Ministere de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Universite A. Mira de Bejaia
Faculte des Sciences Exactes

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Systèmes Dynamiques

Par

MOKTEFI Lydia

Thème

Introduction à la théorie des points critiques. Application à l'étude de quelques équations aux dérivées partielles non linéaires

Devant le jury composé de :

Mr.	**DAHMANI Abdelnasser**	Professeur	U. Béjaia	Président.
M^{me}.	**TAS Saâdia**	Maître de Conférences	U. Béjaia	Rapporteur.
Mr.	**BOUHMILA Fatah**	Maître de Conférences	U. Béjaia	Examinateur.
Mr.	**AIBECHE Aissa**	Professeur	U. Sétif	Examinateur.

Remerciements

L'abnégation de tous mes enseignants qui m'ont aidé, prodigué de précieux conseils et l'enseignement que j'ai reçu d'eux sont les principales raisons qui m'ont amenée à soutenir aujourd'hui mon mémoire de Magister en Mathématiques.

Croyez bien que je me garde de les oublier et que je tiens à leur marquer ici même toute ma gratitude.

Je tiens à remercier très sincèrement mon encadreur Mme S. TAS pour avoir accepté de diriger ce projet et pour toute son attention, sa disponibilité permanente, sa confiance et aussi pour toute son aide durant l'élaboration de ce mémoire. Je la considère à la fois une référence et une vraie sœur.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Mr A. DAHMANI pour son intégrité et son dévouement scientifique ; lui qui m'a toujours orientée. Par la même occasion, je suis très honorée qu'il ait accepté la présidence du jury devant le quel je vais soutenir ce travail.

Je tiens à témoigner ma grande reconnaissance à Mr F. BOUHMILA pour avoir contribué à faire mon choix de thème et je le remercie également pour sa participation au jury.

Je tiens également à remercier Mr A. AIBECHE pour son amabilité et pour avoir accepté de faire partie du jury ; ce qui m'inspire un grand honneur.

Je ne me permettrai surtout pas d'oublier de remercier Mr B. KERAI qui m'a aidée à résoudre les difficultés techniques que j'ai rencontrées ainsi que mon frère, sans eux ce mémoire n'aurait pas pu être rédigé.

Une pensée particulière est adressée à mes camarades de promotion.

Je garde aussi une place particulière pour ma famille qui m'a soutenue et encouragée tout au long de ces années, je voudrais lui exprimer ma profonde reconnaissance et je la remercie du fond du cœur.

Louanges à Dieu.

Introduction à la théorie des points critiques. Application à l'étude de quelques équations aux dérivées partielles non linéaires

Résumé

Dans ce travail, nous introduisons la théorie des points critiques. Celle-ci constitue une méthode variationnelle permettant l'étude des équations aux dérivées partielles notamment non linéaires. Nous rappelons des théorèmes dus à Rabinowitz, généralisant ceux du min-max. Ensuite, nous les appliquons à la résolution de quelques problèmes non linéaires ayant des structures variationnelles avec ou sans contraintes.

Mots-clés : Points critiques, fonctionnelles d'énergie, équations d'Euler-Lagrange, minimisation, contraintes, théorèmes du col et du point selle, problèmes non linéaires.

Table des matières

Introduction

Des théories mathématiques générales orientées vers les applications sont les fondements de l'analyse des équations différentielles et aux dérivées partielles qui gouvernent tellement de situations en physique, en mécanique, en chimie et jusqu'en économétrie. De nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles sont non linéaires à l'instar des systèmes Hamiltoniens et des problèmes elliptiques faisant intervenir des non linéarités. Immense champ de recherches, motivé par d'innombrables questions dans divers domaines , il a connu des développements spectaculaires depuis les travaux pionniers de Leray et de Schauder au début des années trente. Distinguons quelques catégories :

a) Les problèmes semi-linéaires : Il s'agit par exemple de problèmes de la forme

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $f(x,u)$ est une fonction donnée et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Cette catégorie inclut entre autres les problèmes de bifurcation où l'on étudie la structure de l'ensemble des solutions (λ, u) du problème

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = f_\lambda(x, u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

avec λ un paramètre variable.

b) Les problèmes quasi-linéaires : Il s'agit de résoudre des problèmes de la forme

$$\begin{cases} -\sum_{i,j} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x, u, \nabla u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

où les fonctions $a_{ij}(x,u,p)$ sont elliptiques. On a par exemple

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x,u,p)\,\xi_i\xi_j \geq \alpha(u,p)\,|\xi|^2\,,\ \forall x\in\Omega,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N$$

avec $\alpha(u,p) > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{R}^N$ mais $\alpha(u,p)$ n'est pas uniformément minorée par une constante $\alpha > 0$. Ainsi, l'équation des surfaces minima s'écrit sous la forme (3) avec $a_{ij} = \delta_{ij}\left(1+|\nabla u|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Plus généralement encore, on envisage des problèmes elliptiques de la forme

$$F\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right) = 0 \tag{4}$$

où la matrice $\dfrac{\partial F}{\partial q_{ij}}(x,u,p,q)$ est elliptique. L'équation de Monge-Ampère rentre dans cette catégorie.

c) Les problèmes de frontière libre : Il s'agit de résoudre une équation elliptique linéaire sur un ouvert Ω qui n'est pas donné a priori. Le fait que Ω soit inconnu est souvent compensé par la donnée de deux conditions aux limites sur $\partial\Omega$: par exemple celles de Dirichlet et de Neumann.

Pour étudier les problèmes (1) et (2), on dispose de nombreuses techniques :

1) Des méthodes de monotonie (Browder [8] et Lions [18]).

2) Des méthodes topologiques telles que le théorème du point fixe de Schauder, théorie du degré de Leray-Schauder (J. T. Schawrtz [24], M. Krasnoselskii [16], L. Nirenberg [20], [21]).

3) Des méthodes variationnelles (théorie des points critiques, théorie de Morse, voir P. H. Rabinowitz [22], Melvyn Berger [4], M. Krasnoselskii [16], L. Nirenberg [21]).

La résolution des problèmes du type (3) exige parfois une technique élaborée d'estimations, ceci est le cas par exemple pour l'équation des surfaces minima (Ladyzhenskaya-Uraltseva [17], Serrin [25], Bombieri [6] et Gilbarg-Trudinger [11]). Des progrès importants concernant l'équation de Monge-Ampère ont été obtenus (Yau [28]).

Pour ce qui est des problèmes de frontière libre, beaucoup de résultats sont apparus en liaison principalement avec la théorie des inéquations variationnelles (Kinderlehrer-Stampacchia [14], Baiocchi-Capelo [3]).

Dans ce travail, nous nous intéressons aux méthodes variationnelles, plus précisément à la théorie des points critiques. Celle-ci occupe une place considérable dans l'analyse non linéaire. Elle est utilisée dans plusieurs disciplines des mathématiques pures et appliquées ainsi qu'en physique mathématique et en géométrie analytique. Développée pour résoudre des problèmes notamment non linéaires, elle consiste à trouver les points critiques d'une fonctionnelle d'énergie associée.

Prenons par exemple le problème semi-linéaire : soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction de $C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = f(u) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

Nous cherchons une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\triangle u(x) = f(u)$ au sens des distributions.

Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Associons à ce problème la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(u)\, dx.$$

La fonctionnelle J est bien définie et de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$, de plus tout point critique u de J c-à-d pour lequel $J'(u) = 0$ est solution du problème modèle et réciproquement. En effet, soit u un point critique de J. Si on prend $v \in \mathfrak{D}(\Omega)$ dans l'égalité $J'(u) = 0$ alors u est solution du problème modèle au sens des distributions. Réciproquement, si u est une telle solution, c'est-à-dire $\langle -\triangle u, \varphi\rangle = \langle f(u), \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, alors on obtient

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f(u)\, \varphi \, dx \tag{6}$$

et l'on conclut grâce à la densité de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Le point critique satisfaisant (6) est une solution faible du problème modèle (5).

La valeur de J au point critique u s'appelle valeur critique de J.

Dans la pratique pour montrer l'existence d'un point critique, il suffit d'exhiber une valeur critique.

La majorité des contributions de cette théorie est l'oeuvre de Lagrange, Legendre, Jacobi, Hamilton, Poincaré. Au début, les mathématiciens étudiaient seulement le minimum absolu pour les fonctionnelles bornées inférieurement. En 1905, Poincaré a développé dans sa thèse quelques idées de Hilbert sur le principe de Dirichlet qui est en fait à l'origine de la théorie des points critiques.

Pour en donner les grandes lignes, considérons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$. Si φ est une fonction continue sur $\partial\Omega$, il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x) = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

Comme on l'a remarqué depuis Gauss, Lord Kelvin et Dirichlet, en posant

$$J(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx, \quad K_0 = \left\{ v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \ : \ v = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

si on parvient à trouver une fonction $u \in K_0$ telle que $J(u) \leq J(v)$ lorsque v parcourt K_0 alors u est solution de (7). Le fait que l'on puisse trouver une solution par ce procédé a été utilisé par Riemann dans sa thèse en 1851 qui l'a appelé principe de Dirichlet alors que la fonction J porte le nom de l'intégrale de Dirichlet. Cependant, Weierstrass a objecté en 1869 qu'il y avait une faille dans ce principe. En effet, s'il est vrai que la borne inférieure

$$\alpha = \inf_{v \in K_0} J(v)$$

est un réel positif ou nul, il n'est pas du tout clair pourquoi elle serait atteinte. Autrement dit, il n'est pas évident qu'une suite minimisante $(u_n)_n$ de K_0 i.e. telle que $u_n \in K_0$ et $J(u_n) \to \alpha$ converge dans l'ensemble K_0, ni même qu'elle soit bornée dans l'espace $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. En fait, dans certains cas, on sait montrer que (7) admet une solution qui n'appartient pas à K_0 ce qui, compte tenu de l'unicité de la solution, montre que la borne inférieure α n'est pas atteinte.

Poincaré a apporté de son côté une contribution de valeur en traitant les problèmes variationels dont la solution correspondante n'est ni un minimum ni un maximum. Cette approche est révisée par Birkhoff en 1917 en réussissant à obtenir le principe du min-max qui caractérise une valeur critique d'une fonctionnelle en tant que min-max sur une classe convenable d'ensembles.

Elle fut dévelopée par la suite vers la fin des années vingt et au début des années trente indépendamment par Morse et par Ljusternik et Schnirelmann. La théorie des points critiques a connu un essor vertigineux avec l'apparition de la condition de Palais-Smale pendant les années soixante est qui un ingrédient essentiel pour montrer l'existence d'une valeur critique. Le théorème du col dû à Ambrosetti-Rabinowitz en 1970 est un outil puissant permettant de montrer qu'une fonctionnelle qui a un minimum local admet un autre point critique. Un deuxième exemple géométrique du principe du min-max est le théorème du point selle très utile pour montrer l'existence d'un point critique qui n'est ni un maximum local, ni un minimum local. Une autre situation où les méthodes variationnelles constituent un bon cadre, c'est lorsque l'on souhaite montrer la multiplicité des solutions, par exemple l'existence d'une infinité de solutions comme dans le problème suivant. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p > 1$ tel que $(N-2)\,p < N+2$ le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}\,u & \text{dans } \Omega \\ \qquad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

admet une infinité de solutions. En particulier, il existe une solution positive de cette équation obtenue en minimisant la fonctionnelle $v \mapsto J(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx$ sur l'ensemble $S = \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} = 1\}$. On peut montrer aussi que (8) admet une infinité de solutions en montrant, comme nous le ferons plus loin, que la fonction J admet une infinité de valeurs critiques sur S. De ce point de vue, il s'agit de l'application d'une généralisation d'un théorème dû à L. Ljusternik et L. Schnirelmann stipulant qu'une fonction paire de classe C^1 définie sur S^{N-1}, la sphère unité de $\mathbb{R}^N$, possède au moins N valeurs critiques (dans notre cas, nous avons une fonctionnelle paire de classe C^1 sur une sphère de dimension infinie).

Parfois, il est intéressant d'étudier les solutions de certains problèmes en considérant une fonctionnelle adéquate sur une contrainte bien choisie. Pour de multiples raisons, on peut placer le problème en question dans le cadre d'une famille de problèmes dépendant d'un ou de plusieurs paramètres et comprendre ainsi certains phénomènes qui ne paraissent pas clairs a priori ; on peut obtenir des conditions nécessaires pour l'existence de solutions ou bien éliminer des inconnues du problème en les obtenant a posteriori comme des multiplicateurs de Lagrange. C'est le cas lorsque l'on cherche des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert en tant que multiplicateurs de Lagrange sur la sphère unité de l'espace.

Notre travail est divisé en trois parties. La première est consacrée à des outils de base, on introduit des définitions et des notations qui seront utilisées constamment dans la suite (extremums, points critiques, valeurs critiques, fonctionnelles de classe C^1 au sens de Fréchet, fonctionnelles d'énergie d'Euler, d'Euler-Lagrange). Ensuite, on introduit des résultats et des théorèmes utiles pour étudier les problèmes non linéaires (les théorèmes d'injection de Sobolev et aussi quelques résultats de la théorie des opérateurs continus tels que les opérateurs de Nemitskii).

La deuxième partie est dédiée à la théorie en question. Nous énonçons des théorèmes dus entre autres à Rabinowitz (théorèmes du col et du point selle) qui sont une généralisation du principe du min-max. Ce dernier caractérise une valeur critique d'une fonctionnelle comme min-max sur une classe convenable d'ensembles S c.à.d

$$c = \inf_{A \in S} \sup_{v \in A} J(v)$$

Ces énoncés exigent une supposition technique indispensable en l'occurrence la condition de Palais-Smale. Nous considérons ainsi les points critiques avec ou sans contraintes.

La troisième partie traite quelques problèmes non linéaires en utilisant les techniques précédentes, plus précisément, des problèmes semi-linéaires du type $-\triangle u(x) = f(x, u(x))$ sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ (et le plus souvent avec la condition de Dirichlet) et

$f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

(H_1) $f(x, \xi) \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$

(H_2) Il existe des constantes $a_1, a_2 \geq 0$ telles que

$$|f(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s$$

où $0 \leq s < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$.

La fonctionnelle d'énergie est

$$I\left(u\right)=\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^{2}-F\left(x,u\left(x\right)\right)\right)dx \text{ où } F\left(x,\xi\right)=\int_{0}^{\xi}f\left(x,t\right)dt,$$

qui est bien définie sur $H_0^1\left(\Omega\right)$. De plus $I\in C^1\left(H_0^1\left(\Omega\right),\mathbb{R}\right)$.
Si I satisfait la condition de Palais-Smale et vérifie les conditions géométriques du théorème du col ou du point selle alors il existe une valeur critique c'est à dire un point critique qui est une solution faible du problème.
Nous traitons aussi des problèmes avec contraintes du type

$$\begin{cases} -\bigtriangleup u\left(x\right)=\lambda f\left(x,u\left(x\right)\right) & \text{dans } \Omega \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{9}$$

où f est une fonction vérifiant les hypothèses $\left(H_1\right),\left(H_2\right)$ et λ un paramètre réel.
En utilisant la généralisation du théorème de Ljusternik-Schnirelmann, on montre que ce problème admet une infinité de solutions de la forme $\left(u_k,\lambda_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $u_k\in S$,
$S=\left\{v\in H_0^1\left(\Omega\right):\int_{\Omega}\mid\nabla v\mid^2dx=1\right\}$ et $\lambda_k\in\mathbb{R}$.

CHAPITRE 1

Quelques outils de base

1.1 Dérivées et points critiques

Dans le calcul différentiel, il existe plusieurs notions de dérivées pour des fonctions définies sur des espaces de Banach. Nous introduisons celle de la dérivée directionnelle.

Définition 1.1.1
Soient ω une partie d'un espace de Banach X et $F : \omega \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in \omega$ et $z \in X$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit : $u + tz \in \omega$, on dit que F admet au point u une dérivée dans la direction z si la limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u + tz) - F(u)}{t}$$

existe. On notera cette limite $F'_z(u)$.

Une fonction F peut avoir une dérivée directionnelle dans toute direction $z \in X$, sans être pour autant continue. Lorsque la dérivée directionnelle de F existe pour certains $z \in X$, on introduit la notion de dérivée au sens de Gâteaux.

Définition 1.1.2
Soient ω une partie d'un espace de Banach X et $F : \omega \to \mathbb{R}$. Si $u \in \omega$, on dit que F est dérivable au sens de Gâteaux (ou G-dérivable ou encore G-différentiable) en u s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $z \in X$ où $F(u + tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la

dérivée directionnelle $F'_z(u)$ existe et on a

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u+tz) - F(u)}{t} = \langle l, z \rangle .$$

On pose $F'(u) = l$.

Remarque 1.1.1

Une fonction G-dérivable n'est pas nécessairement continue.

Maintenant, on introduit la dérivée classique ou la dérivée au sens de Fréchet.

On utilise la notation de Landau $o(x)$ pour désigner une fonction de x telle que $\lim\limits_{\|x\| \to 0} \dfrac{o(x)}{\|x\|} = 0$.

Définition 1.1.3

Soient X un espace de Banach, ω un ouvert de X et $F : \omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $u \in \omega$, on dit que F est différentiable (ou dérivable) en u (au sens de Fréchet) s'il existe $l \in X'$ tel que

$$\forall v \in \omega \, : \, F(v) - F(u) = \langle l, v-u \rangle + o(v-u)$$

L'ensemble des fonctions différentiables de ω dans $\mathbb{R}$ sera noté $C^1(\omega, \mathbb{R})$.

Remarque 1.1.2

Si F est différentiable (au sens de Fréchet) alors l est unique et on note $F'(u) = l$.

Si F est différentiable (au sens de Fréchet) alors F est continue.

La différentiabilité aux sens de Gâteaux et celle au sens de Fréchet sont des notions différentes même dans le cas des espaces de dimension finie $\mathbb{R}^N.(N > 1)$.

Exemple 1.1.1

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & si \ (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & si \ (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Au point $(0,0)$, *la G-différentielle existe et est égale à* 0 *car*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tz)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4z_1^3z_2}{t^5z_1^4+t^3z_2^2}=0.$$

Cependant, cette différentielle n'est pas l'accroissement de la fonction f *au point* $(0,0)$.

En effet, si on pose $z_2=z_1^2$, *on obtient*

$$\lim_{\|z\|\to 0}\frac{f(z_1,z_2)-f(0,0)}{\|z\|}=\lim_{z_1\to 0}\frac{z_1^5}{2z_1^4\sqrt{z_1^2+z_1^4}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Remarque 1.1.3

Si F *est différentiable au sens de Fréchet alors elle est différentiable au sens de Gâteaux, de plus les dérivées coïncident.*

En effet, pour une application différentiable (au sens de Fréchet) on a

$$F(u+tz)-F(u)=\langle F'(u),tz\rangle+o(tz)=t\langle F'(u),z\rangle+o(tz)$$

et

$$\frac{F(u+tz)-F(u)}{t}=\langle F'(u),z\rangle+\frac{o(tz)}{t}\to\langle F'(u),z\rangle\quad\text{lorsque } t\to 0.$$

Mais la réciproque est fausse.

Moyenant une hypothèse supplèmentaire le résultat suivant établit la réciproque.

Proposition 1.1.1

Soit F *une fonction continue de* ω *dans* $\mathbb{R}$ *et G-dérivable dans un voisinage de* $u\in\omega$. *On désigne par* $F'(v)$ *la G-dérivée de* F *en* v *et on suppose que l'application* $v\mapsto F'(v)$ *est continue au voisinage de* u. *Alors*

$$F(v)=F(u)+\langle F'(u),v-u\rangle+o(v-u).$$

C'est à dire que F *est différentiable au sens de Fréchet et sa dérivée (classique) coïncide avec* $F'(u)$.

Démonstration.

En considérant, pour $u\in\omega$ fixé et v assez voisin de u, l'application $t\mapsto F(u+t(v-u))$ définie sur l'intervalle $[0,1]$, on peut écrire

$$F(v)-F(u)=\langle F'(u),v-u\rangle+h(u,v-u).$$

Où, par commodité, on a posé

$$h(u, v-u) = \int_0^1 \langle F'(u + t(v-u)) - F'(u), v-u \rangle \, dt.$$

Il s'agit donc de voir que $h(u, v-u)$ est un $o(v-u)$. Or $w \mapsto F'(w)$ étant continue au voisinage de u, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|w-u\| < \delta \Longrightarrow \|F'(w) - F'(u)\| < \varepsilon$$

Par conséquent si $\|v-u\| < \delta$, on a pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |\langle F'(u+t(v-u)) - F'(u), v-u \rangle| &\leq \|F'(u+t(v-u)) - F'(u)\| \, \|v-u\| \\ &\leq \varepsilon \|v-u\|. \end{aligned}$$

Ce qui, en intégrant sur $[0,1]$, donne

$$|h(u, v-u)| \leq \varepsilon \|v-u\| \text{ pourvu que } \|v-u\| < \delta. \quad \blacksquare$$

Remarque 1.1.4

En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux puisque il suffit de considérer l'application $t \mapsto F(u+tv)$ *(pour* v *fixé dans* X*) définie dans un intervalle* $[0, \varepsilon[$*. Pour montrer que* F *est de classe* C^1*, il suffit de prouver qu'elle est G-différentiable puis de vérifier que la différentielle est continue.*

Dans le cas de dimension finie $X = \mathbb{R}^N$, on définit les dérivées partielles premières.

1.2 Dérivées partielles premières

Définition 1.2.1

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}^N$.

On appelle $j^{\text{ième}}$ *application partielle associée à* f *en* $a = (a_1, ..., a_N)$ *et on note* $\varphi_{j,a}$, $j = 1, ..., N$, *l'application* $\varphi_{j,a} = f(a_1, ..., a_{j-1}, ., a_{j+1}, ..., a_N)$, *c'est à dire*

$$\varphi_{j,a} : x_j \longmapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_N)$$

Définition 1.2.2

Etant donnée $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$. On dit que f admet en a une $j^{ième}$ dérivée partielle première si et seulement si la $j^{ième}$ application partielle $\varphi_{j,a}$ en a admet en a_j une dérivée, c'est à dire

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\varphi_{j,a}(a_j + t) - \varphi_{j,a}(a_j)}{t}$$

existe.

On note cette limite $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Définition 1.2.3

On dit que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ admet en $a \in \Omega$ une dérivée suivant le vecteur $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^N}}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{f(a + t\overrightarrow{v}) - f(a)}{t}$ existe ; on note alors $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(a)$.

Remarque 1.2.1

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_N})$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{e_j}}(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{e_j}) - f(a)}{t} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\varphi_{j,a}(a_j + t) - \varphi_{j,a}(a_j)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Ainsi $\forall j \in \{1, ..., N\}$: $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{e_j}}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, c.à.d la $j^{ième}$ dérivée partielle première n'est autre que la dérivée suivant le $j^{ième}$ vecteur de la base canonique.

Voici enfin les notions de points critiques et de valeurs critiques.

Commençons d'abord par quelques préliminaires sur les extremums d'une fonction.

Définition 1.2.4

Soit X un espace de Banach et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, on dit que $a \in X$ est un maximum relatif (respectivement un minimum relatif) s'il existe un voisinage U de a tel que pour tout $x \in U \cap X$, on a $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(a) \leq f(x)$).

Si $X = U \cap X$ alors le point est dit maximum ou minimum absolu.

Un point qui est un maximum ou un minimum est un extremum.

Remarque 1.2.2

Une condition nécessaire pour que f admette en a un extremum est $f'(a) = 0$.

Cette condition n'est pas suffisante.

En effet, soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ puisque tout voisinage V de $(0,0)$ contient des points pour lesquels on a $f(x,y) > 0$ et $f(x,y) < 0$, par exemple $f(-\varepsilon, -\varepsilon) = \varepsilon^2 > f(0,0)$ et $f(\varepsilon, -\varepsilon) = -\varepsilon^2 < f(0,0)$.

Définition 1.2.5

Soit X un espace de Banach, $\omega \subset X$ un ouvert et $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$. On dit que $u \in \omega$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$. Si u n'est pas un point critique de J alors on dit que u est un point régulier de J.

Exemple 1.2.1

L'exemple le plus simple de point critique d'une fonction $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$ est un point extrémal.

Définition 1.2.6

On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$ s'il existe $u \in \omega$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique alors on dit que c est une valeur régulière de J.

Définition 1.2.7

Soient X un espace de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes

$$S = \{v \in X \, : \, F(v) = 0\}.$$

On suppose que pour tout $u \in S$, $F'(u) \neq 0$. Soit $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ (ou bien de classe C^1 sur un voisinage de S ou encore C^1 sur S). On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J sur S s'il existe $u \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$J(u) = c \text{ et } J'(u) = \lambda F'(u)$$

Le point u est un point critique de J sur S et le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique c (ou le point critique u).

Lorsque X est un espace fonctionnel et l'équation $J'(u) = \lambda F'(u)$ correspond à une équation aux dérivées partielles, on dit que $J'(u) = \lambda F'(u)$ est l'équation d'Euler-Lagrange (ou l'équation d'Euler) satisfaite par le point critique u sur la contrainte S.
Le résultat suivant établit l'existence des multiplicateurs de Lagrange.

Proposition 1.2.1 *(Voir [13], p 55)*
Sous les hypothèses et notations de la définition 1.2.7, on suppose que $u_0 \in S$ est tel que $J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0)$$

Voici maintenant quelques résultats fondamentaux concernant les espaces de Sobolev, il s'agit des théorèmes d'injection de Sobolev qui sont très utiles dans les applications.

Définition 1.2.8
Soient X et Y deux espaces de Banach. X s'injecte continûment dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées:
(i) X est un sous-espace de Y.
(ii) Toute suite convergente dans X est encore convergente dans Y.
Autrement dit l'injection $I : X \longrightarrow Y$ est continue ou encore il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X \quad \text{pour tout } u \in X.$$

Définition 1.2.9
L'injection de plongement ou naturelle de X dans Y est compacte s'écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ si
(i) X s'injecte continûment dans Y.
(ii) L'application $I : X \longrightarrow Y$ est compacte.
Autrement dit, toute suite bornée dans X est relativement compacte dans Y.

Théorème 1.2.1 *(Voir [7])*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
Si $1 \leq p < N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*]$ où $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ est l'exposant critique

de Sobolev.

Si $p = N$ *alors* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p\ ,\ \infty[$.

Si $p > N$ *alors* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.2.2 *(Rellich -Kondrachov, voir [7])*

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$.

Si $1 \leq p < N$ *alors* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$.

Si $p = N$ *alors* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1,\ \infty[$.

Si $p > N$ *alors* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Proposition 1.2.2 *(Inégalité de Hölder, voir [13])*

Soient $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $p^{'}$ *l'exposant conjugué de* p *c.à.d* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Alors* $f.g \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int |f.g| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Proposition 1.2.3 *(Inégalité de Poincaré, voir [13])*

On suppose que Ω *est un ouvert borné. Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *on ait*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Cette inégalité reste vraie si on suppose que Ω *est un ouvert borné dans une direction.*

Proposition 1.2.4 (*Voir* [13])

Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq N$ *et* $1 \leq r \leq \infty$. *Il existe une constante* $C(p, \theta, N)$ *telle que pour tout* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, *on ait*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\theta} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{\theta}$$

où $0 \leq \theta \leq 1$, *avec* $\theta > 0$ *si* $p = N \geq 2$ *et*

$$\frac{1}{q} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1-\theta}{r}.$$

Corollaire 1.2.1 *(Voir [23])*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ quand $N \geq 3$ et il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^t(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

pour tout $t \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right]$ et pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$. De plus l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ est compacte pour tout $t \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right[$.

1.3 Quelques opérateurs continus

Dans l'étude de nombreuses équations aux dérivées partielles, il est question de considérer des opérateurs locaux définis par des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, appelés parfois opérateurs de Nemitskii ou encore opérateurs de superposition.

Définition 1.3.1
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et

$$\begin{aligned} f : \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto f(x,t) \end{aligned}$$

une fonction. On appelle opérateur de Nemitskii associé à f l'application B qui à une fonction mesurable u définie sur Ω associe la fonction Bu définie sur Ω par

$$Bu(x) = f(x, u(x)).$$

Définition 1.3.2
Une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de Carathéodory ou bien une C-fonction si elle vérifie

$$\begin{cases} \text{p.p. en } x \in \Omega, \text{ la fonction } t \mapsto f(x,t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \\ \forall t \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } x \mapsto f(x,t) \text{ est mesurable sur } \Omega. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Théorème 1.3.1
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p, q < \infty$ des réels et f une C-fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b \geq 0$ et $a \in L^q(\Omega)$ tels que la condition de croissance

$$\text{pour tout } s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. dans } \Omega \ : \ |f(.,s)| \leq a(.) + b|s|^{\frac{p}{q}} \tag{1.3.2}$$

soit satisfaite.

Alors B est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Démonstration.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ convergeant vers u. D'après la réciproque partielle du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il existe $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telles que

$$u_{n_k} \longrightarrow u, \ \ |u_{n_k}| \leq g \ \text{ p.p. dans } \Omega$$

On en déduit que p.p. dans Ω on a $f(x, u_{n_k}(x)) \longrightarrow f(x, u(x))$ et

$$|f(x, u_{n_k}(x))| \leq a(x) + b\,|g(x)|^{\frac{p}{q}}.$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée, on conclut que $Bu_{n_k} \longrightarrow Bu$ dans $L^q(\Omega)$. Ainsi la suite $(Bu_n)_n$ est relativement compacte dans $L^q(\Omega)$ et admet comme unique point limite Bu. Par conséquent toute suite $(Bu_n)_n$ converge vers Bu dans $L^q(\Omega)$, ce qui prouve que B est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. ■

Remarque 1.3.1

L'opérateur B défini ci -dessus est un opérateur local en ce sens que la valeur de $Bu(x)$ dépend uniquement de celle de u au point x. Dans la littérature, des opérateurs locaux comme l'opérateur B défini au théorème 1.3.1 sont parfois appelés opérateurs de Nemitskii ou encore opérateurs de superposition. Pour des références concernant les diverses propriétés de ce type d'opérateurs suivant celles de la fonction f, on pourra consulter [2].

1.4 Quelques fonctionnelles différentiables

Dans ce paragraphe, nous considérons certaines fonctionnelles définies sur des espaces de Sobolev.

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory, on pose

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, \sigma)\, d\sigma. \tag{1.4.1}$$

De même, lorsque cela a un sens, on définit une fonctionnelle V par

$$V(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\, dx \tag{1.4.2}$$

Nous allons préciser dans quelles conditions $u \mapsto V(u)$ est continue ou de classe C^1.

Proposition 1.4.1

On suppose qu'il existe $a \in L^1(\Omega)$, $b \geq 0$ et $1 < p < \infty$ et F une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\text{pour tout } s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. dans } \Omega : \ |F(., s)| \leq a(.) + b|s|^p. \tag{1.4.3}$$

Si de plus F est une C-fonction alors V définie par (1.4.2) est continue sur $L^p(\Omega)$.
En particulier si $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie (1.3.1) et s'il existe $a_0 \in L^{p'}(\Omega)$ avec
$1 < p < \infty$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$ *et $b_0 \geq 0$ tels que*

$$\text{pour tout } \ s \in \mathbb{R} \ \text{ et p.p. dans } \Omega : \ |f(., s)| \leq a_0(.) + b_0|s|^{p-1} \tag{1.4.4}$$

alors V est de classe C^1 sur $L^p(\Omega)$ et on a $V'(u) = f(., u(.))$.

Démonstration.

Si F vérifie la condition (1.4.3) alors d'après le théorème 1.3.1, l'application $u \mapsto F(., u(.))$ est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ et par conséquent V est continue sur $L^p(\Omega)$.

Lorsque l'hypothèse porte sur f, la condition (1.4.4) implique

$$|F(., s)| \leq a_0(.)|s| + b_0 \frac{1}{p}|s|^p \leq \frac{1}{p'}|a_0(.)|^{p'} + \frac{1}{p}(1 + b_0)|s|^p$$

où on a utilisé l'inégalité de Young : $\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{p'}\beta^{p'}$. On en déduit, en utilisant la première partie de la proposition 1.4.1 que V est continue de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Pour montrer que V est de classe C^1, on va montrer que V est G-dérivable et que la G-dérivée est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. En posant

$$\Phi(t, x) = \frac{F(x, u(x) + tv(x)) - F(x, u(x))}{t} - f(x, u(x))v(x),$$

on a

$$\frac{V(u+tv)-V(u)}{t} - \int_\Omega f(x,u(x))\,v(x)\,dx = \int_\Omega \Phi(t,x)\,dx.$$

Or, il existe $\theta(t,x) \in]0,1[$ tel que

$$|\Phi(t,x)| = |f(x,u(x)+\theta(t,x)\,tv(x)) - f(x,u(x))|\,|v(x)|.$$

Ainsi, d'une part on a $\Phi(t,x) \to 0$ lorsque $t \to 0$, *p. p.* en $x \in \Omega$ et d'autre part, on a la majoration

$$|\Phi(t,x)| \leq 2\left(a_0(x) + b_0(|u(x)|+|v(x)|)^{p-1} + b_0|u(x)|^{p-1}\right)|v(x)|.$$

Comme le second membre de l'inégalité ci-dessus est dans $L^1(\Omega)$, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet de dire que

$$\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{V(u+tv)-V(u)}{t} - \int_\Omega f(x,u(x))\,v(x)\,dx\right] = \int_\Omega \lim_{t\to 0^+}\Phi(t,x)\ \,dx = 0.$$

Ainsi la G-dérivée $V'(u)$ existe et on a pour tout $v \in L^p(\Omega)$

$$\langle V'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u(x))\,v(x)\,dx,$$

i.e. $V'(u) = f(.,u)$. De plus la condition de croissance (1.4.4) et le théorème 1.3.1 impliquent que l'opérateur $u \mapsto f(.,u)$ (c'est à dire V') est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Finalement la proposition 1.1.1 implique que V est de classe C^1 sur $L^p(\Omega)$. ■

Rappelons que pour $N \geq 3$, on a posé $2^* = \frac{2N}{N-2}$ et que les inégalités de Sobolev expriment le fait que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

Corollaire 1.4.1 *(Voir [1])*

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$ et $F\colon \Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant (1.3.1), V étant définie par (1.4.2). On suppose qu'il existe $a \in L^1(\Omega)$ et $b \geq 0$ tels que p.p. dans Ω et pour tout $s \in \mathbb{R}$ on ait

$$|F(x,s)| \leq a(x) + b\,|s|^{\delta+1}$$

où $\delta + 1 \leq 2^*$.

Alors V est continue sur $H_0^1(\Omega)$. En particulier si $f : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifie (1.3.1) , F étant définie par (1.4.1), s'il existe $a_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ et $b_0 \geq 0$ tels que

$$\text{pour tout } s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. dans } \Omega : \ |f(.,s)| \leq a_0(.) + b_0 |s|^{\delta}$$

où $\delta \leq 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$,
alors V est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et on a $V'(u) = f(x, u(x))$.

1.5 Théorie spectrale du problème de Dirichlet pour le Laplacien

1.5.1 Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Dans ce paragraphe, H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ dont on notera $(.,.)$ le produit scalaire et T un opérateur linéaire continu de H dans H, on écrira $T \in \mathcal{L}(H)$.
On commence par quelques définitions et propriétés.

Définition 1.5.1
Le spectre de T, noté $\sigma(T)$, est le sous ensemble de $\mathbb{C}$ défini par

$$\sigma(T) = \{\mu \in \mathbb{C} \ : \ T - \mu Id \text{ est non inversible } \}$$

où Id est l'opérateur identité $x \mapsto x$ de H dans lui même. En particulier, $\mu \in \mathbb{C}$ est appelée une valeur propre de T si $T - \mu Id$ n'est pas injectif i.e. s'il existe $x \in H$, $x \neq 0$ tel que $Tx = \mu x$.

Lemme 1.5.1 *(Voir [27])*
L'ensemble $\sigma(T)$ est fermé dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1.5.1
Il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \ \forall x, y \in H. \tag{1.5.1}$$

T^* est appelé l'opérateur adjoint de T.

Démonstration.

a) Unicité : si il existe T_1^*, T_2^* vérifiant (1.5.1) alors on a

$$(x, (T_1^* - T_2^*)\, y) = 0$$

pour tous x, $y \in H$.

Donc

$$(T_1^* - T_2^*)\, y = 0, \forall y \in H \text{ } i.e. \text{ } T_1^* = T_2^*.$$

b) Existence : fixons $y \in H$. L'application $x \mapsto (Tx, y)$ est une forme linéaire continue sur H car

$$|(Tx, y)| \leq \|Tx\| \, \|y\| \leq \|T\| \, \|y\| \, \|x\| \, .$$

Il existe donc un unique $z_y \in H$ tel que

$$(Tx, y) = (x, z_y) \text{ pour tout } x \in H.$$

L'application $y \longmapsto z_y$ est linéaire. Notons $z_y = T^*y$. Alors T^* est continu car

$$\|T^*y\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, T^*y)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Tx, y)|}{\|x\|} \leq \|T\| \, \|y\| \, . \quad \blacksquare$$

Si $T^* = T$ alors on dit que T est un opérateur auto-adjoint.

Proposition 1.5.2

Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint alors ses valeurs propres sont réelles.

Démonstration.

Soit x un vecteur propre relatif à une valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$. On a

$$(Tx, x) = \mu \, \|x\|^2 = (x, Tx) = \bar{\mu} \, \|x\|^2$$

d'où $\mu = \bar{\mu}$. $\blacksquare$

Définition 1.5.2

$T \in \mathcal{L}(H)$ est dit positif si $(Tx, x) \geq 0$ pour tout x dans H. On écrit $T \geq 0$.

Si $T \geq 0$ alors ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Définition 1.5.3

$T \in \mathcal{L}(H)$ est dit compact si l'image par T de la boule unité de H est relativement compacte dans H.

Proposition 1.5.3 *(Voir [27], p 160)*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) T est compact.

(ii) L'image par T de toute suite bornée contient une sous-suite convergente .

(iii) T transforme une suite faiblement convergente en une suite fortement convergente (i.e. pour la norme).

Maintenant, nous allons énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 1.5.1 *(Voir [27], p 161)*

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors

(1) *Les valeurs propres non nulles de T forment un ensemble fini ou une suite $\{\mu_n\}$ de réels qui tend vers zéro .*

(2) *Si μ_n est une valeur propre non nulle alors l'espace $E_{\mu_n} = Ker\,(T - \mu_n Id)$ est de dimension finie.*

(3) $H = \overset{+\infty}{\underset{j=1}{\oplus}} E_{\mu_j} \oplus E_0$ *où* $E_0 = KerT$.

(4) *Si* $\dim H = +\infty$ *alors* $\sigma(T) = \{0\} \cup \left(\overset{+\infty}{\underset{j=1}{\cup}} \{\mu_j\} \right)$ *où les μ_j sont les valeurs propres non nulles.*

Si $\dim H < +\infty$ *alors* $\sigma(T) = \left\{\mu_j,\ j\right\}$.

1.5.2 Application à la théorie spectrale du Laplacien

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Posons $E = \{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ que l'on munit de la norme

$$\|u\|_E = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} .$$

Alors $-\Delta$ envoie continûment E dans $L^2(\Omega)$.

Lemme 1.5.2 *$-\Delta : E \longrightarrow L^2(\Omega)$ est un isomorphisme.*

Démonstration.

Si f appartient à $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ alors il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ unique tel que $- \triangle u = f$ (car $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ sont isomorphes). D'où $\triangle u \in L^2(\Omega)$ et par suite $u \in E$. De plus $-\triangle$ est continu d'après la norme de E et même bicontinu en vertu du théorème de Banach. ■

Considérons l'opérateur $T = (-\Delta)^{-1}$: $L^2(\Omega) \longrightarrow E$ linéaire et continu. D'une part, l'application $u \longmapsto u$ de E dans $H_0^1(\Omega)$ est continue (vu la norme de E) et d'autre part l'application

$$\begin{array}{ll} H_0^1(\Omega) & \longrightarrow L^2(\Omega) \\ u & \longmapsto u \end{array}$$

est compacte puisque $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$. Comme la composée d'une application linéaire continue et d'une autre compacte est compacte, on déduit que

$$T : L^2(\Omega) \longrightarrow E \longrightarrow H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

est compacte.

Montrons que T est auto-adjoint i.e, en notant $(.,.)$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, que

$$(Tf,\ g) = (f,\ Tg)\ \ ;\ \forall f,\ g \in L^2(\Omega)\,. \tag{1.5.2}$$

L'égalité $u = Tf \in E$ est équivalente à $- \triangle u = f$, de même $v = Tg$ est équivalente à $- \triangle v = g$. Donc (1.5.2) s'écrit

$$(u, - \triangle v) = (- \triangle u, v)\ \ ;\ u,\ v \in E. \tag{1.5.3}$$

Nous allons montrer que

$$- (u, \triangle v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)\ \ ;\ u, v \in E. \tag{1.5.4}$$

Si $v \in E$ et $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$ alors l'égalité (1.5.4) est évidente car

$$\left(u, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right) = \left\langle \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x_i^2}, u \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle = - \int \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} . \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = - \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right).$$

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors il existe $(u_j) \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telle que $u_j \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Par suite $(u_j, \triangle v) \to (u, \triangle v)$ puisque

$$|(u_j - u, \triangle v)| \leq \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} \|\triangle v\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

et $\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}, \dfrac{\partial v}{\partial x_i}\right) \to \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \dfrac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ car

$$\left|\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right| \leq \|u_j - u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$$

Donc (1.5.4) est prouvée et (1.5.3) en résulte par permutation de u et v.

Ensuite T est positif car d'après (1.5.2), (1.5.3) et (1.5.4), on a

$$(Tf, f) = (u, -\triangle u) = \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Enfin T étant injectif, on a $KerT = \{0\}$. On peut donc appliquer à $H = L^2(\Omega)$ et à T le théorème 1.5.1. Le spectre de T est formé de zéro et d'une suite de valeurs propres $\mu_n > 0$ qui tend vers zéro i.e. le problème $Tf = \mu f,\ f \in L^2(\Omega)$ a une solution si et seulement si $\mu = \mu_n$. Or

$$Tf = \mu f,\ f \in L^2(\Omega) \iff -\triangle u = \lambda u,\ u \in H_0^1(\Omega),\ \mu = \frac{1}{\lambda}.$$

Par conséquent le problème

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda u \\ \quad u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

est résoluble si et seulement si λ appartient à une suite (λ_n) de nombres strictement positifs qui tend vers $+\infty$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ ... \leq ... \longrightarrow +\infty$$

en répétant les valeurs propres multiples. De plus, il existe une base orthonormale (e_n) de $L^2(\Omega)$ telle que $Te_n = \mu_n\ e_n$ ou de manière équivalente

$$\begin{cases} -\triangle e_n = \lambda_n e_n \\ \quad e_n \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Nous allons montrer que (e_n) est une base orthogonale de $H_0^1(\Omega)$ et que $\| e_n \|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\lambda_n}$. En effet, $(Te_n, e_m)_{L^2(\Omega)} = (u_n, -\triangle v_m)$ où $-\triangle v_m = e_m$ i.e. $v_m = Te_m$. Alors

$$\mu_n (e_n, e_m)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Te_n}{\partial x_i}, \frac{\partial Te_m}{\partial x_i} \right) = \mu_n \mu_m (e_n, e_m)_{H_0^1(\Omega)} .$$

Donc

$$\mu_m (e_n, e_m)_{H_0^1(\Omega)} = \delta_{nm}.$$

En résumé

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in L^2(\Omega) \iff u = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n e_n \quad \text{et} \quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty, \\ \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \\ u \in H_0^1(\Omega) \iff u = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n e_n \quad \text{et} \quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |c_n|^2 < \infty, \\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |c_n|^2 . \end{array} \right.$$

CHAPITRE 2

Points critiques et contraintes

2.1 Points critiques sans contrainte

Dans cette section, nous énonçons deux théorèmes importants dus notamment à Rabinowitz : le théorème du col et le théorème du point selle. Ceux-ci constituent une généralisation du principe du min-max dont les énoncés exigent une supposition technique indispensable en l'occurrence la condition de Palais-Smale.

2.1.1 Condition de Palais-Smale

Pour exprimer la compacité des suites minimisantes, ou de façon générale des suites qui convergent vers un point dont on espère montrer que c'est un point critique, on a souvent recours à la condition de Palais-Smale.

Définition 2.1.1
Soient X un espace de Banach et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On dit que la suite $(u_n)_n \subset X$ est une suite de Palais-Smale de J si elle vérifie

$$(J(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée et } J'(u_n) \to 0 \text{ dans } X'.$$

On dit que la fonctionnelle J vérifie la condition de Palais-Smale (en abrégé (PS)) si toute suite $(u_n)_n$ de Palais-Smale de J contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente.

Définition 2.1.2

Soient X un espace de Banach, $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $c \in \mathbb{R}$. On dit que J vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n) \to 0 \text{ dans } X'$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente .

Remarque 2.1.1

Si J vérifie la condition de Palais-Smale en $c \in \mathbb{R}$ alors une conséquence importante est que l'ensemble

$$K(c) = \{u \in X : J(u) = c \text{ et } J'(u) = 0\}$$

est compact.

Si J vérifie la condition de Palais-Smale (PS) alors J vérifie $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.1.1

Soit l'opérateur auto-adjoint défini sur $L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné, par $Au = -\triangle u$ pour $u \in D(A)$ avec

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

On désigne par $Sp(A) = (\lambda_k)_{k\geq 1}$ la suite des valeurs propres de A. On rappelle qu'en identifiant $L^2(\Omega)$ à son dual, on a $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ avec injections continues et denses. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$ fixés, soit la fonctionnelle J définie sur $H_0^1(\Omega)$ par ($\langle , \rangle$ désignant le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$)

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla v(x)|^2 - \lambda v^2(x)\right] dx - \langle f, v\rangle .$$

Si $\lambda \notin Sp(A)$ alors J satisfait la condition de Palais-Smale sur $H_0^1(\Omega)$. En effet, en notant $\tilde{A}$ l'extension de A à $H_0^1(\Omega)$ (en fait $\tilde{A}v = -\triangle v$ au sens des distributions et souvent on utilisera cet abus de notation) alors on a $J'(v) = \tilde{A}v - \lambda v - f$ et $\tilde{A} - \lambda I$ est un homéomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$.

Si $(u_n)_n$ est une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \\ J'(u_n) = \tilde{A}u_n - \lambda u_n - f \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \end{cases}$$

alors $u_n = \left(\tilde{A} - \lambda I\right)^{-1} [f + J'(u_n)] \to u = \left(\tilde{A} - \lambda I\right)^{-1} f$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *(cela montre aussi que la seule valeur critique de* J *est* $c = J\left(\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^{-1} f\right)$*).*
D'autre part, il est intéressant de noter que si $\lambda = \lambda_k$ *pour un* $k \geq 1$ *et si par exemple* $f = 0$ *alors* J *ne satisfait pas la condition de Palais-Smale.*
En effet, $\varphi_k \neq 0$ *étant une fonction propre associée à* λ_k*, la suite* $(u_n)_n = (n\varphi_k)_{n\geq 1}$ *ne contient aucune sous-suite convergente bien que* $J(n\varphi_k) = 0$ *et* $J'(n\varphi_k) = 0$.

Exemple 2.1.2
La fonction $J(x) = e^x$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *ne vérifie pas la condition de Palais-Smale en* 0.

Très souvent dans la pratique, on montre qu'une suite de Palais-Smale est bornée. Ceci nous permet dans un espace réflexif d'en extraire une suite faiblement convergente que l'on espère converger fortement grâce à une certaine injection compacte.

Proposition 2.1.1 *(Voir [12])*
Soit X *un espace de Banach et* $J : X \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1*. Supposons que* J *vérifie les propriétés suivantes :*
- Toute suite de Palais -Smale de J *est bornée.*
- Pour tout $u \in X$*, on peut écrire*

$$J'(u) = Lu + K(u),$$

où $L : X \longrightarrow X'$ *est un opérateur inversible linéaire et* $K : X \longrightarrow X'$ *est un opérateur compact. Alors* J *vérifie la condition de Palais -Smale.*

Démonstration.
Considérons une suite de Palais-Smale $(u_n)_n$ de J i.e.

$$\begin{cases} (J(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ J'(u_n) = Lu_n + K(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } X' \end{cases}$$

Par conséquent $u_n + L^{-1}K(u_n) \to 0$. Comme $(u_n)_n$ est bornée et K est compact alors la suite $(L^{-1}K(u_n))_n$ est relativement compacte, c'est -à-dire, elle admet une sous-suite convergente et par suite $(u_n)_n$ aussi. ■

2.1.2 Principe du min-max

Le lemme de déformation est à la base de beaucoup de méthodes variationnelles.

Lemme 2.1.1 *(de déformation, voir [13])*
Soient X un espace de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ une fonction non constante satisfaisant la condition de Palais-Smale et $c \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de I. Alors on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une application $\eta \in C(\mathbb{R} \times X, X)$, appelée le flot associé à I, satisfaisant les conditions suivantes :
1) Pour tout $u \in X$, on a $\eta(0, u) = u$.
2) Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $u \notin [c - \varepsilon_0 \leq I \leq c + \varepsilon_0]$, on a $\eta(t, u) = u$.
3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, .)$ est un homéomorphisme de X dans X.
4) Pour tout $u \in X$, la fonction $t \mapsto I(\eta(t, u))$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
5) Si $u \in [I \leq c + \varepsilon]$ alors $\eta(1, u) \in [I \leq c - \varepsilon]$.
6) Si de plus I est paire, pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $\eta(t, .)$ est un homéomorphisme impair.

Théorème 2.1.1 *(Voir [13])*
Soient X un espace de Banach, $I : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant la condition de Palais-Smale et $\mathcal{B}$ une famille non vide de parties non vides de X. On suppose que pour chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, le flot $\eta(1, .)$ construit dans le lemme de déformation 2.1.1 respecte $\mathcal{B}$ (i.e. si $A \in \mathcal{B}$, on a $\eta(1, A) \in \mathcal{B}$). On pose

$$\tilde{c} = \inf_{A \in \mathcal{B}} \sup_{v \in A} I(v)$$

Si $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, alors $\tilde{c}$ *est une* valeur critique de I.
Voici maintenant un premier résultat du principe du min-max, il s'agit du théorème du col de la montagne dû à P. H. Rabinowitz et A. Ambrosetti.

Théorème 2.1.2 *(Théorème du col ou Mountain Pass Theorem, voir [13])*
Soient X un espace de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ vérifiant la condition de Palais-Smale. On suppose que $I(0) = 0$ et que
(i) il existe $R > 0$ et $a > 0$ tels que si $\|u\| = R$ alors $I(u) \geq a$
(ii) il existe $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| > R$ et $I(u_0) < a$.

Alors I possède une valeur critique c telle que $c \geq a$. De façon plus précise, si on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\varphi([0,1]) \ : \varphi \in C([0,1], X), \ \varphi(0) = 0, \ \varphi(1) = u_0\} \ \textit{et} \\ c &= \inf_{A \in \mathcal{B}} \max_{v \in A} I(v), \end{aligned}$$

alors c est une valeur critique de I et $c \geq a$.

Remarque 2.1.2

Ce théorème est nommé par rapport à son interprétation géométrique. Le contenu de ce résultat exprime que si on se trouve en un point A dans une cuvette à une altitude h_0, entourée de montagnes d'une altitude supérieure ou égale à $h > h_0$ et si on veut aller à un point B situé en dehors de la cuvette au delà des montagnes et à une altitude $h_1 < h$, il existe un chemin passant par un col et conduisant de A à B. Pour le trouver, il suffit de prendre parmi tous les chemins allant de A à B celui qui monte le moins haut.

Le deuxième exemple géométrique du principe du min-max est le théorème du point selle (Saddle Point Theorem) qui est dû à Rabinowitz.

Théorème 2.1.3 *(du point selle, voir [23])*

Soient X un espace de Banach tel que $X = V \oplus E$, où $V \neq \{0\}$ est de dimension finie. Supposons que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaisant la condition (PS) vérifie

(I_3) il existe un voisinage borné D de 0 dans V et une constante α tels que $I\,|_{\partial D} \leq \alpha$

(I_4) il existe une constante $\beta > \alpha$ telle que $I\,|_E \geq \beta$.

Alors I possède une valeur critique $c \geq \beta$. De plus c est caractérisée par

$$c = \inf_{h \in \mathcal{B}} \max_{u \in \overline{D}} I(h(u)),$$

$$\textit{où} \ \ \mathcal{B} = \{ \ h \in C\left(\overline{D}, X\right) \ : h = id \ \ \textit{sur} \ \partial D\}.$$

Remarque 2.1.3

La démonstration du théorème du point selle nécessite la théorie du degré topologique (degré topologique de Brouwer) pour plus de détails voir [13] et [23].

Remarque 2.1.4

Dans la pratique, pour utiliser le théorème du col, on montre que l'origine est un minimum local, sans être global ; on montre ensuite que I possède un point critique distinct de l'origine, en revanche, dans le théorème du point selle, il n'y a ni minimum, ni maximum.

2.2 Points critiques avec contraintes

Dans cette partie, nous énonçons un résultat de Ljusternik et Schnirelmann puis sa généralisation dans le cas d'un espace de dimension infinie. Celle-ci est d'une utilité certaine pour la résolution des problèmes non linéaires avec contraintes à l'instar des problèmes aux valeurs propres.

Théorème 2.2.1 *(Ljusternik-Schnirelmann, voir [13])*

Soit E une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Sur la sphère S^{N-1} de $\mathbb{R}^N$ (muni de la norme euclidienne), on considère la fonction $J(u) = E(u)$ pour $u \in S^{N-1}$. Alors J admet au moins N paires de points critiques sur S^{N-1} i.e. il existe (au moins) N couples (u_k,λ_k) avec $u_k \in S^{N-1}$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$E'(u_k) = \lambda_k \, u_k \text{ pour } 1 \leq k \leq N.$$

2.2.1 Condition de Palais-Smale

Soit X un espace de Banach. Dans toute la suite, on considère une contrainte du type

$$S = \{v \in X : F(v) = 0\} \tag{2.2.1}$$

$$\text{avec } F \in C^1(X, \mathbb{R}) \text{ et } \forall v \in S,\ F'(v) \neq 0. \tag{2.2.2}$$

Définition 2.2.1

Soient X un espace de Banach, F vérifiant (2.2.2), S définie par (2.2.1), $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$. On dit que $J\,|_S$ vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau c) ou que J vérifie la condition de Palais-Smale sur S, si toute suite $(u_n, \lambda_n) \in S \times \mathbb{R}$ telle que

$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } J'(u_n) - \lambda_n F'(u_n) \to 0 \text{ dans } X'$$

contient une sous-suite $(u_{n_k}, \lambda_{n_k})_k$ *convergeant vers* (u, λ) *dans* $S \times \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.1

On notera que si J *satisfait la condition de Palais-Smale en* $c \in \mathbb{R}$, *alors l'ensemble*

$$\{(u, \lambda) \in S \times \mathbb{R} : J(u) = c \text{ et } J'(u) = \lambda F'(u)\}$$

est compact dans $X \times \mathbb{R}$.

2.2.2 Principe du min-max

Lemme 2.2.1 *(de déformation, voir [13])*

Soient X *un espace de Banach,* $F \in C^{1,1}_{loc}(X, \mathbb{R})$, S *définie par (2.2.1) et vérifiant (2.2.2). On suppose que* $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ *et* $J = E|_S$ *vérifie la condition de Palais-Smale sur* S, *on suppose enfin que* J *n'est pas constante sur* S *et que* $c \in \mathbb{R}$ *n'est pas une valeur critique de* J *sur* S. *Alors on peut trouver* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que pour* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *il existe une application* $\eta \in C(\mathbb{R} \times S, S)$ *satisfaisant les conditions suivantes :*

1) Pour tout $u \in S$, *on a* $\eta(0, u) = u$.

2) Pour tous $t \in \mathbb{R}$ *et* $u \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, *on a* $\eta(t, u) = u$.

3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, .)$ *est un homéomorphisme de* S *dans* S.

4) Pour tout $u \in S$, *la fonction* $t \mapsto J(\eta(t, u))$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}$.

5) Si $u \in [J \leq c + \varepsilon]$ *alors* $\eta(1, u) \in [J \leq c - \varepsilon]$.

6) Si J *et* F *sont paires, pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *alors* $\eta(t, .)$ *est un homéomorphisme impair.*

On peut maintenant énoncer le principe du min-max.

Théorème 2.2.2 *(Voir [13])*

Soient X *un espace de Banach,* $F \in C^{1,1}_{loc}(X, \mathbb{R})$ *et* S *comme en (2.2.1) et (2.2.2). Soient* $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ *telle que* $J = E|_S$ *n'est pas constante et vérifie la condition de Palais-Smale sur* S *et* $\mathcal{B}$ *une famille non vide de parties non vides de* S. *On suppose que pour chaque* $c \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon > 0$ *assez petit, le flot* $\eta(1, .)$ *construit dans le lemme de déformation 2.2.1 respecte* $\mathcal{B}$ *(i.e. si* $A \in \mathcal{B}$, *on a aussi* $\eta(1, A) \in \mathcal{B}$). *On pose*

$$c_* = \inf_{A \in \mathcal{B}} \sup_{v \in A} J(v)$$

Si $c_* \in \mathbb{R}$, alors c_* *est une* valeur critique de J sur S.

Nous présentons maintenant la généralisation de théorème 2.2.1 dans le cas de dimension infinie. Rappelons tout d'abord la notion du genre.

Définition 2.2.2

Soit X un espace de Banach. On désigne par $s(X)$ l'ensemble des parties fermées symétriques de X ne contenant pas l'origine, plus précisément

$$s(X) = \{A \subset X \text{ : } A \text{ est fermée, non vide, } 0 \notin A, \ -A = A\}.$$

Pour $A \in s(X)$, on appelle genre de A le nombre, noté $\gamma(A)$, défini par

$$\gamma(A) = \inf\{ \ N \geq 1 \text{ : } \exists \varphi : A \to \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \ \text{ continue et impaire}\}.$$

Par commodité on posera $\gamma(\varnothing) = 0$.

S'il n'existe pas d'entier $N \geq 1$ et de fonction φ continue et impaire de A dans $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, on pose $\gamma(A) = +\infty$.

On notera que $\gamma(A)$ aurait pu être défini par

$$\gamma(A) = \inf\{ \ N \geq 1 : \exists \varphi : A \to S^{N-1} \text{ continue et impaire}\}.$$

Il est important de noter également que le genre n'est défini que pour des ensembles fermés.

Exemple 2.2.1

Soit $x_0 \in X$, $R < |x_0|$ et $A = \overline{B(x_0, R)} \cup \overline{B(-x_0, R)}$. Alors A est de genre un : $\gamma(A) = 1$. En effet il suffit de poser $\varphi(x) = +1$ si $x \in \overline{B(x_0, R)}$, et $\varphi(x) = -1$ si $x \in \overline{B(-x_0, R)}$.

Nous regroupons ci-dessous quelques propriétés essentielles du genre.

Théorème 2.2.3 *(Voir [13])*

Soit X un espace de Banach et A, $B \in s(X)$.

(i) S'il existe $f : A \to B$ continue et impaire alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(ii) Si $A \subset B$ alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(iii) S'il existe un homéomorphisme impair $f : A \to B$ *alors* $\gamma(A) = \gamma(B)$.

(iv) γ *est sous-additif :* $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$.

(v) Si A *est compact alors* $\gamma(A) < \infty$.

(vi) Si A *est compact alors il existe un voisinage fermé de* A *ayant le même genre que* A. *Plus précisément, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que si*

$$A_\varepsilon = \{x \in X \, : \, dist\,(x, \; A) \leq \varepsilon\}$$

on a $\gamma(A_\varepsilon) = \gamma(A)$.

(vii) Si $\gamma(B) < \infty$ *alors* $\gamma\left(\overline{A \backslash B}\right) = \gamma\left(\overline{A \cap B^c}\right) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.

La notion du genre permet de généraliser le théorème 2.2.1.

Théorème 2.2.4 *(Voir [13])*

Soient H *un espace de Hilbert de dimension infinie,* $E \in C^1(H, \mathbb{R})$ *une fonction paire et* $E\,|_S = J$ *où* S *est la sphère unité de* H. *On suppose que* J *vérifie la condition de Palais-Smale sur* S, *est minorée et n'est pas constante. Alors* J *possède une infinité de (paires de) points critiques sur* S.

Plus précisément, si $\mathcal{B}_k = \{A \in s(H) \, : \, A \subset S, \, A \text{ est compact et } \gamma(A) \geq k\}$ *et*

$$c_k = \inf_{A \in \mathcal{B}_k} \sup_{u \in A} J(u)$$

c_k *est une valeur critique de* J *sur* S, $c_k \leq c_{k+1}$ *et si* $c_k = c_{k+j}$ *alors* $\gamma(K(c_k)) \geq j + 1$. *De plus* $\lim\limits_{k \to \infty} c_k = +\infty$.

Remarque 2.2.2

Le résultat ci-dessus reste vrai si H *est un espace de Banach de dimension infinie et telle que sa norme* $\|\,.\,\|$ *est de classe* $C^{1,1}_{loc}$ *sur* $H \backslash \{0\}$.

La généralisation du théorème de Ljusternik-Schnirelmann 2.2.4 reste valable si (PS) *est remplacée par* $(PS)\,c_k$ *pour chaque* c_k *définie par* $c_k = \inf\limits_{A \in \mathcal{B}_k} \sup\limits_{u \in A} J(u)$.

CHAPITRE 3

Application à l'étude de quelques problèmes non linéaires

Dans ce chapitre, nous traitons des problèmes semi-linéaires faisant intervenir le Laplacien et le plus souvent avec la condition de Dirichlet. Nous appliquons les théorèmes du col et du point selle.

3.1 Etude de problèmes non linéaires sans contrainte

3.1.1 Existence de solutions pour un problème semi-linéaire

Considérons le problème semi-linéaire elliptique de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\bigtriangleup u(x) = f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné dont le bord est régulier et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

(H_1) $f(x, \xi) \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$

(H_2) Il existe des constantes $a_1, a_2 \geq 0$ telles que

$$|f(x,\xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s$$

avec $0 \leq s < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$.

Pour $N = 2$, la condition (H_2) est

$$|f(x,\xi)| \leq a_1 \exp \varphi(\xi).$$

avec $\varphi(\xi)\xi^{-1} \to 0$ quand $|\xi| \longrightarrow \infty$.

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.1.1) est définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \mid \nabla u \mid^2 - F(x, u(x)) \right) dx, \tag{3.1.2}$$

où $F(x,\xi) = \int_0^\xi f(x,t)\, dt$.

Puisque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on considère la norme de $H_0^1(\Omega)$ suivante :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 3.1.1

Si f vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2) alors la fonctionnelle I définie par (3.1.2) est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$, de plus

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega (\nabla u . \nabla \varphi - f(x, u(x)) \varphi) \, dx. \tag{3.1.3}$$

Pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, la fonctionnelle

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x)) \, dx \tag{3.1.4}$$

est faiblement continue et $J'(u)$ est compact.

Démonstration.

D'après le théorème d'injection (corollaire 1.2.1) et les hypothèses (H_1), (H_2), I est bien définie sur $H_0^1(\Omega)$. Il est clair que le premier terme de I (partie quadratique) est de classe

C^1 et sa dérivée au sens de Fréchet est le premier terme de I'. Ainsi il nous reste à montrer que

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\, dx,$$

appartient à $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Ceci peut être établi en deux étapes. On montre dans un premier temps que J est différentiable au sens de Fréchet puis que sa dérivée $J'(u)$ est continue. Soient $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, u)$ tel que

$$\left| J(u+\varphi) - J(u) - \int_\Omega f(x, u(x))\, \varphi \; dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi\|. \tag{3.1.5}$$

Montrons que si $\|\varphi\| \leq \delta$ alors J est différentiable au sens de Fréchet en u.

On pose

$$\Psi = |F(x, u(x) + \varphi(x)) - F(x, u(x)) - f(x, u(x))\, \varphi(x)|$$

alors

$$\left| J(u+\varphi) - J(u) - \int_\Omega f(x, u(x))\, \varphi \; dx \right| \leq \int_\Omega \Psi \; dx. \tag{3.1.6}$$

On définit

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{ x \in \overline{\Omega} \; : \; |u(x)| \geq \beta \right\}, \\
\Omega_2 &= \left\{ x \in \overline{\Omega} : \; |\varphi(x)| \geq \gamma \right\}, \\
\Omega_3 &= \left\{ x \in \overline{\Omega} : \; |u(x)| \leq \beta \text{ et } |\varphi(x)| \leq \gamma \right\},
\end{aligned}$$

avec β et γ sont arbitrairement donnés. Donc

$$\int_\Omega \Psi dx \leq \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} \Psi dx. \tag{3.1.7}$$

D'après le théorème des accroissements finis :

$$F(x, \xi + \eta) - F(x, \xi) = f(x, \xi + \theta\eta)\, \eta \tag{3.1.8}$$

où $\theta \in]0,1[$.

D'après (3.1.8) , (H_2) et l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} |F(x,u(x)+\varphi(x)) - F(x,u(x))|\, dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} [a_1 + a_2 (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s] |\varphi(x)| \; dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} a_1 |\varphi(x)|\, dx + a_2 \int_{\Omega_1} (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s |\varphi(x)|\, dx \\
&\leq a_1 \ mes\Omega_1^{\frac{N+2}{2N}} \|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} + \\
&a_3 \ mes\Omega_1^{\frac{1}{\sigma}} \left[\|u\|^s_{L^{s+1}(\Omega)} + \|\varphi\|^s_{L^{s+1}(\Omega)}\right] \|\varphi\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

où

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{s}{s+1} + \frac{N-2}{2N} = 1 \tag{3.1.10}$$

Remarquons que $s < \dfrac{N+2}{N-2}$ implique $\dfrac{s}{s+1} + \dfrac{N-2}{2N} < 1$.

Alors il existe $\sigma > 1$ satisfaisant (3.1.10) .

D'après (3.1.9) et le théorème d'injection (corollaire 1.2.1), on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} |F(x,u(x)+\varphi(x)) - F(x,u(x))|\, dx \\
&\leq a_4 \|\varphi\| \left[mes\Omega_1^{\frac{N+2}{2N}} + mes\Omega_1^{\frac{1}{\sigma}} (\|u\|^s + \|\varphi\|^s)\right].
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

D'une manière analogue, on montre que

$$\int_{\Omega_1} |f(x,u(x))\varphi(x)|\, dx \leq a_5 \|\varphi\| \left[mes\Omega_1^{\frac{N+2}{2N}} + mes\Omega_1^{\frac{1}{\sigma}} \|u\|^s\right]. \tag{3.1.12}$$

D'après le théorème d'injection de Sobolev (corollaire 1.2.1) et de l'inégalité de Hölder, on a

$$\|u\| \geq a_6 \|u\|_{L^2(\Omega)} \geq a_6 \|u\|_{L^2(\Omega_1)} \geq a_6 \ \beta \ mes\Omega_1^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.13}$$

Donc

$$mes\Omega_1^{\frac{1}{\sigma}} \quad \leq \quad \left(\frac{\|u\|}{a_6\beta}\right)^{\dfrac{2}{\sigma}} = M_1,\ mes\Omega_1^{\frac{N+2}{2N}} \leq \left(\frac{\|u\|}{a_6\beta}\right)^{\dfrac{N+2}{N}} = M_2 \tag{3.1.14}$$

où $M_1,\ M_2 \longrightarrow 0$ quand $\beta \longrightarrow \infty$.

Combinant (3.1.9), (3.1.14) donnent

$$\int_{\Omega_1} \Psi dx \leq a_7 \left[M_2 + M_1 \left(\|u\|^s + \|\varphi\|^s\right)\right] \|\varphi\| . \tag{3.1.15}$$

On peut supposer que $\sigma \leq 1$.

Choisissant β assez grand tel que

$$a_7 \left[M_2 + M_1 \left(\|u\|^s + \|\varphi\|^s\right)\right] \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il vient que

$$\int_{\Omega_1} \Psi dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \|\varphi\| . \tag{3.1.16}$$

D'une façon analogue, on montre que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \Psi dx &\leq a_3 \int_{\Omega_2} \left[1 + \left(|u(x)| + |\varphi(x)|\right)^s\right] |\varphi(x)| \, dx \\ &\leq a_4 \left(\int_{\Omega_2} \left[1 + \left(|u(x)| + |\varphi(x)|\right)^s\right]^{\frac{s+1}{s}} dx \right)^{\frac{s}{s+1}} \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega_2)} \\ &\leq a_5 \left(1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s\right) \left(\int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^{s+1} \left(\frac{|\varphi(x)|}{\gamma} \right)^{m-(s+1)} dx \right)^{\frac{1}{s+1}} \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

où $m = \frac{2N}{N-2} > s + 1$.

On a

$$\int_{\Omega_2} \Psi \; dx \leq a_6 \; \gamma^{\frac{s+1-m}{s+1}} \left(\|u\|^s + \|\varphi\|^s + 1\right) \|\varphi\|^{\frac{m}{s+1}} \tag{3.1.18}$$

Puisque $f(x, \xi) \in C^1\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ pour tout $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\beta} > 0$, il existe un $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}\left(\hat{\varepsilon}, \hat{\beta}\right)$ tel que

$$| \; F(x, \xi + h) - F(x, \xi) - f(x, \xi) \, h \; | \leq \hat{\varepsilon} \, |h| \tag{3.1.19}$$

pour chaque $x \in \overline{\Omega}$, $|\xi| \leq \hat{\beta}$ et $|h| \leq \hat{\gamma}$.

En particulier si $\hat{\beta} = \beta$ et $\gamma \leq \hat{\gamma}$, (3.1.19) implique

$$\int_{\Omega_3} \Psi dx \leq \hat{\varepsilon} \int_{\Omega_3} |\varphi(x)| \; dx \leq a_7 \hat{\varepsilon} \, \|\varphi\| . \tag{3.1.20}$$

Choisissons $\hat{\varepsilon}$ tel que $3a_7\hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$ et $\gamma = \hat{\gamma}$.

En combinant (3.1.7), (3.1.16), (3.1.18) et (3.1.20), on obtient

$$\int_{\Omega} \Psi dx \leq \frac{2\varepsilon}{3} \|\varphi\| + a_6 \; \gamma^{\frac{s+1-m}{s+1}} \left(\|u\|^s + \|\varphi\|^s + 1\right) \|\varphi\|^{\frac{m}{s+1}} . \tag{3.1.21}$$

Finalement, en choisissant σ assez petit tel que

$$a_6\, \gamma^{1-\dfrac{m}{s+1}}\, (2+\|u\|^s)\, \sigma^{\left(\frac{m}{s+1}\right)^{-1}} \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.1.22}$$

on obtient

$$\left| J(u+\varphi) - J(u) - \int_\Omega f(x,u(x))\,\varphi dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi\|$$

Il reste à montrer la continuité de $J'(u)$.

Soit $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. D'après le théorème d'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1}(\Omega)$ pour tout $0 \leq s < \frac{N+2}{N-2}$ $(1 \leq s+1 < 2^*)$, on a $u_n \to u$ dans $L^{s+1}(\Omega)$.

Sachant que

$$\|J'(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\langle J'(u_n), \varphi\rangle| .$$

D'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \|J'(u_n) - J'(u)\| &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left| \int_\Omega (f(x,u_n(x)) - f(x,u(x)))\,\varphi(x)\,dx \right| \\ &\leq a_7 \|f(.,u_n) - f(.,u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)} . \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Grâce à (H_2), on a

$$|f(x,\xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{\alpha s}{s}}$$

pour tout $\alpha \geq 1$ et pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Le théorème 1.3.1 donne $f \in C(L^{s\alpha}(\Omega), L^\alpha(\Omega))$.

En choisissant $\alpha = \dfrac{s+1}{s}$, on voit que la partie gauche de l'inégalité (3.1.23) tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Montrons que J est faiblement continue. Soit (u_n) une suite qui converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$. L'injection $H_0^1(\Omega) \subset L^{s+1}(\Omega)$ avec $1 \leq s+1 < 2^*$ étant compacte, $u_n \to u$ dans $L^{s+1}(\Omega)$. Par suite $J(u_n) \to J(u)$ dans $L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)$.

Finalement, il nous reste à montrer que J' est compact. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $H_0^1(\Omega)$, alors on peut en extraire une suite (u_{n_k}) qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. Puisque $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{s+1}(\Omega)$, on a $u_{n_k} \to u$ dans $L^{s+1}(\Omega)$. On reprend ensuite la même démarche de la continuité de J' pour déduire que $J'(u_n)$ admet une sous suite convergente. ■

La résolution du problème (3.1.1) nécessite des conditions supplémentaires sur le comportement de la fonction f au voisinage de 0 et de l'infini.

Théorème 3.1.2 ***(Ambrosetti-Rabinowitz)***
En plus des hypothèses (H_1) *et* (H_2), *supposons que*
(H_3) $f(x,\xi) = \circ(\xi)$ *quand* $\xi \to 0$.
(H_4) *Il existe des constantes* μ *et* r *positives telles que pour* $|\xi| \geq r$

$$0 < \mu F(x,\xi) \leq \xi f(x,\xi).$$

Alors le problème (3.1.1) admet une solution non triviale.

Démonstration.
La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes.
Dans la première, on montre que I vérifie les conditions géométriques (les hypothèses (i) et (ii) du théorème du col).
Dans la $2^{ème}$ étape, on montre que I satisfait la condition de Palais -Smale.
On a évidement, $I(0) = 0$.
En intégrant la condition (H_4), on montre qu'il existe deux constantes a_3, a_4 positives telles que

$$F(x,\xi) \geq a_3 |\xi|^{\mu} - a_4 \tag{3.1.24}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $\xi \in \mathbb{R}$.
En intégrant la fonctionnelle F, on obtient

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x,u(x))\,dx \geq a_3 \int_{\Omega} |u(x)|^{\mu}\,dx - a_4 mes(\Omega). \tag{3.1.25}$$

Alors pour tout $u \neq 0$, l'inégalité (3.1.25) implique

$$\begin{aligned} I(tu) = \int_{\Omega} \left(\frac{t^2}{2} |\nabla u|^2 - F(x,tu(x)) \right) dx \ &= \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx - \int_{\Omega} F(x,tu)\,dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \parallel u \parallel^2_{H_0^1(\Omega)} - t^{\mu}\ a_3 \int_{\Omega} |u(x)|^{\mu}\,dx + a_4 mes(\Omega) \end{aligned}$$

D'où

$$I(tu) \to -\infty \text{ quand } t \to \infty.$$

(ii) est alors vérifiée.

Pour compléter la démonstration, il suffit de montrer que 0 est un minimum local.

D'après l'hypothèse (H_3), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\xi| \leq \delta$ implique

$$|F(x,\xi)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon |\xi|^2 . \tag{3.1.26}$$

En effet, on a $f(x,\xi) = \circ(\xi)$ quand $\xi \to 0$ c-à-d $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $|\xi| \leq \delta$ implique

$$|f(x,\xi)| \leq \varepsilon |\xi| .$$

En intégrant, on obtient

$$|F(x,\xi)| = \left| \int_0^{\xi} f(x,t)\, dt \right| \leq \int_0^{\xi} |f(x,t)|\, dt \leq \varepsilon \int_0^{\xi} |t|\, dt.$$

Ainsi

$$|F(x,\xi)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon |\xi|^2 .$$

Pour tout $x \in \overline{\Omega}$, la condition de croissance (H_2) entraîne l'existence d'une constante $A(\delta) >$ tel que pour $|\xi| \geq \delta$, on a

$$|F(x,\xi)| \leq A |\xi|^{s+1} . \tag{3.1.27}$$

En combinant les deux inégalités (3.1.26), (3.1.27), on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $x \in \overline{\Omega}$

$$|F(x,\xi)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon |\xi|^2 + A |\xi|^{s+1} . \tag{3.1.28}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |J(u)| &= \left| \int_{\Omega} F(x,u(x))\, dx \right| \leq \int_{\Omega} |F(x,u(x))|\, dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u(x)|^2\, dx + A \int_{\Omega} |u(x)|^{s+1}\, dx. \end{aligned}$$

Comme $1 \leq s+1 < 2^*$, il existe C' tel que

$$\| u \|_{L^{s+1}(\Omega)} \leq C' \| u \|_{H_0^1(\Omega)} .$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C'' > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C'' \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} .$$

Il vient alors

$$|J(u)| \leq C(\frac{\varepsilon}{2} + A \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{s-1}) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

C désignant une constante.
En choisissant $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(\frac{\varepsilon}{2A}\right)^{\frac{1}{s-1}}$, on obtient

$$|J(u)| \leq C\varepsilon \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 .$$

Ainsi

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C\varepsilon \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 .$$

Alors pour $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = R$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$I(u) \geq a > 0.$$

Ce qui prouve que 0 est un minimum local de I et que I vérifie la première condition géométrique du théorème du col.
Pour vérifier la condition de Palais-Smale on montre d'abord que toute suite de Palais-Smale est bornée, c'est à dire, on montre que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que

$$|I'(u_n)| \leq M \ et \ I'(u_n) \to 0$$

alors (u_n) est bornée.
En effet, on a I est différentiable au sens de Fréchet et sa dérivée est donnée par

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega (\nabla u \,.\nabla\varphi - f(x, u(x))\,\varphi)\, dx$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.
Cest à dire

$$I'(u) = - \triangle u - J'(u)$$

avec $J'(u) = f(., u(x))$.
Puisque on a $J'(u)$ est un opérateur compact (théorème 3.1.1) et $-\triangle$ est un opérateur linéaire inversible alors d'après la proposition 2.1.1 pour vérifier la condition de Palais-Smale, il suffit de montrer que toute suite de Palais-Smale est bornée.

Soit (u_n) une suite de Palais-Smale. Alors

$$\begin{cases} |I(u_n)| \leq M \\ I'(u_n) \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \end{cases}$$

Par définition de la norme duale, on a

$$|\langle I'(u_n), u_n\rangle| \leq \|I'(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

En majorant, il en résulte que

$$\mu I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle \leq M\mu + \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.1.29}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mu I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle = \ & \mu\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx - \int_\Omega F(x, u_n(x))dx\right) \\ & -\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - f(x, u_n)\, u_n\right) dx \\ & = (\frac{\mu}{2} - 1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx - \int_\Omega (\mu F(x, u_n(x)) - f(x, u_n)\, u_n)\, dx. \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

On pose $T_n = -\mu F(x, u_n(x)) + f(x, u_n)\, u_n$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \mu I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle &= \frac{\mu-2}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega T_n\, dx \\ &\geq \frac{\mu-2}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_{\{x\in\Omega,\ |u_n(x)|<r\}} T_n\, dx + \int_{\{x\in\Omega,\ |u_n(x)|\geq r\}} T_n\, dx. \end{aligned}$$

On pose

$$I_1 = \int_{\{x\in\Omega,\ |u_n(x)|<r\}} T_n\, dx \quad \text{et } I_2 = \int_{\{x\in\Omega,\ |u_n(x)|\geq r\}} T_n\, dx.$$

Alors, le terme I_1 est borné par une constante indépendante de n et le terme I_2 est positif.

On a grâce à l'hypothèse (H_3) : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\ \xi\ | \leq \delta$ implique

$$|F(x, \xi)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon\, |\xi|^2 .$$

On a aussi $|f(x, \xi)| \leq \varepsilon\, |\xi|$.

On en déduit

$$\int_{\{x\in\Omega,\ |u_n(x)|<r\}} (-\mu F(x,u_n(x)) + f(x,u_n)\,u_n)\ dx \geq -\int_{\{x\in\Omega,\ |u_n(x)|<r\}} (\varepsilon u_n^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\mu\,|u_n|^2)dx.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\Omega,\ |u_n(x)|<r\}} (-\mu F(x,u_n(x)) + f(x,u_n)\,u_n)\ dx &\geq -\int_\Omega \varepsilon r^2 dx - \int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon\mu r^2 dx \\ &\geq -\varepsilon(r^2 + \frac{1}{2}\mu r^2) mes\,(\Omega)\,.\end{aligned}$$

On pose $M_1 = -\varepsilon(r^2 + \frac{1}{2}\mu r^2) mes\,(\Omega)$.

Ainsi I_1 est borné par une constante M_1 indépendante de n.

D'après l'hypothèse (H_4), on a

$$0 < \mu F(x,\xi) \leq \xi f(x,\xi)\,.$$

Pour $|\xi| \geq r$.

Donc

$$-\mu F(x,u_n(x)) + f(x,u_n)\,u_n \geq 0.$$

Ainsi

$$I_2 = \int_{\{x\in\Omega,\ |u_n(x)|\geq r\}} T_n\ dx \geq 0.$$

Par conséquent

$$\int_\Omega T_n\ dx \geq 0 - M_1' \ \text{ avec } M_1' > 0.$$

On combine (3.1.29), (3.1.30) :

$$\begin{aligned}\int_\Omega T_n\ dx + \frac{\mu-2}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \mu I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle \leq M\mu + \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \\ -M_1' + \frac{\mu-2}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \mu I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle \leq M\mu + \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

D'où

$$-M_1' + \frac{\mu-2}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq M\mu + \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\,.$$

C.à.d

$$\frac{\mu-2}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} - M_1' - M\mu \leq 0$$

Posons $X = \| u_n \|_{H_0^1(\Omega)}$, on a

$$\frac{\mu - 2}{2} X^2 - X - M_1' - M\mu \leq 0$$

Le fait que $\mu > 2$ et $M,\ M_1' > 0$ permet de déduire que $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et d'après la proposition 2.1.1, la condition de Palais-Smale est satisfaite.

Le théorème du col assure l'existence d'une valeur critique c strictement positive. Il existe donc un point critique correspondant et il n'est pas nul puisque $I(0) = 0 < c$.

Ainsi le problème (3.1.1) admet une solution non triviale. ■

Remarque 3.1.1

- L'hypothèse (H_3) implique que $u = 0$ est une solution du problème (3.1.1).

- Si $\mu > 2$ alors la fonction $F(x,\xi)$ définie par (3.1.24) a une croissance surquadratique.

- La condition (H_4) signifie que $f(x,\xi)$ a une croissance sur-linéaire à l'infini.

Exemple 3.1.1

Si $N = 1$ et $f(x,\xi) = \xi^3$, le problème devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u^3 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.31}$$

avec $\Omega =]0,\pi[$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$, $E = H_0^1(]0,\pi[)$ et

$$I(u) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} |u'|^2 - \frac{1}{4} u^4 \right) dx.$$

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.1.31)

On vérifie facilement que I est de $C^1(H_0^1(]0,\pi[), \mathbb{R})$.

On voit tout d'abord que $f(x,\xi) = \xi^3$ vérifie la condition (H_3) $\left(\lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{f(x,\xi)}{\xi} = 0 \right)$ et la condition (H_4).

L'hypothèse (H_3) implique que (3.1.31) admet une solution triviale $u = 0$.

Notons que si $N = 1$ alors (H_1) et (H_2) s'écrivent

$$\begin{aligned} (H_1)\ f(x,\xi) &\in C([0,\pi] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ (H_2)\ \text{p.p. sur }]0,\pi[&: |f(x,\xi)| \leq a_1 + a_2 g(s) \text{ avec } a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

où $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue telle que $g(s) = O(s)$ lorsque $s \longrightarrow 0^+$.

Ainsi, d'après le théorème d'Ambrosetti-Rabinowitz, le problème (3.1.31) admet une solution non triviale.

En effet, d'après la condition de croissance (H_2) et l'hypothèse (H_3), on a

$$|F(x,\xi)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon |\xi|^2 + \frac{A}{2} |\xi|^2 .$$

Alors

$$I(u) \quad \geq \textstyle\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} |u'(x)|^2\right) dx - \int_0^\pi \frac{\varepsilon+A}{2} |u(x)|^2 \, dx$$

De plus, l'inégalité de Poincaré donne

$$I(u) \quad \geq \left(\frac{1 - C(\varepsilon + A)}{2}\right) \|u\|^2_{H_0^1(]0,\pi[)} .$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \rho$

$$I(u) \geq c' > 0$$

autrement dit l'origine est un minimum local.

D'autre part, on a pour tout $u \in H_0^1(]0,\pi[)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$I(\alpha u) = \int_0^\pi \left(\frac{\alpha^2}{2} |u'|^2 - \frac{\alpha^4}{4} u^4\right) dx \longrightarrow -\infty \quad \text{quand} \quad |\alpha| \longrightarrow \infty$$

(ii) est alors vérifiée.

Les conditions géométriques sont donc satisfaites.

Pour vérifier la condition de Palais-Smale, on reprend la même démarche. Le théorème du col nous assure de l'existence d'un point critique.

3.1.2 Existence de solutions pour un problème aux valeurs propres semi-linéaire

Considérons le problème semi-linéaire du type elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\bigtriangleup u(x) = \lambda u + f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.32}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les conditions suivantes :

(H_1) $f(x,\xi) \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$

(H_2) Il existe des constantes $a_1, a_2 \geq 0$ telles que

$$|f(x,\xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^s$$

avec $0 \leq s < \frac{N+2}{N-2}$ si $N > 2$.

ainsi que des conditions supplémentaires sur le comportement de la fonction f au voisinage de 0 et de l'infini qui sont déjà mentionnées dans le théorème d'Ambrosetti -Rabinowitz à savoir (H_3) et (H_4).

On rappelle que λ_1, la première valeur propre de $(-\Delta)$, est caractérisée par

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx : u \in H_0^1(\Omega), \ \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Théorème 3.1.3

Sous les hypothèses (H_1)-(H_4), pour $\lambda < \lambda_1$ le problème (3.1.32) admet une solution non identiquement nulle.

Démonstration.

On considère

$$I(u) = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right] - \int_\Omega F(x, u(x))\, dx \tag{3.1.33}$$

la fonctionnelle d'énergie associée au problème sur $H_0^1(\Omega)$. On a $I \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$.

Remarquons que grâce à la condition de croissance sous-quadratique en zéro, c.à.d pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|\xi| \leq \delta$ implique

$$|F(x,\xi)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon |\xi|^2$$

on obtient

$$\forall \varepsilon > 0 : \int_\Omega |F(x, u(x))| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.1.34}$$

D'autre part, d'après la condition de croissance (H_2) et le théorème d'injection de Sobolev (corollaire 1.2.1), il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$\int_\Omega |F(x, u(x))| \, dx \leq C_\varepsilon \|u\|^{s+1}_{H^1_0(\Omega)} \tag{3.1.35}$$

pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$.

D'après (3.1.34) et (3.1.35), on a

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega F(x, u(x)) \, dx \right| &\leq \int_\Omega |F(x, u(x))| \, dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon \|u\|^{s+1}_{H^1_0(\Omega)}. \end{aligned}$$

De plus, comme λ_1 est la première valeur propre de $(-\Delta)$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$.

On en déduit une minoration de I pourvu que $\lambda + \varepsilon < \lambda_1$:

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2} \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right] - \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - C_\varepsilon \|u\|^{s+1}_{H^1_0(\Omega)} \\ &\geq \frac{(\lambda_1 - \lambda - \varepsilon)}{2\lambda_1} \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - C_\varepsilon \|u\|^{s+1}_{H^1_0(\Omega)} \\ &\geq \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda - \varepsilon)}{2\lambda_1} \|u\|^{-s+1}_{H^1_0(\Omega)} - C_\varepsilon \right) \|u\|^{s+1}_{H^1_0(\Omega)}. \end{aligned}$$

On voit ainsi que si $R_0^{s-1} = \dfrac{(\lambda_1 - \lambda - \varepsilon)}{2\lambda_1 C_\varepsilon}$ et $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} = R < R_0$ alors pour $R > 0$, il existe $b = b(R) > 0$ tel que $I(u) \geq b$, autrement dit l'origine est un minimum local de I sur $H^1_0(\Omega)$ et la condition (i) du théorème du col est satisfaite.

Pour trouver un point u_0 de $H^1_0(\Omega)$ tel que $I(u_0) < 0$. Rappelons tout d'abord que du fait de la condition de croissance sur-quadratique de F à l'infini

$$\int_\Omega |F(x, u(x))| \, dx \geq C_1 \int_\Omega |u(x)|^\mu \, dx - C_2 mes\Omega$$

où C_1, $C_2 > 0$ et $\mu > 2$.

Maintenant, si $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ (avec $\|\varphi_1\|^2 = 1$) est une fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 de $(-\Delta)$, $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, alors pour tout $t > 0$ on obtient la majoration

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &= \frac{t^2}{2}\left[\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 dx - \lambda \|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right] - \int_\Omega F(x, u(x))\, dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}(\lambda_1 - \lambda) - t^\mu C_1 \int_\Omega |\varphi_1(x)|^\mu dx + C_2\ mes\Omega. \end{aligned}$$

D'où $I(t\varphi_1) \to -\infty$ quand $t \to \pm\infty$.

Ceci veut dire que pour $t_0 > 0$ assez grand, on a $I(t_0\varphi_1) < 0$. Ainsi (ii) est vérifiée. Les conditions géométriques sont donc réunies.

Il nous reste à vérifier la condition de Palais-Smale sur $H_0^1(\Omega)$.

Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|I(u_n)| \leq M$ et

$$h_n = I'(u_n) = -\Delta u_n - \lambda u_n - f(., u_n) \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

Alors, on a

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 dx - \int_\Omega f(., u_n)\, u_n\, dx.$$

Or, par définition de la norme duale, on a

$$|\langle I'(u_n), u_n\rangle| \leq \|I'(u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$\mu I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle \leq M\mu + \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.1.36}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mu I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle &= \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\int_\Omega |u_n(x)|^2 dx \\ &\quad -\int_\Omega (\mu F(x, u(x)) - f(., u_n)\, u_n)\, dx. \end{aligned}$$

Posons $T_n = -\mu F(x, u_n(x)) + f(x, u_n)\, u_n$.

On obtient

$$\mu I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle = \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda\left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\int_\Omega |u_n(x)|^2 dx + \int_\Omega T_n\, dx.$$

$$\begin{aligned}\mu I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle &\geq \left(\tfrac{\mu}{2}-1\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \textstyle\int_{\{x\in\Omega,\ |u_n(x)|\geq r\}} T_n\, dx \\ &+ \textstyle\int_{\{x\in\Omega,\ |u_n(x)|<r\}} T_n\, dx.\end{aligned} \tag{3.1.37}$$

(3.1.36) et (3.1.37) donnent

$$\begin{aligned}M\mu + \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} &\geq \mu I(u_n) - \langle I'(u_n), u_n\rangle \\ &\geq \left(\frac{\mu}{2}-1\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \textstyle\int_{\{x\in\Omega,|u_n(x)|\geq r\}} T_n\, dx \\ &+ \textstyle\int_{\{x\in\Omega,|u_n(x)|<r\}} T_n\, dx.\end{aligned}$$

Puisque $\mu > 2$ et $\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_1}\right) > 0$ le terme à gauche est positif et le terme à droite est borné indépendamment de n. On en déduit *que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et la condition de Palais-Smale est satisfaite.

Alors I possède une valeur critique $c \geq b > 0$ et donc un point critique $u \neq 0$ qui est solution du problème (3.1.32) . ■

3.1.3 Problème elliptique semi-linéaire de résonance

Considérons le problème semi-linéaire du type elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u + f(x,u(x)) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.38}$$

où f satisfait (H_1) et (H_2) avec $s = 0$ et a est supposée positive et continûment Lipchitzienne dans $\overline{\Omega}$.

Nous associons au problème (3.1.38) le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda a(x)v & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.39}$$

D'après la théorie spectrale du Laplacien , le problème (3.1.39) possède une suite de valeurs propres $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_j \leq ...$ et $\lambda_j \to \infty$ quand $j \to \infty$ (le nombre de fois qu' une valeur propre apparaît dans la suite est égal à sa multiplicité).

Examinons le cas où λ est une valeur propre de l'équation (3.1.39) .

Théorème 3.1.4

Supposons $\lambda = \lambda_k < \lambda_{k+1}$ *et* f *satisfaisant* (H_1) *et* (H_2) *avec* $s = 0$ *et*

(H_7) $F(x,\xi) = \int_0^\xi f(x,t)\,dt \longrightarrow \infty$ *quand* $|\xi| \longrightarrow \infty$ *uniformément pour* $x \in \Omega$

Alors (3.1.38) admet une solution faible.

Démonstration.

Soit la fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.1.38), pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} a u^2 - F(x,u)\right) dx. \tag{3.1.40}$$

On a $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ grâce *à* (H_1) et (H_2).

Soit V l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1, ..., v_k$, i.e. $V = eng\{v_1, ..., v_k\}$ où v_j est une fonction propre de (3.1.39) correspondant à λ_j, normalisée c.à.d

$$\int_\Omega |\nabla v_j|^2 dx = 1 = \lambda_j \int_\Omega a v_j^2 dx.$$

Soit $E = \overline{eng\{v_j \ : \ j \geq k+1\}}$. Si $E = V^\perp$ donc $X = V \oplus E$.

On va montrer que I satisfait (I_3), (I_4) et (PS).

Le théorème 3.1.4 découlera du théorème du point selle.

Comme $E = \overline{eng\{v_j \ : \ j \geq k+1\}}$. Si $u \in E$ alors $u = \sum_{j \geq k+1} a_j v_j$ et

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_k a u^2\right) dx = \sum_{j \geq k+1} a_j^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right) \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.1.41}$$

Soit $M = \sup_{x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}} |f(x,\xi)|$. Alors

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega F(x,u)\,dx\right| &= \left|\int_\Omega f(x,u)\,u\ dx\right| \leq \sup_{x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}} |f(x,\xi)| \int_\Omega |u|\,dx \\ \left|\int_\Omega F(x,u)\,dx\right| &\leq M \int_\Omega |u|\,dx. \end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega |u(x)|\,dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} mes(\Omega)^{1-\frac{1}{2}}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.

De plus, d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq M\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = M\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

En posant $M_1 = M\ mes(\Omega)^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\left|\int_\Omega F(x,u)\,dx\right| \leq M_1\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.1.42}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.

En combinant (3.1.41) et (3.1.42), on trouve

$$I(u) \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - M_1\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.1.43}$$

Ainsi, I est minorée dans E.

Vérifions (I_3).

Si $u \in V$ alors

$$u = u^0 + u^-, u^0 \in E^0 = eng\{v_j\ :\ \lambda_j = \lambda_k\} \text{ et } u^- \in E^- = eng\{v_j\ :\ \lambda_j < \lambda_k\}.$$

D'où

$$I(u) = \frac{1}{2}\sum_{j<k} a_j^2\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right) - \int_\Omega F\left(x,u^0\right)dx - \left[\int_\Omega \left(F\left(x,u^0+u^-\right) - F\left(x,u^0\right)dx\right)\right]. \tag{3.1.44}$$

Grâce aux résultats précédents (3.1.42), (3.1.44), on a

$$I(u) \leq -M_2\|u^-\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega F\left(x,u^0\right)dx + M_1\left\|u^-\right\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.1.45}$$

Maintenant d'après (3.1.45) et (H_7), on montre que $I(u) \to -\infty$ quand $u \to \infty$ dans V. Enfin, on vérifie la condition de Palais -Smale. Puisque $I'(u) = -\triangle u - \lambda a u - J'(u)$ grâce à la proposition 2.1.1, il suffit de montrer que $|I'(u_m)| \leq M \quad et\ I'(u_m) \to 0$ implique (u_m) est bornée.

En écrivant $u_m = u_m^0 + u_m^- + u_m^+$ où $u_m^0 \in E^0$, $u_m^- \in E^-$ et $u_m^+ \in E$, pour m assez grand

$$\left|\left\langle I'(u_m), u_m^{\pm}\right\rangle\right| = \left|\int_\Omega \left[\nabla u_m \nabla u_m^{\pm} - \lambda_k a u_m u_m^{\pm} - f(x, u_m) u_m^{\pm}\right] dx\right|. \tag{3.1.46}$$

Comme

$$|I(u_m)| \leq 1 \text{ et } I'(u_m) \to 0$$

il vient que

$$\left|\left\langle I'(u_m), u_m^{\pm}\right\rangle\right| \leq \left\|u^{\pm}\right\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Puisque $E = V^\perp$, on a

$$\left\|u_m^+\right\| \geq \|u_m^+\|^2_{H_0^1(\Omega)} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) - M_1 \left\|u_m^+\right\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.1.47}$$

Comme $\left(1 - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) > 0$ et $M_1 > 0$ $(\|u_m^+\|)$ est bornée, d'une manière analogue $(\|u_m^-\|)$ est bornée. Finalement, on affirme que $(\|u_m^0\|)$ est aussi bornée. Alors (u_m) est bornée dans X.

$$\begin{aligned} |I(u_m)| &= \left| \int\limits_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \left[|\nabla u_m^+|^2 + |\nabla u_m^-|^2 - \lambda_k a \left((u_m^+)^2 + (u_m^-)^2 \right) \right] \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \left(F(x, u_m) - F(x, u_m^0)\right) dx \right\} - \int\limits_\Omega F(x, u_m^0)\, dx \right|. \end{aligned}$$

Le premier terme de I est borné, indépendamment de m. En effet, on pose

$$\begin{aligned} I_1(u_m) &= \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \left[\left|\nabla u_m^+\right|^2 + \left|\nabla u_m^-\right|^2 - \lambda_k a \left(\left(u_m^+\right)^2 + \left(u_m^-\right)^2 \right) \right] - \left(F(x, u_m) - F\left(x, u_m^0\right) \right) \right\} dx. \\ I_2\left(u_m^0\right) &= \int_\Omega F\left(x, u_m^0\right) dx. \end{aligned}$$

D'après (3.1.41), (3.1.42) et (3.1.44), on a

$$|I_1(u_m)| \leq M_2 \left(\|u_m^-\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_m^+\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right) + \left(\left\|u_m^- + u_m^+\right\| \right).$$

Puisque $\{\|u_m^-\|\}$, $\{\|u_m^+\|\}$ sont bornées, le terme $I_1(u_m)$ est aussi borné par une constante indépendante de m. D'autre part, on a

$$K \geq |I(u_m)| = \left|I_1(u_m) - I_2\left(u_m^0\right)\right| \geq \left| |I_1(u_m)| - \left|I_2\left(u_m^0\right)\right| \right|.$$

Ainsi

$$-K \leq |I_1(u_m)| - \left|I_2\left(u_m^0\right)\right| \leq K.$$

D'où

$$\left|I_2\left(u_m^0\right)\right| - K \leq |I_1(u_m)| \leq K_1.$$

Par conséquent

$$K \geq \left|\int_\Omega F\left(x, u_m^0\right) dx\right| - K_1. \tag{3.1.48}$$

Ainsi $\left(\int_\Omega F\left(x, u_m^0\right) dx\right)$ est bornée, ce qui implique que $\left(u_m^0\right)$ est bornée. ■

Lemme 3.1.1

Si f satisfait (H_1), (H_2) et (H_7) alors

$$\int_\Omega F(x, v)\, dx \to \infty \tag{3.1.49}$$

quand $v \to \infty$ uniformément tout en restant dans E^0.

Démonstration.

En utilisant (H_1), (H_2), la fonctionnelle définie par (3.1.49) appartient à $C^1(X, \mathbb{R})$.

Grâce à (H_7), on a pour tout $K > 0$, il existe d_k tel que $F(x, \xi) \geq K$ si $|\xi| \geq d_k$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$.

Soit $v \in E^0$, on écrit $v = t\varphi$ où $\varphi \in \partial B_1$. Alors

$$\int_\Omega F(x, t\varphi)\, dx \geq \int_{\Omega_k} F(x, t\varphi)\, dx - M_0\ . \tag{3.1.50}$$

Où

$$\Omega_k = \{x \in \Omega\ :\ F(x, t\varphi) \geq K\}.$$
$$M_0 \geq mes\Omega \left|\inf_{x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}} F(x, \xi)\right|. \quad ■$$

Remarque 3.1.2

Puisque $\varphi \neq 0$, il existe un $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\varphi \neq 0$ dans $B_{2r}(x_0)$ (une boule de rayon 2r et de centre x_0). Donc d'après (H_7) pour tout t $B_r(x_0) \subset \Omega_k$ et $F(x, t\varphi) \to \infty$ sur $B_r(x_0)$ quand $t \to \infty$ d'où, le terme à gauche de (3.1.50) tend à l'infini quand $t \to \infty$. Puisque $\partial B_1 \cap E^0$ est compact alors $F(x, t\varphi) \to \infty$ quand $t \to \infty$ uniformément pour $v \in E^0$, ce qui achève la preuve du lemme.

Remarque 3.1.3

On peut remplacer (H_7) *par* $\int\limits_{\Omega} F(x,\xi)\,dx \to -\infty$ *quand* $|\xi| \to \infty$ *avec quelques modifications nécessaires.*

3.2 Problèmes non linéaires avec contraintes

3.2.1 Résultats d'existence de solutions pour un problème aux valeurs propres semi-linéaire

On considère le problème semi-linéaire elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et λ un paramètre réel. Supposons que f satisfait les conditions (H_1), (H_2) ainsi que

(H_8) $\xi f(x,\xi) > 0$ si $\xi \neq 0$.

(H_9) $f(x,\xi)$ est impaire.

Notons $X = H_0^1(\Omega)$ et pour $u \in X$

$$I(u) = -\int_{\Omega} F(x,u(x))\,dx \tag{3.2.2}$$

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.2.1) .

D'après le théorème 3.1.1, $I \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$. De plus d'après (H_9), I est paire.

En effet, puisque $f(x,\xi)$ est impaire en ξ alors

$$I(-u) = -\int_{\Omega} F(x,-u(x))\,dx = -\int_{\Omega} F(x,u(x))\,dx = I(u)$$

D'où le résultat .

Soit

$$S_1 = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ \int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx = 1\}$$

un ensemble de contraintes.

En un point critique de $I\mid_{S_1}$, on a

$$\langle I'(u), \varphi\rangle - \mu(u, \varphi) = 0.$$

C'est à dire

$$-\int_\Omega f(x, u(x))\,\varphi dx - \mu\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi\ dx = 0. \tag{3.2.3}$$

Choisissons $\varphi = u$, on a

$$\langle I'(u), u\rangle - \mu(u, u) = 0.$$

$u \in S_1 \Longrightarrow \langle I'(u), u\rangle - \mu = 0.$

$$\mu = \langle I'(u), u\rangle = -\int_\Omega f(x, u(x))\,u\ dx - \mu\int_\Omega \nabla u.\nabla u\ dx.$$

En utilisant (H_8), on montre que

$$\mu = \langle I'(u), u\rangle = -\int_\Omega f(x, u(x))\,u\ dx < 0.$$

Donc u est une solution faible de (3.2.1) avec $\lambda = -\mu^{-1}$.

Ainsi, pour trouver la solution faible de (3.2.1) sur S_1 ($ou\ S_r$), il suffit d'appliquer la généralisation du théorème de Ljusternik-Schnirelman 2.2.4. Pour cela, on vérifie d'abord que $I\mid_{S_1}$ est minorée.

En effet, d'après le théorème 3.1.1, on voit que I est faiblement continue. Alors, $u_m \rightharpoonup u$ implique $I(u_m) \to I(u)$. Ceci implique que $I\mid_{S_1}$ est minorée, autrement dit, il existe une suite $(u_m) \subset S_1$ tel que $I(u_m) < -m$. Puisque (u_m) est bornée alors elle admet une sous-suite qui converge faiblement dans X vers $\bar{u} \in \overline{S_1}$, $I(u_m) \to I\left(\bar{u}\right) = -\infty$, ce qui contredit le fait que I est de classe C^1 sur X.

Il nous reste à vérifier la condition de Palais -Smale.

Soit (u_m) une suite dans S_1 tel que $(I(u_m))$ est bornée et $I'\mid_{S_1}(u_m) \to 0$ quand $m \to \infty$ i.e.

$$I'\mid_{S_1}(u_m) = I'(u_m) - \langle I'(u_m), u_m\rangle\, u_m \to 0\ . \tag{3.2.4}$$

Puisque (u_m) est bornée dans X et I' est compact, alors pour toute suite (u_m) qui converge faiblement dans X.

On a $I'(u_m) \to I'(u) - \langle I'(u), u\rangle u = 0$

Par la continuité faible de I, on a $I(u_m) \to I(u)$.

Si $I(u) \neq 0$ grâce à (H_8), $\langle I'(u), u\rangle < 0$ $(\langle I'(u), u\rangle \neq 0)$.

Par conséquent d'après (3.2.4)

$$u_m = (\langle I'(u_m), u_m\rangle)^{-1} \left(I'\backslash_{S_1}(u_m) - I'(u_m)\right).$$

Ainsi (u_m) possède une sous -suite convergente.

Si $I(u) = 0$ alors (u_m) ne contient aucune sous-suite convergente.

En effet, la continuité faible de I entraîne que si (u_m) est convergente faiblement vers 0, on a $I(u_m) \to 0$ et $I'|_{S_1}(u_m) \to 0$, mais (u_m) ne contient aucune sous-suite convergente.

Remarque 3.2.1

On a montré que $I|_{S_1}$ satisfait $(PS)_c$ pour tout $c \neq 0$.

Ainsi, nous avons démontré le résultat suivant :

Théorème 3.2.1

Si f satisfait (H_1), (H_2), (H_8) et (H_9) le problème (3.2.1) possède une suite distincte de paires de points critiques (solutions faibles) (λ_k, u_k) sur $\mathbb{R}\times S_1$, où $\lambda_k = -(\langle I'(u_k), u_k\rangle)^{-1}$.

3.2.2 Résultats d'existence pour un problème aux valeurs propres autonome

Considérons maintenant un autre type de problème semi- linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u + \rho(.)\, u = \lambda |u|^{p-1} u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.5}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $p \geq 1$ un réel tel que $(N-2)p \leq (N+2)$ et $\rho \in L^\infty(\Omega)$.

Soit

$$J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} \rho(x) |u(x)|^2 \, dx$$

la fonctionnelle d'énergie associée au problème. J est $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Soit

$$S = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} = 1\}$$

un ensemble de contraintes.

Théorème 3.2.2

Pour tous $\lambda > 0$ et $p > 1$, le problème (3.2.5) admet une infinité de solutions.

Démonstration.

On montre que J vérifie la condition de Palais-Smale sur S.

Soit $c \in \mathbb{R}$ et $(u_n, \mu_n) \in S \times \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} J(u_n) \to c & \text{dans } \mathbb{R}. \\ h_n = -\Delta u_n + \rho(.)\, u_n - \mu_n |u_n|^{p-1} u_n \to 0 & \text{dans } H^{-1}(\Omega). \end{cases}$$

Puisque (u_n) est bornée dans $L^{p+1}(\Omega)$, (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

On a

$$\begin{aligned} \langle h_n, u_n \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx + \int_{\Omega} \rho(x) |u_n(x)|^2 \, dx - \mu_n \int_{\Omega} |u_n(x)|^{p+1} \, dx \\ &= J(u_n) - \mu_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\mu_n = J(u_n) - \langle h_n, u_n \rangle.$$

Puisque $J(u_n) \to c$ et $\langle h_n, u_n \rangle \to 0$ alors $\mu_n \to c$.

On en déduit que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Comme d'après le théorème de compacité de Rellich-Kondrachov, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour $q = 2$ ou $q = p + 1$, on peut extraire une sous-suite $\left(u_{n_k}, \mu_{n_k}\right)_k$ qui converge vers (u, μ) dans $(L^2(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)) \times \mathbb{R}$.

Notant que si $v \in L^{p+1}(\Omega)$, on a trivialement $|v|^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.

Il vient alors

$$|u_{n_k}|^{p-1} u_{n_k} \to |u|^{p-1} u \text{ dans } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

Or l'exposant conjugué de Hölder de $(p+1)$ n'est autre que $\frac{p+1}{p}$ et comme $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, par dualité, il vient que $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Finalement, on obtient

$$|u_{n_k}|^{p-1} u_{n_k} \to |u|^{p-1} u \ \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

En désignant par B l'application linéaire continue de $H^{-1}(\Omega)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ qui à $f \in H^{-1}(\Omega)$ fait correspondre la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta u = f\ (Bf = u)$, on conclut que

$$u_{n_k} = B\left(h_{n_k} - \rho u_{n_k} + \mu_{n_k} |u_{n_k}|^{p-1} u_{n_k}\right) \to B\left(-\rho u + \mu |u|^{p-1} u\right) = u \ \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

La condition de Palais-Smale est donc satisfaite.

On remarque que J est paire. En effet

$$J(-u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \rho(x) |u(x)|^2 dx = J(u)$$

De plus, J est minorée.

En effet

$$\begin{aligned} J(u) = \textstyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \rho(x) |u(x)|^2 dx \ &\geq \textstyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \inf\limits_{x\in\overline{\Omega}} |\rho(x)| \int_\Omega |u(x)|^2 dx \\ &\geq C \ \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème 2.2.4, J possède une infinité de valeurs critiques $(c_k)_k$ sur S et de plus $c_k \to +\infty$. On distingue deux cas :

Pour $p = 1$: le problème (3.2.5) devient $-\Delta u + \rho(.)\, u = \lambda u$, les nombres c_k et les points critiques correspondant u_k sont précisément les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur elliptique :

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + \rho(.)\, u$$

sur le domaine $D(\mathcal{L}) = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ \mathcal{L}u \in L^2(\Omega) \ \}$.

Si $p > 1$, on remarque qu'il existe un multiplicateur de Lagrange $\mu_k \in \mathbb{R}$ et $u_k \in S$ tels que

$$J(u_k) = c_k \text{ et } \mathcal{L}u_k = \mu_k |u_k|^{p-1} u_k.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par u_k et en effectuant une intégration par parties, on voit que

$$J(u_k) = \mu_k \int_\Omega |u_k|^{p+1} dx = \mu_k = c_k.$$

Si $c_k > 0$, ce qui est le cas pour une infinité d'indices k, alors en posant $\overline{u}_k = c_k^{\frac{1}{p-1}} u_k$, on vérifie que $\overline{u}_k$ est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u}_k + \rho(.)\,\overline{u}_k = |\overline{u}_k|^{p-1}\,\overline{u}_k & \text{dans } \Omega \\ \overline{u}_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

qui possède donc une infinité de solutions .

Si $c_k < 0$, ce qui peut arriver au plus pour un nombre fini (dépendant de ρ) éventuellement nul d'indices k, alors en posant $v_k = | c_k |^{\frac{1}{p-1}} u_k$, on vérifie sans peine que v_k est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_k + \rho(.)\,v_k + |v_k|^{p-1}\,v_k = 0 & \text{dans } \Omega \\ v_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Remarque 3.2.2

(1) *Pour $p = 1$, le problème (3.2.5) correspond à un problème aux valeurs propres.*

(2) *Lorsque $p > 1$, certains auteurs appellent ce genre d'équations problèmes aux valeurs propres non -linéaires.*

(3) *Si $p = \frac{N+2}{N-2}$ et $N \geq 3$ alors en général J ne satisfait pas la condition de Palais-Smale sur S (car $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ n'est pas compacte).*

(4) *Le signe de ρ n'a aucune influence sur la condition de (PS).*

Conclusion

Dans ce travail, nous avons traité des problèmes semi linéaires de type elliptique(et le plus souvent avec la condition de Dirichlet) avec ou sans contraintes par une méthode variationnelle basée sur la théorie des points critiques. Nous avons appliqué des résultats du principe du min max dus notamment à Rabinowitz (théorème du col, du point selle) ainsi que la généralisation du théorème de Ljusternik-Schnirelmann.

Perspectives

1. Etude de problèmes elliptiques semi-linéaires sur un domaine non borné.

2. Etude de problèmes complètement non linéaires c-à-d avec des opérateurs qui ne sont pas nécessairement linéaires à l'instar du $p-$Laplacien.

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti, A. Malchiodi.

Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems, Cambridge University Press (2007).

[2] J. Appell.

The superposition operator in function spaces. A survey ; Expositiones Mathematicae, 6 (1988), p. 209-270.

[3] C. Baiocchi, A. Capelo.

Disequazioni variazionali e quasi-variazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libra. Pitagora Editrice, Bologna (1978) (Traduction anglaise ; Wiley (1984)).

[4] M. Berger.

Geometry of the spectrum, in Differential Geometry, Chern-Osserman ed , Proc. Symp. Pure Math, Vol. 27, Part 2, Amer. Math. Soc. (1975), p. 129-152.

[5] M. Berger.

Nonlinearity and Functional Analysis, Acad. Press (1977).

[6] E. Bombieri.

Variational problems and elliptic equations in Mathematical developments arising from Hilbert problems, F. Browder ed. , Proc. Symp. Pure Math. , Vol. 28, Part. 2, Amer. Math. Soc. (1977), p. 525-536.

[7] H. Brézis.

Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson, Paris (1987).

[8] F. Browder.
Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution, Proc. Symp. Pure Math. , Vol. 18, Part. 2, Amer. Math. Soc. (1976).

[9] P. L. Bruhl.
Introduction à la théorie spectrale. Dunod, Paris,(2003).

[10] P. Donato.
Calcul différentiel pour la licence. Cours, exercices et problèmes résolus. Dunod, Paris, (2000).

[11] D. Gilbarg, N. Trudinger.
Elliptic partial differential equations of second order, Springer (1977).

[12] Y. Jabri.
The Mountain Pass Theorem variants, generalisations and some applications, University of Oudja, Morocco. (2003).

[13] O. Kavian.
Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. Springer- Verlarg France. Paris, (1993).

[14] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia.
An introduction to variational inequalities and their applications, Acad. Press (1980).

[15] A. Kolmogorov, S. Fomine.
Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Mir, 1977, 1994.

[16] M. Krasnoselskki.
Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Mc Millan (1964).

[17] O. Ladyzhenskaya, N. Uraltseva.
Linear and quasilinear elliptic equations, Acad. Press (1968) (Traduction française, Dunod).

[18] J. L. Lions.
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod-Gauthier Villars (1969).

[19] L. Nirenberg.
On elliptic partial differential equations, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 13 (1959), P. 116-162.

[20] L. Nirenberg.
Topics in nonlinear Functional Analysis, New York, Univ. Lecture notes (1974).

[21] L. Nirenberg.
Variational and topological methods in nonlinear problems, Bull. Amer. Math. Soc. 4, (1981).

[22] P. H. Rabinowitz.
Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, Eigenvalues of Nonlinear Problems (G. Prodi, ed.), C. I.M. E., Edisioni Cremonese, Roma, (1975).

[23] P. H. Rabinowitz.
Minimax methods in critical point theory whith applications to differential equations, Conf. Board of Math. Sci. Reg. Conf. Ser. in Math. , No. 65, Amer. Math. Soc, (1986).

[24] J. T. Schwartz.
Nonlinear Functional Analysis, Gordon Breach (1969).

[25] J. Serrin.
The solvability of boundary value problems, in Mathematical developments arising from Hilbert problems, F. Browder ed. Proc. Symp. Pure Math. , Vol. 28, Part. 2, Amer. Math. Soc. (1977), p. 507-525.

[26] W. Zou, M. Schechter.
Critical point theory and its applications, Springer (2006).

[27] C. Zuily.

Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris, (2002).

[28] S. T. Yau.

The role of partial differential equations in differential geometry, in Porc. Int. Congress of Math., Helsinki (1978).