=1}^{i=n} G'(b_i) = \prod_{i=1}^{i=n} f'(b_i)g'(a_i).$$

Les propriétés que nous avons vues montrent que les cycles de la transformation bidimensionnelle  $T$  sont liés aux cycles des transformations unidimensionnelles  $F$  et  $G$ .

Maintenant, pour l'étude des récurrences découplées nous considérons certaines questions :

Si  $C_F = \{a_1, \dots, a_p\}$  est un cycle de  $F$  d'ordre  $p$ , avec la valeur propre  $\lambda_F$ ,

et  $C_G = \{b_1, \dots, b_q\}$  est un cycle de  $G$  d'ordre  $q$  avec la valeur propre  $\lambda_G$ . alors :

- 1—Combien de cycles de  $T$  sont générés par les cycles de  $F$  et  $G$ ?
- 2—Quel est le nombre des points de ces cycles?
- 3—Quelle est la nature de ces cycles?

Considérons le cas des points fixes de  $F$  et  $G$ , i.e. le cas où  $p = q = 1$ .

**Propriété 4 :**

Si  $x_1, x_2, \dots$ , et  $x_m$ , sont  $m$  points fixes de  $F$ , alors  $y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2), \dots$ , et  $y_m = g(x_m)$ , sont les points fixes conjugués de  $G$ .

Parmi les  $m^2$  points du produit cartésien  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \times \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ ,  $m$  points sont des points fixes de Cournot transformation  $T$  et sont donnés par :

$$(x_i, y_i) = (x_i, g(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.9.1)$$

**Remarque :** Les  $m^2 - m$  points restants dont la forme  $(x_i, y_j)$ ,  $i \neq j$ , forment des cycles d'ordre deux pour la récurrence  $T$ .

Du fait que :  $T(x_i, y_j) = T(x_i, g(x_j)) = (F(x_j), g(x_i)) = (x_j, y_i)$

et  $T(x_j, y_i) = T(x_j, g(x_i)) = (F(x_i), g(x_j)) = (x_i, y_j)$

donc  $\{(x_i, y_j), (x_j, y_i)\}$  est un cycle d'ordre deux de  $T$ .

Il existe  $(m^2 - m)/2$  cycles d'ordre 2 de  $T$ , sont donnés par :

$$C_T^2 = \{(x_i, g(x_j)), (x_j, g(x_i))\}, i < j, i, j = 1, 2, \dots, m \quad (1.9.2)$$

L'existence des  $m$  points fixes distincts de  $F$  (par conséquent  $m$  points fixes conjugués de  $G$ ) implique l'existence, pour la transformation Cournot  $T$  de :

- i)  $m$  points fixes donnés par l'expression (1.9.1).
- ii)  $\frac{1}{2}m(m - 1)$  cycles d'ordre 2 donnés par (1.9.2).

### 1.9.1 La stabilité des points fixes et des 2-cycles de $T$

Pour les points fixes, considérons la matrice jacobienne :

$$DT(x_i, g(x_i)) = \begin{pmatrix} 0 & f'(g(x_i)) \\ g'(x_i) & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de  $DT$  est :

$$P(S) = S^2 - g'(x_i)f'(g(x_i))$$

$$P(S) = S^2 - F'(x_i)$$

Les valeurs propres sont :

$$S_{1,2} = \pm \sqrt{F'(x_i)} = \pm \sqrt{G'(y_i)}$$

Donc les points fixes  $P_i = (x_i, g(x_i)), i = 1, \dots, m$ . sont des noeuds (foyers). Ils sont stables (instables), si le multiplicateur de  $F$  est positif (négatif) avec le module inférieur (supérieur) à 1 respectivement.

Remarquons que les points fixes dans ce cas ne peuvent jamais être des cols.

De façon similaire pour les cycles d'ordre 2, la matrice jacobienne est :

$$DT^2(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} F'(x_i) & 0 \\ 0 & G'(y_j) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont alors :

$$S_1 = F'(x_i), S_2 = G'(y_j) = F'(x_j)$$

Ici les cycles d'ordre 2 ne sont jamais des foyers.

Généralisons ces résultats pour les cycles de  $F$  d'ordre supérieur à deux.

**Propriété 5 :**

On sait que le cycle d'ordre  $k$  est constitué de points fixes de la transformation  $T^k$ .

1—Si l'ordre du cycle est un nombre impair ( $2k + 1$ ) on a deux cas :

Soit les abscisses des points de ce cycle de  $T$  sont des points d'un cycle de même ordre que  $F$  où bien les ordonnées des points du cycle de  $T$  qui sont des points de même ordre que  $G$ . Mais pas les deux à la fois.

2—Si l'ordre de cycle est pair ( $2k$ ), les abscisses et les ordonnées de ce cycle sont au même temps des points d'un cycle d'ordre  $k$  de  $F$  et  $G$  respectivement.

En effet : On sait que les points d'un cycle d'ordre  $n$  de  $T$  sont des points fixes de  $T^n$ .

1— Un cycle d'ordre ( $2k + 1$ ) est la solution du système

$$\begin{cases} x = f(G^k(y)) \\ y = g(F^k(x)) \end{cases}$$

Si on remplace  $y$  dans la première équation on obtient  $x = F^{2k+1}(x)$ , et  $x$  sera un point fixe de  $F^{2k+1}$ .

$x$  est un point fixe de  $F^{2k+1}$ , i.e.  $x$  est un point d'un cycle d'ordre ( $2k + 1$ ) de  $F$  alors  $g(x)$  est un point d'un cycle d'ordre ( $2k + 1$ ) de  $G$ . i.e.  $g(x)$  est un point fixe de  $G^{2k+1}$ .

2—Un cycle d'ordre  $(2k)$  est la solution du système

$$\begin{cases} x = F^k(x) \\ y = G^k(y) \end{cases}$$

ici  $x$  est un point fixe de  $F^k$ , et  $y$  est un point fixe de  $G^k$ . i.e.  $x$  et  $y$  sont des points d'un cycle d'ordre  $k$  de  $F, G$  respectivement.

**Propriété 6 :**

Soit  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un cycle d'ordre  $n$  de  $F$ , avec la valeur propre  $\lambda = \prod_{i=1}^{i=n} F'(x_i)$ .

Si  $n = 2k$ , alors  $T$  a  $k$  cycles distincts d'ordre  $2n$ , donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{T^i(a_1, g(a_1)), i = 1, 2, \dots, 2n\} \\ \{T^i(a_2, g(a_1)), i = 1, 2, \dots, 2n\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{T^i(a_k, g(a_1)), i = 1, 2, \dots, 2n\} \end{array} \right. \quad (1.9.3)$$

Avec les valeurs propres  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_a$ .

Si  $n = 2k + 1$ , alors  $T$  a  $k$  cycles distincts d'ordre  $2n$  donnés par les relations précédentes, avec les valeurs propres  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_a$ , et un cycle d'ordre  $n$  donné par :

$\{T^i(a_{k+1}, g(a_1)), i = 1, 2, \dots, n\}$ , avec les valeurs propres  $\lambda_1 = -\sqrt{\lambda_a}$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{\lambda_a}$ .

Les cycles de  $T$  dans cette propriété sont dites de type homogène, parce qu'ils résultent de la combinaison de cycles de  $F$  avec leurs conjugués de  $G$ .

**Propriété 7 :**

Soient  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  deux cycles de  $F$ , avec les valeurs propres

$\lambda_a, \lambda_b$  respectivement, soient  $k = \text{ppcm}(n, m)$ , et  $\alpha_1, \alpha_2$

deux entiers tels que :  $k = n.\alpha_1 = m.\alpha_2$ .

Alors  $T$  a  $\binom{n*m}{k}$  cycles distincts d'ordre  $2k$  donnés par :

Avec les valeurs propres:  $\lambda_1 = \lambda_a^{\alpha_1}, \lambda_2 = \lambda_b^{\alpha_2}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \{T^i(a_1, g(b_1)), i = 1, 2, \dots, 2k\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{T^i(a_l, g(b_l)), i = 1, 2, \dots, 2k\}, l = \frac{nm}{k}. \end{array} \right. \quad (1.9.4)$$

Les cycles de  $T$  de la propriété précédente sont de type mixte, parcequ'ils résultent de la combinaison d'un cycle de  $F$  avec un cycle de  $G$  non conjugué à celui de  $F$ .

**Proposition 1 :** Tout cycle  $C$  de  $T$  est associé à un où deux cycles de  $F$ , notés  $C_x$  et  $C'_x$  ( $C_x = C'_x$  où  $C_x \neq C'_x$ ), et tq :

- (i) Le point fixe de  $T$  appartient à l'ensemble  $E = (C_x \cup C'_x) \times (g(C_x \cup C'_x))$ .
- (ii)  $C$  est attractif pour  $T$  ssi  $C_x$  et  $C'_x$  sont attractifs pour  $F$ .

**Proposition 2 :** Soit  $C$  un cycle attractif de  $T$  associé aux cycles  $C_x$  et  $C'_x$  de  $F$ , alors:

- (i)  $B(C) \subseteq [B(C_x) \cup B(C'_x)] \times g([B(C_x) \cup B(C'_x)])$
- (ii)  $B_{im}(C) \subseteq [B_{im}(C_x) \cup B_{im}(C'_x)] \times g([B_{im}(C_x) \cup B_{im}(C'_x)])$ , et  $B_{im}(C)$  est le bassin immédiat de  $C$ .

**Proposition 3 :** Soit  $A$  un ensemble attractif de  $T$ , alors il existe des ensembles attractifs  $A_x$  et  $A'_x$  ( $A_x = A'_x$  où  $A_x \neq A'_x$ ), tels que :

- (i)  $A \subseteq (A_x \cup A'_x) \times (g(A_x \cup A'_x))$ .
- (ii)  $B(A) \subseteq [B(A_x) \cup B(A'_x)] \times g([B(A_x) \cup B(A'_x)])$ .
- (iii)  $B_{im}(A) \subseteq [B_{im}(A_x) \cup B_{im}(A'_x)] \times g([B_{im}(A_x) \cup B_{im}(A'_x)])$ .

**Remarque :** Pour tout point fixe  $p(x_1, y_1)$  de la transformation bidimensionnelle  $T$  de période  $n \geq 1$ , les lignes  $y = y_1$  et  $x = x_1$ , sont des ensembles absorbants de la transformation  $T^n$ .

Tout cycle col de  $T$  a un ensemble stable et un ensemble instable formés par l'union de segments qui sont parallèles aux axes des coordonnées.

### 1.9.2 Les cycles de $T$ générés à partir d'une bifurcation fold où flip d'un cycle de $F$

D'après les propriétés 5 et 6 nous déduisons que la multistabilité et la coexistence des cycles est une caractéristique importante des systèmes découplés. De fait, quand  $F$  possède un cycle attractif d'ordre  $k > 2$ , alors  $T$  possède plus d'un cycle attractif.

#### Cycles de $T$ générés par une bifurcation fold de $F$

Supposons qu'une bifurcation fold a lieu à la valeur  $\mu = \mu_k$  au cycle d'ordre  $k$ , de la récurrence  $F$ , alors pour la valeur  $\mu = \mu_k + \epsilon$ , le cycle donne naissance à deux cycles d'ordre  $k$  de stabilités différentes, soit  $c_a = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  attractif avec  $0 < \lambda_a < 1$  et  $c_b = \{b_i, i = 1, 2, \dots, k\}$  répulsif avec  $\lambda_b > 1$ .

1—Si  $k = 2m$

A la valeur  $\mu = \mu_k$ , d'après la propriété 5,  $T$  a  $m$  cycles homogènes d'ordre  $2k$ , et d'après la propriété (6),  $T$  a des cycles de type mixte, formés par la combinaison avec les cycles préexistants.

A la valeur  $\mu = \mu_k + \epsilon$  ( $\epsilon$  petit), chaque cycle des  $m$  cycles de  $T$  bifurque en quatre cycles: un cycle homogène de période  $(2k)$ , noeud attractif, un cycle homogène de période  $(2k)$ , noeud répulsif, et deux cycles mixtes de période  $(2k)$ , cols.

Donc  $T$  a les cycles suivants :

(i1)  $m$  cycles de type homogène, de période  $(2k)$ , sont des cycles noeuds attractifs, et sont donnés par les relations (1.9.1).

(i2)  $m$  cycles de type homogène, de période  $(2k)$ , sont des cycles noeuds répulsifs, et sont donnés par les relations (1.9.3).

(i3)  $k = 2m$  cycles de type mixte, de période  $(2k)$ , sont des cycles cols, et ils sont donnés par les relations (1.9.4).

(i4) les cycles mixtes associés avec le cycle attractif après la bifurcation deviennent des cols s'ils sont des cycles répulsifs.

(i5) les cycles mixtes associés avec le cycle répulsif donnent des cycles de type noeuds répulsifs.

2—Si  $k = 2m + 1$

A la valeur  $\mu = \mu_k$ ,  $T$  à  $m$  cycles homogènes d'ordre  $(2k)$  et un cycle homogène d'ordre  $k$ , et d'après la propriété (7),  $T$  admet des cycles de type mixte.

A la valeur  $\mu = \mu_k + \epsilon$ , chaque cycle des  $m$  cycles de période  $(2k)$  de  $T$  bifurque donnant quatre cycles : un cycle noeud attractif, un cycle noeud répulsif, et deux cycles cols, tous sont de période  $(2k)$ , et le cycle de période impaire bifurque donnant: un cycle noeud attractif de période  $k$ , un cycle noeud répulsif de période  $k$ , et un cycle col de période  $(2k)$ .

Alors  $T$  a :

(j1)  $m$  cycles homogène de période  $(2k)$  de type noeuds attractifs donnés par (1.9.3), et un  $k$ —cycle homogène noeud attractif de forme  $\{T^i(a_{m+1}, g(a_1)), i = 1, 2, \dots, k\}$ .

(j2)  $m$  cycles homogène de période  $(2k)$  de type noeuds répulsifs donnés par (1.9.3), et un  $k$ —cycle homogène noeud répulsif de forme  $\{T^i(b_{m+1}, g(b_1)), i = 1, 2, \dots, k\}$ .

(j3)  $k$  cycles cols de type mixte et de période  $(2k)$  sont donnés par les relations (1.9.4).

(j4) les cycles donnés dans (i5).

### Les cycles de $T$ engendrés par la bifurcation flip de $F$

Soit une bifurcation flip (doublement de période) au cycle attractif  $\{a_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ , quand  $\mu = \mu_k^*$ , la valeur propre de ce cycle est  $\lambda_a = -1$ , et pour  $\mu = \mu_k^* + \epsilon$ , ce cycle  $\{a_i, i = 1, 2, \dots, k\}$  devient répulsif avec  $\lambda_a < -1$ , et donne naissance à un cycle attractif d'ordre  $(2k)$ ,  $\{d_i, i = 1, 2, \dots, 2k\}$  avec la valeur propre  $0 < \lambda_d < 1$ .

Considérons les deux cas  $k$  pair, ou impair.

1.  $k = 2m$

A la valeur  $\mu = \mu_k^*$ , le nombre et le type des cycles de  $T$  sont considérés dans (i1) — (i3), avec la valeur propre  $\lambda_a = -1$ .

Pour  $\mu = \mu_k^* + \epsilon$ , appliquons la propriété (1.9.2), nous obtenons les cycles suivants:

Tous les cycles donnés dans  $(i_1) - (i_3)$ , qui sont des cols et des noeuds attractifs deviennent des cycles noeuds répulsifs.

**2.k** cycles homogènes d'ordre  $(4k)$ , noeuds attractifs donnés par:

$$\{T^i(d_1, g(d_1)), i = 1, 2, \dots, 2.2k\}, \{T^i(d_1, g(d_2)), i = 1, 2, \dots, 2.2k\}, \dots, \{T^i(d_1, g(d_k)), i = 1, 2, \dots, 2.2k\},$$

chacun de ces cycles a pour valeurs propres  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_d$ .

**3.k** cycles d'ordre  $(4k)$  de type mixte, sont des cols, donnés par :

$$\{T^i(a_1, g(d_1)), i = 1, 2, \dots, 4k\}, \{T^i(a_1, g(d_2)), i = 1, 2, \dots, 4k\}, \dots, \{T^i(a_1, g(d_k))\}$$

Chaque cycle a pour valeurs propres  $\lambda_1 = \lambda_a < -1, \lambda_2 = \lambda_d < 1$ .

**4.k** cycles d'ordre  $4k$ , de type mixte, sont des cols, ils sont donnés par :

$$\{T^i(b_1, g(d_1)), i = 1, 2, \dots, 4k\}, \{T^i(b_1, g(d_2)), i = 1, 2, \dots, 4k\}, \dots, \{T^i(b_1, g(d_k))\}$$

Avec les valeurs propres  $\lambda_1 = \lambda_b > 1, \lambda_2 = \lambda_d < 1$ .

$$(2) k = 2m + 1$$

A la valeur  $\mu = \mu_k^*$ , le nombre et le type des cycles de  $T$  sont ceux considérés dans  $(j_1) - (j_3)$ , avec la valeur propre  $\lambda_a = -1$ .

Pour  $\mu = \mu_k^* + \epsilon$ , nous obtenons les cycles suivants :

(1) tous les cycles existants à la valeur  $\mu = \mu_k^*$ , de type cols et noeuds attractifs deviennent de noeuds répulsifs, et le foyer attractif donné dans  $(j_1)$  devient un foyer répulsif, de plus on a les cycles suivants :

(2) les cycles décrits dans (2), (3), et (4) dans le cas  $k$  pair.

### 1.9.3 Etude des lignes critiques de $T$

Soit la transformation

$$T : \begin{cases} x' = f(y) \\ y' = g(x) \end{cases}$$

L'ensemble critique de rang zéro  $LC_{-1}$  est l'ensemble de points vérifiant  $|DT| = 0$ .

On a

$$|DT| = g'(x) * f'(y)$$

D'où

$$LC_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g'(x) = 0 \text{ ou } f'(y) = 0\}$$

$$LC_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g'(x) = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f'(y) = 0\}$$

$$LC_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = s_{-1}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = c_{-1}\}$$

$s_{-1}$  et  $c_{-1}$  sont des points critiques des transformations  $g$ ,  $f$  respectivement.

On voit que  $LC_{-1}$  est formé de l'union des deux droites, la première est verticale et la deuxième est horizontale.

L'ensemble critique de rang 1 (ligne critique) noté  $LC$ , est l'image directe de  $LC_{-1}$  par  $T$ .

$$LC_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(s_{-1})\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(c_{-1})\}$$

Il est formé d'union de droites, la première est horizontale et la deuxième est verticale.

L'ensemble critique de rang  $i$ ,  $i \geq 1$ , est défini par  $LC_i = T^{i+1}(LC_{-1})$ .

---

# Etude d'une transformation bidimensionnelle non inversible

## Introduction

Dans ce travail on considère la transformation bidimensionnelle non inversible  $T(x, y) = (y, ay - bx + x^2)$ , avec  $a, b$  sont des paramètre réels. Elle a déjà fait l'objet d'une étude par Monsieur A. Alaoui [17]. Il a fait l'étude locale du système ; il a calculé les cycles générés par le point fixe stable, et traça les courbes de bifurcation.

Il a étudié les bifurcations de contact entre une courbe invariante fermée et une variété instable d'un cycle.

Notre étude se fait en deux parties. Dans la première posons  $a = 0$ , la transformation sera dite une transformation symétriquement découplée, dans ce cas, on fait l'étude de bifurcations locales générées par le point fixe  $P \neq (0, 0)$ , et on donne l'architecture et la position des points de ces cycles.

La deuxième partie est liée à  $a \neq 0$ . Dans cette partie certaines bifurcations de contact sont étudiées en détail.

Pour faire cette étude nous nous sommes inspirés de quelques travaux sur le même thème. Citons les travaux de Gardini L. [06], et Gumowski I. et Mira C.[10].

Considérons dans  $\mathbb{R}^2$  l'endomorphisme défini par :

$$T : \begin{cases} x' = y \\ y' = ay + h(x) \end{cases} \quad (2.0.1)$$

Où

$$h(x) = -bx + x^2$$

Et  $a, b$  sont deux paramètres réels.

## 2.1 Etude de la transformation $T$ avec $a = 0$

On voit que :

$$T^2 : \begin{cases} x' = h(x) \\ y' = h(y) \end{cases}$$

est une récurrence découplée.

### 2.1.1 Etude paramétrique de $T$

#### Diagramme de bifurcation

Sur la figure suivante, on observe une chaîne de bifurcations de doublement de période, la bifurcation d'un point fixe attractif en un cycle d'ordre 2, et la bifurcation du cycle deux en un cycle d'ordre quatre ainsi de suite.

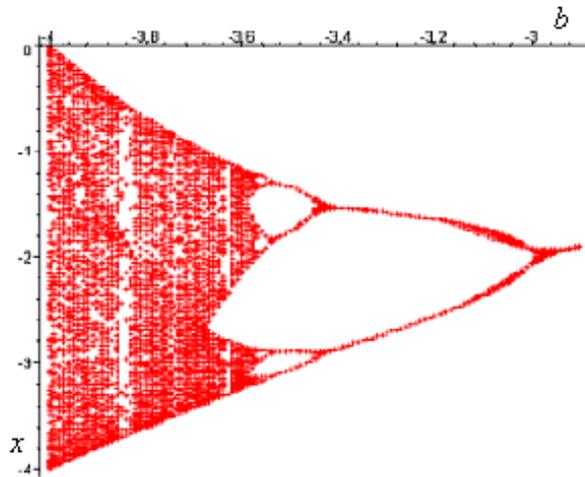


Fig (2.1 – 01) : Plan paramétrique de  $h$ .

### 2.1.2 Bifurcations locales

L'étude de  $T$  revient à l'étude de l'application  $h$  et leurs bifurcations sont liées. Donc, nous considérons l'étude de l'application  $h(x) = -bx + x^2$ , sa dérivée est  $h'(x) = -b + 2x$ . Sur l'intervalle  $-3 < b < -1$  :  $h$  à deux points fixes 0, instable avec la valeur propre égale au paramètre  $b$ , et  $x_0 = b + 1$  qui est stable avec la valeur propre égale à  $b + 2$ . Ces deux points fixes de  $h$  sont des solutions de l'équation  $h(x) = x$ .(figure (2.2 – 01)).

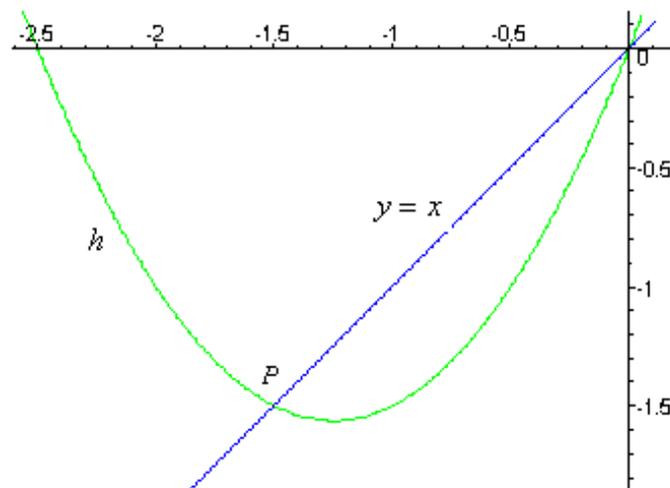


Figure (2.2 – 01) : Les points fixes de  $h$  pour  $b = -2.5$ ,  
 $P_0$  est un noeud stable, et  $O$  est noeud instable

Dans ce cas, d'après la propriété (4),  $T$  a deux points fixes,  $O = (0; 0)$  et  $P_0 = (b+1; b+1)$ . Le premier point de type col avec les valeurs propres  $S_i = \pm\sqrt{b}$ . Le second point avec les valeurs propres  $S_i = \pm\sqrt{b+2}$  est un noeud stable pour les valeurs de  $b$  dans l'intervalle  $] -2, -1[$ , et un foyer stable si  $b \in ] -3, -2[$ .

$T$  à un cycle col d'ordre deux  $C_T^2 = \{(0; b+1), (b+1; 0)\}$ , avec les valeurs propres  $S_1 = b$ ,  $S_2 = b+2$ .

Sur la figure (2.2 – 02), on voit un seul bassin d'attraction simplement connexe rectangulaire de point fixe  $(b+1; b+1)$ . et un cycle d'ordre deux de type col (ses points sont en vert).

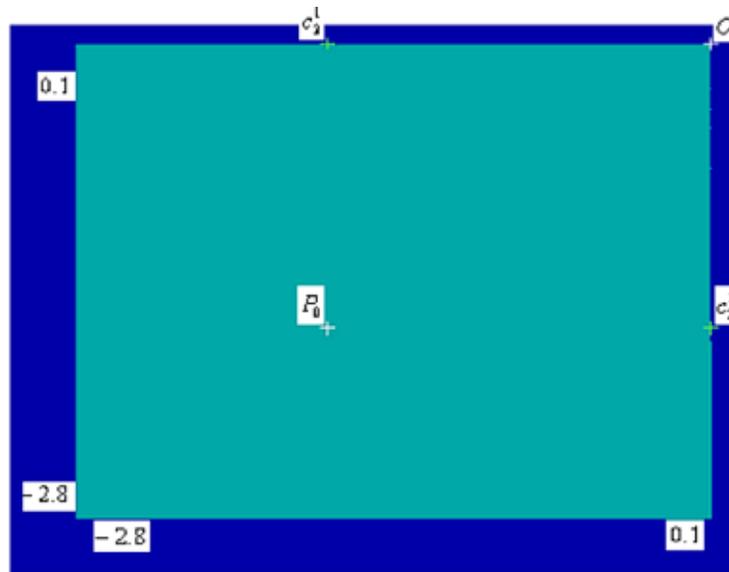


Figure (2.2 – 02) : Deux points fixes et un cycle d'ordre deux de  $T$ , avec  $b = -2.5$ .

Pour la valeur  $b = -1$ ,  $h$  à un seul point fixe 0, avec  $h'(0) = 1$ , donc  $b = -1$  est une valeur de bifurcation transcritique.

Pour la valeur  $b = -3$ , le point fixe 0 est toujours instable, et le point  $x_0$  devient de stabilité indéterminée, avec  $h'(x) = -1$ , d'où la valeur  $b = -3$  est une valeur d'une bifurcation flip (doublement de période).

Pour  $-1 - \sqrt{6} < b < -3$ , le point fixe stable  $x_0$  devient instable et donne naissance à un cycle stable d'ordre deux,  $C_h^2$  tel que :

$C_h^2 = \{x_1, x_2\} = \left\{ \frac{1}{2} \left[ b - 1 + \sqrt{(b-1)(b+3)} \right], \frac{1}{2} \left[ b - 1 - \sqrt{(b-1)(b+3)} \right] \right\}$ , avec le multiplicateur  $S = 1 - (b-1)(b+3)$ , (Voir figure (2.2 - 03)).

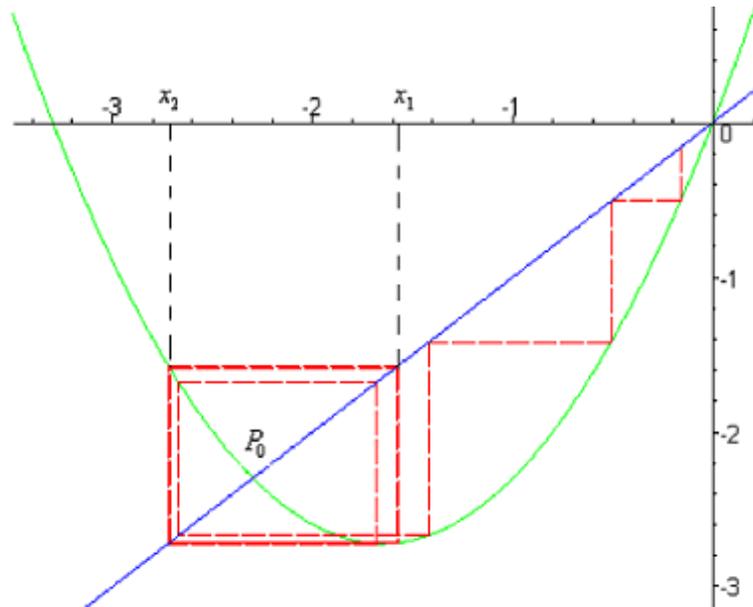


Figure (2.2 - 03) : Cycle d'ordre deux de  $h$ ,  
 $C_h^2 = \{x_1 = -1.582109165, x_2 = -2.717890835\}$

Pour ces valeurs de  $b$  :  $T$  admet un cycle stable d'ordre quatre (4)  $C_T^4$ , d'après la propriété (6) ce cycle est donné par :  $C_T^4 = \{T^i(x_2; x_2), i = 1, \dots, 4\} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_1)\}$ .

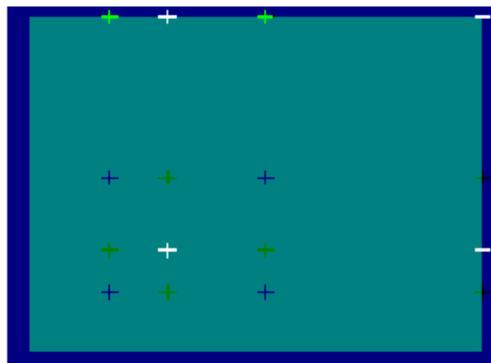


Figure (2.2 - 04) : Cycles d'ordre quatre de  $T$ .

Cycles d'ordre quatre de  $T$ . le cycle stable est en bleu et les cycles cols sont verts.

Pour  $b = -1 - \sqrt{6}$ , le 2-cycle  $C_1$  perd sa stabilité,  $h'(x_2) = -1$ .

On prend  $b \in ]-3.54402, -1 - \sqrt{6}[$ . On diminue  $b$  à partir de  $b = -1 - \sqrt{6}$ , le cycle  $C_h^2$  devient instable et donne lieu à un cycle d'ordre quatre stable, noté :  
 $C_h^4 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ , les  $x_i, i = 1, \dots, 4$ . sont solution de l'équation  $h^4(x) = x$ . (Voir figure(2.2 - 05)).

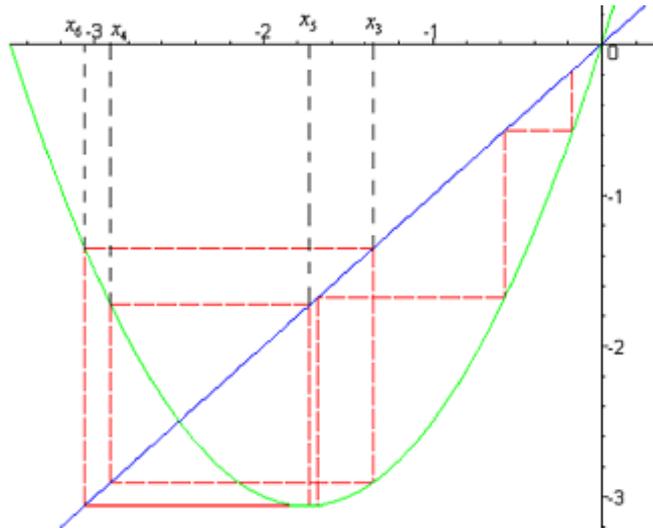


Fig (2.2 - 05) : Cycle quatre de  $h$ .  
 avec la valeur  $b = -3.5$ .

$$C_4^h = \{x_3 = -1.339868891, x_4 = -2.894292473, x_5 = -1.753094736, x_6 = -3.062490423\}$$

De la propriété (06),  $T$  a :

Un cycle homogène instable d'ordre 4, donné par

$$C_T^4 = \{T^i(x_2; x_2), i = 1, \dots, 4\} = \{(x_2; x_1), (x_1; x_1), (x_1; x_2), (x_2; x_2)\}$$

Deux cycles noeuds stables de type homogène d'ordre 8 engendrés par le 4-cycle, donnés par les relations (04) :

$C_{T,1}^8 = \{T^i(x_3, x_3), i = 1, \dots, 8\}$ ,  $C_{T,2}^8 = \{T^i(x_4, x_3), i = 1, \dots, 8\}$  .d'où la Coexistence de deux cycles stables d'ordre 8, leurs bassins d'attraction sont représentés par deux couleurs différentes, et sont formés par des rectangles disjoints.(Voir figure (2.2 - 06)).

Quatre cycles cols de type mixte d'ordre 8, deux engendrés par la combinaison d'un cycle deux existant déjà avec celui d'ordre 4, et deux autre sont donnés par la combinaison

avec les deux points fixes d'après la propriété (07),  $C_{T,3}^8 = \{T^i(x_1, x_3), i = 1, \dots, 8\}$ ,

$C_{T,4}^8 = \{T^i(x_2, x_3), i = 1, \dots, 8\}$ ,  $C_{T,5}^8 = \{T^i(0, x_3), i = 1, \dots, 8\}$ ,  $C_{T,6}^8 = \{T^i(x_0, x_3), i = 1, \dots, 8\}$ .

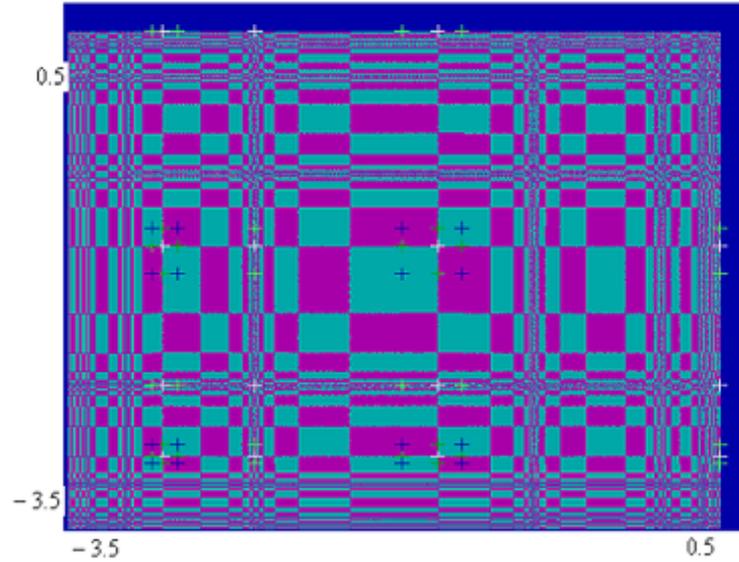


Fig (2.2 – 06) : Cycle d'ordre huit de  $T$

avec la valeur  $b = -3.48$ .

Pour  $b$  appartenant à  $] -3.56437, -3.54402[$ , le cycle d'ordre quatre de  $h$  devient instable sous l'effet d'une bifurcation flip à la valeur  $b = -3.56437$ , et donne naissance à un cycle stable d'ordre 8, noté  $C_h^8$ .

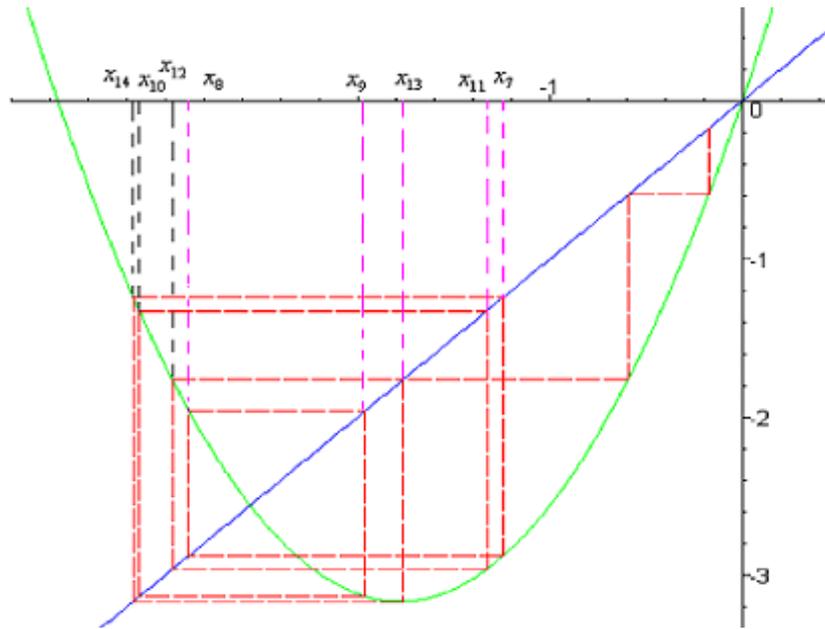


Fig (2.2 – 07) : Cycle huit de  $h$   
avec la valeur  $b = -3.56$ .

Dans cette situation  $T$  a les cycles suivants :

Deux cycles homogènes d'ordre 8, des noeuds instables engendrés par le cycle quatre.

Quatre cycles homogènes d'ordre 16, des noeuds stables, engendrés par le cycle attractif d'ordre 8.

Quatre cycles de type mixte d'ordre 16, des cols obtenus par la combinaison de deux cycles de stabilités différentes : le 4-cycle et le 8-cycle.

Donc  $T$  a quatre cycles attractifs d'ordre 16, chaque cycle a son bassin d'attraction représenté par une couleur. (Voir figure(2.2 – 08)).

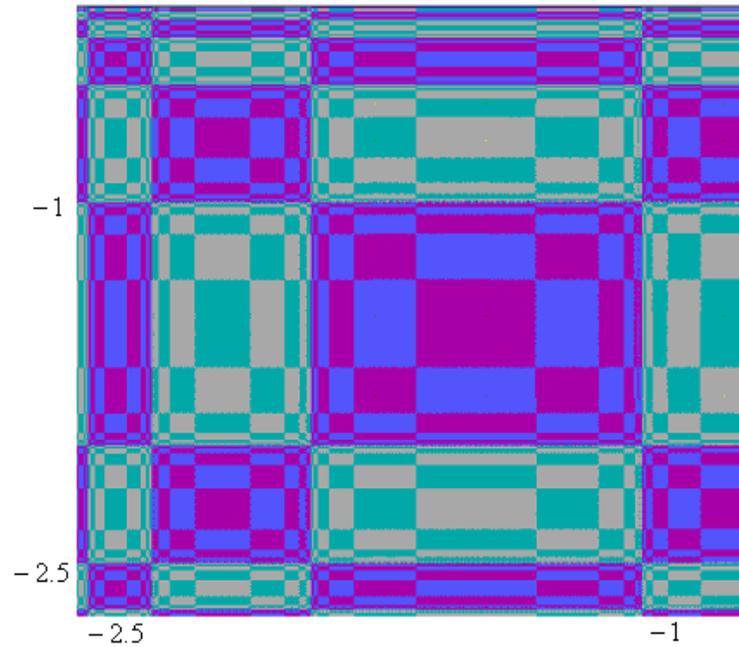


Fig (2.2 – 08) : Coexistence de quatres bassins d’attraction pour  $b = -3.56$ .

On observe l’apparition d’une suite décroissante de valeurs du paramètre  $b : b_1, b_2, b_3, \dots$  qui correspondent à des bifurcations de doublements de périodes.

Ces valeurs du paramètre s’accumulent en une valeur  $b_\infty$  où l’attracteur devient un ensemble de Cantor.

Tableau de bifurcation de doublement de période pour  $h(x) = -bx + x^2$ .

$n$	1	2	3	4	5	$\infty$
$b_n$	-3	-3.44931	-3.54402	-3.56437	-3.56875	-3.56994

### 2.1.3 Architecture des cycles

Ici nous donnons la position des points des cycles de la récurrence  $T$  et précisément les cycles qui sont engendrés par les bifurcations de doublements de période et qui engendrent le chaos.

Sur les figures (2.3 – 01), (2.3 – 02), (2.3 – 03) et (2.3 – 04) nous avons fixé certains paramètres :

Posons les couleurs suivantes : Vert pour les cycles cols, rouge pour les cycles nœuds instables, et le Bleu pour les cycles nœuds stables.

On note les cycles de  $h$  comme suit :  $x_0 = b + 1$ , pour le point fixe  $P$ , et  $\{x_1, x_2\}$  pour les points du cycle d'ordre 2,  $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$  pour le cycle d'ordre 4, et le 8-cycle par  $\{x_7, \dots, x_{14}\}$ .

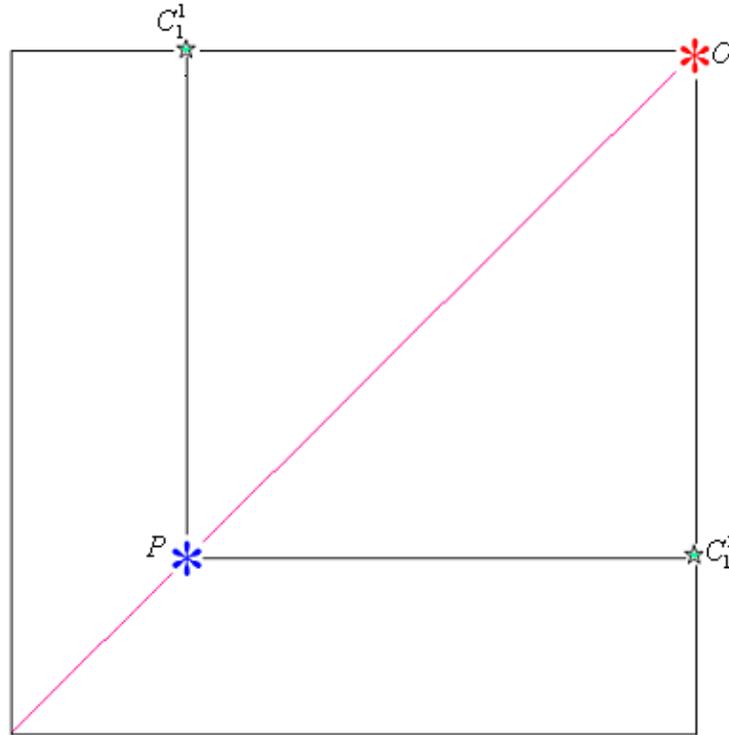


Fig (2.3 – 01) : Un cycle d'ordre deux

$$C_2 = \{c_2^1(x_0, 0), c_2^2(0, x_0)\}$$

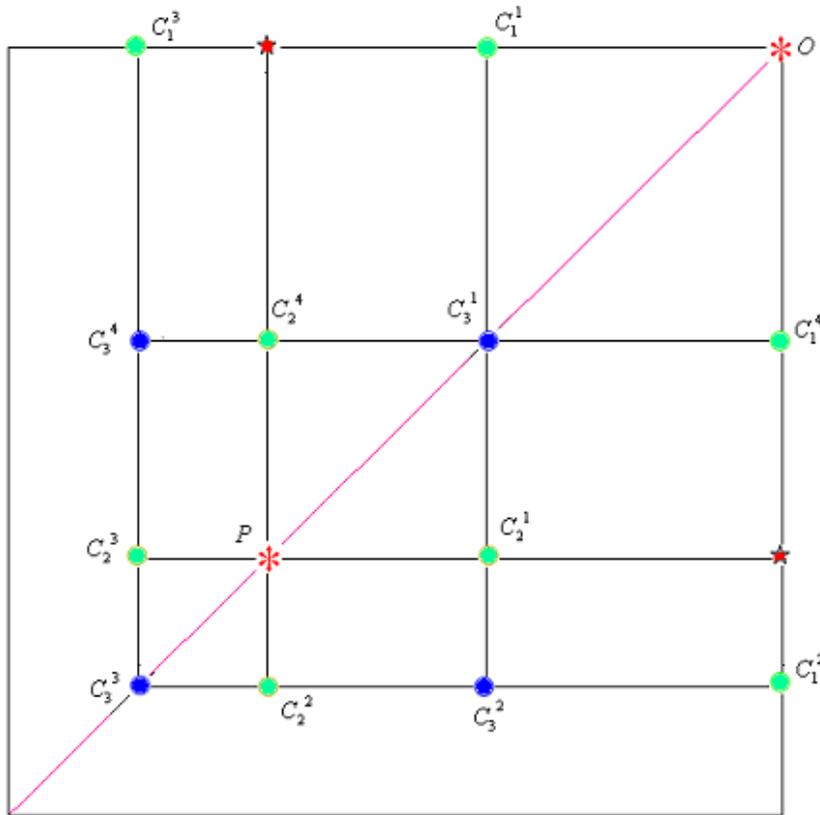


Fig (2.3 – 02) : Les cycles d'ordre quatre  
(représentés par des cercles).

$C_4^1 = \{c_1^1(x_1, 0), c_1^2(0, x_2), c_1^3(x_2, 0), c_1^4(0, x_1)\}$  à la frontière du bassin d'attraction,  
 et  $C_4^2 = \{c_2^1(x_1, x_0), c_2^2(x_0, x_2), c_2^3(x_2, x_0), c_2^4(x_0, x_1)\}$  , sont des cycles cols.  
 $C_4^3 = \{c_3^1(x_1, x_1), c_3^2(x_1, x_2), c_3^3(x_2, x_2), c_3^4(x_2, x_1)\}$  est un cycle nœud attractif.

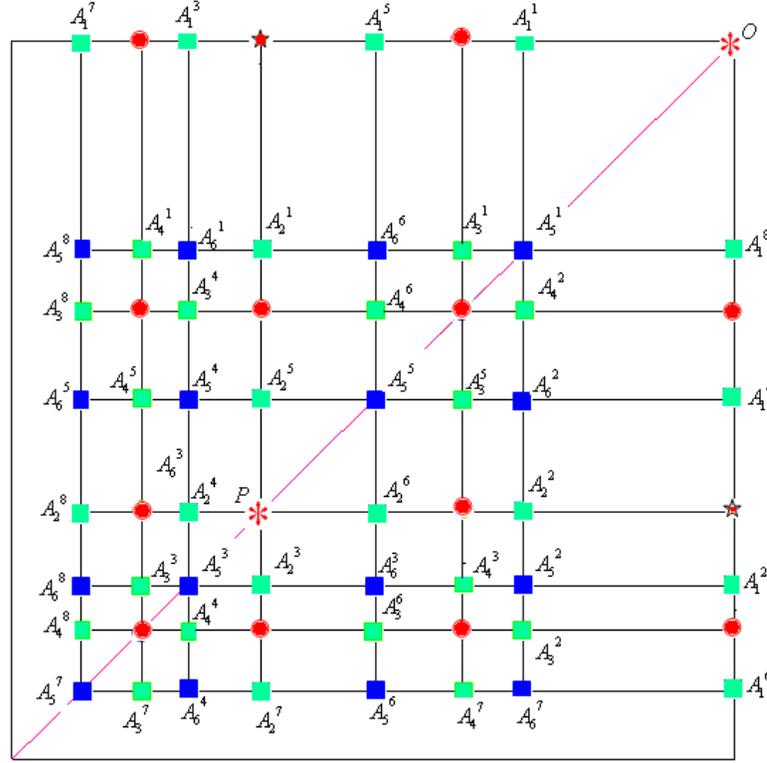


Fig (2.3 – 03) : Six cycles d'ordre huit représentés par des carrés avec différentes couleurs.

$$\begin{aligned}
 C_8^1 &= \{A_1^1(x_3, 0), A_1^2(0, x_4), A_1^3(x_4, 0), A_1^4(0, x_5), A_1^5(x_5, 0), A_1^6(0, x_6), A_1^7(x_6, 0), A_1^8(0, x_3)\}. \\
 C_8^2 &= \{A_2^1(x_0, x_3), A_2^2(x_3, x_0), A_2^3(x_0, x_4), A_2^4(x_4, x_0), A_2^5(x_0, x_5), A_2^6(x_5, x_0), A_2^7(x_0, x_6), A_2^8(x_6, x_0)\}. \\
 C_8^3 &= \{A_3^1(x_1, x_3), A_3^2(x_3, x_2), A_3^3(x_2, x_4), A_3^4(x_4, x_1), A_3^5(x_1, x_5), A_3^6(x_5, x_2), A_3^7(x_2, x_6), A_3^8(x_6, x_1)\}. \\
 C_8^4 &= \{A_4^1(x_2, x_3), A_4^2(x_3, x_1), A_4^3(x_1, x_4), A_4^4(x_4, x_2), A_4^5(x_2, x_5), A_4^6(x_5, x_1), A_4^7(x_1, x_6), A_4^8(x_6, x_2)\}. \\
 C_8^5 &= \{A_5^1(x_3, x_3), A_5^2(x_3, x_4), A_5^3(x_4, x_4), A_5^4(x_4, x_5), A_5^5(x_5, x_5), A_5^6(x_5, x_6), A_5^7(x_6, x_6), A_5^8(x_6, x_3)\}. \\
 C_8^6 &= \{A_6^1(x_4, x_3), A_6^2(x_3, x_5), A_6^3(x_5, x_4), A_6^4(x_4, x_6), A_6^5(x_6, x_5), A_6^6(x_5, x_3), A_6^7(x_3, x_6), A_6^8(x_6, x_4)\}.
 \end{aligned}$$

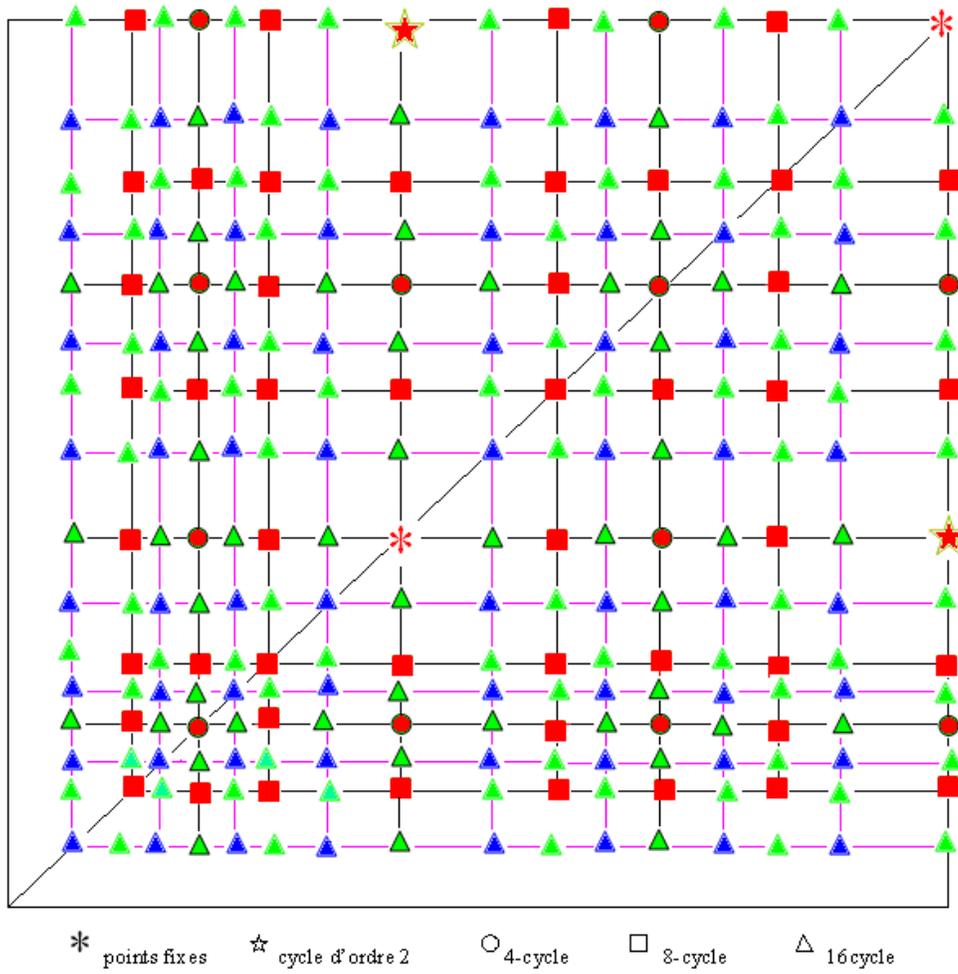


Fig (2.3 – 04) : Cycles d'ordre  $k$  de  $T$ .

$$k \in \{1, 2, 4, 8, 16\}.$$

Les cycles verts sont des cycles cols, Les cycles de couleur rouge sont des cycles nœuds instables, et Les cycles bleus sont des cycles nœuds stables.

### 2.1.4 Les ensembles critiques

Soit  $s_{-1}$  le point critique de rang zéro de  $h$  (i.e. le point où  $h$  atteint son minimum local ou son maximum local). Et soit  $s_0 = h(s_{-1})$  le point critique de rang 1.

En général, soit  $s_i = h^{i+1}(s_{-1})$ , le point critique de rang  $(i + 1)$ ,  $i \geq 1$ . Alors la droite de l'équation  $x = s_{-1}$  est la ligne critique de rang zéro de  $T$ , et on écrit  $LC_{-1} : x = s_{-1}$ , d'où  $LC_0 : y = s_0$ ,  $LC_1 : x = s_0$ ,  $LC_2 : y = s_1$ ,  $LC_3 : x = s_1$ , ainsi de suite.

Soit  $s_{-1}$  le point critique de rang zéro de  $h$ . ( $h'(s_{-1}) = 0$ ),  $s_{-1} = b/2$ .

Soit  $s_0 = h(s_{-1}) = -b^2/4$  le point critique de rang un de  $h$ . Et en général, soit  $s_i = h(s_{i-1}) = h^{i+1}(s_{-1})$  le point critique de rang  $i$  de  $h$ .

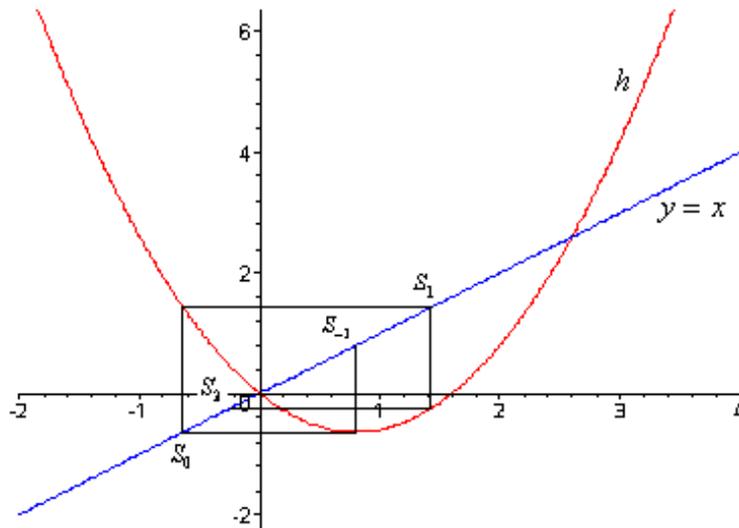


Fig (2.4 – 01) : Points critiques de  $h$ .

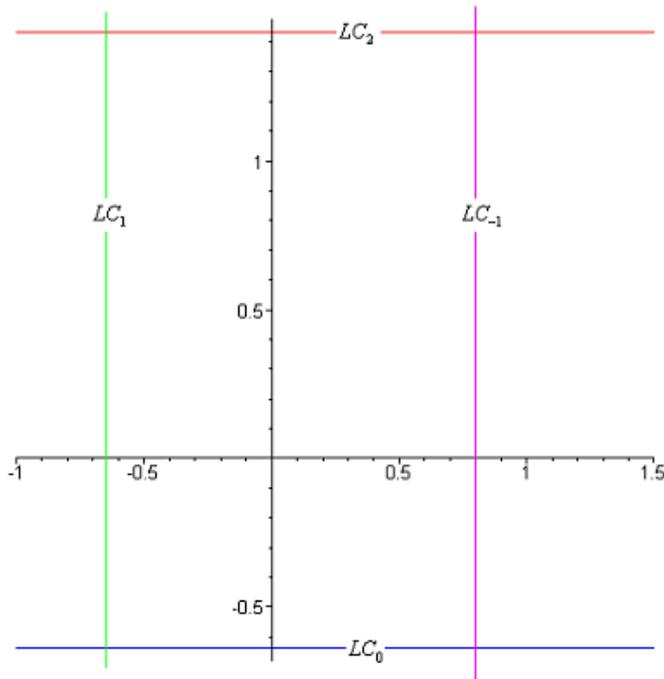


Fig (2.4 – 02) : Lignes critiques de  $T$

En particulier, si  $I$  un intervalle absorbant de  $h$  borné par les points critiques  $s_0$  et  $s_1$ , alors le segment obtenu par l'intersection des lignes critiques  $y = s_0, x = s_0, y = s_1$ ,

et  $x = s_1$ , donne les bornes d'un carré absorbant  $I \times I$  dans le plan de phase pour la transformation  $T$ .

On remarque que  $h$  admet des ensembles absorbants (intervalles), chaque intervalle contient un ensemble attractant.

Par exemple pour  $b > -2$ , l'intervalle  $I = [s_0, s_1]$  n'est pas absorbant. A la valeur  $b = -2$ , les points critiques  $s_{-1}$ ,  $s_0$ , et  $s_1$  sont confondus.

Pour  $b < -2$ ,  $h$  a un seul intervalle absorbant,  $I = [s_0, s_1] = [-1.96, -1.6464]$  à la valeur  $b = -2.8$ .

Alors  $T$  a un carré absorbant délimité par les segments des lignes critiques  $y = s_0$ ,  $x = s_0$ ,  $y = s_1$ , et  $x = s_1$ .

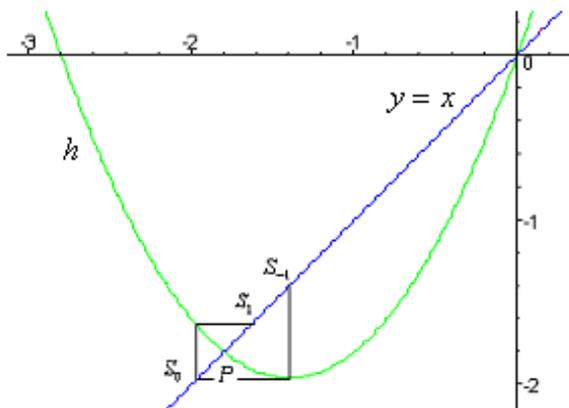


Fig (2.4 – 03) : Un intervalle absorbant et existence d'un point fixe pour  $b = -2.8$ .

Pour  $b = -3.2361$ , le point critique  $s_1$  coïncide avec le point critique  $s_{-1}$ , d'où l'apparition d'un cycle d'ordre deux attractif, formé par deux intervalles  $I_1 = [s_0, s_2]$  et  $I_2 = [s_1, s_3]$ . Ce cycle absorbant contient le 2-cycle attractif de  $h$  obtenu après la première bifurcation de doublements de période [voir la figure (2.4 – 03)]. Dans ce cas  $T$  admet un cycle absorbant d'ordre quatre 4 délimité par les segments des lignes critiques :  $y = s_0$ ,  $x = s_0$ ,  $y = s_1$ ,  $x = s_1$ ,  $y = s_2$ ,  $x = s_2$ ,  $y = s_3$ , et  $x = s_3$ . Ce cycle absorbant contient le cycle d'ordre 4 attractif de  $T$  obtenu par la deuxième bifurcation de doublement de période (Fig(2.4 – 04)).

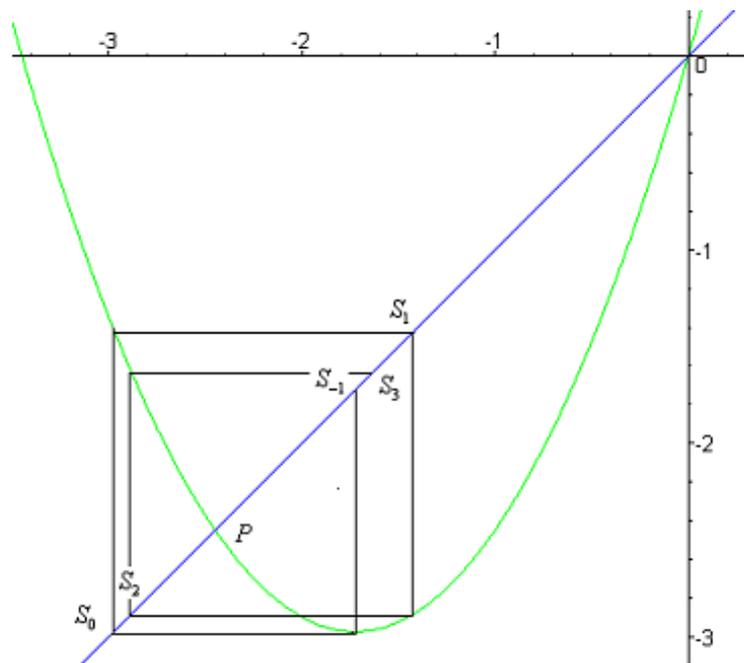


Fig (2.4 – 04) : Intervalle absorbant et un cycle d'ordre deux.

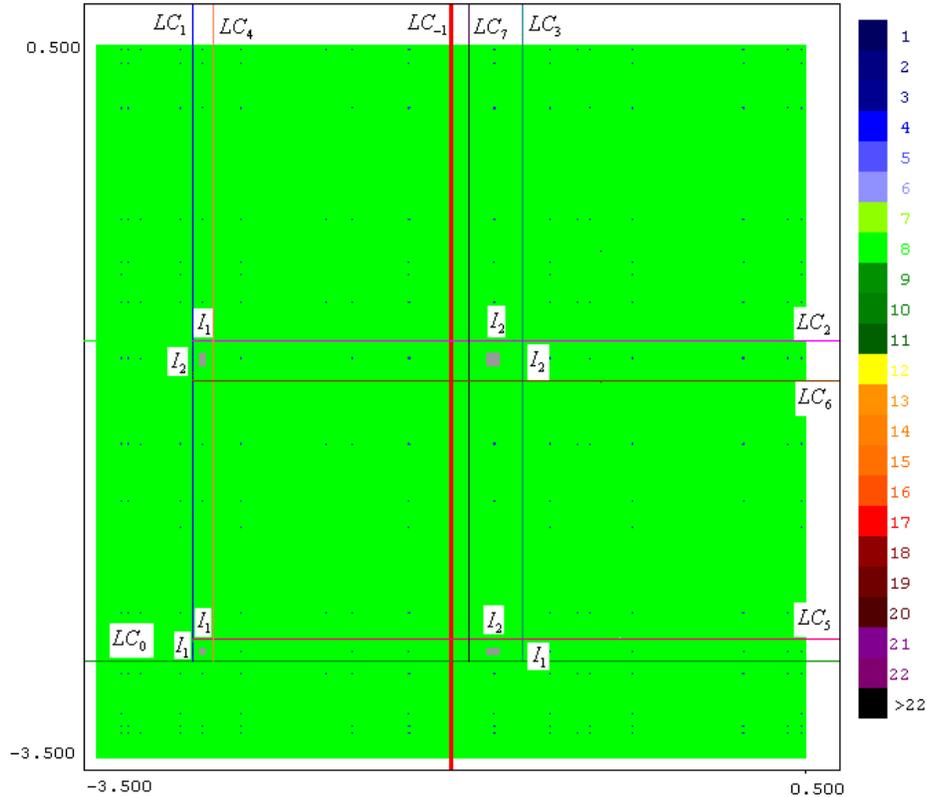


Fig (2.4 - 05) : Quatre aires absorbantes  
avec la valeur  $b = -3.45$ .

On pose  $s_{-1} = s_i$ ,  $i \geq 2$ , on trouve les valeurs de  $b$  qui donnent les différentes aires absorbantes de  $h$  qui contiennent des cycles attractifs de  $h$ .

On voit qu'à partir de la valeur  $b = -3.57$ , tous les intervalles absorbants de  $h$  deviennent chaotiques, c'est-à-dire ils contiennent des cycles chaotiques obtenus par l'accumulation des cycles suite à des bifurcations de doublements de période d'ordre  $2 * 2^i$ .

Par exemple :

Pour  $b = -3.5740$ ,  $T$  a quatre cycles chaotiques d'ordre 16, obtenus par une suite de bifurcation flip. (Voir figure (2.4 - 06)). En diminuant le paramètre  $b$  les quatre attracteurs fusionnent deux à deux et deviennent deux attracteurs (voir Fig(2.4 - 07)). Puis ils fusionnent en un seul attracteur (voir Fig(2.4 - 08)).

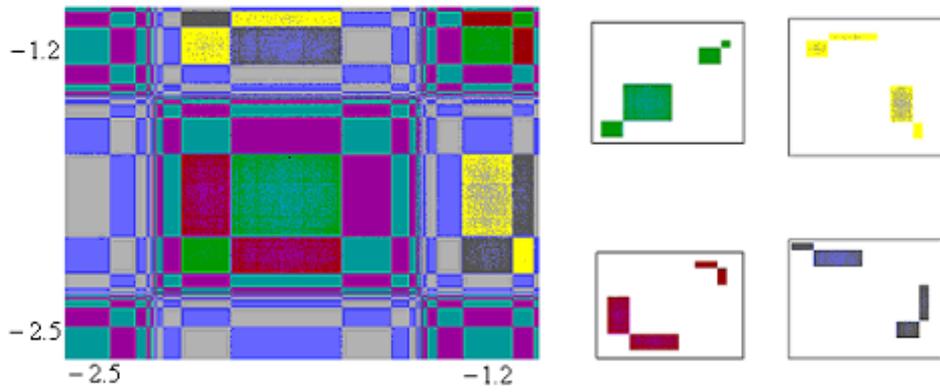


Fig (2.4 – 06) :  $b = -3.5740$   
 Existence de quatre cycles d'ordre 16.

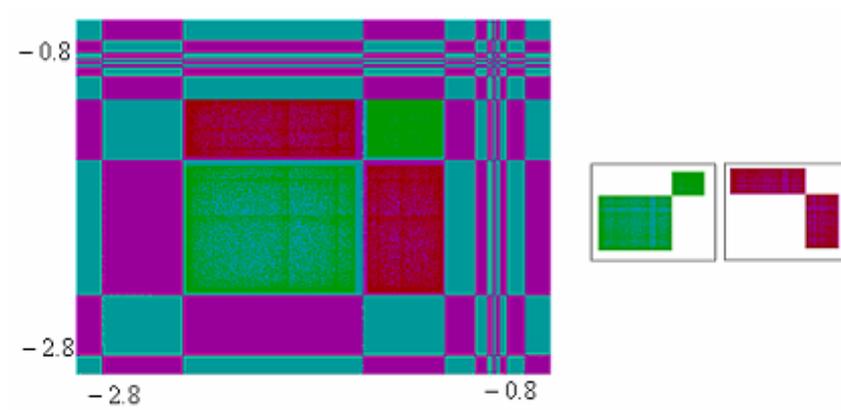


Fig (2.4 – 07) :  $b = -3.59$   
 Existence de deux cycles d'ordre 4.

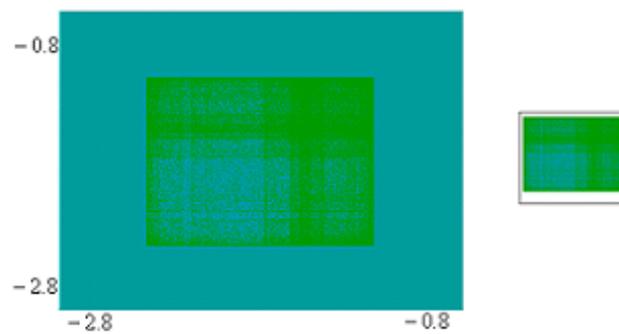
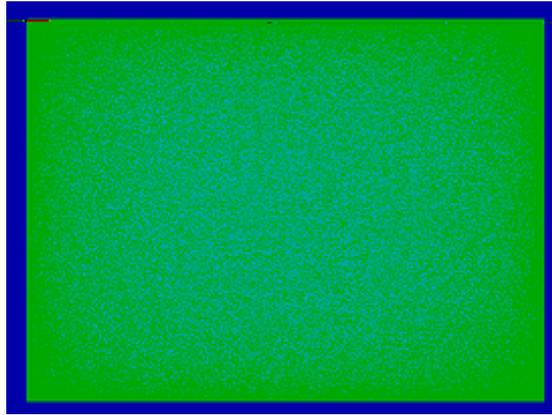


Fig (2.4 – 08) :  $b = -3.593$   
 Attracteur chaotique.

Fig (2.4 – 09) :  $b = -4$ .

Ag rand issement de l'attracteur

### 2.1.5 Bifurcation globales

Les bifurcations globales ont lieu quand il y a un contact entre deux singularités différentes, par exemple entre un attracteur et son bassin d'attraction.

Gardini a prouvé qu'une bifurcation de contact peut correspondre à une bifurcation homocline pour le cas d'un noeud instable ou d'un foyer instable[3].

Dans notre exemple si on prend la première boîte  $[-4, -1]$  (dite de première espèce), la valeur de  $b = -4$  correspond à la bifurcation de fusion entre le point critique  $S_1$  et le point fixe instable  $O = (0, 0)$ , d'où la première bifurcation homocline de point  $O$ . [Voir figure (2.4 – 10)].

Pour la deuxième boîte (boîte de second espèce)  $b \in [-3.6786, -3]$ , la valeur  $b = -3.6786$  correspond à la coalitions entre le point critique  $S_2$  et le point noeud instable  $(b + 1)$ , d'où la première bifurcation homocline de point  $(b + 1)$ . [Voir figure(2.4 – 11)]. (pour plus d'explications voir [3]).

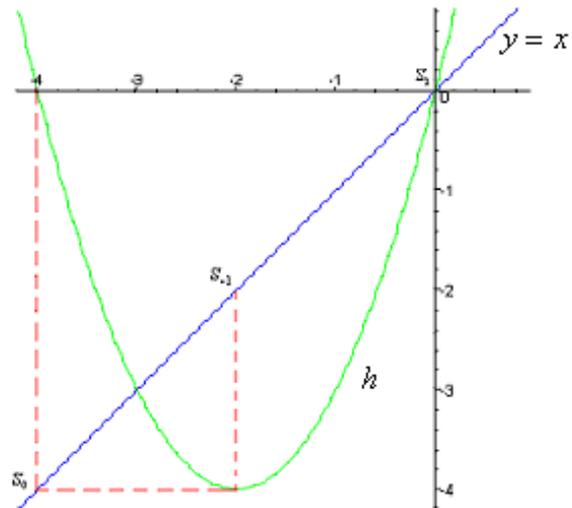


Fig (2.4 – 10) : Première bifurcation homocline du point  $O$

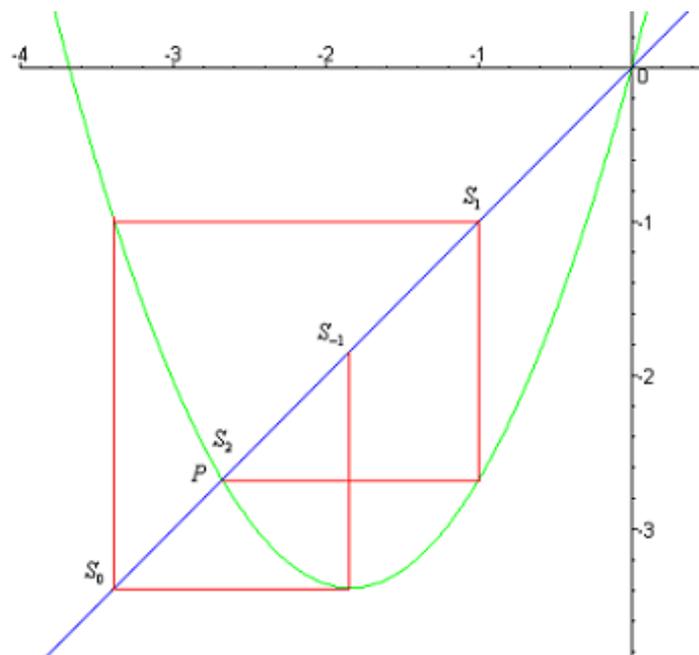


Fig (2.4 – 11) : Première bifurcation homocline du point  $P$ .

Pour la transformation  $T$  on a :

pour  $b = -4$ ,  $LC_2 \cap LC_3 = \{O\}$ , et  $O$  situé sur la frontière de bassin d'attraction (voir Fig (2.4-09)), d'où la bifurcation de contact (homocline d'après L. Gardini).

Sur les figures (2.4-12) et (2.4-13) on voit la situation avant et après le contact entre l'attracteur et les deux lignes critiques  $LC_4$  et  $LC_5$ .

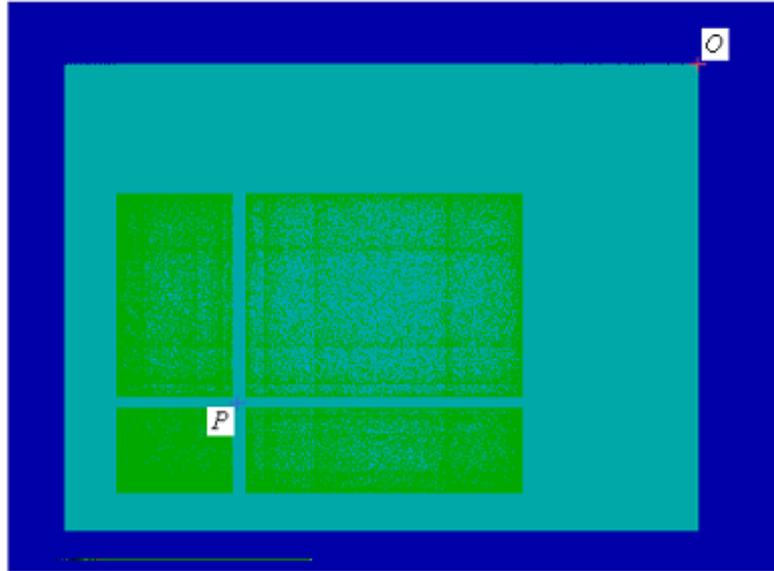


Fig. (2.4-12) :  $b = -3.6725$

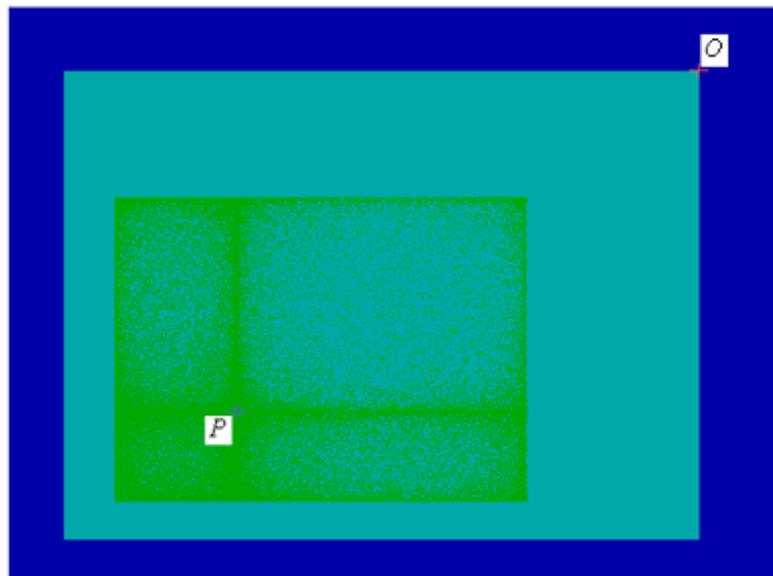


Fig. (2.4-13) :  $b = -3.6786$

## 2.2 Etude de la transformation $T$ avec $a \neq 0$

Ici nous nous intéressons particulièrement à l'étude des bifurcations globales et les bifurcations des ensembles invariants. Nous considérons dans cette partie les travaux de Millerioux[14], et L.Gardini[06], [07], et Ferchichi M.R.[03].

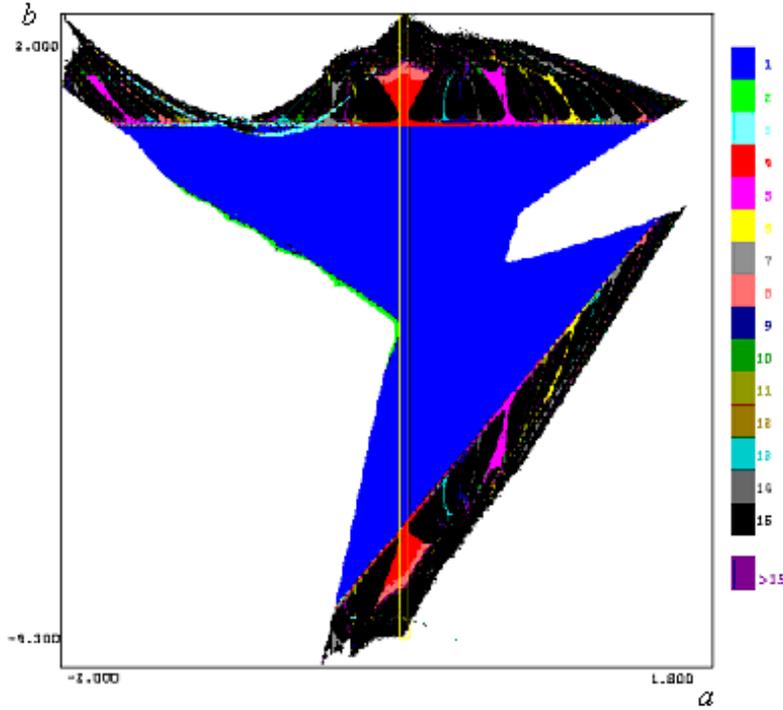
Soit le système  $T$  défini comme suit :

$$T : \begin{cases} x' = y \\ y' = a.y + x^2 - b.x \end{cases}$$

où  $a$  , et  $b$  sont des paramètres réels.

### 2.2.1 Etude du plan des paramètres

La figure (2.5–01) permet de mettre en évidence les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe au moins un attracteur à distance finie, une distinction est faite entre les attracteurs de type cycles d'ordre  $k$  pour  $k \leq 15$  et les autres attracteurs. A chaque cycle d'ordre  $k$  ( $k \leq 15$ ) correspond une couleur. Par exemple, la zone de couleur bleue représente les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe un point fixe attractif, la zone de couleur verte est associée aux solutions de type cycle d'ordre deux attractif et ainsi de suite jusqu'à l'ordre  $k = 14$ . le noir correspond aux valeurs des paramètres pour lesquelles il existe des cycles attractifs d'ordre  $k > 15$ , attracteurs étranges et à des courbes invariantes fermées. C'est dans cette zone que peuvent être observés les phénomènes chaotiques.


 Fig (2.5 – 01) : Plan paramétrique de  $T$ .

On remarque que la structure de bifurcation de la récurrence  $T$  pour les valeurs de paramètre  $a \in [-0.0133, 0.0166]$  (zone encadrée dans le plan paramétrique) est identique à celle de la récurrence découplée  $T$ .

### 2.2.2 Lignes critiques

On a  $LC_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \text{Det}(DT) = 0\}$ , où  $DT$  est la matrice jacobienne de  $T$ .

$$DT = \begin{pmatrix} 0 & f'(y) \\ h'(x) & a \end{pmatrix} \implies LC_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f'(y) \cdot h'(x) = 0\}$$

$$LC_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f'(y) = 0 \text{ ou } h'(x) = 0\}$$

$$LC_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f'(y) = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / h'(x) = 0\}$$

$LC_{-1} = \{(x, c_{-1}), x \in \mathbb{R}\} \cup \{(s_{-1}, y), y \in \mathbb{R}\}$ ,  $c_{-1}$ ,  $s_{-1}$  sont des points critiques de rang zéro de  $f$  et  $h$  respectivement.

$$LC_0 = T(LC_{-1}) = T(\{(x, c_{-1}), x \in \mathbb{R}\}) \cup T(\{(s_{-1}, y), y \in \mathbb{R}\})$$

$$T(\{(x, c_{-1}), x \in \mathbb{R}\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = f(c_{-1})\}$$

$$T(\{(s_{-1}, y), y \in \mathbb{R}\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = f\left[\frac{1}{a}(y - g(s_{-1}))\right]\} .$$

La ligne critique d'ordre  $i$  est  $LC_i = T^i(LC)$ .

Ici les lignes critiques ne sont pas toujours des droites.

**Exemple 2.2.1** Soit le système  $T$  défini comme suit :

$$T : \begin{cases} x' = y \\ y' = a.y + x^2 - b.x \end{cases}$$

**Exemple 2.2.2**

$$DT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2.x - b & a \end{pmatrix}$$

La ligne critique de rang zéro est l'ensemble de points tel que :  $|DT| = 0$ , donc  $LC_{-1} = \{(x, y) / x = b/2\}$

D'où  $LC_0 = T(LC_{-1}) = \{(x, y) / x = y_0 \text{ et } y = a.y_0 + x_0^2 - b.x_0\}$ , et  $x_0 = b/2$ .

$LC_0 = \{(x, y) / y = a.x - b^2/4\}$ , et  $LC = \{(x, y) / x = y_1 \text{ et } y = a.y_1 + x_1^2 - b.x_1\}$ , et  $y_1 = a.x_1 - b^2/4$ .

$$LC = \left\{ (x, y) / y = \frac{1}{a^2}.x^2 + \left(a + \frac{b^2}{2.a^2} - \frac{b}{a}\right).x + \frac{b^4}{16.a^2} - \frac{b^3}{4.a} \right\} .$$

Fixons la valeur de  $b$  et varions  $a$ .

$$LC_1 : y = 0.6944x^2 + 9.3803x + 20.4817 .$$

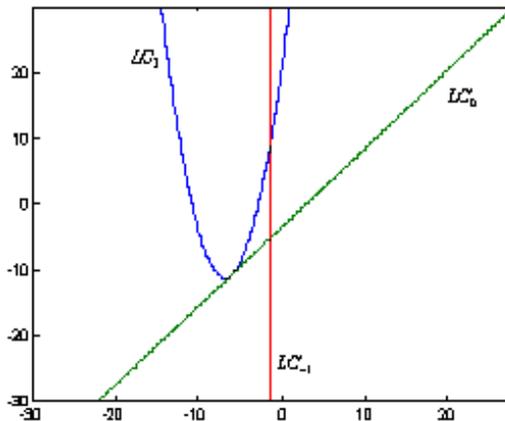


Fig (2.5 – 02) : Lignes critiques de  $T$ .

pour  $(a, b) = (1.2, -3.8)$ .

Pour la même valeur  $b = -3.8$ , et  $a = 0.005$ ,  $LC_{-1} : x = -1.9$ ,  $LC_0 : y = 0.005 * x - 3.61$ ,

et

$$LC_1 : y = 4 * 10^4 * x^2 + 28.95600 * 10^4 * x + 52.40276 * 10^4 .$$

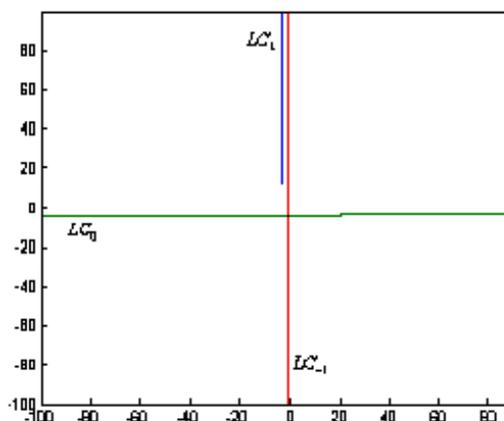


Fig (2.5 – 03) : Lignes critiques  
pour  $(a, b) = (0.005, -3.8)$ .

**Proposition 4 :** Pour  $a = 0$ , ou  $a$  très proche de zéro, les lignes critiques sont des lignes droites, et pour les valeurs de paramètre  $a \gg 0$ , les lignes critiques d'ordre supérieur à 1 ne sont pas des lignes droites.

### 2.2.3 Bifurcations globales

Il existe deux types de bifurcations globales, les bifurcations de contact entre deux singularités différentes (bifurcations de bassins d'attraction), et les bifurcations des ensembles invariants (variétés instables d'un point fixe ou d'un cycle d'ordre  $k$  et la courbe invariante fermée).

Il existe trois types de bifurcations des ensembles invariants :

- 1) Bifurcation de la courbe invariante fermée : on trouve deux bifurcations.
  - a) auto-intersections de la courbe invariante fermée (contact avec les lignes critiques).
  - b) Coexistence de cycles avec la courbe invariante fermée.
- 2) Bifurcation de la variété instable d'un point col (cycle col) : auto-intersections de la variété instable (contact avec les lignes critiques). Cette bifurcation est toujours suivie par une bifurcation homocline.

3) Intersection de la courbe invariante fermée et la variété instable d'un point col.

Pour les bifurcations de bassins d'attraction, rappelons les deux bifurcations suivantes :

a) bassin connexe  $\rightarrow$  bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de  $D_0 \cap LC$  change;  $D_0$  est le bassin immédiat).

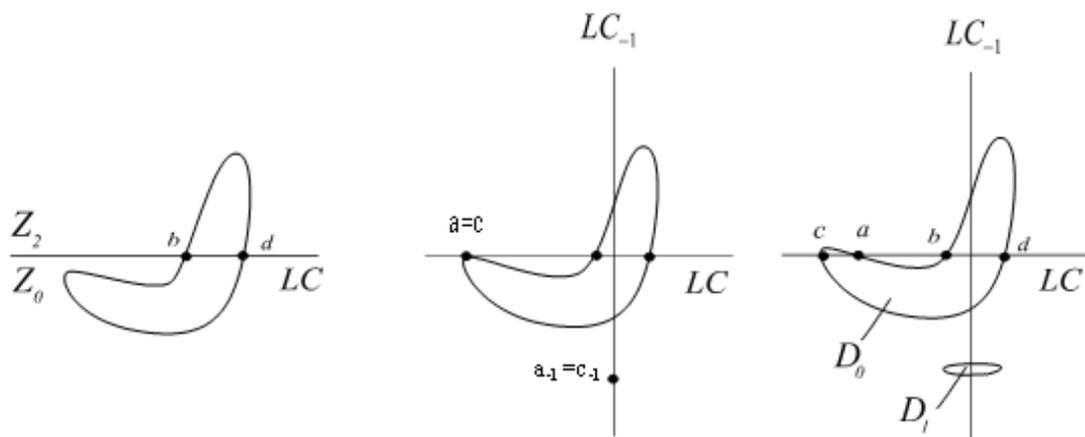


Fig (2.5 - 04)

b) bassin simplement connexe  $\rightarrow$  bassin multiplement connexe.

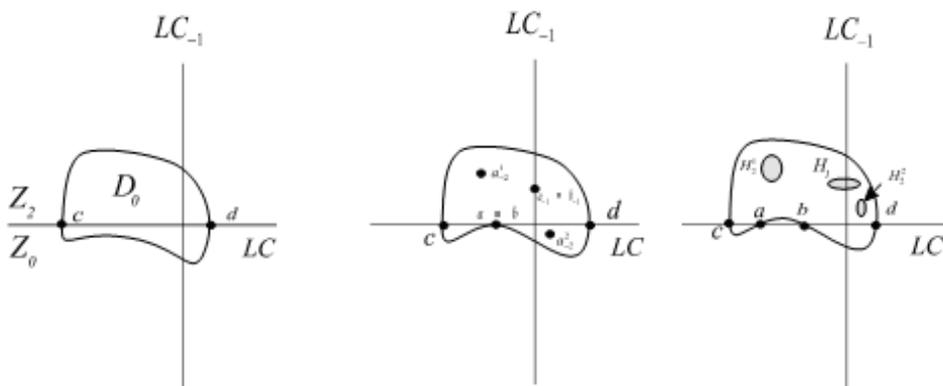


Fig (2.5.05)

**Bifurcation de type  $(1 - a)$**

Nous fixons  $a = -0.188$ , et varions  $b$  d'une manière croissante de 1.1 vers 1.43. On a les situations suivantes :

Pour  $b < b_0 = 1.1430$  , voir la figure (2.5 - 06), on a une courbe fermée invariante ( $\Gamma$ )

née a partir de la destabilisation d'un point fixe  $(0, 0)$  de type foyer sous la bifurcation de Neimark\_Hof.

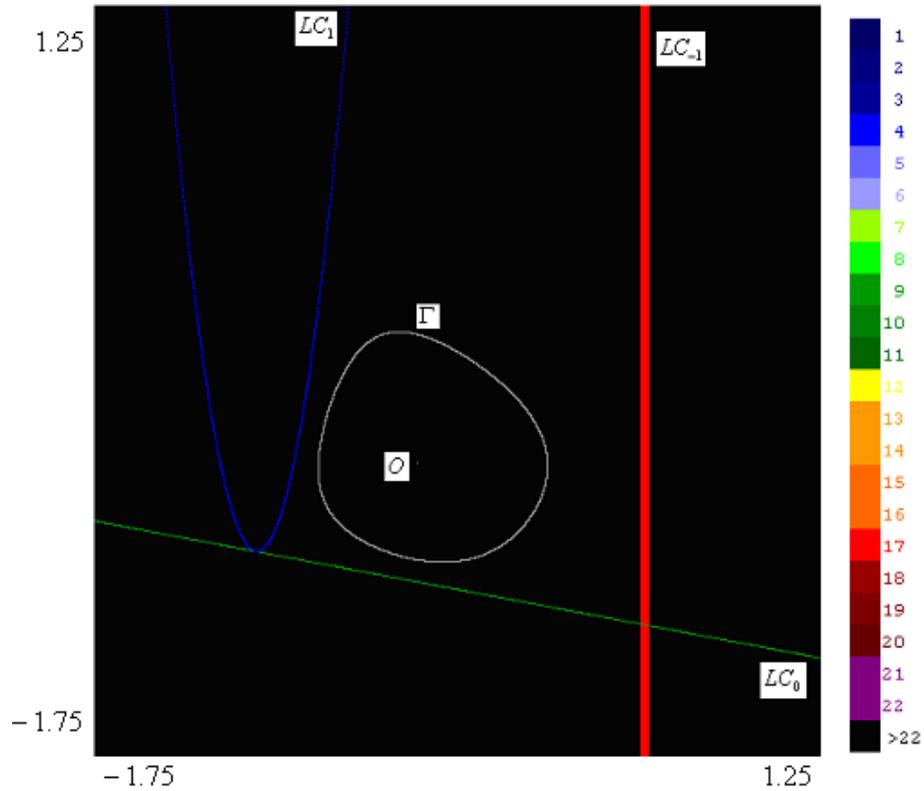


Fig (2.5 – 06) :  $b = 1.05$ ,  $(\Gamma) \cap LC_{-1} = \emptyset$ .

Pour  $b = b_0 = 1.1430$ , la courbe invariante fermée  $(\Gamma)$  entre en contact avec la ligne critique  $LC_{-1}$ , d'où  $b_0$  est une valeur de bifurcation et  $(\Gamma) \cap LC_{-1} = \{A_0 \cong B_0\}$ . (voir Fig. (2.5 – 07)).

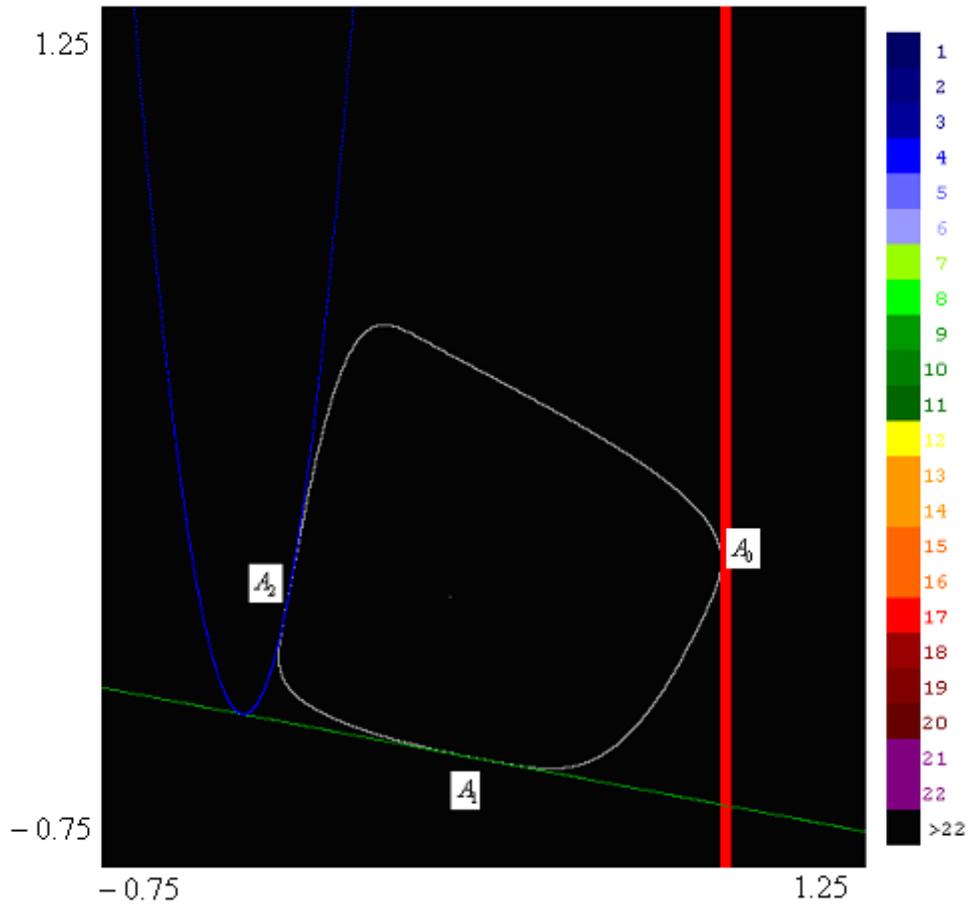


Fig (2.5 – 07) :  $b = 1.143$ ,  $(\Gamma) \cap LC_{-1} = \{A_0\}$ .

Pour  $b > b_0$ , la courbe  $(\Gamma)$  coupe  $LC_{-1}$  en deux points  $A_0$  et  $B_0$ , les itérés successifs du couple  $(A_0, B_0)$  de rang  $n$  par  $T$  sont des points de contact tangentiel entre  $(\Gamma)$  et  $LC_{n-1}$ . Ces points d'intersection changent l'allure de  $(\Gamma)$  et sa propriété d'invariance (devient non invariante par  $T$ ), (voir les figures (2.5 – 08), (2.5 – 09)).

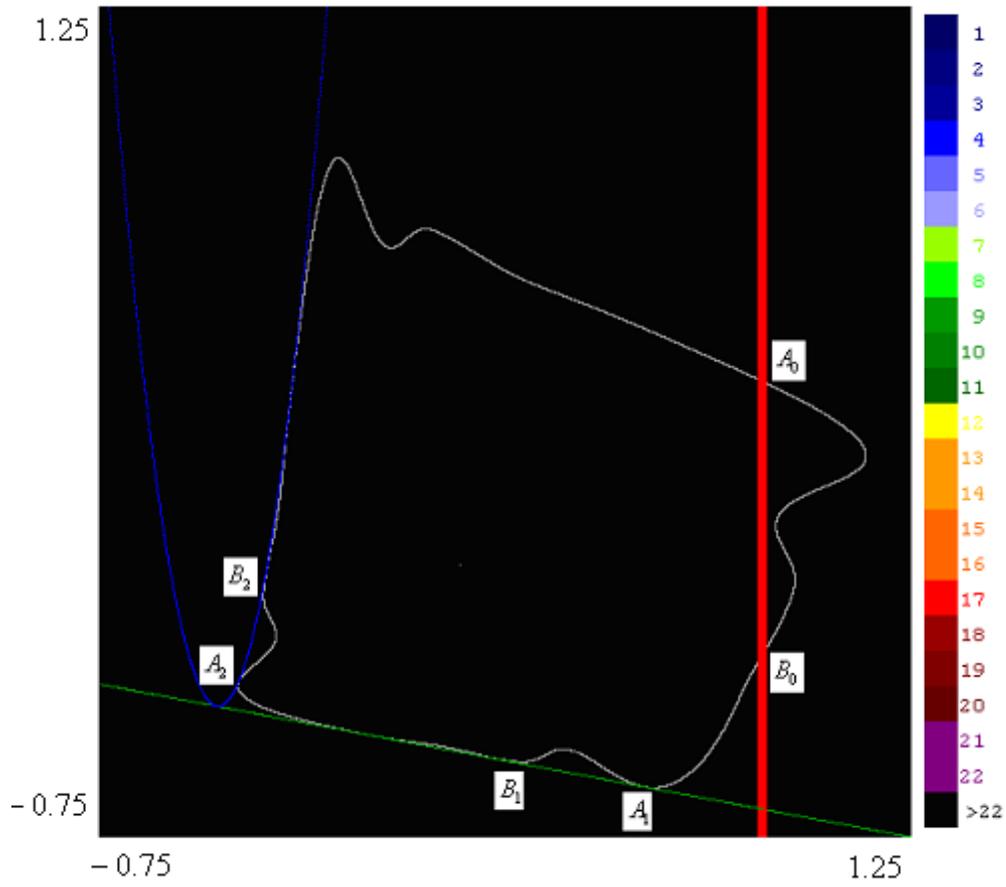


Fig (2.5 – 08) :  $b = 1.3$ ,  
 $(\Gamma) \cap LC_{-1} = \{A_0, B_0, C_0\}$

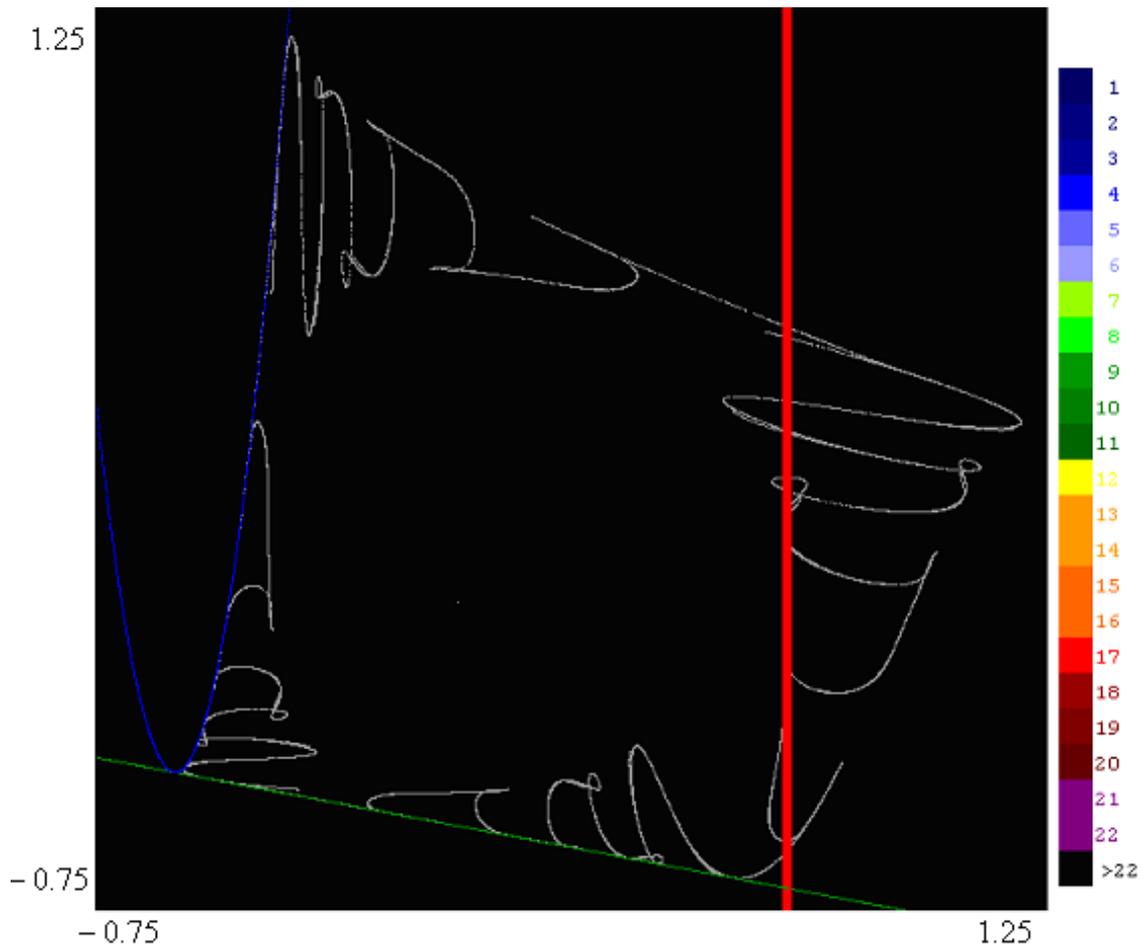


Fig (2.5 – 09) :  $b = 1.35$  Apparition des boucles.

Ces intersections sont aussi responsables de la construction des boucles.

La transformation des boucles, l'accroissement de nombre d'auto-intersection, la convergence des variétés instables des cycles cols coexistant et leurs intersection avec la courbe  $(\Gamma)$  sont responsables de la construction d'un attracteur chaotique(Fig.(2.5 – 10)).

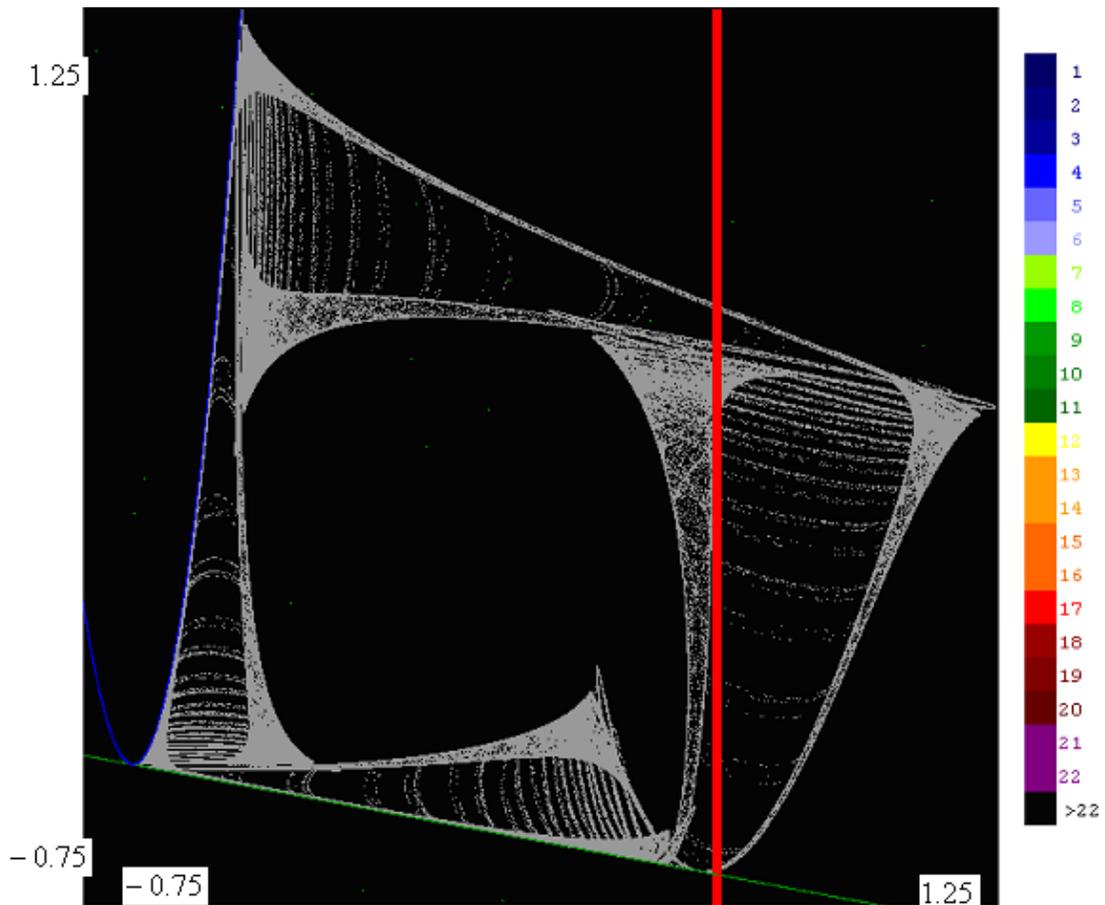


Fig (2.5 – 10) :  $b = 1.4170$ ,  
 Attracteur chaotique.

### Bifurcations globales de type (1 – $b$ ) et (2)

Fixons  $a = 1$  et varions  $b$  d'une manière décroissante, on a les situations suivantes :

Pour la valeur  $b = 1.5140$ , voir (fig. 2.5 – 12), on a un cycle chaotique d'ordre neuf résultant d'une suite de bifurcations flip de cycle d'ordre  $9 \cdot 2^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , son bassin d'attraction est simplement connexe.

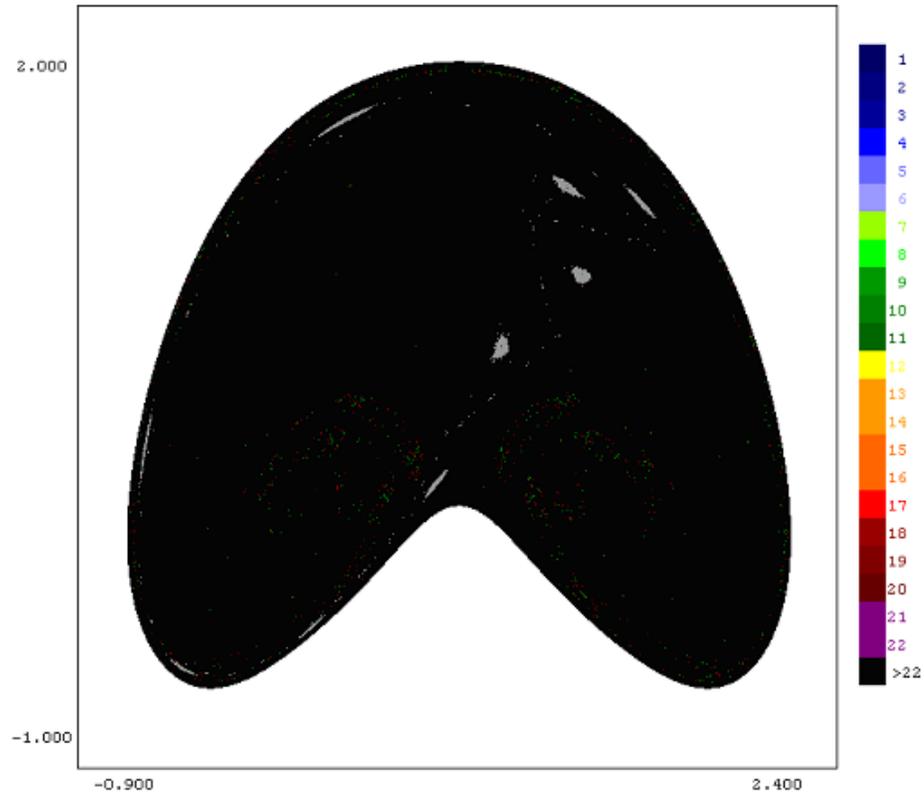


Fig (2.5 – 12) : Cycle chaotique d'ordre 9,  
bassin d'attraction simplement connexe.

Sur les figures (2.5 – 13), et (2.5 – 14). On voit la formation d'un attracteur chaotique par l'union des courbes fermées de l'attracteur précédent et les variétés instables du cycle col d'ordre neuf coexistant.

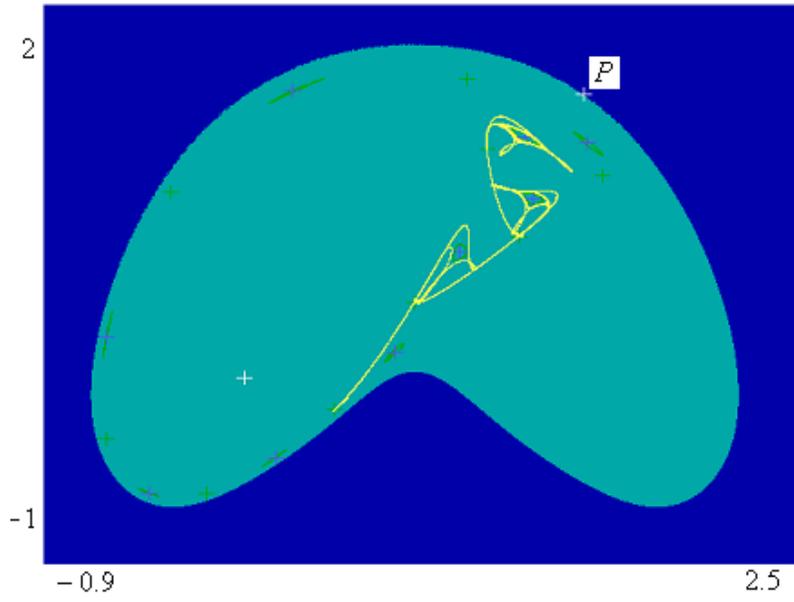


Fig (2.5 – 13) :  $b = 1.5160$

Attracteur constitué de variétés instables des points du cycle col.

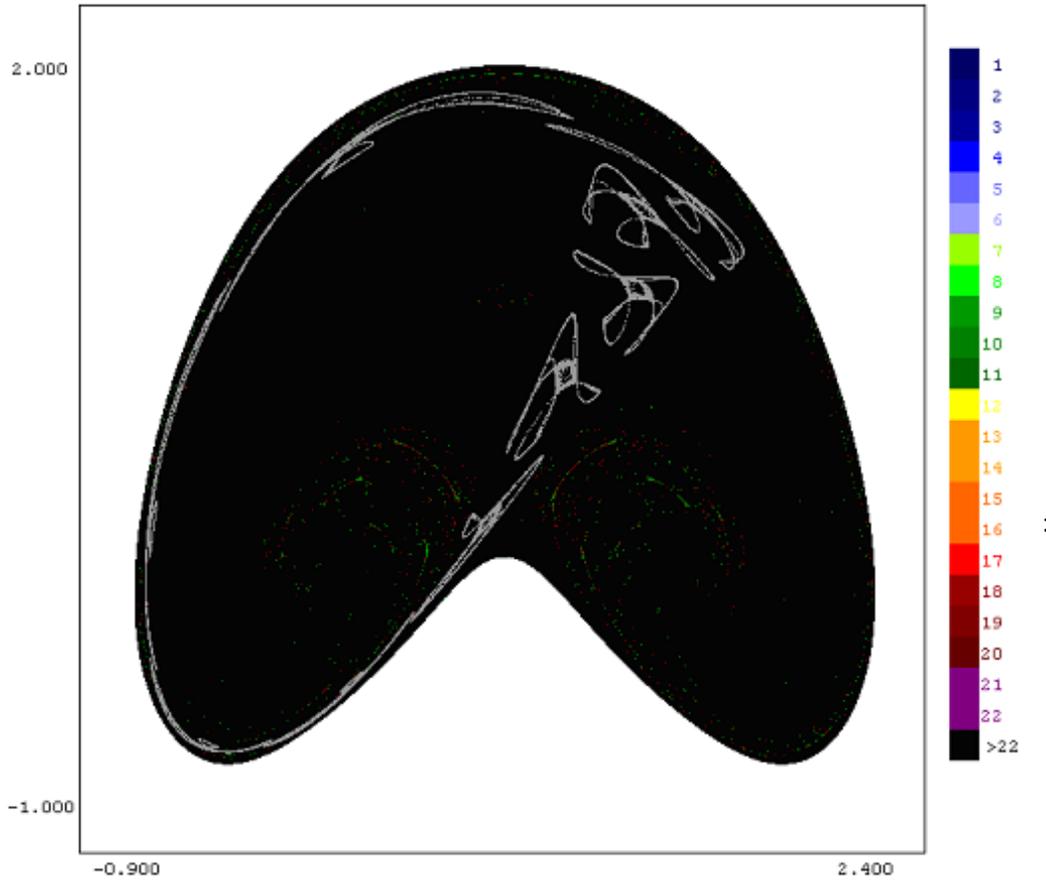


Fig (2.5 - 14) :  $b = 1.52$

Des auto-intersectitons des branches de variétés instables du 9-cycle col

et les 9 courbes fermées formant le cycle chaotique.

En diminuant la valeur du paramètre  $b$  l'attracteur s'approche de la frontière du bassin, c'est-à-dire vers  $W^s(P)$  (Fig (2.5 - 15), et (2.5 - 16)).

On diminue la valeur de  $b$  le bassin d'attraction devient multiplement connexe (figure (2.5 - 17)) sous l'effet de contact entre la ligne critique  $LC_0$  et la frontière du bassin d'attraction (variété stable du point fixe col situé sur la frontière). les trous (lacs)  $H_j^{i_1, i_2, \dots}$  sont les préimages de la baie  $H_0$  (Fig (2.5 - 17)) par les déterminations inverses  $T^{-i}$ ,  $i = 1, 2$  de l'endomorphisme  $T$ . On a  $T^{-1}(H_1) = H_2^1 \cup H_2^2$ , tel que  $H_2^1 = T_1^{-1}(H_1)$  et  $H_2^2 = T_2^{-1}(H_1)$ . donc on a une bifurcation simplement connexe  $\rightarrow$  multiplement connexe à la valeur de  $b$  entre 1.543 et 1.545.

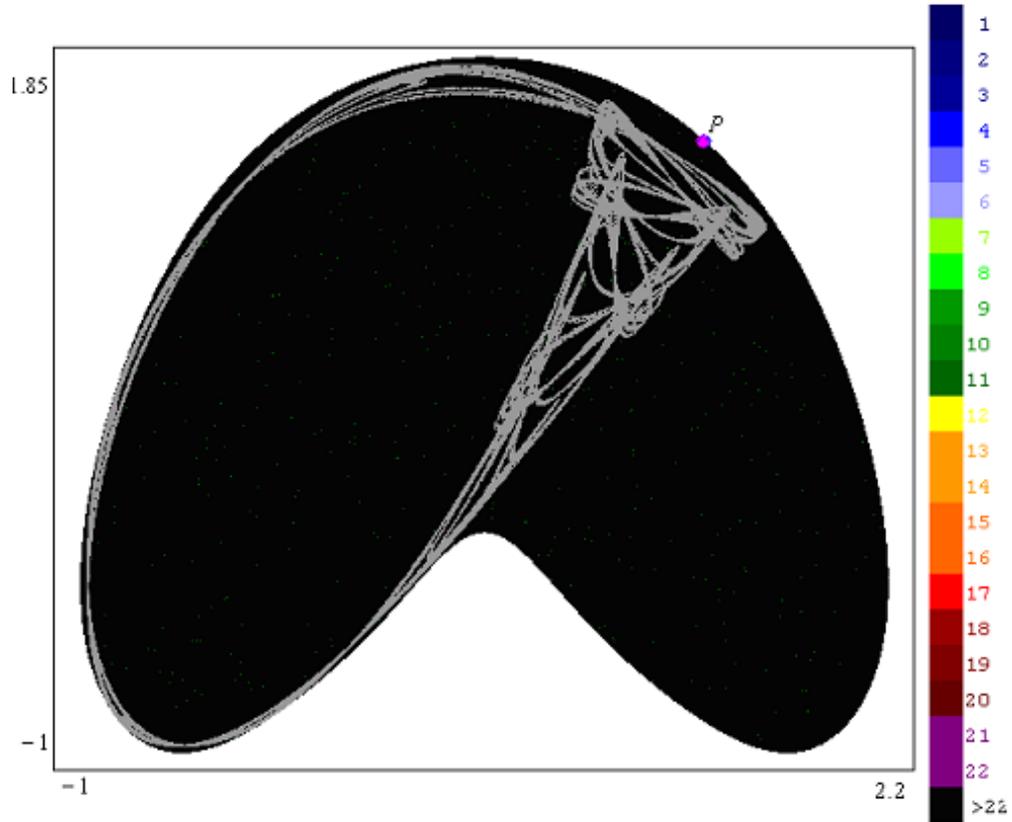


Fig (2.5 – 15) : Attracteur chaotique.

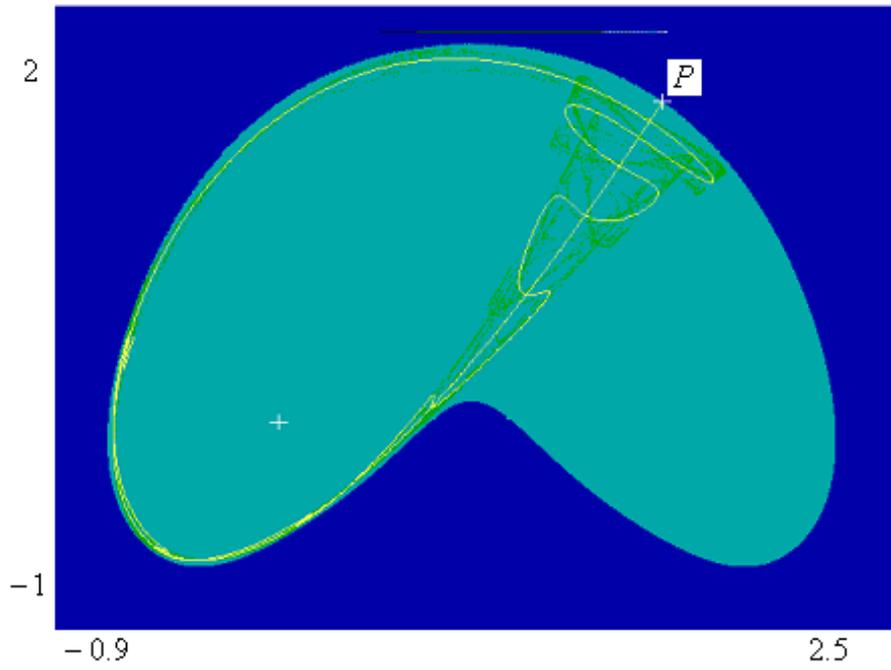


Fig (2.5 – 16) :  $b = 1.54$

Variété instable de point  $P$  prolongé vers l'attracteur.

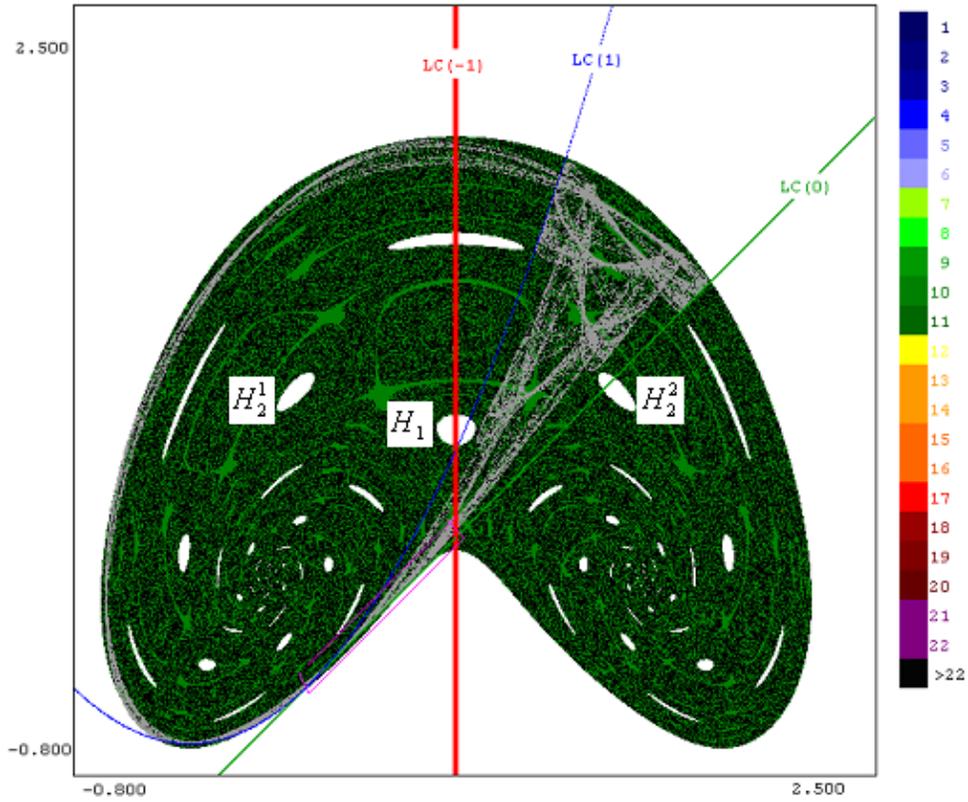


Fig (2.5 – 17) :  $b = 1.545$

Bassin d'attraction mutiplement connexe.

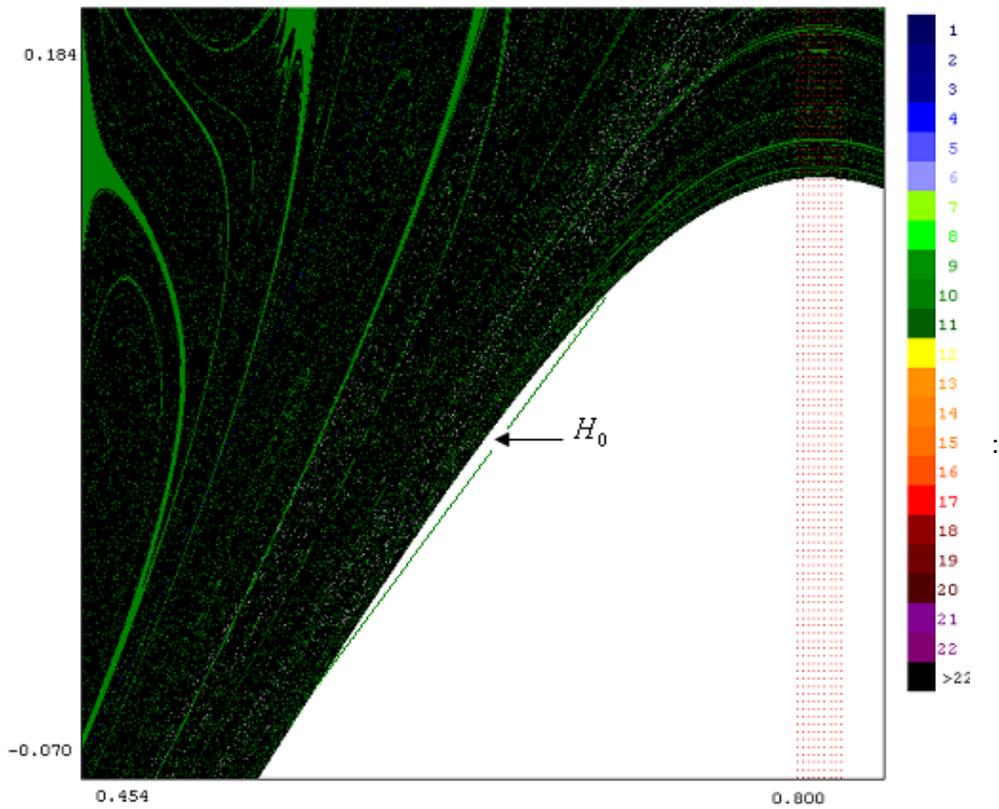


Fig (2.5 – 17.a) : La baie  $H_0$

Pour la valeur  $b = 1.5493$  les sommets de l'attracteur traversent la frontière du bassin d'attraction (Fig.(2.5 – 18)), la variété instable du point col  $P$  tend vers l'attracteur et entre en contact avec la variété stable de même point col. D'où tous ces points de contact sont des points homoclines, on en déduit qu'une bifurcation homocline a lieu.

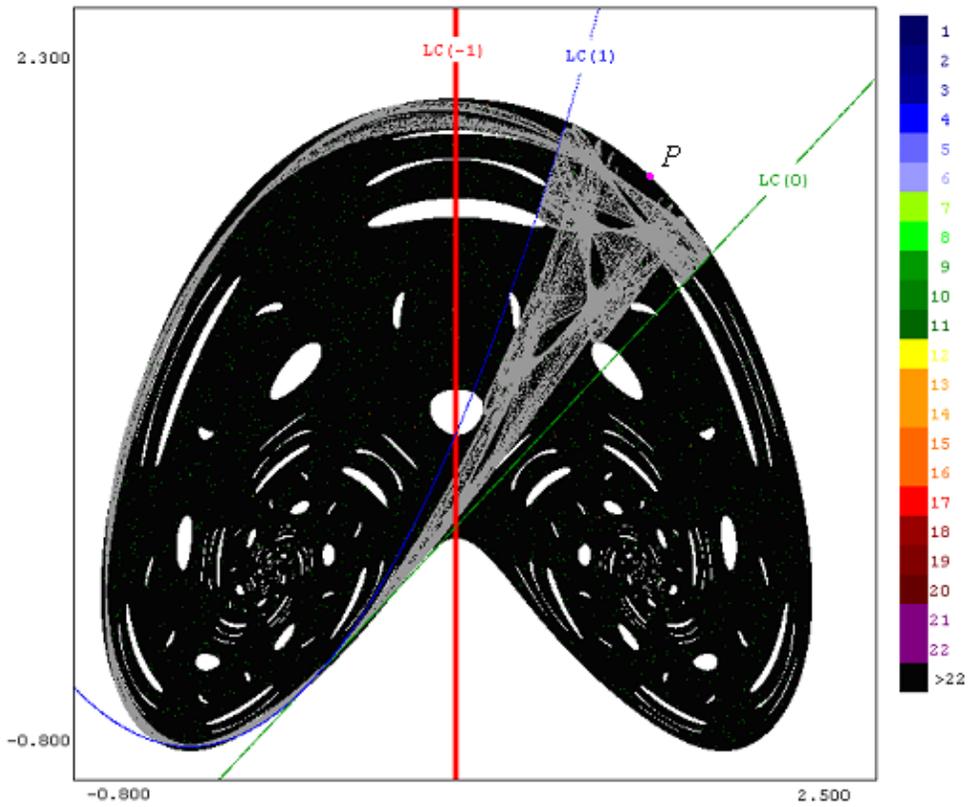


Fig (2.5 – 18) :  $b = 1.547$

L'attracteur converge vers la frontière du bassin d'attraction.

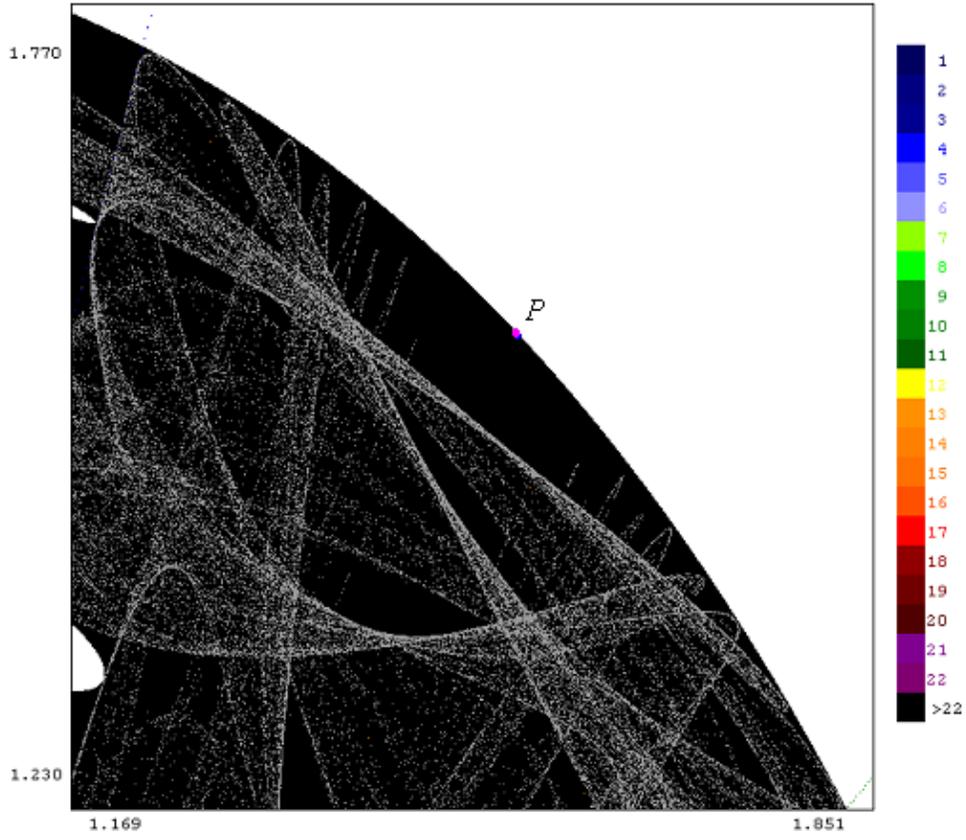


Fig (2.5 – 18.a) :  $b = 1.5490$

Zoom au voisinage de  $P$ .

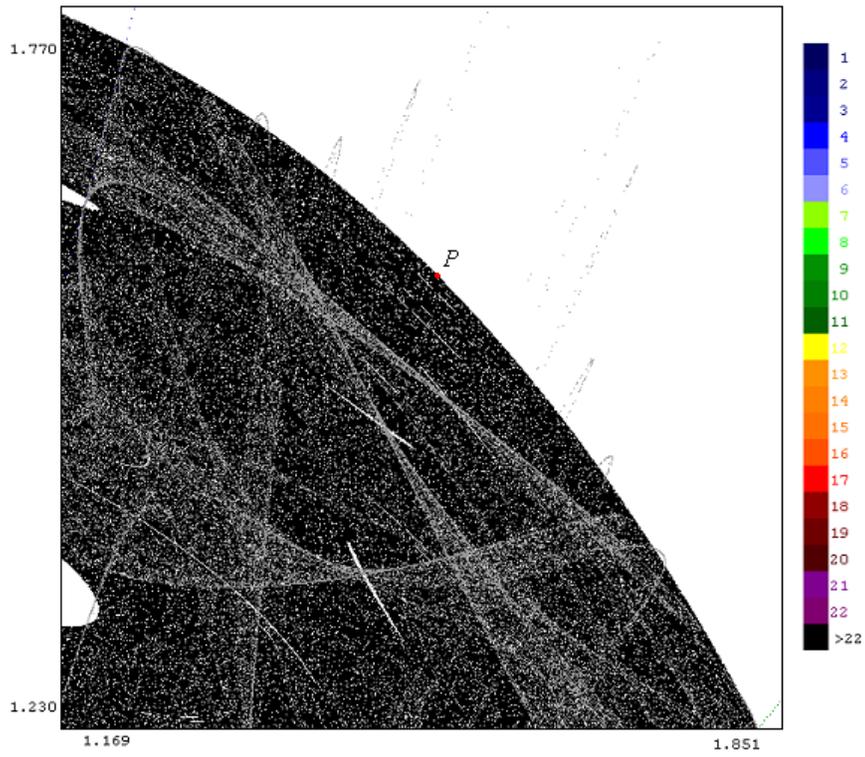


Fig (2.5 – 18.b)

Pour  $b = 1.5493$ , les sommets de l'attracteur traversent la frontière du bassin d'attraction.

---

# Etude de la transformation découplée généralisée d'ordre $n$

Dans ce chapitre, nous généralisons le système  $T$  à l'ordre  $n$  c'est-à-dire nous prendrons la transformation  $h(x) = x^n - bx$ , avec  $b$  réel.

D'après le plan paramétrique de cette transformation, on a deux cas à étudier selon le paramètre  $n$ , soit pair où impair.

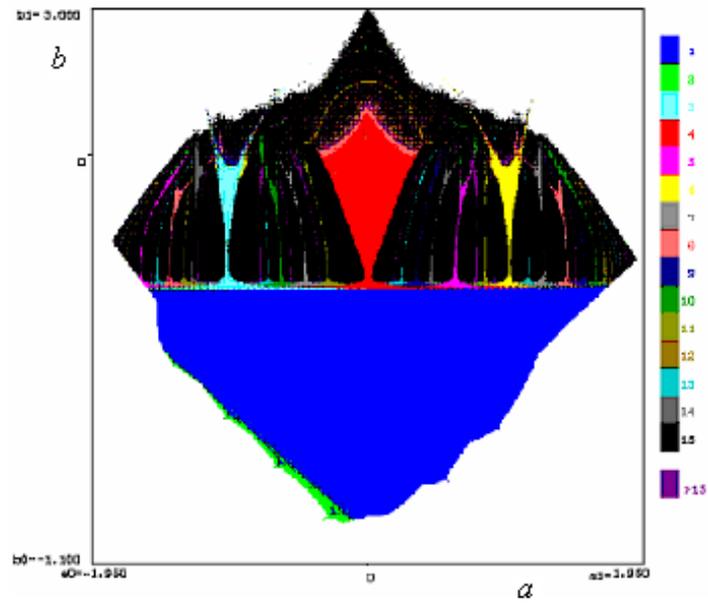


Fig (3 – 01) : Plan paramétrique  
avec  $n = 3$ .

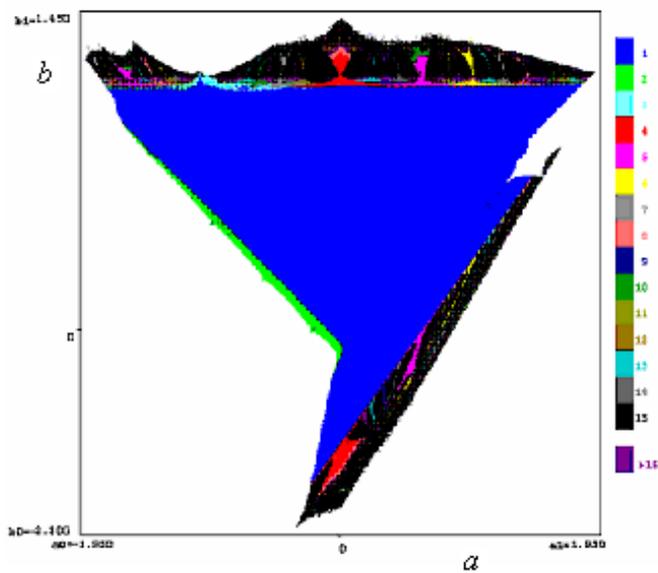


Fig (3 – 02) : Plan paramétrique  
avec  $n = 4$ .

### 3.1 Etude des points fixes

**Pour**  $n = 2k$

Les points fixes de  $h$  sont :  $x = 0$  et  $x_0 = (b + 1)^{\frac{1}{n-1}}$ , le premier est un nœud stable pour les valeurs de  $b \in ]-1, 1[$ , et le second est un nœud stable pour les valeurs de  $b \in ]\frac{1+n}{1-n}, -1[$ .

Dans ce cas la transformation  $T$ , admet deux points fixes  $O(0, 0)$  stable sur  $] -1, 1[$ , et  $P_0 = (x_0, x_0)$  stable sur  $]\frac{1+n}{1-n}, -1[$ . et un 2-cycle de type col,  $C_2^T = \{T^i(0, x_0), i = 1, 2\}$ .

**Pour**  $n = 2k + 1$

L'équation  $h(x) = x$ , admet une seule solution  $x = 0$ , pour  $b \leq -1$ . et trois racines pour les valeurs de  $b > -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = -(b + 1)^{\frac{1}{n-1}}$ , et  $x = (b + 1)^{\frac{1}{n-1}}$ .

Dans ce cas  $T$  admet :

- Trois points fixes :  $O = (0, 0)$  un nœud stable sur  $] -1, 1[$ ,  $P_0 = (x_0, x_0)$ , et  $P_1 = (x_1, x_1)$ , telle que  $x_0 = -(b + 1)^{\frac{1}{n-1}}$ , et  $x_1 = (b + 1)^{\frac{1}{n-1}}$ . Il sont toujours instables.

- Trois cycles d'ordre deux :  $C_2^1 = \{T^i(0, x_0), i = 1, 2\}$ ,  $C_2^2 = \{T^i(0, x_1), i = 1, 2\}$ ,  $C_2^3 = \{T^i(x_0, x_1), i = 1, 2\}$ , les deux premiers sont des cycles cols, et le dernier est un noeud instable.

A la valeur  $b = -1$ , les trois points fixes coïncident. D'où la présence d'une bifurcation fourche sur- critique (super-critique).

### 3.2 Etude des cycles d'ordre $k(k > 1)$

Cherchons les points fixes de  $h^2$ , cherchons la solution de l'équation  $h^2(x) = x$ , et

$$h^2(x) = (x^n - bx)^n - b(x^n - bx) .$$

**Pour**  $n = 2k$

Le point fixe  $x_0 = (b + 1)^{\frac{1}{n-1}}$  perd sa stabilité pour les valeurs de  $b < \frac{1+n}{1-n}$  donnant naissance à un cycle d'ordre deux stable  $C_2^h = \{x_1, x_2\}$ .

Dans ce cas  $T$  admet trois cycles d'ordre quatre :  $C_4^1 = \{T^i(x_2, x_1), i = 1, 2, 3, 4\}$  qui est un cycle stable.

$C_4^2 = \{T^i(0, x_1), i = 1, 2, 3, 4\}$  , et  $C_4^3 = \{T^i(x_0, x_1), i = 1, 2, 3, 4\}$  , qui sont des cycles cols.

**Exemple 3.2.1**  $n = 4$

Pour  $b < b_0 = -\frac{5}{3}$ , le point fixe  $P_0 = (5^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{3}})$  perd sa stabilité, est donne naissance a un cycle d'ordre deux, voir la figure (3 – 03), les points fixes de  $h^2$ ,  $x_1 = -0.95050$  et  $x_2 = -0.97775$  pour  $b = -1.7$ . Alors  $T$  admet trois cycles d'ordre quatre, donnés sur la figure (3 – 04).

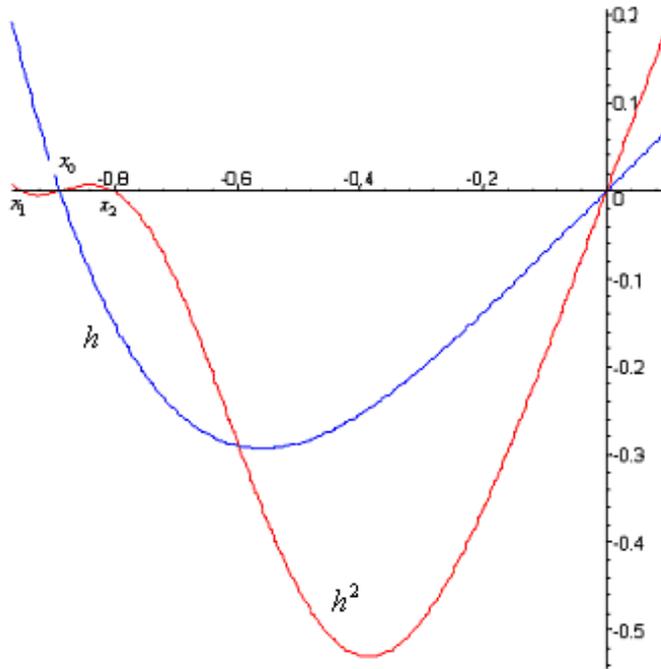


Fig (3 – 03) : Les points fixes de  $h^2$

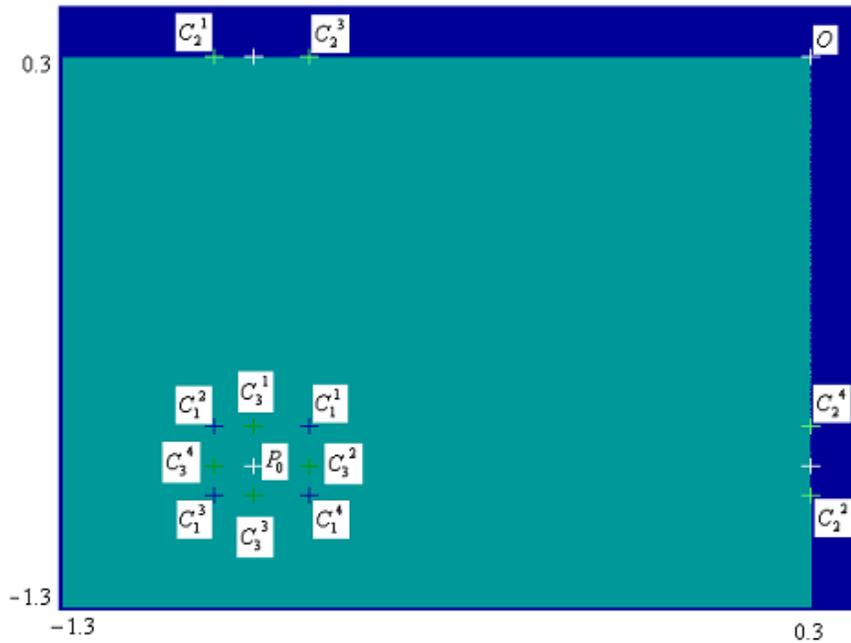
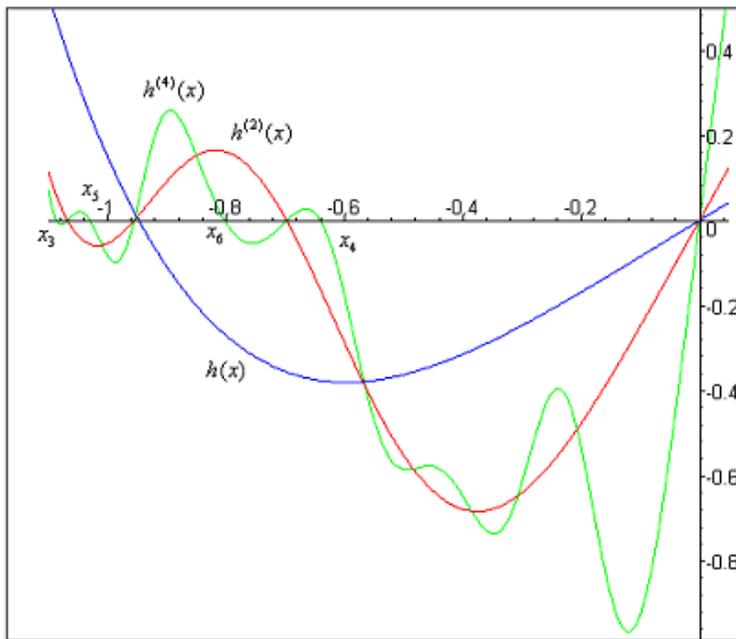


Fig (3 – 04) : Les cycles d'ordre quatre de  $T$ .

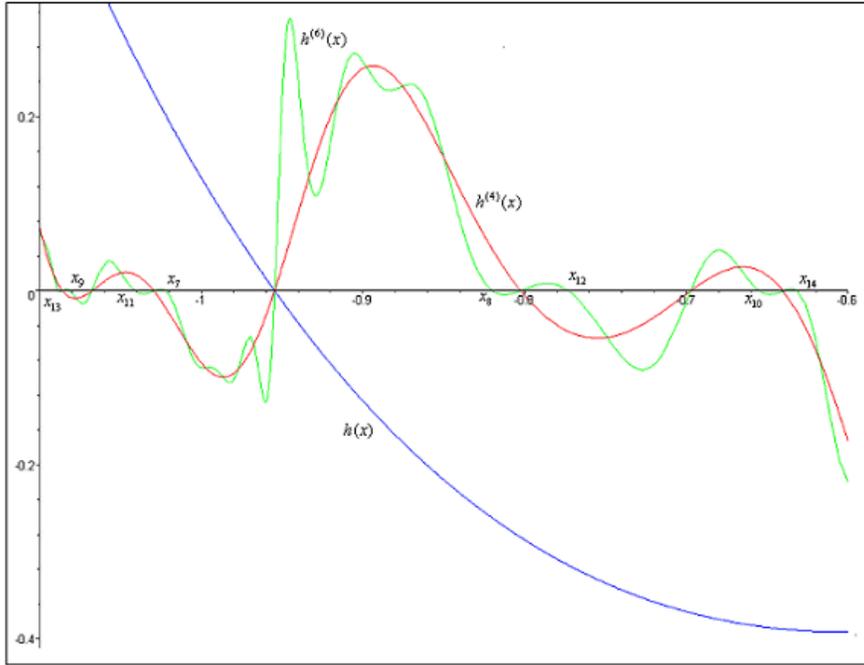
avec  $b = -1.7$ .

Pour  $b < b_{n_1}$ , le cycle d'ordre deux de  $h$ , devient instable donnant naissance à un cycle d'ordre quatre stable  $C_4^h$ . Ce dernier cycle devient instable pour les valeurs de  $b < b_{n_2}$ , donnant naissance à un cycle d'ordre huit  $C_8^h$ . Ainsi de suite : Le cycle d'ordre  $2^n$  se déstabilise et donne naissance à un cycle d'ordre  $2^{n+1}$  stable.

Sur les figures (3 – 05)), (3 – 06), (3 – 08), et (3 – 09) on voit les points fixes de  $h^4$ , et  $h^8$ , ainsi que les cycles d'ordre 8, et 16 de  $T$ , pour  $n = 4$ .

Fig (3 – 05) : Les cycles quatre de  $h$ .pour  $(n, b) = (4, -1.85)$ 

$C_4^h = \{x_3 = -1.07293, x_4 = -0.65968, x_5 = -1.03111, x_6 = -0.77718\}$  , avec la valeur propre  $S = -0.15244$ .



**Fig (3 – 06) :** Les cycles d'ordre huit de  $h$ ,  
pour  $(n, b) = (4, -1.87)$

$C_8^h = \{x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}$  tel que :  $x_7 = -1.02212$ ,  $x_8 = -0.81991$ ,  
 $x_9 = -1.08128$ ,  $x_{10} = -0.65505$ ,  $x_{11} = -1.04082$ ,  $x_{12} = -0.77277$ ,  $x_{13} = -1.08846$ ,  
 $x_{14} = -0.63178$ . Avec la valeur propre  $S = -0.32541$ .

Pour  $b = -1.85$ ,  $T$  admet deux cycles d'ordre huit,  $C_{8,1}^T = \{T^i(x_3, x_3), i = 1, \dots, 8\}$ , et  
 $C_{8,2}^T = \{T^i(x_3, x_5), i = 1, \dots, 8\}$  sont des cycles stables et quatre cycles de type cols en-  
gendrés par la combinaison entre le cycle stable de  $h$  et les deux points fixes et avec les  
deux cycles instables.

Pour  $b = -1.87$ ,  $T$  a quatre cycles stables d'ordre 16,  $C_{16,1}^T = \{T^i(x_7, x_7), i = 1, \dots, 16\}$ ,  
 $C_{16,2}^T = \{T^i(x_7, x_9), i = 1, \dots, 16\}$ ,  $C_{16,3}^T = \{T^i(x_7, x_{10}), i = 1, \dots, 16\}$ ,  
 $C_{16,4}^T = \{T^i(x_7, x_{11}), i = 1, \dots, 16\}$ .

Et six cycles de type cols engendrés par la combinaison entre le 16–cycle de  $h$  et les deux  
points fixes, et avec les deux 4–cycles instables toujours de  $h$ .

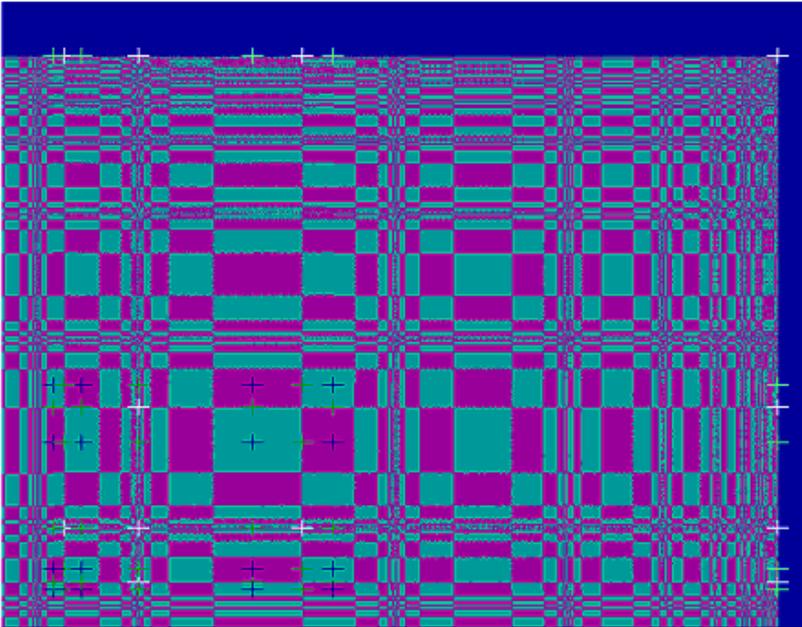


Fig (3 – 07) : Cycles huit de  $T$ .

Deux cycles d'ordre huit stables en bleu.

Quatre cycles huit de type cols en vert.

Les points en blanc sont des points fixes et des cycles d'ordre inférieur à 8.

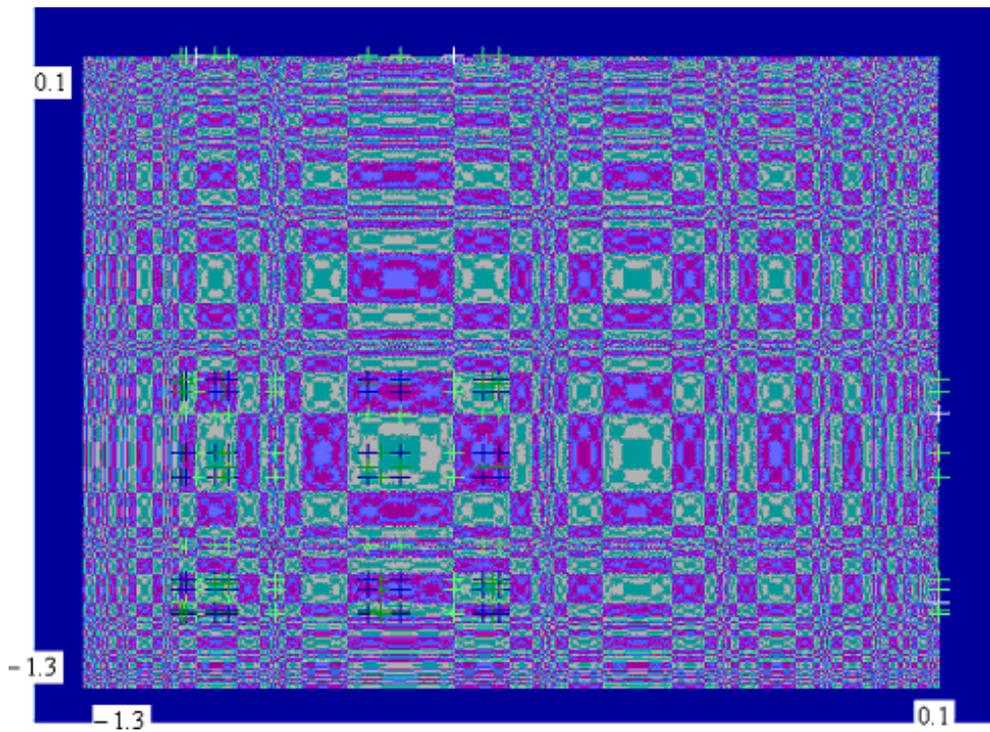


Fig (3 – 08) : Cycle d'ordre 16 de  $T$ ,  
pour  $(n, b) = (4, -1.87)$ .

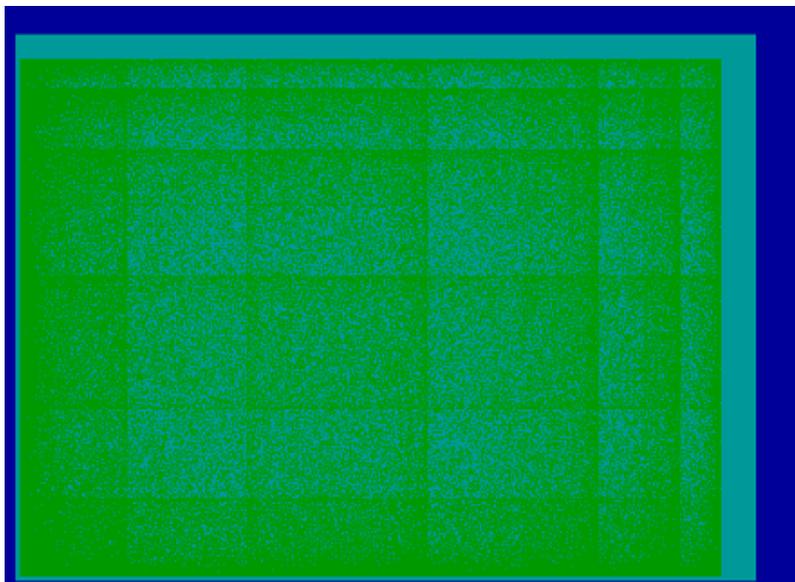


Fig (3 – 09) :  $(n, b) = (4, -2.1)$   
Agrandissement de l'attracteur chaotique.

**Pour**  $n = 2k + 1$

Pour  $b > b_0 = 1$ , le point fixe  $O$  se desatbilise en donnant naissance à un cycle d'ordre deux  $C_2^h = \{x_2, x_3\}$ . En augmentant la valeur de  $b$ , une bifurcation fourche a lieu donnant naissance à deux cycles d'ordre deux  $C_{2,1}^h = \{x_4, x_5\}$ , et  $C_{2,2}^h = \{x_6, x_7\}$ .

Sur le tableau suivant on donne les cycles d'ordre deux pour  $n = 3, 5, 7$ .

$n$	$b$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Nombre de 2-cycles
3	1.3	-0.547722	0.547722					1
	2	-1	1					1
	2.2	-1.095445	1.095445	-1.248302	0.801088	-0.801088	1.248302	3
5	1.3	-0.740082	0.740082					1
	1.5	-0.840896	0.840896					1
	1.6	-0.880112	0.880112	-0.722768	0.959189	-0.959189	0.722768	3
7	1.3	-0.81819	0.81819					1
	1.4	-0.85837	0.85837	-0.74331	0.91526	-0.91526	0.74331	3

Sur les figures(3 – 10), (3 – 11), on voit les points fixes de  $h$  et de  $h^2$  pour  $n \in \{3, 5\}$ , et  $b = 1.3$ .

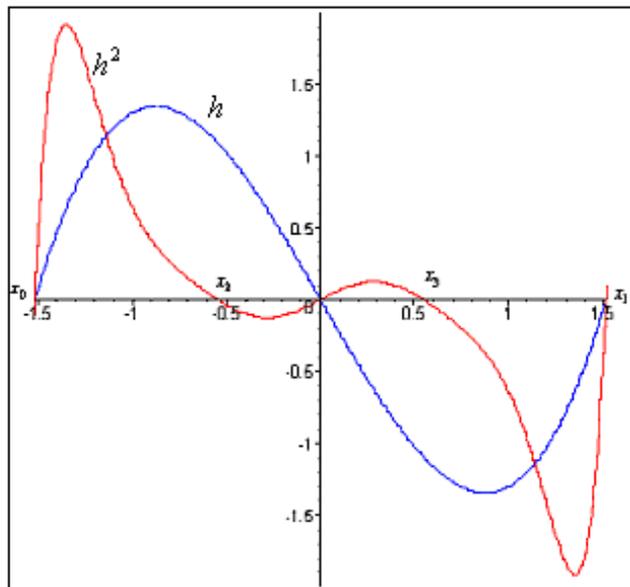


Fig (3 – 10)

Cycle d'ordre deux de  $h$ , pour  $(n, b) = (3, 1.3)$ .

$$C_2^h = \{x_2 = -0.54772, x_3 = 0.54772\} .$$

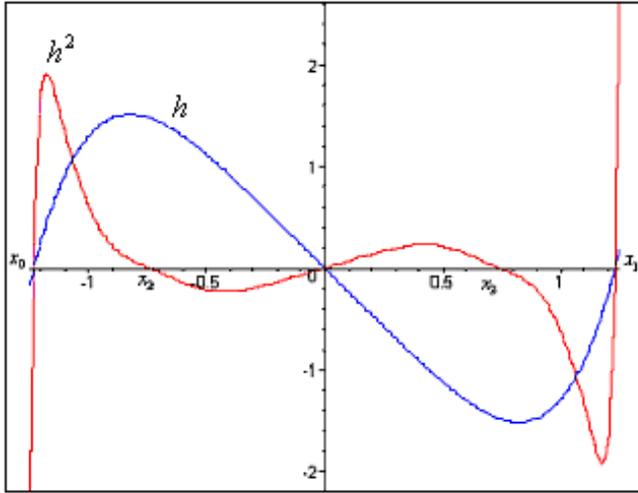


Fig (3 – 11) :  $(n, b) = (5, 1.3)$

Cycle d'ordre deux de  $h$ ,  $C_2^h = \{x_2 = -0.74008, x_3 = 0.74008\}$

Pour  $b_0 < b < b_{n_1}$ ,  $T$  admet quatre cycles d'ordre quatre :

$C_4^1 = \{c_1^i = T^i(x_2, x_3), i = 1, 2, 3, 4\}$ , est un cycle stable.

$C_4^2 = \{c_2^i = T^i(0, x_2), i = 1, 2, 3, 4\}$ ,  $C_4^3 = \{c_3^i = T^i(x_0, x_2), i = 1, 2, 3, 4\}$ ,

$C_4^4 = \{c_4^i = T^i(x_1, x_2), i = 1, 2, 3, 4\}$ .

$C_4^2, C_4^3$ , et  $C_4^4$  sont des cycles cols.

La figure (3 – 12) présente les cycles d'ordre quatre de  $T$  pour  $(n, b) = (5, 1.3)$ .

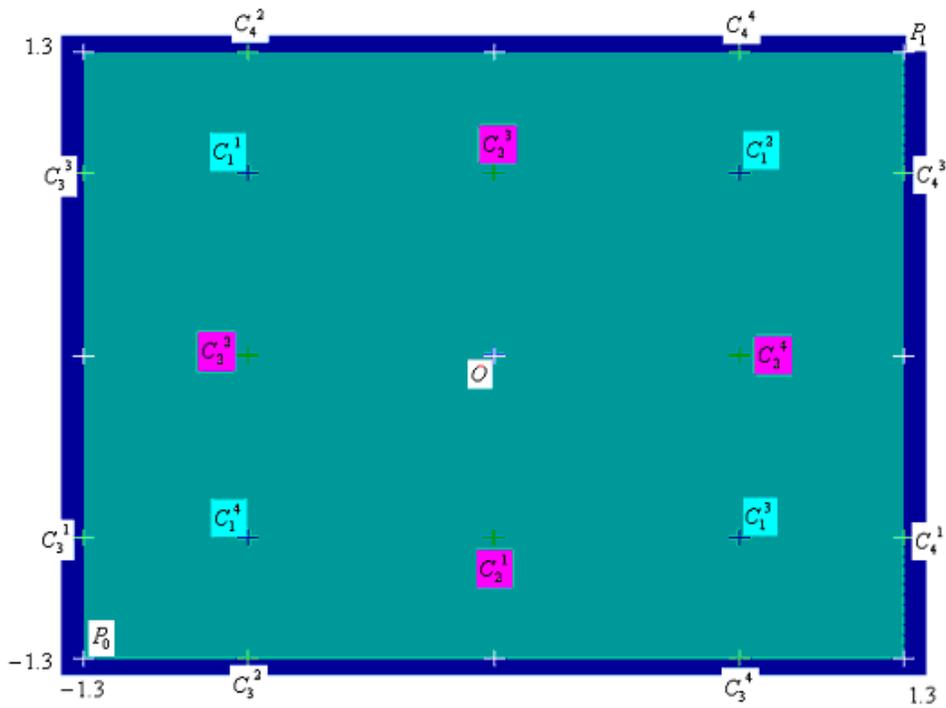


Fig (3 – 12)

Les 4–cycles de  $T$ ,  $(n, b) = (5, 1.3)$ .

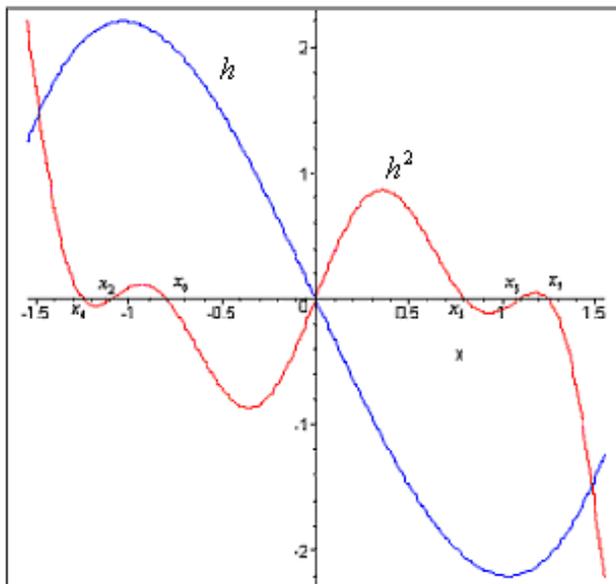
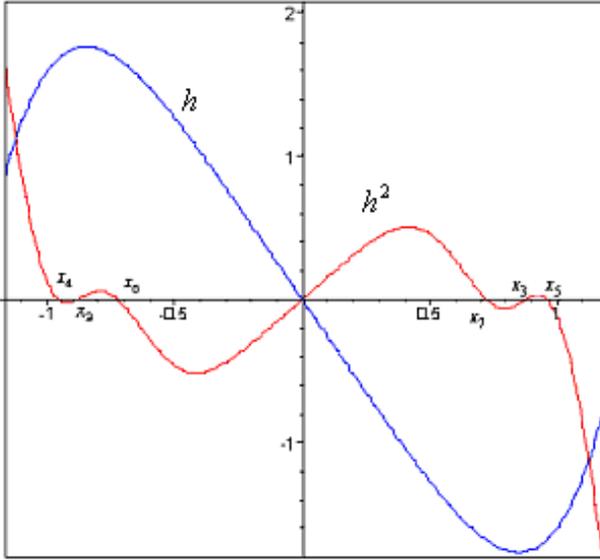


Fig (3 – 13) :  $(n, b) = (3, 2.2)$

Les trois cycles d'ordre deux de  $h$ .


 Fig (3 – 14) :  $(n, b) = (5, 1.6)$ 

Les trois cycles d'ordre deux de  $h$ .

Pour  $b_{n_1} < b < b_{n_2}$ ,  $T$  a trois cycles homogènes et 15 cycles de type mixtes.

les cycles homogènes :

$$C_{4,1}^T = \{T^i(x_2, x_3), i = 1, 2, 3, 4\}$$

$$C_{4,2}^T = \{T^i(x_4, x_5), i = 1, 2, 3, 4\}$$

$$C_{4,3}^T = \{T^i(x_6, x_7), i = 1, 2, 3, 4\}$$

les cycles  $C_{4,2}^T$ ,  $C_{4,3}^T$  sont stables, et le cycle  $C_{4,1}^T$  est instable.

les cycles mixtes :

On a deux cycles stables :  $C_{4,4}^T = \{T^i(x_4, x_6), i = 1, 2, 3, 4\}$  , et  $C_{4,5}^T = \{T^i(x_4, x_7), i = 1, 2, 3, 4\}$  .

Les cycles suivants sont : soit des cycles cols soit des noeuds instables.

$$C_{4,6}^T = \{T^i(x_2, x_4), i = 1, 2, 3, 4\}, C_{4,7}^T = \{T^i(x_2, x_5), i = 1, 2, 3, 4\}, C_{4,8}^T = \{T^i(x_2, x_6), i = 1, 2, 3, 4\},$$

$$C_{4,9}^T = \{T^i(x_2, x_7), i = 1, 2, 3, 4\}, C_{4,10}^T = \{T^i(0, x_2), i = 1, 2, 3, 4\}, C_{4,11}^T = \{T^i(0, x_4), i = 1, 2, 3, 4\},$$

$$C_{4,12}^T = \{T^i(0, x_6), i = 1, 2, 3, 4\}, C_{4,13}^T = \{T^i(x_0, x_2), i = 1, 2, 3, 4\}, C_{4,14}^T = \{T^i(x_0, x_4), i = 1, 2, 3, 4\},$$

$$C_{4,15}^T = \{T^i(x_0, x_6), i = 1, 2, 3, 4\}, C_{4,16}^T = \{T^i(x_1, x_2), i = 1, 2, 3, 4\}, C_{4,17}^T = \{T^i(x_1, x_4), i = 1, 2, 3, 4\},$$

$$C_{4,18}^T = \{T^i(x_1, x_6), i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Sur la figure (3 – 15), on fixe  $(n, b) = (5, 1.6)$ . On voit les différents cycles d'ordre quatre de  $T$ .

4-cycles stable. Les points en bleu clair sont des points des cycles d'ordre quatre instable.

Les points en couleur vert sont des points des cycles cols d'ordre quatre.

Les points blanc sont des points fixes et des points des cycles d'ordre deux instables.

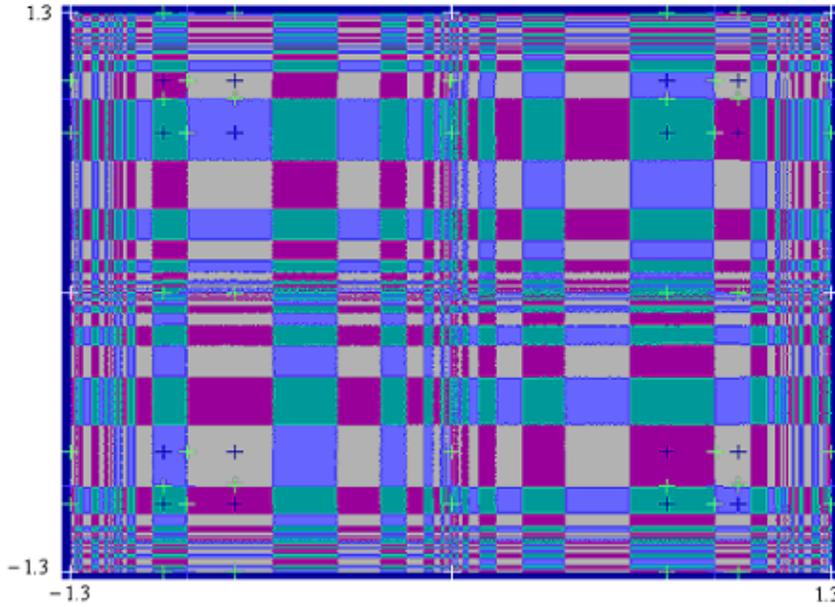


Fig (3 – 15) : Les 4 – cycles de  $T$

Pour  $b_{n_2} < b < b_{n_3}$ , les deux cycles de  $h$  se destabilisent donnant naissance à deux cycles stables d'ordre quatre,

$C_{4,1}^h = \{x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}$  ,  $C_{4,2}^h = \{y_8, y_9, y_{10}, y_{11}\}$  . Alors  $T$  admet huit cycles stable, et 14 cycles de type cols d'ordre huit.

Ces deux cycles stables de  $h$  se destabilisent sous une bifurcation flip (doublement de période), donnant naissance à deux cycles stables d'ordre huit,  $C_{8,1}^h$   $C_{8,2}^h$ , ainsi de suite les cycles stables de  $h$  d'ordre  $2^n$  se destabilisent donnant naissance à des cycles stables d'ordre  $2^{n+1}$ .

Sur les figures (3 – 16), (3 – 17) on voit les cycles d'ordre quatre de  $h$  pour le couple  $(n, b) = (5, 1.63)$ , et les cycles correspond à  $T$ .

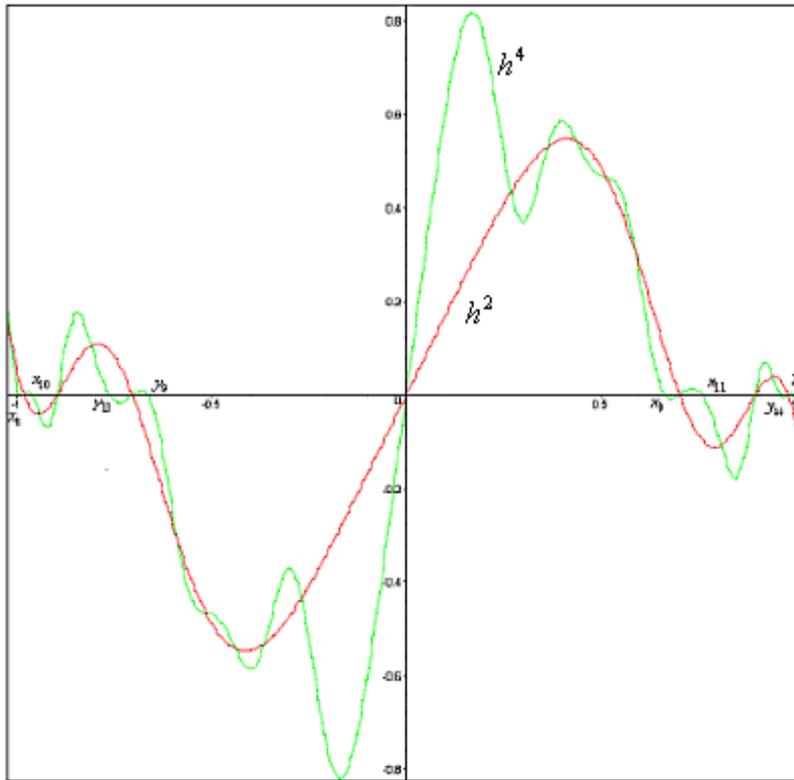


Fig (3 – 16) :  $(n, b) = (5, 1.63)$

Les quatre cycles de  $h$  :  $C_{4,1}^h = \{x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}$ , tel que :

$$x_8 = -0.98450, x_9 = 0.67987, x_{10} = -0.96293, x_{11} = 0.74167.$$

et  $C_{4,2}^h = \{y_8, y_9, y_{10}, y_{11}\}$ , tel que :

$$y_8 = 0.98450, y_9 = -0.67987, y_{10} = 0.96293, y_{11} = -0.74167.$$

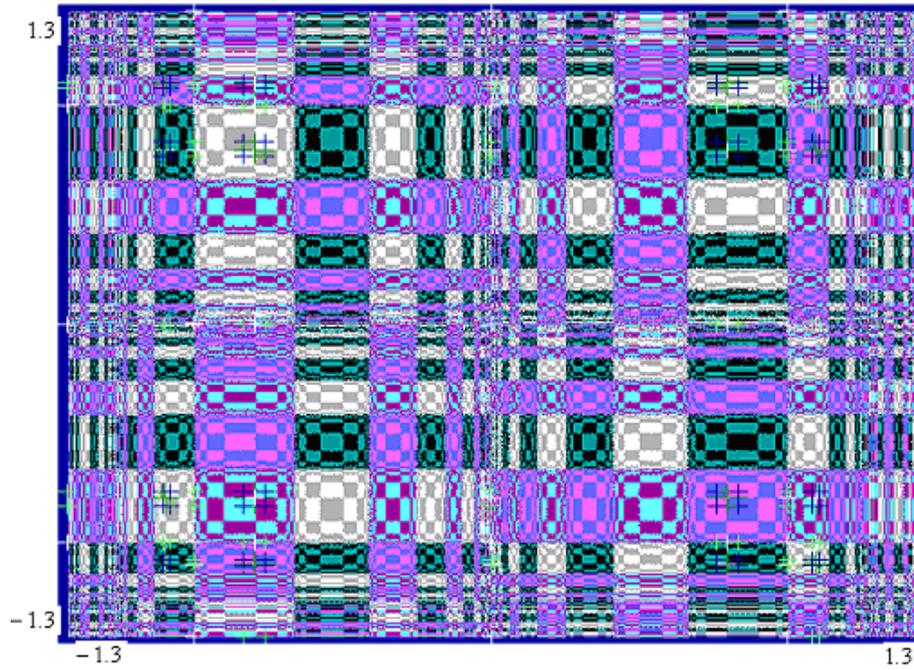
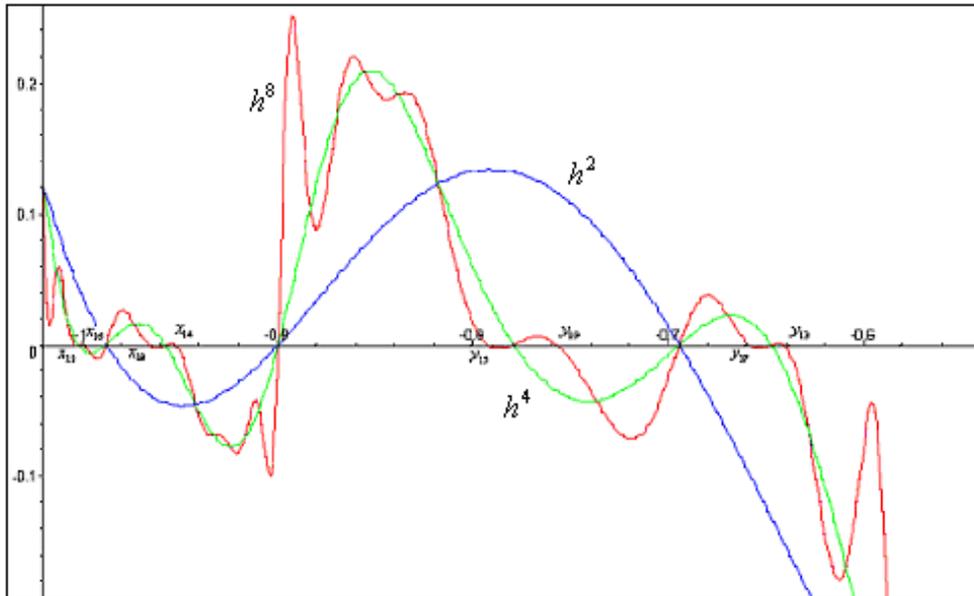


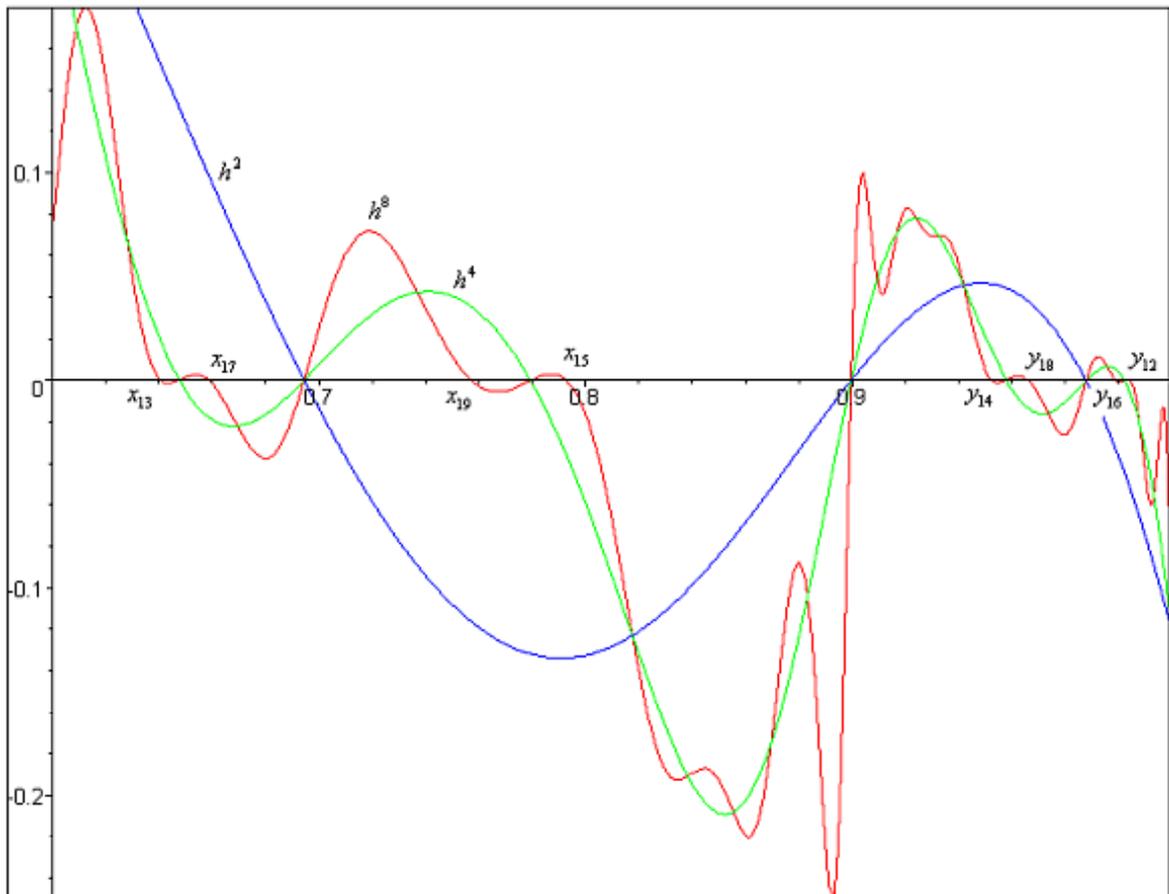
Fig (3 – 17) :  $(n, b) = (5, 1.63)$

Les 8-cycles de  $T$  générés par les deux 4-cycles de  $h$ .

On voit sur la figure (3 – 18) les deux cycles d'ordre 8 de  $h$  pour les valeurs  $(n, b) = (5, 1.655)$ .

Pour voir clairement ces cycles on a partagé le plan en deux parties  $[-1.02, -0.6]$ , et  $[0.6, 1.02]$ .



Fig (3 – 18) :  $(n, b) = (5, 1.655)$ 

les 8–cycles de  $h.C_{8,1}^h = \{x_i, i = 12, \dots, 19\}$ , et  $C_{8,2}^h = \{y_i, i = 12, \dots, 19\}$  tel que :

$y_i = -x_i$  et  $x_{12} = -1.00424856$ ,  $x_{13} = 0.6406061$ ,  $x_{14} = -0.9523145565$ ,  $x_{15} = 0.7928275067$ ,  
 $x_{16} = -0.99880$ ,  $x_{17} = 0.658741363$ ,  $x_{18} = -0.96617326$ ,  $x_{19} = 0.75708849$ .

Sur la figure suivante (3 – 19), on a les cycles d'ordre 16 de  $T$  : 16 cycles stables (8 cycles homogènes, et 8 cycles mixtes), et 22 cycles de type cols dont 6 engendrés par la combinaison avec les points fixes, et 16 sont obtenus par la combinaison avec les cycles 4 cycles existants déjà.

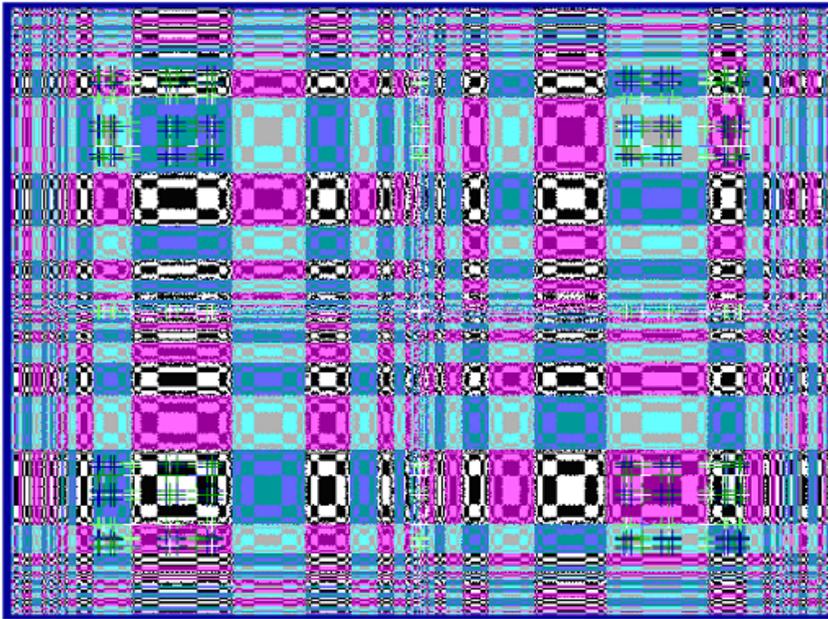


Fig (3 – 19) :  $(n, b) = (5, 1.655)$

Les 16-cycles de  $T$ .

### 3.3 Etude de lignes critiques

Pour  $n = 2k$

On a  $h'(x) = nx^{n-1} - b$ , la résolution de  $h'(x) = 0$ , nous donne  $x = \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ , d'où  $C_{-1} = x_0 = \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ . Et  $C_0 = h(C_{-1})$  est le point critique du rang 1. Donc dans ce cas  $T$  admet une ligne critique constituée d'une seule branche,  $LC_{-1} : x = \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ ,  $LC_0 : y = \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} - b\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ .

**Exemple 3.3.1**  $n = 4$ .

$$C_{-1} = \left(\frac{b}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad C_0 = -3\left(\frac{b}{4}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad C_1 = 3b^{\frac{7}{3}} \left[ \frac{(3b)^3 + 4^4}{4^{\frac{16}{3}}} \right], \quad \text{d'où } LC_{-1} : x = \left(\frac{b}{4}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$LC_0 : y = -3\left(\frac{b}{4}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad LC_1 : x = -3\left(\frac{b}{4}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad LC_2 : y = 3b^{\frac{7}{3}} \left[ \frac{(3b)^3 + 4^4}{4^{\frac{16}{3}}} \right].$$

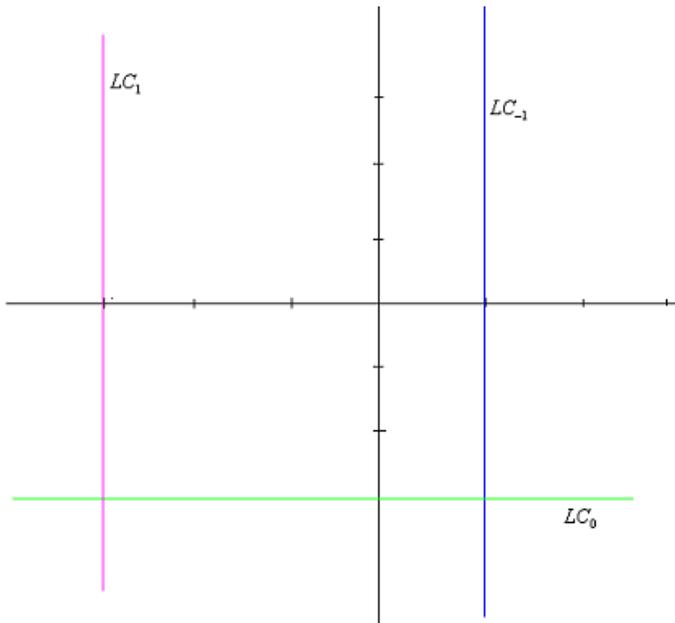


Fig (3 – 20)

Lignes critiques de  $T$ , pour  $(n, b) = (4, 4)$ ,

$$LC_{-1} : x = 1, \quad LC_0 : y = -3, \quad LC_1 : x = -3.$$

**Pour**  $n = 2k + 1 : (b > 0)$

$h'(x) = 0$ , nous donne  $x = \pm(\frac{b}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ , donc  $C_{-1} = \left\{ x_0^1 = -(\frac{b}{n})^{\frac{1}{n-1}}, x_0^2 = (\frac{b}{n})^{\frac{1}{n-1}} \right\}$ ,  
d'où la ligne critique de  $T$  est constituée de deux branches  $LC_{-1}^1 : x = -(\frac{b}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ ,  
et  $LC_{-1}^2 : x = (\frac{b}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ .

Et la ligne critique d'ordre un est

$$LC_0 = LC_0^1 \cup LC_0^2 = \left\{ y = -(\frac{b}{n})^{\frac{n}{n-1}} + b(\frac{b}{n})^{\frac{1}{n-1}} \right\} \cup \left\{ (\frac{b}{n})^{\frac{n}{n-1}} - b(\frac{b}{n})^{\frac{1}{n-1}} \right\}$$

**Exemple 3.3.2**  $n = 3$

$$LC_{-1} = LC_{-1}^1 \cup LC_{-1}^2 = \left\{ x = -\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \cup \left\{ x = \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$LC_0 = LC_0^1 \cup LC_0^2 = \left\{ y = -2 \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \cup \left\{ y = 2 \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$LC_1 = LC_1^1 \cup LC_1^2 = \left\{ x = -2 \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \cup \left\{ x = 2 \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

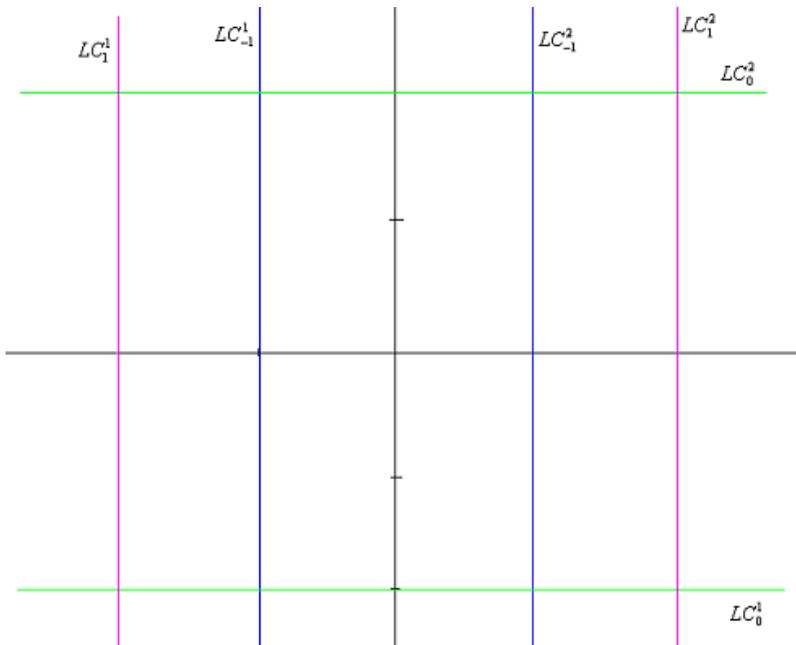


Fig (3 - 21)

Lignes critiques pour  $n = 3, b = 3, LC_{-1} = \{x = -1\} \cup \{x = 1\}$

$$LC_0 = \{y = -2\} \cup \{y = 2\}, LC_1 = \{x = -2\} \cup \{x = 2\}$$

**Proposition (04)**

Pour  $T(x, y) = (y, x^n - bx)$ , la structure des lignes critiques et l'architecture des cycles ne changent pas selon que  $n$  soit pair ou impair. Et nous avons :

Si  $n$  pair :

1)  $T$  a deux points fixes  $(0, 0)$  et  $P((b+1)^{\frac{1}{n-1}}, (b+1)^{\frac{1}{n-1}})$ , et un cycle col d'ordre deux  $C_2^T = \left\{ T^i(0, (b+1)^{\frac{1}{n-1}}), i = 1, 2 \right\}$ .

Les deux points fixes subissent des bifurcations transcritiques et des bifurcations de doublements de période et engendrent les cycles suivants :

03 cycles d'ordre 4 dont deux cols et un noeud stable.

06 cycles d'ordre 8 dont 4 cols et 2 noeud stable.

10 cycles d'ordre 16 dont 6 cols et 4 noeud stable.

2) Les lignes critiques sont constituées d'une seule branche, et sont des droites horizontales et verticales de forme

$$LC_0 : y = \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} - b\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} .$$

Si  $n$  impair :

3)  $T$  a trois points fixes générés par le point fixe  $O$  sous une bifurcation fourche, et trois cycles d'ordre deux dont deux cols et un noeud instable. Une série de bifurcations fourche et de doublements de périodes aura lieu donnant les cycles suivants :

18 cycles d'ordre 4 dont 4 stables et 14 instables (cols et noeus instables).

27 cycles d'ordre 8 dont 8 stable et 19 instables (cols, noeuds) .

45 cycles d'ordre 16 dont 16 stables et 29 instables.

4) Les lignes critiques dans ce cas sont des droites paralleles aux axes  $(oy)$ , et  $(ox)$ . Elles sont constituées de deux branches :

$$LC_0 = LC_0^1 \cup LC_0^2 = \left\{ y = -\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + b\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} - b\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \right\} .$$

Ce travail est l'étude d'un système dynamique modélisé par des transformations ponctuelles de dimension deux. l'étude d'une transformation découplée fait appel à une transformation de dimension inférieure.

Le premier chapitre est constitué de deux parties. Dans la première, on a donné les notions fondamentales des transformations bidimensionnelles (les singularités et leurs stabilités, attracteurs et les bassins d'attractions, les attracteurs chaotiques, les ensembles invariants et les ensembles critiques, ainsi que les bifurcations classiques ). Dans la deuxième partie on a présenté les propriétés des transformations découplées qui seront utiles par la suite dans notre étude.

Dans le deuxième chapitre, on a traité un exemple d'une récurrence bidimensionnelle non inversible, les résultats de cette étude sont illustres par des figures obtenues par des programmes écrits en fortran et en maple ainsi que le "Dynamics" qui est un logiciel de calcul. Dans le plan de phase on a vu la caractéristique de multistabilité (coexistence de plusieurs cycles stables) des récurrence découplées, et le comportement chaotique de ces dernières engendré par l'existence d'une infinité de cycles répulsifs nés à partir d'une chaîne successive de bifurcations flip(doublement de période). Dans cette étude on a établi l'architecture des cycles à partir des points fixes pour n'importe quelle récurrence découplée.

Une étude de bifurcations globales d'une récurrence découplée perturbée est faite, et on a établi le rôle des lignes critiques dans les bifurcations de contact, soit avec une courbe invariante fermée, soit avec la frontière d'un bassin d'attraction, donc sont à l'origine d'apparition des attracteurs chaotiques.

Dans le dernier chapitre, la généralisation de la récurrence a montré que nous obtenons les mêmes résultats, pour l'architecture des cycles et la forme des bassins d'attraction dans le cas  $n = 2k$ . Dans le cas  $n = 2k + 1$ , il y-a des cycles en plus et les lignes critiques sont constituées par deux droites verticales ou horizontales.

---

# Bibliographie

- [1] Carcassès J. P. "A New kind of parametric singularities and their use for the study of the bifurcation structure of an  $n$ -dimensional map". *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol. 28, No. 5, pp. 917-946, 1997.
- [2] Carcassès J. P. & Kawakami H. "Appearance and disappearance of a dovetail structure in the parameter plane of an  $n$ -dimensional map". *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 9, no. 4 (1999), 769-783.
- [3] Ferchichi M. R. Thèse de Doctorat, "Etude des comportements complexes de systèmes modélisés par des endomorphismes bidimensionnels", Université Badji Mokhtar Annaba, 2006.
- [4] Devaney R.L., "An introduction to chaotic dynamical systems second Edition".
- [5] Galor O., "discrete dynamical systems", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 2007.
- [6] Gardini L. "Homoclinic bifurcations in  $n$  dimensional endomorphisms, due to expanding periodic points", *Nonlinear analysis, Theory, Methods et Applications*, vol. 23. no. 8, pp. 1039-1089, 1994.
- [7] Gardini L. "Global Analysis and bifurcations of two-dimensional Endomorphisms by use of critical lines". *Proceedings of ECIT Batschuns, Austria, Sept. 1991*(World Scientific, Singapore, 1992) P.112-125.

- [8] Gardini L. (1992) "Homoclinic orbits of saddles in two-dimensional Endomorphisms" Proceedings of ECIT Batschuns, Austria, Sept. 1992.
- [9] Gardini L., Lenci S., & Lupini R. "Bifurcations and Multistability in a class of two-dimensionnel endomorphisms", *Nonlinear analysis, Theory, Methods et Applications*, vol. 28. no. 1, pp. 61-85, 1997.
- [10] Gumowsky I., Mira C., "Recurrences and discrete dynamical systems", (Lecture notes in Mathematics), Edited by Dold and B. Eckmann, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1980.
- [11] Gumowski I. & Mira C. "Dynamique chaotique, Transformations ponctuelles, Transition Ordre-Désordre". Cepadues Editions, 1980.
- [12] Gardini L., Mammanna C., & Bischi G.I. "Multistability and cyclic attractor in duopoly games", *Chaos, Solutions et Fractals* 11(2000), page 543-564.
- [13] : Hirsch Morris W., Smale S. & Devaney R.L., " Differential equations, Dynamical systems, and an introduction to chaos. Copyrigh 2004, Elsevier (U.S.A).
- [14] Millérioux J. Thèse de doctorat "Modèles par Transformations Non Inversibles et Application à la Sécurité des Communications. Synchronisation du Chaos", L'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 1997.
- [15] Mira C., "La Structure de Bifurcations boîtes-emboîtées, ses conséquences". Bull. Acad. Royale de Belgique, classe des sciences physiques, Math. app., 1988.
- [16] Vladimir G. Ivancevic & Tijana T. Ivancevic, " Complex nonlinearity ; Chaos, phase transitions, Topology change and path integrals". Springer.
- [17] Allaoui A., Thèse de Doctorat, "Bifurcations Non Classiques D'une Classe De  $\mathbb{R}^2$  Endomorphismes", Université Paul Sabatier De Toulouse Sciences, N d'ordre : 3010.