République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira-Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du Diplôme de Magister en Mathématiques Appliquées
Option : Analyse et Probabilités

THÈME

Une étude de la théorie de réduction de R.A. Smith et ses applications

Présenté par : BERRAH Abdelmalek

Soutenu le: 05 / 12 / 2009
Devant le jury :

M.	DAHMANI	Abdelnasser	Professeur	U. Béjaia	Président
M.	BERBOUCHA	Ahmed	Maître de Conférences	U. Béjaia	Rapporteur
M.	MEHIDI	Noureddine	Professeur	U. Béjaia	Examinateur
M.	AKROUNE	Nourredine	Maître de Conférences	U. Béjaia	Examinateur
M.	BENDJEDDOU	Ahmed	Maître de Conférences	U. Sétif	Examinateur

Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont participé à la mise en oeuvre et à l'achèvement de ce travail, et plus particulièrement :

Monsieur **A. BERBOUCHA**, Maître de Conférences Classe A à l'université A. MIRA - Béjaia, qui a dirigé ce travail de magister et m'a fait bénéficier à la fois de ses compétences scientifiques et de sa grande disponibilité, je lui suis très reconnaissant de m'avoir orienté dans mes recherches. J'ai beaucoup appris grâce à ses précieux conseils.

Monsieur **A. DAHMANI**, Professeur à l'université A. MIRA - Béjaia qui m'a honoré d'avoir accepté de présider le jury devant lequel je vais soutenir ce travail.

Messieurs **N. MEHIDI**, Professeur à l'université A. MIRA - Béjaia, **N. AKROUNE** Maître de Conférence classe A à l'université A. MIRA - Béjaia et **A. BENDJEDDOU** Maître de Conférence classe A à l'université F. ABBES - Sétif, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de lire ce travail, de le juger et d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Un grand merci à toute ma famille et à tous mes amis.

Table des matières

Introduction

Dans l'étude des équations différentielles, une branche importante est celle de la recherche de solutions périodiques. Plus particulièrement, lorsque des paramètres interviennent dans cette équation, la recherche de conditions sous lesquelles il y a existence ou non existence de solutions périodiques.

En dimension deux, grâce à la simplicité des sections dans le plan et grâce au théorème de Jordan, Poincaré et Bendixson ont établit des théories qui sont actuellement les plus utilisées pour leur efficacité et leurs relative simplicité.

Malheureusement, cette simplicité on ne l'a pas en dimension supérieure à deux ; et des exemples ont été donnés pour montrer que ces théories ne sont plus valables.

De la fin des années soixante-dix au début des années quatre-vingt dix, R.A. Smith a développé une ingénieuse méthode de réduction lui permettant de ramener l'étude de certains aspects d'une équation différentielle ordinaire ou à retard à l'étude de ces mêmes aspects pour une équation différentielle ordinaire en dimension inférieure. En utilisant cette méthode de réduction, il a pu notamment généraliser le théorème de Poincaré-Bendixson à une grande classe d'équations différentielles ordinaires en dimension supérieure à deux (voir [26, 27]) puis à une grande classe d'équations différentielles à retard (voir [34]). Beaucoup d'autres résultats ont été obtenus par cet auteur, grâce à cette méthode de réduction (voir [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]).

Dans le présent mémoire, nous présentons quelques généralisations de résultats connus en dimension deux à la dimension n quelconque, en ajoutant des hypothèses supplémentaires. Il s'agit des généralisations des théories de Poincaré et Bendixson, du théorème de l'index de Poincaré et des théorèmes de Massera.

1

Généralités

1.1 Rappels :

1.1.1 Formes bilinéaires symétriques ; formes quadratiques

Généralités:

Dans ce chapitre K , désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou un corps commutatif de caractéristique différente de 2

Dans ce que suit E désigne un K - espace vectoriel.

Définition 1.1 *: On appelle **forme bilinéaire** sur $E \times E$ toute application $\varphi : E \times E \to K$ telle que :*

(i) $\forall \alpha \in K, \forall (x, x', y) \in E^3, \varphi(\alpha x + x', y) = \alpha \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$
(φ est linéaire par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable)
(ii) $\forall \beta \in K, \forall (x, y, y') \in E^3, \varphi(x, \beta y + y') = \beta \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$
(φ est linéaire par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable)

Remarque 1.1 *Notons $L(E, E; K)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times E$*

$L(E, E; K)$ est un K - espace vectoriel

Proposition 1.1 *: Soient φ une forme bilinéaire sur $E \times E$, $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
$\alpha_1, ..., \alpha_n$, $\beta_1, ..., \beta_p \in K$, $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_p \in E$, on a alors :
$\varphi(\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i \ , \sum_{j=1}^{j=p} \beta_j y_j) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j)$.*

Définition 1.2 *Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to K$ est dite* ***symétrique*** *si et seulement si :*

$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

Remarque 1.2 *Notons $S(E; K)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur $E \times E$*

$S(E; K)$ est un K - espace vectoriel, sous espace vectoriel de $L(E, E; K)$

Proposition 1.2 *: Pour qu'une application $\varphi : E \times E \to K$ soit une forme bilinéaire symétrique, il faut et il suffit que l'on ait :*

$$\begin{cases} \varphi \text{ est symétrique} \\ \varphi \text{ est linéaire par rapport à la } 2^{\text{ème}} \text{ variable} \end{cases}$$

Définition 1.3 *: Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$. on appelle* ***forme quadratique associée à*** *φ l'application notée ϕ, de E dans K définie par :*

$\forall x \in E, \phi(x) = \varphi(x, x)$

Proposition 1.3 *: Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, ϕ la forme quadratique associée à φ on a :*

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$, $\forall x_1, ..., x_n \in E$,

$$\phi(\textstyle\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i\ ) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i^2 \phi(x_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_i \alpha_j \varphi(x_i, x_j)$$

2)$\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (x, y) \in E^2,$

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 \phi(x) + 2\alpha\beta\varphi(x, y) + \beta^2 \phi(y)$$

3)$\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x + y) = \frac{1}{4}(\phi(x + y) - \phi(x - y))$

4)$\forall (x, y) \in E^2$, $\phi(x + y) + \phi(x - y) = 2(\phi(x) + \phi(y))$

Remarque 1.3 *La formule (3) précédente montre que ϕ détermine entièrement φ*

φ est appelée la ***forme polaire*** *de ϕ*

Interprétation matricielle

Dans ce paragraphe, E désigne un K - espace vectoriel de dimension finie

Définition 1.4 *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.*

on appelle ***matrice de*** *φ* ***dans*** *(* ***ou relativement à*** *) B, et on note $Mat_B(\varphi)$,*

la matrice carrée d'ordre n, symétrique, suivante : $Mat_B(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}$

Proposition 1.4 *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, B une base de E, $A = Mat_B(\varphi)$,*

x , $y \in E$; $X = Mat_B(x)$, $Y = Mat_B(y)$ où X et Y sont les représentations matricielles de x et y, respectivement, dans la base B

on a alors : $\varphi(x, y) = X^t AY$

Proposition 1.5 *: Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, B et B' deux bases de E, et P la matrice de passage de B à B'*

$A = Mat_B(\varphi)$, $A' = Mat_{B'}(\varphi)$

on a alors : $A' = P^t AP$.

Démonstration soient x , $y \in E$, $X = Mat_B(x)$, $Y = Mat_B(y)$, $X' = Mat_{B'}(x)$, $Y' = Mat_{B'}(y)$;

on a donc $X = PX'$ et $Y = PY'$ (P est la matrice de passage de la base B à la base B')

D'une part : $\varphi(x, y) = (X')^t AY'$

D'autre part $\varphi(x, y) = X^t AY = (PX')^t A(PY')$ $=X'^t P^t APY'$

par unicité de la matrice de φ dans B' et puisque $P^t AP$ est une matrice symétrique , on conclut que $A' = P^t AP$. ■

1.1.2 Quelques notions fondamentales

La notion d'équation différentielle

Soit :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \Omega \to \mathbb{R}^n \\ (t, x) & \mapsto & f(t, x) \end{array}$$

une application d'un ouvert $\Omega \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

On appelle équation différentielle vectorielle du premier ordre, une équation du type

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.1}$$

On peut écrire (1.1) sous forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \qquad .... \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

Un tel système est par définition sous forme normale.

Définition 1.5 *: On appelle solution ou intégrale de l'équation* (1.1) *toute application dérivable :*

$$\begin{array}{rcl} x & : & I \to \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & x(t) \end{array}$$

définie sur un intervalle non vide $I \subset \mathbb{R}$ *, et telle que pour tout* $t \in I$ *,* $(t, x(t)) \in \Omega$ *et* $\dfrac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$ *.*

L'ensemble $\{(t, x(t)); t \in I\}$ *est appelé trajectoire de la solution .*

L'ensemble $\{x(t); t \in I\}$ *est appelé l'orbite de la solution .*

L'espace des x *est l'espace des phases, l'espace des* (t, x) *est l'espace des mouvements.*

Soit :

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

On appelle équation différentielle d'ordre n, toute équation du type:

$$x^{(n)} = f(t, x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

Où $x^{(0)} = x, ..., x^{(k)} = \dfrac{d^k x}{dt^k}, 1 \leq k \leq n$.

Définition 1.6 *: On appelle solution de cette équation ou intégrale toute application*

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & I \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \phi(t) \end{array}$$

n *fois dérivable sur* I *et telle que,* $\forall t \in I : (t, \phi(t), \dfrac{d\phi(t)}{dt}, ..., \dfrac{d^{n-1}\phi(t)}{dt^{n-1}}) \in \Omega$ *et*

$$\frac{d^n\phi(t)}{dt^n} = f(t, \phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}\phi(t)}{dt^{n-1}}).$$

L'étude d'une équation différentielle d'ordre n peut être ramenée à celle d'un système de n équations différentielles du premier ordre.

En effet, si on pose $x^{(k-1)} = y_k$, $1 \leq k \leq n$.

Alors, (1.2) est équivalente au système d'équations d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_3 \\ \ldots\ldots. \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dt} = y_n \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f(t, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n) \end{cases}$$

ce système de la forme (1.1) si on utilise la notation vectorielle.

Solution maximale :

On dit que

$$\phi : I \to \mathbb{R}^n; t \mapsto \phi(t)$$

est une solution maximale (non prolongeable) de l'équation (1.1) si on ne peut pas l'étendre c.à.d. que si $\Psi : J \to \mathbb{R}^n; t \mapsto \Psi(t)$ est aussi une solution de l'équation (1.1) avec $I \subset J$ et $\Psi/_I = \phi$ alors $\Psi = \phi$ et en particulier $J = I$.

Points d'équilibre (critiques)

Définition 1.7 *: Si $a \in \mathbb{R}^n$ et tel que $(t, a) \in \Omega$, entraîne $f(t, a) = 0$. On dit que a est un point d'équilibre (critique) de l'équation* (1.1) .

On en déduit que si $(t_0, a) \in \Omega$, la solution maximale issue de ce point est constante et égale à a.

A un point critique correspondent donc une ou plusieurs solutions maximales constantes. Les trajectoires correspondantes sont des segments de droites et les orbites se réduisent à un point.

Théorème 1.1 *(voir [20]) Soit*

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n; (t, x) \mapsto f(t, x)$$

une application localement lipschitzienne en x et continue. Si a est un point critique auquel correspond une solution maximale $a : I \to \mathbb{R}^n$, il n'existe pas de solution x ni de temps $\tau \in I$ tels que $x(t) \to a$ quand $t \to \tau$.

Dans cet énoncé, on admet l'abus de language consistant à désigner du même symbole a le point critique et une solution maximale qui lui correspond .

Equations autonomes

Si le second membre de l'équation (1.1) ne dépend pas de t on dit que l'équation est autonome, et elle s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.3}$$

où f est définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.2 *(voir [20]) Si* $x :]\tau_1, \tau_2[\longrightarrow \mathbb{R}^n ; t \longmapsto x(t)$ *est une solution maximale de l'équation* (1.3) *alors pour tout* $c \in \mathbb{R}$

$x^* :]\tau_1 - c, \tau_2 - c[\longrightarrow \mathbb{R}^n ; t \longmapsto x^*(t)$ *avec* $x^*(t) = x(t + c)$ *est aussi une solution maximale de la même équation.*

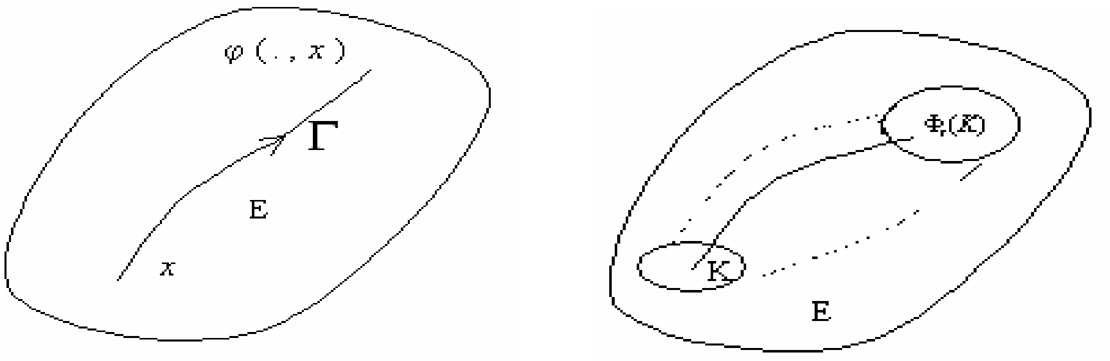
Le flot défini par une équation différentielle

Définition 1.8 *: Soit* $\varphi(t, x)$ *la solution maximale de l'équation* (1.3) *de condition initiale* $x \in \Omega$ *elle vérifie*

$$\begin{aligned} \varphi(0, x) &= x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) &= f(\varphi(t, x)) \end{aligned}$$

L'ensemble des applications Φ_t *définie par* $\Phi_t(x) = \varphi(t, x)$ *est appelé le flot de l'équation* (1.3) *, ou encore le flot défini par l'équation* (1.3).

Si la condition initiale x est fixée, alors l'application $\varphi(., x) : I \longrightarrow \Omega$ (I est l'intervalle maximal de l'existence de la solution) définit une trajectoire du système passant par le point x (voir la fig1(a)).



(a) La trajectoire Γ du système (1.1)

(b) Le flot Φ_t du système (1.1)

Fig 1

D'autre part, si le point x varie, considérer le flot, c'est envisager d'un même coup d'oeil toutes les solutions, en particulier, pour autant qu'elles soient définies pour un certain t, l'application $x \longmapsto \varphi(t,x)$ décrit la position au temps t des ensembles $K \subset \Omega$ entraînés par le système (1.3) (voir la fig 1 (b)).

Définition 1.9 *: Un système dynamique dans Ω est une application de classe C^1*

$$\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \Omega$$

avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $\Phi_t(x) = \varphi(t,x)$, alors Φ_t satisfait

$$\begin{array}{lll} (i) & \Phi_0(x) = x & \forall x \in \Omega \\ (ii) & \Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_{t+s}(x) & \forall s,\, t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \Omega \end{array}$$

Définition 1.10 *: **(Orbite)***

Si x est un point de E ,

L'orbite complète issue de x est l'ensemble

$$\Gamma(x) = \{\varphi(t,x),\ t \in\ \mathbb{R}\}.$$

La semi-orbite positive issue de x est l'ensemble

$$\Gamma^{+}(x) = \{\varphi(t,x),\ t \geqslant 0\}.$$

La semi-orbite négative issue de x est l'ensemble

$$\Gamma^{-}(x) = \{\varphi(t,x),\ t \leqslant 0\}.$$

Ensembles invariants

Définition 1.11 *: Une partie A de Ω est dite invariante si elle contient une orbite complète, pour tout point de A. Autrement dit si*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t,x) \in A, \forall x \in A.$$

Une partie A de Ω est dite positivement invariante si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \varphi(t,x) \in A,\ \forall x \in A.$$

On définit, par analogie ,la notion d'ensembles négativement invariants.

Une partie invariante piège donc les trajectoires. Si une trajectoire rentre dans A, elle n'en sort plus.
L'intérêt d'un tel ensemble est qu'on peut supposer $A = \Omega$ dès que l'on étudie l'évolution à l'infini d'une trajectoire qui y pénètre.
Pour les systèmes dynamiques, les parties invariantes jouent le même rôle que les connexes en topologie élémentaire. On restreint un flot à une partie invariante comme une application continue sur une composante connexe, l'étude sur chaque composante étant disjointe des autres. L'exemple le plus simple d'un tel ensemble est la trajectoire.

Ensembles limites

Définition 1.12 *: Un point $p \in E$ est un point $\omega-$limite pour la trajectoire Γ de l'équation* (1.3) *s'il existe une suite $t_n \to \infty$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x) \quad = p$$

un point $q \in E$ est un point $\alpha-$limite pour la trajectoire Γ de l'équation (1.3) s'il existe une suite $t_n \to -\infty$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x) \quad = q$$

l'ensemble de tous les points $\omega-$limite de la trajectoire Γ est l'ensemble $\Omega-$limite noté $\Omega(\Gamma)$, l'ensemble de tous les points $\alpha-$limite de trajectoire Γ est l'ensemble $A-$limite noté $A(\Gamma)$

$\Omega(\Gamma) \cup A(\Gamma)$ est appelé ensemble limite de Γ

Propriétés de base d'un ensemble limite

Propriétés topologiques

Théorème 1.3 *Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega(x)$ et $A(x)$ sont deux ensembles fermés et invariants, si de plus $\Gamma^+(x)$ (resp $\Gamma^-(x)$) sont bornées, alors $\Omega(x)$ (resp $A(x)$) est non vide compact et connexe.*

Lemme 1.1 *(convergence)*
Si $\Gamma^+(x)$ est bornée. Alors

$$dist(\varphi(t, x), \Omega(x)) \to 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty$$

Lemme 1.2 *(Invariance)*
L'ensemble $\Omega(x)$ est invariant sous le flot Φ_t autrement dit

$$si\ y \in \Omega(x) \text{ alors } \Phi_t(y) \in \Omega(x), \forall t \in \mathbb{R}$$

Lemme 1.3 *(transitivité)*
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, si $z \in \Omega(y)$ et $y \in \Omega(x)$ alors $z \in \Omega(x)$.

Cycles limites

Courbe de Jordan

Dans le plan, deux phénomènes nouveaux apparaissent :

a) Simplicité des sections

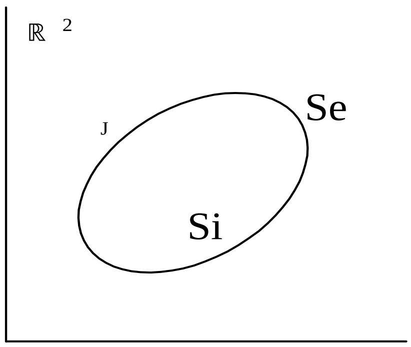
Une section transverse est un segment de droite fermé σ, dont tout point est régulier, et tel qu'en chacun de ces points, $f(x)$ ne soit pas colinéaire à σ, donc un objet très simple muni d'un ordre naturel, on peut parler de monotonie le long d'une section.

b) Le théorème de Jordan

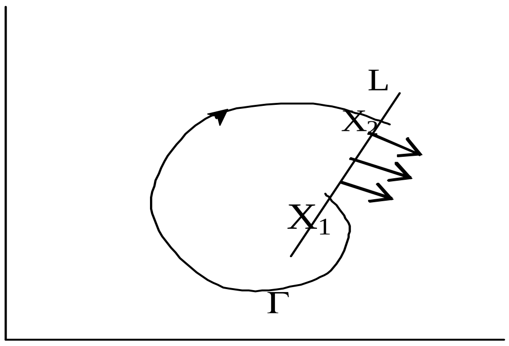
Il nous apprend qu'un arc fermé simple Γ sépare le plan en deux composantes connexes. Toute courbe de Jordan J dans $\mathbb{R}^2$ sépare le plan en deux régions, plus précisément

$$\mathbb{R}^2 \setminus J = S_e \cup S_i \text{ avec } S_e \cap S_i = \varnothing$$

S_e est non bornée, appelée extérieur de J ; S_i est bornée ,appelée intérieur de J.



La courbe de jordan



La courbe de jordan défini par Γ et L

Fig 2

Solutions périodiques

Définition 1.13 *: Une solution x est dite périodique de période T, ou $T-$périodique si elle est définie sur $\mathbb{R}$ et s'il existe un nombre $T > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}, x(t+T) = x(t)$.*

Proposition 1.6 *(voir [20]) Pour une équation autonome , une solution x définie sur $\mathbb{R}$ est $T-$périodique si seulement s'il existe un $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $x(\tau + T) = x(\tau)$.*

Définition 1.14 *(voir [20]) On dit qu'une orbite est fermée si elle est une courbe de Jordan ,c'est-à-dire homéomorphe à un cercle.*

Proposition 1.7 *(voir [20]) Une solution non constante est périodique si et seulement si son orbite est fermée.*

Cycles limites

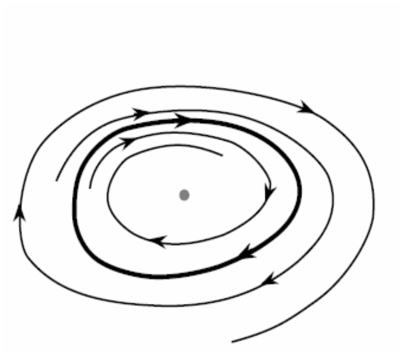
Définition 1.15 *: On dit qu'une trajectoire Γ est périodique, de période $T > 0$, si pour tout point p dans Γ, on a*

$$\varphi(T, p) = p$$

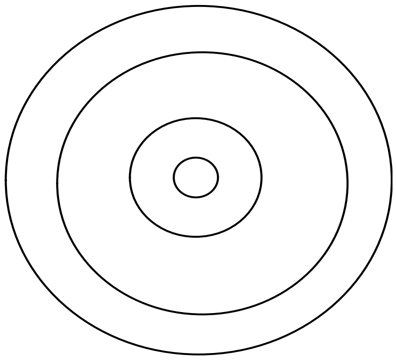
où φ est une solution maximale de l'équation (1.3) *.*

Remarque 1.4 *La réunion des trajectoires périodiques de période T est un fermé invariant. On n'a pas le même résultat si les trajectoires n'ont pas la même période.*

Définition 1.16 *:Un cycle limite est une solution périodique non constante isolée, représentée dans le plan des phases par une trajectoire fermée et isolée .Elle reflète la périodicité du mouvement .*



Cycle limite



Ces orbites ne sont pas des cycles limites

Fig 3

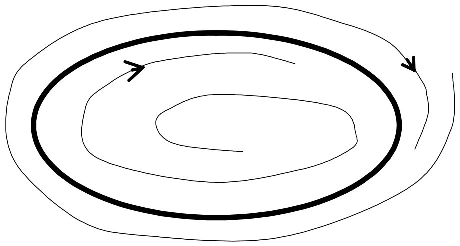
L'intérêt du cycle limite, en tant qu'orbite périodique isolée, apparaît souvent dans plusieurs branches des sciences et technologies. Le fait qu'un système admette cycle limite implique l'existence d'une solution périodique isolée. Le problème général de trouver le nombre de cycles limites pour les systèmes dynamiques est un problème compliqué qui a quelques raccordements au $16^{ème}$ problème de Hilbert non encore résolu. L'étude intensive de l'existence de cycles limites pour les systèmes dynamiques est bien justifiée puisque l'existence et les propriétés des cycles limites pour un système dynamique donnent des informations importantes et introduisent des propriétés intéressantes des solutions du système dynamique étudié.

Classification des cycles limites

Il existe trois types de cycles limites ; cycle limite stable, cycle limite instable et cycle limite semi stable.

a- Cycles limites stables

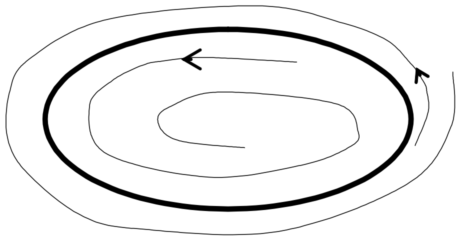
Un cycle limite stable est une solution périodique vers laquelle tendent les autres solutions de conditions initiales suffisamment proches.



Cycle limite stable

b- Cycles limites instables

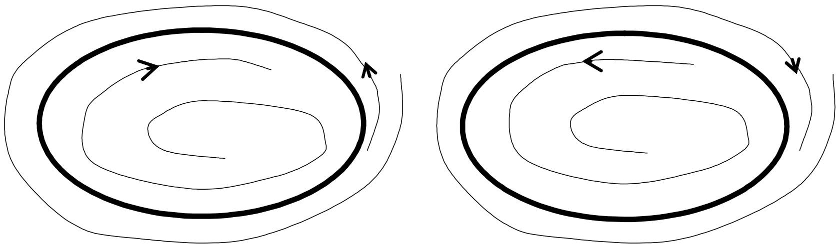
Un cycle limite instable est une trajectoire fermée qui constitue une séparation de chaque côté de laquelle les trajectoires s'éloignent vers d'autres points singuliers ou vers l'infini ou vers une autre trajectoire fermée.



Cycle limite instable

c- Cycles limites semi stables

Un cycle limite semi stable est une trajectoire fermée vers laquelle tendent les trajectoires d'un côté mais s'éloignent de l'autre côté.



Cycle limite semi stable

Définition 1.17 *(Stabilité orbitale)*

Soit Γ *l'orbite de* x*, on dira que la solution* x *est orbitalement stable si*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall t_0 \in \mathbb{R})\,(\forall x_0 : d\,(x_0, \Gamma) < \eta) \Longrightarrow (\forall t > t_0, d\,(x\,(t; t_0, x_0)\,, \Gamma) < \varepsilon)$$

Si de plus

$$(\exists \eta > 0)\,(\forall t_0 \in \mathbb{R})\,(\forall x_0 : d\,(x_0, \Gamma) < \eta) \Longrightarrow d\,(x\,(t; t_0, x_0)\,, \Gamma) \longrightarrow 0 \textit{ quand } t \longrightarrow \infty$$

on dira qu'elle est orbitalement asymptotiquement stable (cycle limite stable).

Dans cette partie on va montrer comment utiliser des fonctions auxiliaires pour obtenir des renseignements sur la stabilité des points d'équilibre.

La théorie de Liapounov

Définition 1.18 *(Fonctions définies positives)*

Une fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie positive (resp définie négative) , où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage de l'origine, si

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ & \quad et \\ \forall x &\in \Omega \backslash \{0\}\,, V(x) > 0 \ (resp.\ V(x) < 0). \end{aligned}$$

Définition 1.19 *(Fonctions semi définies positives)*

Une fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ est semi-définie positive (resp semi-définie négative), où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage de l'origine, si

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ & \quad et \\ \forall x &\in \Omega \backslash \{0\}\,, V(x) \geq 0 \ (resp.\ V(x) \leq 0). \end{aligned}$$

Définition 1.20 *(Fonctions de Liapounov)*

On appelle fonction de Liapounov toute fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage de l'origine telle que:

1/ V est définie positive.

2/ la dérivée totale $\dot{V}$ pour (1.3) est semi-définie négative.

Théorèmes de stabilité

Théorème 1.4 *S'il existe une fonction V de Liapounov pour l'équation (1.3), alors l'origine est stable.*

Si de plus $\dot{V}$ est définie négative alors l'origine est asymptotiquement stable.

Equations périodiques

Soit :

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n; (t, x) \mapsto f(t, x)$$

une application d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

On dit que f est $T-$périodique s'il existe un nombre $T > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \Omega : f(t + T, x) = f(t, x)$. on dira de même que l'équation

$$\dot{x} = f\,(t, x) \tag{1.4}$$

est $T-$périodique.

Théorème 1.5 *Si $x :]\tau_1, \tau_2[\longrightarrow \mathbb{R}^n; t \longmapsto x(t)$ est une solution maximale de l'équation $T-$périodique (1.4) alors*

$x^* :]\tau_1 - T, \tau_2 - T[\longrightarrow \mathbb{R}^n; t \longmapsto x^*(t)$ avec $x^*(t) = x(t + T)$ est aussi une solution maximale de la même équation.

Proposition 1.8 *Une solution x de l'équation (1.4) définie sur I est $T-$périodique si et seulement s'il existe un $\tau \in I$ tel que $x(\tau + T) = x(\tau)$*

2

Généralisation du théorème de Poincaré-Bendixson à des systèmes d'ordre $n > 2$

2.1 Introduction

Le théorème de Poincaré-Bendixson [11, pp151] sur l'existence d'orbites périodiques est valable uniquement pour les systèmes autonomes dans le plan (n=2), et ne peut pas être généralisé à $\mathbb{R}^n$ sans ajouter d'autres hypothèses. Dans le présent chapitre, moyenant certaines conditions nous généralisons ce théorème au cas $n > 2$.

2.2 Existence d'orbites périodiques pour les équations différentielles autonomes dans $\mathbb{R}^n$.

Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

où f est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $\Omega(\Gamma)$ l'ensemble des points $\omega-$limite positifs de la trajectoire Γ.

Les résultats suivants donnent des conditions suffisantes pour que $\Omega(\Gamma)$ contienne une orbite périodique de l'équation (2.1) .

Supposons que $f(x)$ satisfait l'hypothèse suivante

($\mathbf{H}_1$) Il existe un sous-ensemble fermé S de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(x)$ soit localement lipschitzienne sur S.

2.2.1 Rappel du théorème de Poincaré-Bendixson

Théorème 2.1 *On suppose l'hypothèse* $(\mathbf{H}_1)$ *vérifiée et que n=2 ,Si* S *contient une semi-orbite bornée* Γ *et que* $\Omega(\Gamma)$ *ne contient aucun point singulier de l'équation* (2.1) *alors* $\Omega(\Gamma)$ *est une orbite périodique de l'équation* (2.1).

2.2.2 Une Généralisation du théorème précédent

On peut généraliser ce résultat au cas $n > 2$, en ajoutant ces deux hypothèses :

$(\mathbf{H}_2)$ Il existe une forme quadratique : $U(x) = x^* P_u x$ telle que

$$U(x_1(t) - x_2(t)) \leq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

où $x_1(t)$, $x_2(t)$ sont des solutions bornées de l'équation (2.1) entièrement contenues dans S.

$(\mathbf{H}_3)$ P_u est une matrice carrée d'ordre n, réelle, constante, symétrique, régulière et possédant 2 valeurs propres négatives et $(n-2)$ valeurs propres positives.

On a alors le théorème suivants :

Théorème 2.2 *Supposons que l'équation* (2.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3)$ *et possède une semi orbite bornée* $\Gamma \subset S$. *Si* $\Omega(\Gamma)$ *ne contient aucun point singulier de l'équation* (2.1) *alors* $\Omega(\Gamma)$ *contient au moins une orbite périodique.*

Démonstration : Puisque $U(x)$ satisfait $(\mathbf{H}_3)$, on peut la réécrire sous la forme canonique

$$U(x) = |Y|^2 - |X|^2$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne .

en utilisant la transformation linéaire: $x = Q \operatorname{col}(X, Y)$, où $X \in \mathbb{R}^2$, $Y \in \mathbb{R}^{n-2}$ et Q est une matrice carrée d'ordre n et inversible.

Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \Pi(x) = \sqrt{2} X \end{aligned}$$

puisque $x = Q \operatorname{col}(X, Y)$ on a $Q^{-1}x = \operatorname{col}(X, Y)$.

Donc : $|Q^{-1}x|^2 = |X|^2 + |Y|^2$.

On aura donc $U(x) + |\Pi(x)|^2 = -|X|^2 + |Y|^2 + 2|X|^2 = |Y|^2 + |X|^2 = |Q^{-1}x|^2$.

D'où

$$2\left|Q^{-1}x\right|^2 \geq \left|\Pi(x)\right|^2 = \left|Q^{-1}x\right|^2 - U(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

Si $x_1(t)$, $x_2(t)$ sont deux solutions bornées de l'équation (2.1) définie dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans S, alors en posant $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ dans (2.2) on obtient d'après l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$

$$\left|Q^{-1}\right|\sqrt{2}\left|x_1(t) - x_2(t)\right| \geq \left|\Pi(x_1(t)) - \Pi(x_2(t))\right| \geq |Q|^{-1}\left|x_1(t) - x_2(t)\right| \tag{2.3}$$

Puisque l'application $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ est linéaire, $\Pi x_1(t)$ est différentiable et l'on a $\dfrac{d}{dt}\Pi x_1(t) = \Pi\left(\dfrac{dx_1(t)}{dt}\right)$. On peut remplacer $x_2(t)$ dans (2.3) par la solution $x_1(t+h)$, où h est une constante.

On obtient

$$\left|\Pi x_1(t+h) - \Pi x_1(t)\right| \geq |Q|^{-1}\left|x_1(t+h) - x_1(t)\right| \quad \forall t, h \in \mathbb{R}$$

En divisant par $|h|$ et en passant à la limite quand $h \to 0$, on aura

$$\left|\frac{d}{dt}\Pi x_1(t)\right| \geq |Q|^{-1}\left|\left(\frac{d}{dt}x_1(t)\right)\right| \tag{2.4}$$

Puisque Γ est bornée, $\Omega(\Gamma)$ est un ensemble borné et non vide. De plus $\Omega(\Gamma) \subset S$, car S est fermé. Il est bien connu que $\Omega(\Gamma)$ est un ensemble fermé invariant (voir [16, pp 338]) ; l'invariance de l'ensemble $\Omega(\Gamma)$ veut dire que si la solution $x(t)$ de (2.1) vérifie $x(t_\circ) \in \Omega(\Gamma)$ pour un certain $t_\circ$ alors la solution $x(t)$ existe sur $]-\infty, +\infty[$ et satisfait $x(t) \in \Omega(\Gamma)$ pour tout t. Ceci implique que $\Omega(\Gamma)$ est la réunion des orbites complètes de (2.1), car $\Omega(\Gamma)$ ne contient aucun point singulier.

Puisque deux points quelconques y_1, y_2 de $\Omega(\Gamma)$ peuvent s'écrire $x_1(0), x_2(0)$ pour deux solutions convenables $x_1(t), x_2(t)$ de l'équation (2.1), on obtient d'après (2.3)

$$\left|Q^{-1}\right|\sqrt{2}\left|y_1 - y_2\right| \geq \left|\Pi y_1 - \Pi y_2\right| \geq |Q|^{-1}\left|y_1 - y_2\right| \qquad \forall y_1, y_2 \in \Omega(\Gamma)$$

Ce qui montre que l'application Π est un homéomorphisme de $\Omega(\Gamma)$ dans le plan $\Pi\Omega(\Gamma)$. D'après (2.3) si $\Pi(x_1(t)) = \Pi(x_2(t))$ pour une valeur t alors $x_1(t) = x_2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Si Γ_1 et Γ_2 sont deux orbites complètes, différentes et contenues dans $\Omega(\Gamma)$ alors leurs images par Π sont deux orbites disjointes, c'est -à-dire que l'image, par Π, de deux orbites différentes contenues dans $\Omega(\Gamma)$ sont des courbes disjointes dans le plan et l'image d'une orbite périodique contenue dans $\Omega(\Gamma)$ est une orbite simple, fermée dans $\mathbb{R}^2$.

Si $\Omega(\Gamma)$ contient une orbite complète Γ_1 qui n'est pas périodique alors $\Pi\Gamma_1$ ne se recoupe jamais.

Si une solution $x_1(t)$ de (2.1) décrit une orbite Γ_1 dans $\Omega(\Gamma)$ alors le vecteur tangent dans le plan à la courbe $\Pi\Gamma_1$ au point $\Pi x_1(t)$ est $\dfrac{d}{dt}\Pi x_1(t)$ qui est différent de zero d'après (2.4), et de plus $\Omega(\Gamma_1) \subset \Omega(\Gamma)$ car $\Omega(\Gamma)$ est un ensemble fermé.

On choisit maintenant des solutions $x_1(t), x_2(t)$ et $x_3(t)$ de l'équation (2.1) telles que leurs orbites complètes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ satisfassent

$$\Gamma_1 \subset \Omega(\Gamma), \quad \Gamma_2 \subset \Omega(\Gamma_1), \quad \Gamma_3 \subset \Omega(\Gamma_2).$$

Alors

$$\Omega(\Gamma_2) \subset \Omega(\Gamma_1) \subset \Omega(\Gamma)$$

Soit R le point $x_3(0)$ sur Γ_3 et

$$v = \Pi\left(\frac{d}{dt}x_3(0)\right)$$

qui est un vecteur tangent à la courbe plane $\Pi\Gamma_3$ au point ΠR.

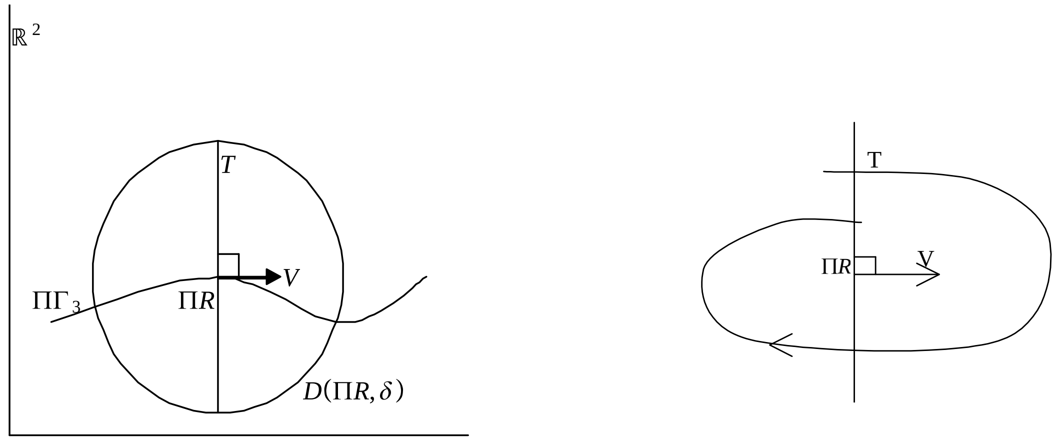


Fig1

Soit D un disque ouvert de centre ΠR, et de rayon δ (petit) ; noté $D(\Pi R, \delta)$.
Puisque R est un point $\omega-$limite pour Γ_1 et Γ_2, alors les courbes planes $\Pi\Gamma_1$ et $\Pi\Gamma_2$ doivent passer à travers le disque D une infinité de fois quand $t \to \infty$.
Lorsque $\Pi x_1(t)$ est proche de $\Pi x_3(0)$, (2.3) montre que $x_1(t)$ est proche de $x_3(0)$ et l'équation (2.1) montre que $\dfrac{d}{dt}x_1(t)$ est proche de $\dfrac{d}{dt}x_3(0)$, et par conséquent $\Pi\ \dfrac{d}{dt}x_1(t)$ est proche de $v = \Pi\dfrac{d}{dt}x_3(0)$.
Si on prend δ suffisamment petit, alors le long de tout arc de $\Pi\Gamma_1$ dans le disque D, le vecteur tangent est approximativement égale à v. Ces arcs de $\Pi\Gamma_1$ sont par conséquent

approximativement des segments droits parallèles à v.
Ce résultat est aussi vrai pour un arc de $\Pi\Gamma_2$ dans D.
On appelle segment transverse T, le diamètre de D qui est perpendiculaire à v.

Alors tout arc de $\Pi\Gamma_1$ ou $\Pi\Gamma_2$ dans D coupe T en au plus un point intérieur à D (voir la figure 2).

Il reste à démontrer maintenant que l'une des orbites Γ_1 ou Γ_2 est périodique.

Procédons par l'absurde et supposons qu'il n'en est pas ainsi, alors les trajectoires $\Pi\Gamma_1$ et $\Pi\Gamma_2$ ne se recoupent jamais. Pour tout t, $\Pi\Gamma_2$ coupe le segment transverse T en des points différents. Soient α, β les points de Γ_2 tels que $\Pi\alpha$, $\Pi\beta$ soient deux points successifs d'intersections de $\Pi\Gamma_2$ avec T. On a alors

$$\Pi\alpha \neq \Pi\beta$$

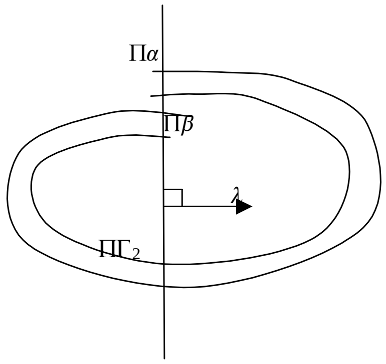


Fig2

et α, β sont des points $\omega-$limites de Γ_1 car $\Gamma_2 \subset \Omega(\Gamma_1)$ Donc, il existe des arcs de $\Pi\Gamma_1$ qui coupent T en des points aussi proches que l'on veut de $\Pi\alpha$ et $\Pi\beta$. Par conséquent, d'après la figure 2, $\Pi\Gamma_1$ coupe T d'abord en un point proche de $\Pi\alpha$ et le recoupe ensuite en un point proche de $\Pi\beta$; et $\Pi\Gamma_1$ ne peut pas recouper T en un point proche de $\Pi\alpha$, car $\Pi\Gamma_1$ ne se recoupe pas ; et elle ne peut couper T que dans la direction de v : contradiction ,car α est un point $\omega-$limite de Γ_1.

Donc Γ_1 ou Γ_2 est une orbite périodique, ce qui montre que $\Omega(\Gamma)$ contient au moins une orbite périodique. ■

Remarque 2.1 *Le théorème 2.2 ci-dessus n'est pas la meilleure généralisation du théorème de Poincaré-Bendixson ; en effet $\Omega(\Gamma)$ peut contenir plus d'une orbite périodique.*

Pour obtenir des résultats plus forts (assurer l'unicité) nous ajoutons les hypothèses suivantes :

$(\mathbf{H}_4)$ Il existe des constantes positives λ, ε_1 et une forme quadratique $V(x)$ telle que pour toutes solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de l'équation (2.1) on ait

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t)-x_2(t))+2\lambda V(x_1(t)-x_2(t))\leq -\varepsilon_1 |x_1(t)-x_2(t)|^2 \tag{2.5}$$

pour tout les t pour lesquels $x_1(t)$ et $x_2(t)$ appartiennent à S.

$(\mathbf{H}_5)$ Il existe des constantes positives μ, ε_2 et une forme quadratique $W(x)$ telle que pour toutes solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de l'équation (2.1) on ait

$$\frac{d}{dt}W(x_1(t)-x_2(t))-2\mu W(x_1(t)-x_2(t))\leq -\varepsilon_2 |x_1(t)-x_2(t)|^2 \tag{2.6}$$

pour tout les t pour lesquels $x_1(t)$ et $x_2(t)$ appartiennent à S.

$(\mathbf{H}_6)$ $V(x)=x^\star P_v x,\ W(x)=x^\star P_w x$

où P_v et P_w sont des matrices carrées d'ordre n symétriques telles que (P_v-P_w) possède deux valeurs propres négatives et $(n-2)$ valeurs propres positives.

On a alors le théorème suivant

Théorème 2.3 *Supposons que l'équation* (2.1) *vérifie les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_4)$, $(\mathbf{H}_5)$, $(\mathbf{H}_6)$ *et possède une semi-orbite bornée* $\Gamma\subset S$. *Si* $\Omega(\Gamma)$ *ne contient aucun point singulier de l'équation* (2.1), *alors* $\Omega(\Gamma)$ *est une orbite périodique de l'équation* (2.1) *et elle est unique.*

Démonstration : Les expressions (2.5) et (2.6) peuvent s'écrire respectivement

$$\frac{d}{dt}\left[e^{2\lambda t}V(x_1(t)-x_2(t))\right]\leq -\varepsilon_1 e^{2\lambda t}|x_1(t)-x_2(t)|^2 \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-2\mu t}W(x_1(t)-x_2(t))\right]\leq -\varepsilon_2 e^{-2\mu t}|x_1(t)-x_2(t)|^2 . \tag{2.8}$$

L'ensemble fermé S contient la fermeture S_0 de Γ. Les hypothèses du théorème 2.3 restent vraies si on peut remplace S par S_0.

Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des solutions de l'équation (2.1) contenues dans S_0 pour $t\in\mathbb{R}$, alors la bornitude de $x_1(t)-x_2(t)$ assure que

$$\lim_{t\to-\infty}e^{2\lambda t}V(x_1(t)-x_2(t))=0=\lim_{t\to+\infty}e^{-2\mu t}W(x_1(t)-x_2(t)).$$

D'après (2.7) et (2.8) les fonctions $e^{2\lambda t}V(x_1(t)-x_2(t))$ et $e^{-2\mu t}W(x_1(t)-x_2(t))$ sont monotones décroissantes sur $\mathbb{R}$ et par conséquent satisfont

$$e^{2\lambda t}V(x_1(t)-x_2(t))\leq 0\leq e^{-2\mu t}W(x_1(t)-x_2(t)),\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

ceci implique que

$$U\left(x_1\left(t\right)-x_2\left(t\right)\right)\leq 0, \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

où $U(x)=V(x)-W(x)$. Pour cette forme quadratique $U(x)$, $(\mathbf{H}_3)$ se déduit de $(\mathbf{H}_6)$.

Les hypothèses du théorème 2.2 sont alors vérifiées si on remplace S par S_0 et $U(x)$ par $V(x)-W(x)$. Il s'ensuit du théorème 2.2 que $\Omega\left(\Gamma\right)$ contient au moins une orbite périodique Γ_0.

Montrons maintenant l'unicité.

Pour toute trajectoire Γ_1 dans S_0, $\Pi\Gamma$ et $\Pi\Gamma_1$ sont des courbes planes disjointes et infiniment proches l'une de l'autre. Par suite on aura

$$\Omega\left(\Gamma_1\right)=\Omega\left(\Gamma\right)=\Gamma_0.$$

En effet, Supposons le contraire, alors Γ_1 doit converger vers une solution périodique Γ_0' différente de Γ_0, par conséquent on aura $\Pi\Gamma_0'$ à l'intérieur de $\Pi\Gamma_0$, où vis versa (car $\Pi\Gamma_1$ et $\Pi\Gamma_0$ sont infiniment proches l'une de l'autre).

Si, par exemple, $\Pi\Gamma_0'$ est à l'intérieur de $\Pi\Gamma_0$, $\Pi\Gamma_1$ traverse $\Pi\Gamma_0$, ceci contredit le fait que les courbes planes $\Pi\Gamma$, $\Pi\Gamma_0$ et $\Pi\Gamma_1$ sont disjointes.

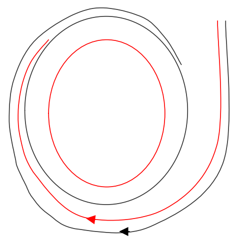


Fig3

■

Lemme 2.1 *(voir [27]) Si $f(x)$ satisfait $(\mathbf{H}_1)$ alors pour tout sous ensemble-compact $S_\circ$ de S il existe une constante $\rho>0$, telle que*

$$\left|f(x)-f(y)\right|\leq\rho\left|x-y\right|,\forall x,y\in S_\circ. \tag{2.9}$$

Considérons l'hypothèse

$(\mathbf{H}_7)$ $V(x) = x^* P_v x$

où P_v est une matrice carrée d'ordre n, réelle, constante, symétrique, et possédant deux valeurs propres négatives et $(n-2)$ valeurs propres positives.

Théorème 2.4 *Supposons que l'équation* (2.1) *vérifie les hypothèses* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_4), (\mathbf{H}_7)$ *est possède une semi-orbite bornée* $\Gamma \subset S$. *Si* $\Omega(\Gamma)$ *ne contient aucun point singulier de* (2.1) *alors* $\Omega(\Gamma)$ *est une orbite périodique de l'équation* (2.1) *et elle est unique.*

Démonstration : Soit ρ la constante donnée dans le lemme 2.1 lorsque le compact $S_\circ$ est choisis égal à la fermeture de Γ. On définit

$$W(x) = \frac{1}{2}(\mu - \rho)^{-1} |x|^2, \quad \text{où} \quad \mu > \rho.$$

On a alors

$$P_v - P_\omega = P_v - \frac{1}{2}(\mu - \rho)^{-1} I$$

et l'hypothèse $(\mathbf{H}_6)$ se déduit de $(\mathbf{H}_7)$ pourvue que μ soit suffisamment grand. Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des solutions de l'équation (2.1) alors (2.9) nous donne

$$\begin{aligned}
(\mu - \rho)\left(\frac{d}{dt} - 2\mu\right) W(x_1(t) - x_2(t)) &= (x_1 - x_2)^* \left[f(x_1) - f(x_2) - \mu(x_1 - x_2)\right] \\
&\leq (\rho - \mu) |x_1 - x_2|^2
\end{aligned}$$

pour tout les t en lesquels $x_1(t), x_2(t) \in S_\circ$ Par suite $W(x)$ satisfait $(\mathbf{H}_5)$. D'où l'équation (2.1) vérifie toutes les hypothèses du théorème 2.3 en remplaçant S par $S_\circ$. La conclusion pour le théorème 2.4 s'ensuit alors du théorème 2.3. ■

Remarque 2.2 *: Dans le cas* $n = 2$ *, en prenant*

$$V(x) = -\frac{1}{2}(\lambda - \rho)^{-1} |x|^2$$

Les hypothèses $(\mathbf{H}_4)$ *et* $(\mathbf{H}_7)$ *sont vérifiées (*ρ *est la constante du lemme 2.1 et* $\lambda > \rho$ *) tel que si* $x_1(t), x_2(t)$ *sont des solutions de l'équation* (2.1) *alors*

$$\begin{aligned}
(\lambda - \rho)\left(\frac{d}{dt} + 2\lambda\right) V(x_1 - x_2) &= (x_1 - x_2)^* \left[f(x_2) - f(x_1) - \lambda(x_1 - x_2)\right] \\
&\leq (\rho - \lambda) |x_1 - x_2|^2,
\end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ *tel que* $x_1(t), x_2(t) \in S_\circ$.

Toutes les hypothèses du théorème 2.4 sont vérifiées en remplaçant S et $V(x)$ par $S_\circ$, et $-\frac{1}{2}(\lambda - \rho)^{-1} |x|^2$, donc le théorème de Poincaré -Bendixson est un cas particulier du théorème 2.4.

Le théorème 2.4 est déduit du théorème 2.3, alors le théorème 2.3 est aussi une généralisation du théorème de Poincaré-Bendixson .

2.2.3 Existence d'orbites récurrentes

Dans la pratique ,pour appliquer les résultats des théorèmes 2.3 et 2.4 il est nécessaire de prouver l'existence d'une semi-orbite bornée Γ de l'équation (2.1) telle que $\Omega(\Gamma)$ ne contienne aucun point singulier.

Des conditions suffisantes qui assurent l'existence d'une telle semi-orbite sont données par les théorèmes de ce paragraphe .

Considérons les hypothèses suivantes :

$(\mathbf{H}_8)$ $x = 0$ est l'unique point de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = 0$.

$(\mathbf{H}_9)$ La matrice jacobienne $J(x) = \left[\dfrac{df}{dx}(x)\right]$ existe et est continue sur un voisinage de $x = 0$.

$(\mathbf{H}_{10})$ Il existe une constante $\beta < 1$ et une matrice K de type $n \times n$ telle que

$$|x|^{-\beta}\left[f(x) - Kx\right] \to 0, \quad \text{quand } x \to \infty$$

$(\mathbf{H}_{11})$ $J(0)$ ne possède aucune valeurs propre z telle que $0 \geq \operatorname{Re} z \geq -\lambda$, où λ est la constante de l'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$.

$(\mathbf{H}_{12})$ La matrice K possède au moins une valeur propre $z_\circ$ telle que $0 > \operatorname{Re} z_\circ > -\lambda$, mais ne possède aucune valeurs propre z telle que $\mu \geq \operatorname{Re} z \geq 0$.

Théorème 2.5 *(voir [27]) Supposons que l'équation* (2.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_4)$, $(\mathbf{H}_5)$ *avec* $S = \mathbb{R}^n$.

Supposons de plus que $(\mathbf{H}_8)$, $(\mathbf{H}_9)$, $(\mathbf{H}_{10})$, $(\mathbf{H}_{11})$,$(\mathbf{H}_{12})$ *soient satisfaites. Alors la semi-orbite* Γ *de l'équation* (2.1) *possède les trois propriétés suivantes*

1- *Si* $\Omega(\Gamma)$ *est non vide, alors* Γ *est une semi-orbite bornée .*

2- *Si* $0 \in \Omega(\Gamma)$, *alors* 0 *est l'unique point dans* $\Omega(\Gamma)$ *.*

3- $0 \notin \Omega(\Gamma)$ *pour au moins une semi -orbite bornée* Γ *de* (2.1).

Corollaire 2.1 *(voir [27]) Supposons que* $(\mathbf{H}_6)$ *soit vérifiée ainsi que les hypothèses du théorème 2.5. Alors l'équation* (2.1) *possède au moins une orbite périodique. De plus pour toute semi -orbite* Γ *de l'équation* (2.1) *l'ensemble* $\Omega(\Gamma)$ *est vide ou réduit au point critique* 0 *ou bien est une orbite périodique de l'équation* (2.1).

Ce corollaire décrit en plus le comportement asymptotique de toutes les solutions de l'équation (2.1) .

On peut obtenir un résultat analogue en remplaçant les hypothèses $(\mathbf{H}_{11})$ et $(\mathbf{H}_{12})$ par les hypothèses suivantes

$(\mathbf{H}_{13})$ $J(0)$ ne possède pas de valeurs propre z telle que $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \mu$.

$(\mathbf{H}_{14})$ La matrice K possède au moins une valeur propre $z_\circ$ telle que $0 < \operatorname{Re} z_0 < \mu$, mais ne possède aucune valeur propre z telle que $0 \geq \operatorname{Re} z \geq -\lambda$.

Théorème 2.6 *(voir [27]) Supposons que l'équation* (2.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_4)$, $(\mathbf{H}_5)$ *avec* $S = \mathbb{R}^n$ *ainsi que les hypothèses* $(\mathbf{H}_8)$, $(\mathbf{H}_9)$, $(\mathbf{H}_{10})$, $(\mathbf{H}_{13})$, $(\mathbf{H}_{14})$. *Alors l'équation* (2.1) *possède au moins une semi orbite bornée* Γ *telle que* $0 \notin \Omega(\Gamma)$ *. Si de plus* $(\mathbf{H}_6)$ *est satisfaite alors l'équation* (2.1) *possède au moins une orbite périodique.*

Théorème 2.7 *(voir [27]) Supposons que* $(\mathbf{H}_4)$ *est satisfaite avec* $S = \mathbb{R}^n$*, et qu'il existe une constante* $\rho > 0$ *telle que* (2.9) *soit satisfaite pour tout* x, y *de* $\mathbb{R}^n$*. Supposons de plus que les hypothèses* $(\mathbf{H}_8)$, $(\mathbf{H}_9)$, $(\mathbf{H}_{10})$ *et* $(\mathbf{H}_{11})$ *soient satisfaites. Si* K *possède au moins une valeur propre* $z_\circ$ *telle que* $0 > \operatorname{Re} z_\circ > -\lambda$ *, et n'admet aucune valeur propre* z *telle que* $\operatorname{Re} z \geq 0$*. Alors l'équation* (2.1) *possède au moins une semi-orbite bornée* Γ *telle que* $0 \notin \Omega(\Gamma)$ *, si de plus* $(\mathbf{H}_7)$ *est satisfaite alors l'équation* (2.1) *possède au moins une orbite périodique.*

Théorème 2.8 *(voir [27]) Supposons que l'équation* (2.1) *vérifie l'hypothèse* $(\mathbf{H}_4)$ *avec* $S = \mathbb{R}^n$*, et qu'il existe une constante* $\rho > 0$ *telle que la formule* (2.9) *soit vérifiée pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^n$*. Supposons de plus que les hypothèses* $(\mathbf{H}_8)$, $(\mathbf{H}_9)$ *et* $(\mathbf{H}_{10})$ *soient satisfaites et* $J(0)$ *ne possède aucune valeur propre* z *telle que* $\operatorname{Re} z \geq 0$ *. Si* K *possède au moins une valeur propre* $z_\circ$ *avec* $\operatorname{Re} z_\circ > 0$ *et n'admet aucune valeur propre* z *telle que* $0 \geq \operatorname{Re} z \geq -\lambda$*.Alors l'équation* (2.1) *possède au moins une semi-orbite bornée* Γ *telle que* $0 \notin \Omega(\Gamma)$*. Si de plus l'hypothèse* $(\mathbf{H}_7)$ *est satisfaite alors l'équation* (2.1) *possède au moins une orbite périodique.*

2.3 Existence d'orbites périodiques orbitalement stables dans $\mathbb{R}^n$

On rappelle d'abord le théorème de Poincaré-Bendixson dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.9 *Soit* A *une région annulaire dans le plan qui ne contient pas de points critiques de l'équation* (2.1) *, alors toute trajectoire bornée et contenue dans* A *converge vers une trajectoire fermée et* A *contient au moins une trajectoire fermée qui soit orbitalement stable.*

Birkhoff (voir [32]) a donné une autre version à ce théorème :

Théorème 2.10 *Si* Γ *est une semi -orbite, dans un ouvert* S *de* $\mathbb{R}^2$*, de l'équation* (2.1) *, si l'équation* (2.1) *n'a pas de point critique dans l'ensemble borné* $\Omega(\Gamma)$ *alors* $\Omega(\Gamma)$ *consiste en une trajectoire fermée et elle est unique.*

Ce résultat peut être généralisé aux équations différentielles dans $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, en ajoutant les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}_{14}$) Il existe des constantes positives λ, ε et une matrice réelle constante symétrique et régulière P telle que

$$(x-y)^* P [f(x) - f(y) + \lambda (x-y)] \leq -\varepsilon |x-y|^2 \tag{2.10}$$

pour toute x, y dans l'ouvert S de $\mathbb{R}^n$.

($\mathbf{H}_{15}$) Il existe un sous-ensemble ouvert et borné D de $\mathbb{R}^n$, positivement invariant avec fermeture $\overline{D} \subset S$ tel que sa frontière ∂D entoure toute orbite de l'équation (2.1) qui la rencontre.

Cette dernière hypothèse signifie que si x est une solution de (2.1) telle que $x(t_0) \in \partial D$ alors $x(t) \in \overline{D}$ pour tout $t > t_0$ et il existe $t_1 > t_0$ tel que $x(t) \in D$ pour tout $t > t_1$.

Nous avons alors les théorèmes suivants :

Théorème 2.11 *(voir [32]) Supposons que l'équation* (2.1) *satisfait* ($\mathbf{H}_{14}$) *et possède une trajectoire fermée* $\Gamma_\circ \subset S$*, telle que* $\Gamma_\circ$ *soit orbitalement stable et isolée, alors* $\Gamma_\circ$ *est asymptotiquement orbitalement stable.*

Démonstration : Par l'absurde, on suppose que (2.1) satisfait ($\mathbf{H}_{14}$) et possède une trajectoire fermée $\Gamma_\circ \subset S$ orbitalement stable et isolée, mais non asymptotiquement orbitalement stable.

Alors il existe un voisinage $V(\varepsilon, \Gamma_\circ)$ qui contient une semi-orbite Γ telle que $\Omega(\Gamma) \neq \Gamma_\circ$.

Si ε est suffisamment petit alors $\overline{V}(\varepsilon, \Gamma_\circ)$ ne contient aucun point critique et $\overline{V}(\varepsilon, \Gamma_\circ) \subset S$, alors $\Omega(\Gamma)$ consiste en une seule trajectoire fermée Γ_ε , donc $\Gamma_\circ$ est non-isolée car $\overline{V}(\varepsilon, \Gamma_\circ)$ contient au moins une trajectoire $\Gamma_\varepsilon \neq \Gamma_\circ$ contradiction .

Donc $\Gamma_\circ$ est asymptotiquement orbitalement stable. ■

Théorème 2.12 *(voir [32]) Supposons que l'équation* (2.1) *satisfait les hypothèses* ($\mathbf{H}_{14}$) *et* ($\mathbf{H}_{15}$) *et que* D *ne contient aucun point critique de* (2.1) *alors toute semi-orbite dans* D *converge vers une trajectoire fermée quand* $t \to +\infty$ *et* D *contient au moins une trajectoire fermée qui soit orbitalement stable. Si de plus* f *est analytique dans* S *alors* D *contient seulement un nombre fini de trajectoires fermées et au moins l'une d'elles est asymptotiquement orbitalement stable.*

3

Généralisation du théorème de l'index et du critère de Bendixson

Le théorème de Poincaré sur la somme des indices, d'une équation différentielle autonome dans le plan, aux points critiques situés à l'intérieur d'une orbite périodique peut être généralisé, en ajoutant certaines hypothèses, aux équations différentielles en dimension supérieurs à 2. Une autre généralisation est obtenue sous les mêmes conditions, c'est celle du critère négatif de Bendixson ; celui qui exclut les orbites périodiques d'une région dans laquelle la divergence du champ de vecteurs de l'équation différentielle ne change pas de signe et ne s'annule pas.

3.1 Rappel du résultat de Poincaré-Bendixson dans $\mathbb{R}^2$; (théorème de l'index)

3.1.1 Indice d'un champ de vecteurs le long d'une courbe fermée dans $\mathbb{R}^2$

Soit C une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$, pas nécessairement une trajectoire, et soit

$$f = (P, Q)^T \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right), \ x \in C$$

le champ de vecteur autonome défini sur C et ne s'y annulant pas.

On note θ_x la détermination de l'angle que fait $f(x)$ avec l'axe ox.

En se déplaçant autour de la courbe C, l'angle θ_x change continûment (f continue) de valeurs, après une boucle complète, le champ de vecteurs retourne à la position originale, alors θ_x change par un multiple de 2π.

Soit $\triangle\theta$ le changement de θ_x autour de la courbe C, c'est-à-dire $\triangle\theta$ est le changement dans

$$\theta_x = \tan^{-1}\frac{Q\,(x)}{P\,(x)}$$

quand le point x traverse exactement une fois la courbe C dans une direction positive.
On définit l'indice de C, $I_f(C)$ par

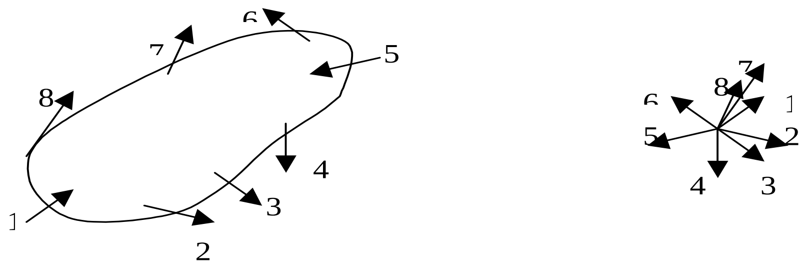
$$I_f(C) = \frac{1}{2\pi}\triangle\theta$$

alors $I_f(C)$ représente le nombre de multiple de 2π que le champ de vecteurs fait quand il traverse une fois la courbe, et par suite l'indice est un entier.

L'indice $I_f(C)$ peut être calculé en utilisant la formule

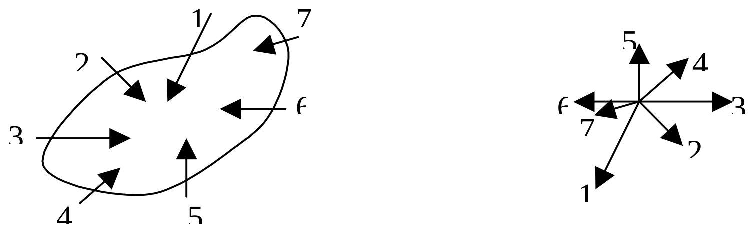
$$I_f(C) = \frac{1}{2\pi}\oint_C d\tan^{-1}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{PdQ - QdP}{P^2+Q^2}$$

Exemple 1 *(voir la fig 4 et 5)*



$$I_f(C) = \frac{1}{2\pi}(-2\pi) = -1$$

Fig 4



$$I_f(C) = \frac{1}{2\pi}(2\pi) = 1$$

Fig 5

3.1.2 Rappel du résultat de Poincaré-Bendixson dans $\mathbb{R}^2$

1- Toute orbite périodique contient au moins un point critique en son intérieur.

2- Si une orbite périodique contient seulement un nombre fini de points critiques dans son intérieur, alors la somme des indices de ces points critiques est égal à 1 .

Dans le cas $n > 2$, il n'existe pas en général une relation entre points critiques et solutions périodiques, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = zx - y \\ \dot{y} = zy + x \\ \dot{z} = 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

Le système n'admet aucun point critique dans $\mathbb{R}^3$, mais le cercle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ est une solution périodique pour le système.

3.2 Généralisation du théorème de l'index

Pour généraliser les résultats de Poincaré-Bendixson il faut ajouter d'autres hypothèses.

Considérons l'équation différentielle autonome suivante

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.

Considérons les hypothèses suivantes

$(\mathbf{H}_1)$ Toute solution $x(t)$ de l'équation (3.1) existe et est définie sur tout $\mathbb{R}$.

$(\mathbf{H}_2)$ Il existe des constantes positives λ, ε et une forme quadratique

$$V(x) = x^t P_v x$$

où P_v est une matrice réelle constante symétrique et régulière de type $n \times n$, telle que

$$2\lambda V\left(x_1(t) - x_2(t)\right) + \frac{d}{dt} V\left(x_1(t) - x_2(t)\right) \leq -\varepsilon (x_1(t) - x_2(t))^2 \tag{3.2}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, et pour toutes solutions $x_1(t), x_2(t)$ de l'équation (3.1).

$(\mathbf{H}_3)$ P_v possède j valeurs propres négatives et $n - j$ valeurs propres positives.

Puisque la forme quadratique $V(x)$ satisfait $(\mathbf{H}_3)$, elle peut être réduite à la forme canonique

$$V(x) = Y^2 - X^2$$

par la substitution linéaire $x = Q\,\mathrm{col}(X, Y)$, $X \in \mathbb{R}^j$, $Y \in \mathbb{R}^{n-j}$.

Où Q est une matrice réelle inversible d'ordre n.

On définie l'application linéaire:

$$\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^j ; x \mapsto \Pi\left(x\right) = X$$

elle satisfait

$$V(x) + 2\left|\Pi x\right|^2 = \left|Q^{-1}x\right|^2 \geq \left|\Pi x\right|^2 \tag{3.3}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne.

Si $j = 2$, alors Π est une application de $\mathbb{R}^n$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Pour ce cas l'analogue du théorème de l'index de Poincaré est démontré.

Si la $n \times n$ matrice jacobienne

$$J(x) = \left[\frac{df}{dx}(x)\right]$$

existe et est continue au voisinage de c ; où c est un point critique isolé de l'équation (3.1) . Alors l'indice $ind(c, f)$ est un entier défini par

$$ind(c, f) = sign \det J(c) \tag{3.4}$$

Théorème 3.1 *(voir [28, 29]) Supposons que l'équation* (3.1) *possède une orbite périodique* Γ *et que* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$ *soient satisfaites avec* $j = 2$*, alors* $\Pi\Gamma$ *est une courbe simple fermée dans* $\mathbb{R}^2$ *et l'équation* (3.1) *admet au moins un point critique* c *tel que* Πc *soit à l'intérieur de* $\Pi\Gamma$*. Si de plus l'équation* (3.1) *possède seulement un nombre fini de points critiques* c_v *,* $(v = 1, 2, ..., k)$ *tels que* Πc_v *soit à l'intérieur de* $\Pi\Gamma$*, alors*

$$(-1)^n = ind(c_1, f) + ind(c_2, f) + ... + ind(c_k, f). \tag{3.5}$$

Pour une grande classe d'équations différentielles il est très difficile de calculer Π explicitement, pour cela on peut appliquer les corollaires suivant qui n'exigent aucune connaissance de l'application Π.

Corollaire 3.1 *(voir [28]) Supposons que* $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$ *soient satisfaites avec* $j = 2$, *si toute point critique* c *de l'équation* (3.1) *est isolé et vérifie* $(-1)^n ind(c, f) \leq 0$ *alors l'équation* (3.1) *ne possède aucune orbite périodique.*

Il est clair que (3.5) ne pourrait pas être vérifiée, dans ce cas, parce qu'elle amènerait à la contradiction $1 \leq 0$.

Aussi le fait que les point critiques soient isolés assure que ceux qui vérifient Πc est à l'intérieur de $\Pi\Gamma$ sont en nombre fini.

La contradiction peut être déduite aussi pour (3.5) dans le cas suivant

Corollaire 3.2 *(voir [28]) Supposons que l'équation* (3.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$ *avec* $j = 2$ *et ne possède que des points critiques isolés. S'il existe un entier* $k > 1$ *qui est le facteur de* $ind\,(c, f)$ *pour tout point critique* c *, alors l'équation* (3.1) *n'admet pas d'orbite périodique.*

Le cas $j = 2$ pour l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$) dans le théorème 3.1 est très restreignant sur l'équation (3.1) . Dans la suite on va voir le cas où j n'est pas nécessairement égale à deux, en ajoutant les deux hypothèses suivantes

$(\mathbf{H_4})$ Il existe des constantes positives μ, ε et une forme quadratique $W(x) = x^t P_w x$; où P_w est une matrice réelle symétrique telle que

$$-2\mu W\left(x_1(t) - x_2(t)\right) + \frac{d}{dt} W\left(x_1(t) - x_2(t)\right) \leq -\varepsilon \left|x_1(t) - x_2(t)\right|^2, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

pour toute paire de solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$ de l'équation (3.1) .

$(\mathbf{H}_5)$ La matrice $(P_v - P_w)$ possède deux valeurs propres négatives et $(n-2)$ valeurs propres positives.

Remarque 3.1 *La constante* ε *dans les hypothèses* $(\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_4)$ *n'est pas nécessairement la même.*

Comme précédemment, la forme quadratique $V(x) - W(x)$ peut être réécrite sous la forme réduite $V(x) - W(x) = Y^2 - X^2$ par la substitution $x = M \operatorname{col}(X, Y) \quad X \in \mathbb{R}^2, Y \in \mathbb{R}^{n-2}$ et M est une matrice carrée d'ordre n réelle et inversible

On définit alors l'application linéaire

$$\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto \Lambda(x) = X$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Puisque $\left|M^{-1}x\right|^2 = X^2 + Y^2$ on a

$$2\left|\Lambda(x)\right|^2 + V(x) - W(x) = \left|M^{-1}x\right|^2 \geq \left|\Lambda(x)\right|^2 \tag{3.7}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Il est démontré dans le théorème 2.3 dans le chapitre précédent que le théorème de Poincaré-Bendixson sur l'existence d'orbites périodiques peut être généralisé à des équations d'ordre supérieur à 2 satisfaisant les hypothèse $(\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_4), (\mathbf{H}_5)$.

Il est approprié de savoir si une généralisation analogue peut être déduite de ces hypothèses, pour le théorème de l'index de Poincaré.

La réponse à cette question est dans le théorème suivant

Théorème 3.2 *(voir [29]) Supposons que l'équation* (3.1) *possède une orbite périodique* Γ*, et satisfait les hypothèses* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4)$ *et* $(\mathbf{H}_5)$*. Alors* $\Lambda\Gamma$ *est une courbe fermée et simple dans* $\mathbb{R}^2$ *et l'équation* (3.1) *possède au moins un point critique* c *tel que* Λc *soit un point intérieur de* $\Lambda\Gamma$*. Si de plus l'équation* (3.1) *possède seulement un nombre fini de points critiques* c_v $(v = 1, 2, ..., k)$*, tels que* Λc_v *soient des points intérieurs à* $\Lambda\Gamma$*, alors*

$$(-1)^{n-j} = ind(c_1, f) + ind(c_2, f) + ... + ind(c_k, f) \tag{3.8}$$

pourvue que f *soit de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un voisinage de chaque point* c_v*.*

3.3 La variété réductible

Dans cette section on suppose seulement que (3.1) satisfait $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$ et $(\mathbf{H}_3)$. Pour toutes solutions $x_1(t), x_2(t)$ de (3.1) on peut réécrire $(\mathbf{H}_2)$ sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[e^{2\lambda t}V\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\right] \leq -\varepsilon e^{2\lambda t}(x_1(t) - x_2(t))^2 \leq 0 \tag{3.9}$$

ceci montre que $e^{2\lambda t}V\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$ est monotone décroissante pour toute paire de solutions $x_1(t), x_2(t)$ et est strictement décroissante si celles-ci sont distinctes. En intégrant (3.9) sur $[\theta, \tau]$ on obtient

$$e^{2\lambda\tau}V\left(x_1(\tau) - x_2(\tau)\right) \leq e^{2\lambda\theta}V\left(x_1(\theta) - x_2(\theta)\right) - \varepsilon\int_\theta^\tau e^{2\lambda t}(x_1(t) - x_2(t))^2 dt \tag{3.10}$$

Si $\int_{-\infty}^{0} e^{2\lambda t} |x(t)|^2 \, dt$ converge ; on dira que la solution $x(t)$ est réductible.

Une orbite réductible est l'orbite d'une solution réductible.

Si $x : t \longmapsto x(t)$ est une solution réductible de l'équation (3.1) et α est une constante réelle alors $y : t \longmapsto x(t+\alpha)$ est aussi une solution réductible de la même équation et elle décrit la même orbite réductible que la solution x. En particulier si une solution x de l'équation (3.1) est bornée sur $]-\infty, 0]$, alors elle est réductible.

Lemme 3.1 *(voir [29]) Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux solutions réductibles distinctes alors $V(x_1(t) - x_2(t)) < 0$ pour tout t et réciproquement, si $x_2(t)$ est une solution réductible et $V(x_1(t) - x_2(t)) \leq 0$ pour tout t alors la solution $x_1(t)$ et aussi réductible.*

Lemme 3.2 *Si Γ_1 et Γ_2 sont deux orbites réductibles distinctes, alors les courbes $\Pi\Gamma_1$ et $\Pi\Gamma_2$ sont disjointes. De plus $\Pi\Gamma_1$ se recoupe si et seulement si Γ_1 est une orbite périodique.*

Démonstration Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des solutions réductibles alors d'après (3.3) et le lemme 3.1 on aura

$$\begin{aligned} 2\left|\Pi x_1(t) - \Pi x_2(t)\right|^2 &\geq \left|Q^{-1}(x_1(t) - x_2(t))\right|^2 \\ &\geq \left|\Pi x_1(t) - \Pi x_2(t)\right|^2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

pour tout t .

Ce qui montre que si $\Pi x_1(t_\circ) = \Pi x_2(t_\circ)$ pour une valeur $t_\circ$ de t, alors $x_1(t_\circ) = x_2(t_\circ)$ et par conséquent $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout t. Ces observations conduisent au résultat du lemme 3.2. ■

Lemme 3.3 *(voir [29]) Supposons que l'équation (3.1) admet une solution réductible $y(t)$ alors pour tout $X \in \mathbb{R}^j$ il existe une solution réductible $u(t)$ qui vérifie $\Pi u(0) = X$.*

Théorème 3.3 *Supposons que l'équation (3.1) satisfait les hypothèses $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$ et $(\mathbf{H}_3)$ et admet au moins une solution réductible. Soit $\mathfrak{U}$ l'ensemble de tout les points critiques et de toutes les orbites réductibles de l'équation (3.1). Alors $\Pi\mathfrak{U} = \mathbb{R}^j$ et l'application*

$$\Pi : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^j$$

est bijective et bicontinue.

L'ensemble $\mathfrak{U}$ est appelé variété réductible.

Démonstration Le lemme 3.3 indique que $\Pi\mathfrak{U} = \mathbb{R}^j$.

Si $p_1, p_2 \in \mathfrak{U}$, il existe des solutions réductibles $x_1(t)$ et $x_2(t)$ telles que $x_1(0) = p_1$ et $x_2(0) = p_2$.

Alors (3.11) nous donne

$$\begin{aligned} 2\left|\Pi p_1 - \Pi p_2\right|^2 &\geq \left|Q^{-1}\left(p_1 - p_2\right)\right|^2 \\ &\geq \left|\Pi p_1 - \Pi p_2\right|^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

pour tout p_1 et p_2 dans $\mathfrak{U}$.

D'où $\Pi : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^j$ est bijective, et par conséquent elle admet une application inverse $\varphi : \mathbb{R}^j \longrightarrow \mathfrak{U}$ telle que $\Pi\varphi(X) = X$; $\forall X \in \mathbb{R}^j$ et $\varphi(\Pi p) = p$; $\forall p \in \mathfrak{U}$ .Avec $p_1 = \varphi(X_1)$; $p_2 = \varphi(X_2)$ (3.12) nous donne

$$\sqrt{2}\left|Q\right|\left|X_1 - X_2\right| \geq \left|\varphi(X_1) - \varphi(X_2)\right| \geq \left|Q^{-1}\right|^{-1}\left|X_1 - X_2\right| \tag{3.13}$$

pour tout X_1, X_2 dans $\mathbb{R}^j$. D'où φ est lipshitzienne dans $\mathbb{R}^j$; ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire 3.3 *Supposons que* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3)$ *soient vérifiées alors* $\mathfrak{U}$ *est un ensemble fermé dans* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration Si q est un point limite de $\mathfrak{U}$, il existe une suite $\{p_v\}$ dans $\mathfrak{U}$, telle que $\lim\limits_{v\to+\infty} p_v = q$;

Pour tout v , $p_v = \varphi\left(\Pi p_v\right)$, car $p_v \in \mathfrak{U}$.

Puisque les fonctions φ et Π sont continues on a

$$\begin{aligned} \varphi\left(\Pi q\right) &= \lim_{v\to+\infty} \varphi\left(\Pi p_v\right) \\ &= \lim_{v\to+\infty} p_v \\ &= q \end{aligned}$$

Donc $q \in \varphi\left(\mathbb{R}^j\right) = \mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}$ est fermé. ■

Corollaire 3.4 *(voir [29]) Supposons que l'équation* (3.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3)$ *et admet une solution réductible* $y(t)$ *telle que* $e^{\lambda t}y(t) \to 0$, *quand* $t \to -\infty$, *alors* $\mathfrak{U}$ *contient tout point* $\alpha-$*limite de toute solution de l'équation* (3.1). *De plus, toute solution* $x(t)$ *qui n'est pas réductible vérifie* $0 < \lim\, inf\ e^{\lambda t}\left|x(t)\right|$, *quand* $t \to -\infty$.

Corollaire 3.5 *(voir [29]) Supposons que l'équation* (3.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3)$ *et possède une solution* $x_0(t)$ *bornée sur* $[t_\circ, +\infty[$, *alors l'équation* (3.1) *possède une variété réductible* $\mathfrak{U}$ *qui contient tout les points* $\omega-$*limite de toutes les solutions de l'équation* (3.1).

Théorème 3.4 *Supposons que* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3)$ *sont vérifiées avec* $j = 1$, *alors toute solution de l'équation* (3.1) *tend soit vers l'infini soit vers un point critique quand* $t \to +\infty$. *De même toute solution de l'équation* (3.1) *tend soit vers l'infini soit vers un point critique quand* $t \to -\infty$.

Démonstration Si $x(t)$ est une solution de l'équation (3.1) et h est une constante alors $x(t+h)$ est aussi une solution de la même équation.

En posant $x_1(t) = x(t+h)$ et $x_2(t) = x(t)$ dans (3.10) et en divisant par h^2 on aura

$$\varepsilon \int_{\theta}^{\tau} e^{2\lambda t} h^{-2} \left[x(t+h) - x(t)\right]^2 dt \leq e^{2\lambda\theta} V(h^{-1}\left[x(\theta+h) - x(\theta)\right]) - e^{2\lambda\tau} V(h^{-1}\left[x(\tau+h) - x(\tau)\right])$$

pour $\theta \leq \tau$ et $h \neq 0$.

En faisant tendre h vers 0 et en utilisant le lemme de Fatou, on obtient

$$\varepsilon \int_{\theta}^{\tau} e^{2\lambda t} \left[x'(t)\right]^2 dt \leq e^{2\lambda\theta} V\left(x'\left(\theta\right)\right) - e^{2\lambda\tau} V\left(x'(\tau)\right) \tag{3.14}$$

pour $\theta \leq \tau$.

Donc $e^{2\lambda t} V\left(x'\left(t\right)\right)$ est monotone décroissante pour toute solutions $x(t)$.

D'abord on suppose que $e^{2\lambda t} V(x'(t))$ tend vers une limite fini quand $t \to +\infty$.

Alors $\int_0^\infty e^{2\lambda t} x'(t)^2 dt$ converge et d'après l'inégalité de Cauchy -Schwartz

$$\left(\int_0^\tau \left|x'\left(t\right)\right| dt\right)^2 \leq \int_0^\tau e^{2\lambda t} x'(t)^2 dt \int_0^\tau e^{-2\lambda t} dt$$

ce qui entraîne que $\int_0^\infty \left|x'(t)\right| dt$ converge et que $x(t)$ tend vers une limite finie quand $t \to +\infty$.

Maintenant supposons que la fonction monotone décroissante $e^{2\lambda t} V(x'(t))$ tend vers $-\infty$ quand $t \to +\infty$, alors $V(x'(t)) < 0$ dans un certain intervalle $[\alpha, +\infty[$ et (3.3) nous donne

$$2\left|\Pi x'(t)\right|^2 > \left|Q^{-1} x'(t)\right|^2 \geq \left|\Pi x'(t)\right|^2 \tag{3.15}$$

pour $t > \alpha$.

Puisque $j = 1$, $\Pi x'(t)$ est une fonction scalaire qui ne change pas de signe sur $[\alpha, +\infty[$ d'après (3.15).

Alors $\Pi x(t)$ est monotone sur $[\alpha, +\infty[$.

Si on suppose que $|\Pi x(t)| \to \infty$, alors le terme de droite dans (3.3) indique que $|x(t)| \to \infty$ quand $t \to +\infty$.

Si on suppose que $\Pi x(t)$ tend vers une limite finie quand $t \to +\infty$, alors $\int_\alpha^\infty |\Pi x'(t)|\, dt$ converge et $\int_\alpha^\infty |x'(t)|\, dt$ converge aussi d'après (3.15). Ce qui entraîne que $x(t)$ tend vers une limite finie quand $t \to +\infty$.

Ce qui démontre que $x(t)$ tend soit vers ∞, soit vers une limite finie quand $t \to +\infty$.

Maintenant on suppose que $V(x'(t)) < 0$ sur un intervalle $]-\infty, \alpha]$. Alors (3.15) est vérifiée pour $t < \alpha$ et les arguments ci-dessus montrent que $x(t)$ tend soit vers ∞, soit vers une limite finie quand $t \to -\infty$.

Si on suppose que $V(x'(\tau)) \geq 0$ pour un certain τ alors (3.14) montre que $V(x'(\theta)) \to +\infty$ quand $\theta \to -\infty$. Ce qui implique que $|x'(\theta)| \to +\infty$ et (3.1) donne $|x(\theta)| \to +\infty$ quand $\theta \to -\infty$.

Ce qui démontre que $x(t)$ tend soit vers ∞, soit vers une limite finie quand $t \to -\infty$.

Notons enfin que si $x(t)$ tend vers une limite finie c quand $t \to \pm\infty$, alors il est évident en revenant à (3.1) que c est un point critique, ce qui termine la démonstration du théorème.

■

3.4 Disque engendré invariant

Dans cette section, on suppose que toutes les hypothèse $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4), (\mathbf{H}_5)$ sont vérifiées.

Le but de cette section est de montrer que toute courbe simple, fermée et invariante est nécessairement le périmètre d'un disque bidimensionnel dans $\mathbb{R}^n$.

Cette courbe et ce disque sont dans $\mathfrak{U}$. Pour toutes solutions $x_1(t), x_2(t)$ de l'équation (3.1), on peut écrire $(\mathbf{H}_4)$ sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-2\mu t} W\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\right] \leq -\varepsilon e^{-2\mu t}\left(x_1(t) - x_2(t)\right)^2 \leq 0$$

Ceci entraîne que $e^{-2\mu t} W\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$ est monotone décroissante pour toute paire de solutions.

Si $\int_0^\infty e^{-2\mu t} x(t)^2 dt$ est convergente, on dira que la solution $x(t)$ est inversement-réductible. Il est clair que toute solution bornée sur $[0, \infty[$ est inversement réductible.

Une solution qui est à la fois réductible et inversement-réductible sera dite doublement-réductible.

Lemme 3.4 *(voir [29]) Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux solutions inversement-réductibles et distinctes, alors $W\left(x_1(t) - x_2(t)\right) > 0$, pour tout t. Réciproquement si $x_2(t)$ est inversement-réductible et $W\left(x_1(t) - x_2(t)\right) \geq 0$, pour tout t, alors $x_1\left(t\right)$ est inversement-réductible.*

Lemme 3.5 *Si* Γ_1, Γ_2 *sont deux orbites doublement -réductibles et distinctes, alors les courbes planes* $\Lambda\Gamma_1$*et* $\Lambda\Gamma_2$ *sont disjointes. De plus* $\Lambda\Gamma_1$ *se recoupe si et seulement si* Γ_1 *est une orbite périodique.*

Démonstration Pour toutes solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ doublement-réductibles, on a d'après les lemmes 3.1 et 3.4

$$V\left(x_1(t) - x_2(t)\right) \leq 0 \leq W\left(x_1(t) - x_2(t)\right) \tag{3.16}$$

pour tout t .

Posons $x = x_1(t) - x_2(t)$ dans (3.7) , on obtient d'après (3.16)

$$2\left|\Lambda x_1(t) - \Lambda x_2(t)\right|^2 \geq \left|M^{-1}x_1(t) - x_2(t)\right|^2 \geq \left|\Lambda x_1(t) - \Lambda x_2(t)\right|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.17}$$

Ceci montre que si $\Lambda x_1(t_\circ) = \Lambda x_2(t_\circ)$ pour une valeur $t_\circ$ de t, alors $x_1(t_\circ) = x_2(t_\circ)$, et donc $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. De ces observations le lemme 3.5 s'en déduit. ■

Théorème 3.5 *(voir [29]) Supposons que* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4), (\mathbf{H}_5)$ *soient vérifiées et que l'équation* (3.1) *admet une courbe invariante simple et fermée* Γ*. Alors l'équation* (3.1) *possède un ensemble borné invariant* $\mathfrak{D}$ *dont l'image homéomorphe par* Λ *est intérieur au domaine* D *entouré par la courbe simple et fermée* $\Lambda\Gamma$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *; en outre, la fermeture de* $\mathfrak{D}$ *est* $\Gamma \cup \mathfrak{D}$*.*

Corollaire 3.6 *Si dans le théorème 3.5,* Γ *est une orbite périodique alors l'équation* (3.1) *possède au moins un point critique* c *tel que* Λc *soit à l'intérieur de* $\Lambda\Gamma$*.*

Démonstration Puisque

$$\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$$

est linéaire

$$\frac{d}{dt}\Lambda x(t) = \Lambda\frac{dx}{dt} = \Lambda f(x(t))$$

pour toute solution $x(t)$ de l'équation (3.1).

on note $\mathfrak{M}$ l'ensemble des poins critiques et des solutions doublement réductibles de l'équation (3.1) .

Si $x(t) \in \mathfrak{M}$ alors $x(t) = \psi(\Lambda x(t))$ et par conséquent $\Lambda x(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = \Lambda f\left(\psi\left(X\right)\right) \tag{3.18}$$

où ψ est l'application inverse de Λ.

Les orbites et les points critiques de l'équation (3.1) dans $\mathfrak{M}$ ont pour images par Λ des orbites et des points critiques de l'équation (3.18) dans $\Lambda\mathfrak{M}$.

Si $x(t) \in \mathfrak{M}$ et $h \neq 0$ est une constante alors $x(t), x(t+h)$ sont des solutions doublement réductibles de l'équation (3.1), et (3.17) donne

$$2h^{-2} \left|\Lambda \left(x(t+h) - x(t)\right)\right|^2 \geq h^{-2} \left|M^{-1} \left(x(t+h) - x(t)\right)\right|^2$$

faisons tendre $h \to 0$ on aura

$$2 \left|\Lambda x'(t)\right|^2 \geq \left|M^{-1} x'(t)\right|^2$$

Puisque $\dot{x}(t) = f(x(t))$, on obtient

$$2 \left|\Lambda f \left(\psi \left(X\right)\right)\right|^2 \geq \left|M^{-1} f \left(\psi \left(X\right)\right)\right|^2 \tag{3.19}$$

$\forall X \in \Lambda\mathfrak{M}$

L'équation bidimensionnelle (3.18) possède au moins un point critique $X_\circ$ à l'intérieur de son orbite périodique $\Lambda\Gamma$.

Donc $\psi \left(X_\circ\right)$ est un point critique de l'équation (3.1) d'après (3.19). Puisque $X_\circ = \Lambda\psi \left(X_\circ\right)$, le corollaire es établit. ■

Corollaire 3.7 *Supposons que dans le théorème 3.5,* Γ *soit une orbite périodique. Si l'équation* (3.1) *admet seulement un nombre fini de points critiques* $c_v (v = 1, 2, ..., k)$ *tels que* Λc_v *soit à l'intérieur de* $\Lambda\Gamma$ $\forall \nu = 1, 2, ...k$ *alors*

$$1 = ind \left(\Lambda c_1, \Lambda f \psi\right) + ind \left(\Lambda c_2, \Lambda f \psi\right) + ... + ind \left(\Lambda c_k, \Lambda f \psi\right) \tag{3.20}$$

Où $ind \left(\Lambda c_v, \Lambda f \psi\right)$ *désigne l'index du champ de vecteurs plan* $\Lambda f \left(\psi \left(X\right)\right)$ *en ses points critiques* Λc_v.

Démonstration C'est une conséquence immédiate du théorème classique de l'index de Poincaré car d'après (3.19), $\Lambda c_1, \Lambda c_2, ..., \Lambda c_k$ sont les seuls points critiques de l'équation bidimensionnelle (3.18) à l'intérieur de son orbite périodique $\Lambda\Gamma$. ■

3.5 Théorème local de l'index

Les théorème 3.1 et 3.2 ne sont pas exactement analogues au théorème classique de l'index de Poincaré parce que leurs hypothèses $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_4)$ imposent des restrictions sur $f(x)$ dans tout $\mathbb{R}^n$.

Puisque ces restrictions pourraient être incommodes dans la pratique, il peut être intéressant de fournir des versions de ces résultats qui ne font aucune supposition au sujet du comportement de $f(x)$ en dehors d'un ensemble borné.

Dans cette section nous abandonnons toutes les hypothèses utilisées jusqu'ici, et supposons à la place que $f(x)$ satisfait ce qui suit :

$(\mathbf{H}_6)$ $f(x)$ est localement lipschitzienne en tout point de la fermeture $\overline{S}$ d'un sous-ensemble ouvert et borné S de $\mathbb{R}^n$;

$(\mathbf{H}_7)$ Toute solution $x(t)$ de (3.1) qui rencontre la frontière ∂S de S la traverse de $\mathbb{R}^n - \overline{S}$ vers l'intérieur de S;

$(\mathbf{H}_8)$ Toute courbe simple, fermée dans S peut être continûment contractée à un point sans quitter S;

$(\mathbf{H}_9)$ toute paire de solutions $x_1(t), x_2(t)$ de l'équation (3.1) vérifie (3.2) pour toute valeur de t telle que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ restent à l'intérieur de S.

$(\mathbf{H}_{10})$ $V(x) = x^t P_v x$, où P_v est une matrice réelle symétrique de type $n \times n$ ayant deux valeurs propres négatives et $n-2$ valeurs propres positives.

Comme dans la section §1, $(\mathbf{H}_{10})$ nous permet d'obtenir à partir de la forme quadratique $V(x)$ une application linéaire

$$\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$$

nous avons alors la version locale suivante du théorème 3.1.

Théorème 3.6 *(voir [29]) Supposons que* $(\mathbf{H}_6), (\mathbf{H}_7), (\mathbf{H}_8), (\mathbf{H}_9), (\mathbf{H}_{10})$ *soient vérifiées et que l'équation* (3.1) *possède une orbite périodique* $\Gamma \subset S$.

Alors $\Pi\Gamma$ *est une courbe simple fermée dans* $\mathbb{R}^2$ *et l'équation* (3.1) *possède aux moins un point critique* c *dans* S *tel que* Πc *reste à l'intérieur de* $\Pi\Gamma$.

Si de plus S *contient seulement un nombre fini de points critiques* $c_v (v = 1, 2, ..., k)$, *tels que* Πc_v *soit à l'intérieur de* $\Pi\Gamma$ *alors*

$$(-1)^n = ind(c_1, f) + ind(c_2, f) + ... + ind(c_k, f)$$

pourvue que f *soit de classe* C^1 *sur un voisinage de chaque points* c_v.

3.6 Le critère négatif de Bendixson

Pour les équations différentielles dans le plan ($n = 2$), Bendixson a montré que l'équation (3.1) n'a aucune orbite périodique si la divergence du champ de vecteurs garde un signe constant dans une région simplement connexe du plan. Ce résultat est appelé le critère négatif de Bendixson qui permet donc de démontrer la non existence de solutions périodiques pour un système

$$\dot{x} = f(x), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad f = (f_1, f_2) \tag{3.21}$$

On peut le résumer dans le théorème suivant

Théorème 3.7 *Soit Ω un domaine simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$.*

Si $div f(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) + \dfrac{\partial}{\partial x_2} f_2(x)$ n'est pas nulle, et ne change pas de signe dans $\mathbb{R}$ alors l'équation (3.21) n'admet pas de solutions périodiques dans Ω.

Ce critère a été étendue par Dulac comme indiqué dans le théorème suivant

Théorème 3.8 (*critére de Dulac*)

Soit Ω un domaine simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$, et soit σ une fonction scalaire de classe C^1 et positive dans Ω, si

$$div(\sigma(x)f(x)) = \left(\frac{\partial\left(\sigma(x)f_1(x)\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(\sigma(x)f_2(x)\right)}{\partial x_2}\right)$$

ne s'annule sur aucun sous ensemble ouvert de Ω, alors l'équation (3.21) n'admet pas de solutions périodiques sur Ω.

Si $n > 2$ on ne peut pas appliquer les résultats précédents comme on le voit sur l'exemple suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = -2z \end{cases} \tag{3.22}$$

On a bien $div f = -2 < 0$, dans $\mathbb{R}^3$.

Mais le système possède une orbite périodique $(x(t), y(t), z(t)) = (\sin t, \cos t, 0)$.

Par conséquent on ne peut pas généraliser le critère de Bendixson sans ajouter d' hypothèses.

3.6.1 Extension à $\mathbb{R}^n$ du critère de Bendixson

Théorème 3.9 *(voir [29]) Supposons que l'équation (3.1) satisfait $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3)$ avec $j = 2$ et que D soit un ensemble ouvert simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$. S'il existe une fonction continue σ de l'ensemble $\Pi^{-1}D$ dans $\mathbb{R}$ telle que σf soit de classe $\mathcal{C}^1$ et que*

$$\sigma > 0 \quad et \quad div(\sigma f) > 0 \tag{3.23}$$

dans $\Pi^{-1}D$ alors il n'existe aucune courbe simple fermée invariante $\mathcal{C}$ dans $\Pi^{-1}D$.

Cas particulier :

Quand $D = \mathbb{R}^2$, il est facile d'appliquer ce résultat car $\Pi^{-1}D = \mathbb{R}^n$, et la connaissance de Π n'est pas exigée.

Remarque 3.2 *Dans le cas $n = 2$, le critère de Dulac indique que la condition $div(\sigma f) > 0$ peut être remplacée par $div(\sigma f) < 0$, mais ce n'est pas le cas pour $n > 2$, comme le montre l'exemple de l'équation* (3.22) *qui satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3)$, *avec*

$$V(x) = X^2 - Y^2 - Z^2$$

et $\lambda = \varepsilon = 1$.

Le critère de Bendixson a été généralisé par Dulac pour fournir un outil qui permet de montrer qu'une région annulaire de $\mathbb{R}^2$ ne contient pas plus d'une orbite périodique d'une équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$.

Le résultat suivant est analogue à celui de Dulac.

Théorème 3.10 *(voir [29]) Supposons que l'équation* (3.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3)$ *et que A soit une région annulaire de $\mathbb{R}^2$. S'il existe une fonction continue σ de l'ensemble $\Pi^{-1}A$ dans $\mathbb{R}$ telle que σf soit de classe $\mathcal{C}^1$ et que* (3.23) *soit vérifiée dans $\Pi^{-1}A$, alors au plus une orbite périodique de* (3.1) *peut être entièrement dans $\Pi^{-1}A$.*

Lloyd [13] a généralisé le théorème de Dulac pour fournir des conditions pour qu'une équation dans $\mathbb{R}^2$ ait au plus k orbites périodiques dans une région de $\mathbb{R}^2$.

Le théorème suivant est analogue a celui de Lloyd.

Théorème 3.11 *Supposons que* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$ *soient satisfaites par l'équation* (3.1) *et que D soit un sous ensemble ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{R}^2 \backslash D$ possède exactement k composantes bornées. S'il existe une fonction continue σ de l'ensemble $\Pi^{-1}D$ dans $\mathbb{R}$ telle que σf soit de classe $\mathcal{C}^1$ et* (3.23) *soit satisfaite dans $\Pi^{-1}D$, alors il existe au plus k orbites périodiques de* (3.1) *contenues dans $\Pi^{-1}D$.*

Bien que les théorème 3.9 3.10 3.11 soient des analogue des théorèmes correspondants en dimension deux, la condition (3.23) n'est pas la meilleur lorsque $n > 2$, en extrayant plus d'informations à partir de $(\mathbf{H}_2)$ et $(\mathbf{H}_3)$, nous mettons ces résultats comme suit

Théorème 3.12 *(voir [28]) Les théorème 3.9 3.10 3.11 restent vrais quand* (3.23) *est remplacée par la condition moins restrictive suivante*

$$\sigma > 0, \qquad (n-2)\lambda\sigma + div(\sigma f) > 0$$

Remarque 3.3 *: Comme cité précédemment, le théorème 3.9 étend seulement la moitié du critère de Bendixson négatif qui concerne* $div f > 0$.

Un résultat qui étend la condition de Bendixson $div f < 0$ *peut être déduit du théorème 3.9 simplement en remplaçant* t *par* $-t$ *dans les théorèmes 3.9 3.10 3.11.*

Cependant $(\mathbf{H}_2)$ *est également modifiée par cette substitution de sorte que* (3.2) *devienne*

$$2\lambda V(x_1(t) - x_2(t)) - \frac{d}{dt}V(x_1(t) - x_2(t)) \leq -\varepsilon(x_1(t) - x_2(t))^2.$$

4

Généralisation du théorème de convergence de Massera pour les équations différentielles périodiques non linéaires

4.1 Introduction

Les équations différentielles ordinaires périodiques par rapport à la variable indépendante apparaissent dans plusieurs problèmes de mécaniques et de la théorie des circuits.

Pour ces applications il est intéressant de statuer sur l'existence des solutions périodiques, et en particulier sur celles qui sont stables.

Des outils puissants pour démontrer l'existence des solutions périodique sont fournis par plusieurs théories ; et beaucoup d'articles ont été écrits sur ce sujet.

Cependant ,peu d'articles ont été écrits sur l'existence de solutions périodiques stables (voir [19]).

Quand une solution périodique est calculée explicitement ,sa stabilité peut normalement être déterminée en calculant les facteurs caractéristiques (Floquet multipliers) de l'équation perturbée et en vérifiant que tous ces facteurs ont un module inférieur à 1.

Ceci nécessite toujours des efforts considérables et n'est possible que lorsque la solution périodique est connue avec une certaine exactitude. Cependant la théorie qualitative des équations différentielles vise à prévoir l'existence d'une solution périodique stable sans exiger de la calculer explicitement.

Le but de cette partie est de fournir une nouvelle classe d'équations pour lesquelles il est possible de prévoir l'existence d'une solution périodique stable.

Ce travail a été inspiré par des résultats de Massera et Pliss au sujet des équations scalaires du premier ordre qui sont $\sigma-$ périodiques par rapport à la variable indépendante.

Théorème 4.1 (***de Massera***) *(voir [31])*

Si une équation scalaire du premier ordre, périodique par rapport à sa variable indépendante possède une solution bornée $x(t)$ sur un certain intervalle $[t_\circ, +\infty[$; alors $x(t)$ converge vers une solution $\sigma-$ périodique quand $t \to +\infty$.

Ce théorème n'est pas valable pour toutes les équations dans $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Dans ce chapitre on aura des résultats analogues au théorème de la convergence de Massera pour une classe spéciale d'équations différentielles dans $\mathbb{R}^n$.

Les résultats de stabilité sont peu communs parce qu'ils prévoient la présence d'une solutions périodique stable dans une région qui peut également contenir beaucoup de solutions instables.

Massera [14] a employé le théorème de convergence pour motiver son résultat plus célébre au sujet des équations $\sigma-$ périodiques dans $\mathbb{R}^2$ pour lequel la solution possède un intervalle d'existence sous la forme $[\theta, +\infty[$.

Il a montré que si une telle équation a une solution bornée dans le futur $(t > \theta)$ alors elle possède également une solution $\sigma-$ périodique. C'est un résultat délicat parce que les équations satisfaisant ces hypothèses peuvent avoir également des solutions récurrentes qui ne soient pas périodiques.

Dans ce qui suit ,nous donnons un analogue du théorème de Massera, en dimension deux, pour une classe spéciale d'équations différentielles dans $\mathbb{R}^n$.

Ceci est démontré en effectuant une étude détaillée d'une classe de solutions dans $\mathbb{R}^n$, ce sont les solutions réductibles.

4.2 Théorème de convergence de Massera

Considérons l'équation différentielle :

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{4.1}$$

où $f(t, x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times S$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$; où S est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Pour assurer que les solutions dans S sont uniquement déterminées par leurs valeurs initiales et varient avec elles, nous considérons les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H}_1$) $f(t,x)$ est localement lipschitzienne, par rapport à x, sur $\mathbb{R}\times S$.

($\mathbf{H}_2$) Il existe une constante σ telle que $f(t+\sigma,x)=f(t,x)$ dans $\mathbb{R}\times S$.

Si $S_\circ$ est une partie compacte de S alors ($\mathbf{H}_1$) implique que $f(t,x)$ est globalement lipschitzienne sur l'ensemble compact $[0,\sigma]\times S_\circ$ et donc il existe une constante $\gamma\left(S_\circ\right)$ telle que

$$\left|f(t,x_1)-f(t,x_2)\right|\leq\gamma\left(S_\circ\right)\left|x_1-x_2\right|,\forall x_1,x_2\in S_\circ \text{ et } t\in\left[0,\sigma\right]. \tag{4.2}$$

Cette restriction $t\in[0,\sigma]$ peut être ignorée quand $f(t,x)$ satisfait ($\mathbf{H}_2$).

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des solutions de l'équation (4.1) contenues dans $S_\circ$ et $t\in[\theta,\tau]$ alors d'après (4.2) on a

$$|x(\theta)-y\left(\theta\right)|\exp\left[-\gamma\left(S_\circ\right)\left(\tau-\theta\right)\right]\leq\left|x\left(\tau\right)-y\left(\tau\right)\right|\leq|x(\theta)-y\left(\theta\right)|\exp\left[\gamma\left(S_\circ\right)\left(\tau-\theta\right)\right] \tag{4.3}$$

Pour le cas des équations scalaires qui vérifient ($\mathbf{H}_1$) et ($\mathbf{H}_2$) avec $S=\mathbb{R}$; Massera [14] a montré que toute solution $y(t)$ bornée sur $[t_\circ,+\infty[$ converge vers une solution $\sigma-$ périodique $u(t)$ quand $t\to+\infty$.

Ce résultat peut être généralisé à des équations dans $\mathbb{R}^n$, $n\geq1$, en ajoutant d'autres hypothèses.

Pour les équations satisfaisant ($\mathbf{H}_1$) et ($\mathbf{H}_2$) avec $S=\mathbb{R}^n$, $n\geq1$ Sell [22] montre que toute solution bornée $y(t)$, uniformément asymptotiquement stable, converge vers une solution périodique $u(t)$ quand $t\to+\infty$.

Dans la pratique la stabilité asymptotique de $y(t)$ peut être vérifiée en utilisant un théorème de Demidovich [8].

Pour le cas particulier des équations autonomes, la solution périodique $u(t)$ est réduite à une solution constante dans les théorèmes, ci-dessus, de Massera et Sell.

Pour ce cas particulier une version plus délicate a été discutée par Cronin [6] qui consiste à :

Si $y(t)$ est une solution bornée et est à phases asymptotiquement stable, alors l'ensemble des points $\omega-$ limite de $y(t)$ est l'orbite d'une solution périodique asymptotiquement stable.

Ce résultat est étroitement lié au théorème de Poincaré -Bendixson pour des équations autonomes dans le plan.

Cronin [6] a donné encore une condition suffisante pour que $y(t)$ possède une phase asymptotiquement stable.

Ce chapitre est consacré principalement aux équations différentielles non autonomes.

Un résultat analogue du théorème de Massera est obtenue en dimension supérieur à 1, en ajoutant l'hypothèse suivante :

$(\mathbf{H}_3)$ Il existe des constantes $\lambda \geq 0$, $\varepsilon > 0$ et une matrice P constante réelle et symétrique de type $n \times n$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(x_1 - x_2)^* P \left[f(t, x_1) - f(t, x_2) + \lambda (x_1 - x_2)\right] \leq -\varepsilon \left|x_1 - x_2\right|^2, \quad \forall x_1, x_2 \in S \tag{4.4}$$

Si $V(x) = x^* P x$ et $x(t),\ y(t)$ sont des solutions de l'équation (4.1), alors on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[e^{2\lambda t} V(x(t) - y(t))\right] &= 2e^{2\lambda t}(x-y)^* P \left[f(t,x) - f(t,y) + \lambda (x-y)\right] \\ &\leq -2\varepsilon \left|x(t) - y(t)\right|^2 e^{2\lambda t} \end{aligned} \tag{4.5}$$

pour tout t tel que $x(t),\ y(t) \in S$.

Si $x(t),\ y(t) \in S$ pour $\theta \leq t \leq \tau$ alors $e^{2\lambda t} V(x(t) - y(t))$ est décroissante sur $[\theta, \tau]$ et strictement décroissante lorsque les solutions $x(t)$ et $y(t)$ sont différentes.

En intégrant (4.5) sur l'intervalle $[\theta, \tau]$ on obtient

$$e^{2\lambda\theta} V(x(\theta) - y(\theta)) - e^{2\lambda\tau} V(x(\tau) - y(\tau)) \geq 2\varepsilon \int_\theta^\tau e^{2\lambda t} \left(x(t) - y(t)\right)^2 dt \tag{4.6}$$

Théorème 4.2 *(voir [31]) Supposons que l'équation* (4.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$ *avec* $\lambda = 0$ *; si elle admet une solution* $y(t)$*, contenue dans un sous ensemble compact* $S_\circ$ *de* S*, pour* $t_\circ \leq t < \infty$ *alors elle admet une solution* $\sigma-$ *périodique* $u(t)$ *telle que*

$$y(t) - u(t) \to 0 \ \textit{quand}\ t \mapsto +\infty$$

En outre $u(t)$ *est la seule solution périodique de l'équation* (4.1) *contenue dans* S *pour tout* t.

Puisque $\lambda = 0$ il est claire d'après (4.5) que la stabilité de la solution $u(t)$ peut être déterminée par la deuxième méthode de Liapounov en utilisant $V(x)$ comme fonction de Liapounov.

Si $V(x)$ est définie positive, alors $u(t)$ est asymptotiquement stable, elle est instable si la matrice P possède une valeur propre négative.

Dans le cas particulier où $V(x)$ est définie positive, le théorème 4.2 est particulièrement identique au théorème de convergence de Demidovich [8].

Puisque la matrice symétrique P est régulière d'après (4.4), il existe un entier j qui satisfait l'hypothèse suivante :

$(\mathbf{H}_4)$ P possède j valeurs propres négatives et $n-j$ valeurs propres positives.

Quand la matrice P satisfait $(\mathbf{H}_4)$, il existe une matrice inversible M de type $n \times n$ telle que

$$M^* P M = diag(-I_j, I_{n-j})$$

la forme quadratique $V(x) = x^* P x$ est réduite à la forme canonique $V(x) = Y^2 - X^2$ par la substitution $x = M\,\mathrm{col}(X, Y)$ avec $X \in \mathbb{R}^j$ et $Y \in \mathbb{R}^{n-j}$.

Considérons l'application linéaire

$$\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^j \quad , \quad x \mapsto X$$

Puisque $\left|M^{-1}x\right|^2 = X^2 + Y^2$, on a

$$V(x) + 2\left|\Pi x\right|^2 = \left|M^{-1}x\right|^2 \geq \left|\Pi x\right|^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4.7}$$

Le résultat principal de cette section est le suivant

Théorème 4.3 *(voir [31]) Supposons que l'équation* (4.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4)$ *avec* $\lambda > 0$ *et* $j = 1$.

Si (4.1) *admet une solution* $y(t)$ *qui reste dans un sous ensemble compact* $S_\circ$ *de* S *pour tout* $t_\circ \leq t < \infty$*, alors* (4.1) *admet une solution* $\sigma-$*périodique* $u(t)$ *telle que* $y(t) - u(t) \to 0$*, quand* $t \mapsto +\infty$.

Pour illustrer la relation entre le théorème 4.2, le théorème 4.3 et le théorème de convergence de Massera on prend l'exemple suivant

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \phi(t, X) \\ \frac{dY}{dt} &= -\mu Y \end{aligned} \tag{4.8}$$

Où μ est une constante réelle strictement positive.

Ce système est de la forme (4.1) avec $x = \mathrm{col}(X, Y)$ et $f(t, x) = \mathrm{col}(\phi(t, X), -\mu Y)$.

Il est aisé de vérifier que ça satisfait (4.4) avec $P = diag(-1, 1)$, $\lambda = \mu - \varepsilon$, $S = \mathbb{R}^2$, pourvu que

$$-(\mu - 2\varepsilon)(X_1 - X_2)^2 \leq (X_1 - X_2)\left[\phi(t, X_1) - \phi(t, X_2)\right], \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Dans le cas particulier où la dérivée partielle $\phi_X(t, X)$ existe et satisfait

$$-\mu < \inf \phi_X(t, X) \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

La condition (4.9) est vérifiée pour un certain $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et alors (4.8) satisfait $(\mathbf{H}_3)$ et $(\mathbf{H}_4)$ avec $\lambda > 0,\ j = 1$ et $S = \mathbb{R}^2$.

Le théorème 4.3 se ramène à une version du théorème de Massera, pour l'équation scalaire

$$\frac{dX}{dt} = \phi(t, X)$$

avec la restriction supplémentaire : $-\mu < \inf \phi_X(t, X)$.

Ceci est satisfait dans le cas particulier où $\phi(t, X) = \frac{1}{2}\mu \sin X$, pour lequel les solutions périodiques de (4.8) sont les solutions constantes $X = v\pi$, $Y = 0$, où v est un entier.

Par conséquent S peut contenir plusieurs solutions périodiques différentes quand les conditions du théorème 4.3 sont vérifiées.

En un sens, le théorème 4.3 est plus relaxé que le théorème 4.2, pour lequel, il peut y avoir seulement une solution périodique dans S.

Quand le théorème 4.2 est appliqué à (4.8), il conduit similairement à une version du théorème de Massera pour l'équation scalaire

$$\frac{dX}{dt} = \phi(t, X)$$

avec la restriction supplémentaire ; $0 > \sup \phi_X(t, X)$ ou $0 < \inf \phi_X(t, X)$.

Corollaire 4.1 *(voir [31]) Supposons que l'équation* (4.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4)$ *avec* $\lambda > 0$ *et* $j = 1$.

Si elle possède une solution $z(t)$ *qui reste dans un sous ensemble compact* S_0 *de* S *pour tout* $-\infty < t < t_\circ$, *alors elle admet une solution* $\sigma-$*périodique* $w(t)$ *dans* $S_\circ$ *telle que*

$$z(t) - w(t) \to 0 \text{ quand } t \to -\infty.$$

Le corollaire 4.1 ne peut pas être déduit du théorème 4.3 en remplaçant t par $-t$; car (4.4) peut devenir erronée quand on remplace $f(t, x)$ par $-f(-t, x)$.

Corollaire 4.2 *(voir [31]) Si l'équation* (4.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4)$ *avec* $\lambda > 0$ *et* $j = 1$, *alors toute solution récurrente* $y(t)$ *de* (4.1) *qui reste complètement dans le sous ensemble compact* $S_\circ$ *de* S *est nécessairement une solution* $\sigma-$*périodique.*

L'objectif de cette section est d'ajouter des hypothèses appropriées au théorème 4.3 afin d'assurer l'existence d'au moins une solution périodique stable.

Il est commode de commencer la discussion en supposant que l'équation (4.1) satisfait seulement $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_3)$ et $(\mathbf{H}_4)$ avec $\lambda > 0$ et $j \geq 1$.

Une solution $x(t)$ de l'équation (4.1) sera dite réductible si $x(t) \in S$ pour tout t appartenant à un intervalle $]-\infty, \theta]$ et $\int_{-\infty}^{\theta} e^{2\lambda t} |x(t)|^2 \, dt$ converge.

Il est claire que toute solution contenue dans S et bornée sur $]-\infty, \theta]$ est réductible, en particulier toute solution périodique qui est entièrement contenue dans S est réductible.

Lemme 4.1 *(voir [31]) Si deux solutions réductibles distinctes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ restent dans S pour tout $t \in]-\infty, t_\circ]$, alors $V(x_1(t) - x_2(t)) < 0$ pour tout $t \leq t_\circ$.*

Réciproquement, si les solutions $x(t)$ et $y(t)$ sont dans S et satisfont

$$V(x(t) - y(t)) \leq 0 \text{ sur }]-\infty, t_\circ]$$

alors $y(t)$ est une solution réductible pourvu que $x(t)$ le soit.

D'après (4.7), les solutions réductibles $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans le lemme 4.1 satisfont

$$2\left|\Pi x_1(t) - \Pi x_2(t)\right|^2 \geq \left|M^{-1}(x_1(t) - x_2(t))\right|^2 \geq \left|\Pi x_1(t) - \Pi x_2(t)\right|^2, \forall t \leq t_\circ \tag{4.10}$$

Cette relation montre que si $\Pi x_1(t) = \Pi x_2(t)$ pour une valeur $t \leq t_\circ$ alors $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \leq t_\circ$

Pour $r \in \mathbb{R}$, désignons par A_r le sous-ensemble de S constitué des points $x(r)$ pris pour toutes les solutions réductibles $x(t)$ de (4.1) qui sont à l'intérieur de S sur $]-\infty, r]$, alors A_r est dit un ensemble réductible de (4.1) dans S .

En posons $t = r$ dans (4.10) on obtient

$$\begin{aligned} \left|M^{-1}\right|^2 |p_1 - p_2|^2 &\geq |\Pi p_1 - \Pi p_2|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} |M|^{-2} |p_1 - p_2|^2, \forall p_1, p_2 \in A_r \end{aligned} \tag{4.11}$$

L'application $\Pi : A_r \to \Pi A_r$ est bijective et bicontinue, donc A_r est homéomorphe au sous-ensemble ΠA_r de $\mathbb{R}^j$. Quand $(\mathbf{H}_2)$ est vérifiée, $x(t - \sigma)$ est une solution réductible qui reste dans S sur $]-\infty, r + \sigma]$; si et seulement si, $x(t)$ est une solution réductible qui reste dans S sur $]-\infty, r]$, ce qui entraîne que $A_{\sigma + r} = A_r, \ \forall r \in \mathbb{R}$.

Dans le cas où l'équation (4.1) est autonome, $(\mathbf{H}_2)$ est vérifiée pour tout réel σ et alors $A_r = A_\circ, \forall r \in \mathbb{R}$.

Considérons l'hypothèse suivante

$(\mathbf{H}_5)$ Il existe un sous ensemble non vide D de S ouvert et borné avec fermeture $\overline{D} \subset S$ tel que si une solution $x(t)$ de (4.1) vérifie $x(0) \in \overline{D}$, alors $x(t) \in S$ pour tout $0 \leq t \leq \sigma$ et $x(\sigma) \in D$.

Si $p \in S$ on note $x(t,p)$ la solution de l'équation (4.1) telle que $x(0,p) = p$.

On pose $S_D = \left\{x(t,p) \in \mathbb{R}^n : p \in \overline{D} \text{ et } 0 \leq t \leq \sigma\right\}$, d'après $(\mathbf{H}_5)$ $S_D \subset S$ et d'après $(\mathbf{H}_1)$ S_D est un compact.

Si $p \in \overline{D}$ alors $(\mathbf{H}_5)$ assure que $x(t,p)$ existe sur $0 \leq t < \infty$ et satisfait

$$x(t,p) \in S_D, \forall t \geq 0.$$

Considérons l'application $T : \overline{D} \to D$ définie par $Tp = x(\sigma, p)$,$\forall p \in \overline{D}$, alors $Tp = p$ si et seulement si $x(t,p)$ est une solution $\sigma-$ périodique.

Théorème 4.4 *(voir [31]) Supposons que l'équation* (4.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4), (\mathbf{H}_5)$, *avec* $\lambda > 0$ *et* $j = 1$, *alors elle possède au moins une solution* $x(t)$ $\sigma-$*périodique stable au sens de Liapounov et telle que* $x(0) \in D$.

Cependant l'existence d'une solution périodique asymptotiquement stable ne peut pas être déduite par les hypothèses du théorème 4.3. Le résultat suivant est l'analogue du résultat de Pliss [17].

Théorème 4.5 *Supposons que l'équation* (4.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4)$ *avec* $\lambda > 0$ *et* $j = 1$. *Si elle admet une solution périodique isolée* $x(t)$ *contenue dans* S *et qui soit stable au sens de Liapounov, alors* $x(t)$ *est asymptotiquement stable.*

Démonstration : Il suffit de montrer que si $p(t)$ est une solution périodique dans S et est stable au sens de Liapounov, mais n'est pas asymptotiquement stable ; alors $p(t)$ n'est pas isolée.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que toute solution $x(t)$ telle que $|x(0) - p(0)| < \delta(\varepsilon)$ satisfait

$$|x(t) - p(t)| < \varepsilon, \text{ pour } 0 \leq t < \infty.$$

Si ε est suffisamment petit, la solution $x(t)$ est dans un sous ensemble compact $S_\circ$ de S sur $[0, +\infty[$.

D'Après le théorème 4.3, $x(t)$ converge vers une solution périodique $x_\omega(t)$ quand $t \to +\infty$. Puisque $p(t)$ n'est pas asymptotiquement stable, on a nécessairement $x_\omega(t) \neq p(t)$ pour au moins une solution $x(t)$ avec $|x(0) - p(0)| < \delta(\varepsilon)$.

Puisque ceci satisfait $|x_\omega(t) - p(t)| \leq \varepsilon$, pour tout t ; la solution périodique $p(t)$ n'est pas isolée. ■

Maintenant supposons que $f(t,x)$ est différentiable par rapport à x dans $\mathbb{R}\times S$, alors la matrice jacobienne $J(t,x)=\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)\right]$ de type $n\times n$ existe dans $\mathbb{R}\times S$ et satisfait

$$J(t,x)v=\lim_{h\to 0}h^{-1}\left[f(t,x+hv)-f(t,x)\right] \tag{4.12}$$

pour toute v dans $\mathbb{R}^n$. Si $x\in S$ alors $x+hv\in S$ pour toute $h\neq 0$ suffisamment petit. Par la substitution $x_1=x+hv$, $x_2=x$ dans (4.4), et en divisant par h^2 on obtient

$$v^*P\left[\lambda v+h^{-1}\left[f(t,x+hv)-f(t,x)\right]\right]\leq -\varepsilon\left|v\right|^2.$$

On combine cette dernière et (4.12) on aura

$$v^*P\left[\lambda v+J(t,x)v\right]\leq -\varepsilon\left|v\right|^2,\forall v\in\mathbb{R}^n$$

De la matrice symétrique de cette forme quadratique on obtient

$$PJ(t,x)+J(t,x)^*P+2\lambda P<0 \tag{4.13}$$

où l'inégalité signifie que la matrice est définie négative.

Si $f(t,x)$ est une fonction analytique en tout point de $\mathbb{R}\times S$ alors $(\mathbf{H}_1)$ et (4.13) sont vérifiées et $Tp=x(\sigma,p)$ est aussi une fonction analytique de p dans $\overline{D}$, le théorème suivant est analogue au résultat de Pliss [17].

Théorème 4.6 *(voir [31]) Supposons que l'équation* (4.1) *vérifie* $(\mathbf{H}_2),(\mathbf{H}_3),(\mathbf{H}_4),(\mathbf{H}_5)$ *avec* $\lambda>0$ *et* $j=1$. *Si* $f(t,x)$ *est analytique sur* $\mathbb{R}\times S$, *alors l'équation* (4.1) *possède seulement un nombre fini de solutions périodiques* $x(t)$ *telles que* $x(0)\in\overline{D}$. *En outre l'une au moins de ces solutions périodiques est asymptotiquement stable.*

On suppose maintenant que $(\mathbf{H}_1)$ est vérifiée avec $S=\mathbb{R}^n$. Alors l'équation (4.1) est dite dissipative s'il existe une constante K et une fonction positive $\tau(\rho)$ définie pour toute $\rho>0$ telle que toute solution $x(t)$ avec $|x(t_\circ)|\leq\rho$ existe sur $t_\circ\leq t<+\infty$, et satisfait $|x(t)|<K$ pour toute $t>t_\circ+\tau(\rho)$.

Le nombre K s'appelle la borne absolue de (4.1).

Selon Pliss [17] l'équation (4.1) est dissipative s'il existe une matrice constante L de type $n\times n$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty}|x|^{-1}\left[f(t,x)-L(x)\right]=0 \tag{4.14}$$

uniformément pour $-\infty<t<+\infty$, et $\operatorname{Re}z<0$ pour toute valeurs propre z de L.

Le théorème suivant est apparenté à un résultat de Yoshisawa [35].

Théorème 4.7 *(voir [31]) Supposons que l'équation* (4.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4)$ *avec* $S = \mathbb{R}^n, \lambda > 0,\ j = 1$.

Si l'équation (4.1) *est dissipative alors toute solution* $x(t)$ *de cette équation converge vers une solution* $\sigma-$*périodique* $x_\omega(t)$ *quand* $t \to +\infty$, *et au moins une de ces solution périodiques est stable au sens de Liapounov. Si de plus* $f(t,x)$ *est analytique sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *alors* (4.1) *possède seulement un nombre fini de solutions périodiques, et au moins l'une d'elles est asymptotiquement stable.*

Yoshizawa [35] a montré l'existence d'au moins d'une solution $\sigma-$périodique sans utiliser les hypothèses $(\mathbf{H}_3)$ et $(\mathbf{H}_4)$; mais son résultat ne donne aucune information au sujet de la convergence, la stabilité ou le nombre de solutions périodiques.

4.3 Le deuxième théorème de Massera

Dans cette section $(\mathbf{H}_1)$ est vérifiée avec $S = \mathbb{R}^n$ et nous posons aussi l'hypothèse suivante

$(\mathbf{H}_6)$ Toute solution de l'équation (4.1) possède un intervalle d'existence de la forme $[\theta, +\infty[$.

Le deuxième théorème de Massera affirme que si une équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$ satisfait $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$, $(\mathbf{H}_6)$ et possède une solution $y(t)$ bornée sur un intervalle $[t_\circ, +\infty[$, alors elle possède au moins une solution $\sigma-$périodique $u(t)$.

Ce théorème ne donne aucune relation explicite entre $y(t)$ et $u(t)$; en général $y(t)$ ne converge pas vers $u(t)$ quand $t \to +\infty$.

Massera a montré aussi que ce théorème ne peut pas être généralisé à des équations différentielles de dimension élevée sans ajouter d'autres hypothèses. Pour les équations dans $\mathbb{R}^n$, Halanay (voir [18, pp74]) a démontré un résultat similaire en omettant $(\mathbf{H}_6)$ mais il requiert que la solution bornée $y(t)$ satisfasse la condition supplémentaire $y(\sigma + v\sigma) - y(v\sigma) \to 0$ quand $v \to +\infty$ $(v \in \mathbb{N})$. Cependant, cette condition supplémentaire n'est pas toujours facile à vérifier dans la pratique. Le résultat principal de cette section est donné par le théorème suivant

Théorème 4.8 *Supposons que l'équation* (4.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4), (\mathbf{H}_6)$ *avec* $S = \mathbb{R}^n,\ \lambda > 0$ *et* $j = 2$.

Si elle possède une solution $y(t)$ *bornée sur un certain intervalle* $[t_\circ, +\infty[$, *alors elle possède au moins une solution* $u(t)$, $\sigma-$*périodique.*

Ceci peut être considéré comme un analogue du deuxième théorème de Massera dans lequel la condition $n = 2$ a été remplacée par $j = 2$, la démonstration du théorème 4.9 est basé sur le résultat suivant qui concerne l'ensemble réductible A_r définie dans la section précédente.

Lemme 4.2 *Supposons que $y(t)$ soit une solution réductible de l'équation* (4.1) *si $X \in \mathbb{R}^j$ et θ, r sont deux nombres réels avec $\theta < r$; alors Il existe une solution $z_\theta(t)$ dans $\theta \leq t < \infty$ telle que $X = \Pi z_\theta(r)$ est $V(z_\theta(r) - y(t)) \leq 0$ sur $[\theta, +\infty[$.*

Démonstration : Si $X \in \mathbb{R}^j$, est $x(t, X, \theta)$ désigne la solution $x(t)$ de (4.1) qui vérifie $x(\theta) = y(\theta) + M\operatorname{col}(X, 0)$ où M est la matrice dans (4.7) et $y(\theta)$ est la valeur de la solution réductible $y(t)$ au point $t = \theta$. Alors d'après $(\mathbf{H}_6)$, la solution $x(t, X, \theta)$ existe pour $\theta \leq t < \infty$ et elle est réduite à $x(t, 0, \theta) = y(t)$ quand $X = 0$, de plus

$$x(\theta, X_1, \theta) - x(\theta, X_2, \theta) = M\operatorname{col}(X_1 - X_2, 0)$$

La relation $V(M\operatorname{col}(X, Y)) = Y^2 - X^2$ a déjà été utilisée pour monter (4.7) . Pour tout X_1, X_2 dans $\mathbb{R}^j$, cette relation nous donne

$$-\left|X_1 - X_2\right|^2 = V(M\operatorname{col}(X_1 - X_2, 0)) = V(x(\theta, X_1, \theta) - x(\theta, X_2, \theta)).$$

D'après (4.5) $e^{2\lambda t}V(x(t, X_1, \theta) - x(t, X_2, \theta))$ est décroissante, et donc

$$-e^{2\lambda\theta}\left|X_1 - X_2\right|^2 \geq e^{2\lambda t}V(x(t, X_1, \theta) - x(t, X_2, \theta)), \qquad \forall t > \theta. \tag{4.15}$$

Par conséquent

$$V(x(t, X_1, \theta) - x(t, X_2, \theta)) \leq 0.$$

et d'après (4.7) on a

$$2\left|\Pi(x(t, X_1, \theta) - x(t, X_2, \theta))\right|^2 \geq \left|M^{-1}(x(t, X_1, \theta) - x(t, X_2, \theta))\right|^2, \qquad \forall t \geq \theta. \tag{4.16}$$

et encore d'après (4.7) $\left|\Pi x\right|^2 \geq -V(x)$, ceci et (4.15) donne

$$e^{2\lambda t}\left|\Pi\left(x(t, X_1, \theta) - x(t, X_2, \theta)\right)\right|^2 \geq e^{2\lambda\theta}\left|X_1 - X_2\right|^2, \qquad \forall t \geq \theta. \tag{4.17}$$

Pour tout $\theta < r$, notons

$$g_\theta : \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}^j$$

l'application continue définie par $g_\theta(X) = \Pi x(r, X, \theta)$, pour tout X dans $\mathbb{R}^j$, avec $t = r$ (4.17) donne

$$e^{2\lambda r} \left| g_\theta(X_1) - g_\theta(X_2) \right|^2 \geq e^{2\lambda\theta} \left| X_1 - X_2 \right|^2 \text{ pour } X_1, X_2 \in \mathbb{R}^j. \tag{4.18}$$

ça entraîne que g_θ est injective et alors $g_\theta\left(\mathbb{R}^j\right)$ est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^j$ d'après le théorème de Brouwer sur le domaine d'invariance [13, pp50].

On montre maintenant, par l'absurde que $g_\theta(\mathbb{R}^j) = \mathbb{R}^j$.

Supposons que $g_\theta(\mathbb{R}^j)$ ne soit pas la partie pleine de $\mathbb{R}^j$, alors il a un point frontière b dans $\mathbb{R}^j$. Alors $b = \lim g_\theta(X_v)$ pour une certaine suite $\{X_v\}$ dans $\mathbb{R}^j$. Puisque $\{g_\theta(X_v)\}$ est une suite de Cauchy, (4.18) montre que $\{X_v\}$ est aussi une suite de Cauchy, et donc $X_v \to a$, où $a \in \mathbb{R}^j$. Alors $b = \lim g_\theta\left(X_v\right) = g_\theta(a)$, car g_θ est continue en a. D'où $b \in g_\theta\left(\mathbb{R}^j\right)$ et donc b est un point intérieur de cet ensemble ouvert, ce qui contredit la supposition que b est à la frontière de $g_\theta(\mathbb{R}^j)$, on conclue que $g_\theta\left(\mathbb{R}^j\right) = \mathbb{R}^j$.

Ceci assure que si $X \in \mathbb{R}^j$, il existe un point $v(\theta)$ dans $\mathbb{R}^j$ tel que

$$X = g_\theta(v(\theta)) = \Pi x(r, v(\theta), \theta)$$

Si on pose $z_\theta(t) = x(t, v(\theta), \theta)$ alors

$$X = \Pi z_\theta(r).$$

et $z_\theta(t)$ satisfait l'équation (4.1) sur $[\theta, +\infty[$. Puisque $x(t, 0, \theta) = y(t)$, on peut poser $X_1 = v(\theta)$ et $X_2 = 0$ dans (4.15) et on obtient

$$V(z_\theta(t) - y(t)) \leq 0, \forall t \geq \theta.$$

■

Théorème 4.9 *Supposons que l'équation* (4.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4)$ *et* $(\mathbf{H}_6)$ *avec* $S = \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ *et* $j \geq 1$. *Si elle possède au moins une solution réductible alors* $\Pi A_r = \mathbb{R}^j$ *pour tout réel* r, *et la restriction*

$$\Pi : A_r \to \mathbb{R}^j$$

est un homomorphisme.

Démonstration : Pour montrer que $\Pi A_r = \mathbb{R}^j$ il est suffit de montrer que pour tout X dans $\mathbb{R}^j$, il existe une solution réductible $u(t)$ de l'équation (4.1) telle que $X = \Pi u(r)$. Une telle solution $u(t)$ sera obtenue comme limite d'une suite convenable de solutions $z_\theta(t) = x(t, v(\theta), \theta)$ établie dans le lemme 4.2.

Puisque $X = \Pi z_\theta(r) = \Pi x(r, v(\theta), \theta)$ et $x(t, 0, \theta) = y(t)$, on peut poser $X_1 = v(\theta)$, $X_2 = 0$, $t = r$ dans (4.16) pour obtenir

$$\begin{aligned} 2\left|X - \Pi y(r)\right|^2 &\geq \left|M^{-1}(x(r, v(\theta), \theta) - y(r))\right|^2 \\ &\geq |M|^{-2}\left|x(r, v(\theta), \theta) - y(r)\right|^2 \text{ pour } \theta \leq r \end{aligned} \tag{4.19}$$

En posant $x(t) = x(t, v(\theta), \theta)$, $\tau = r$ dans (4.6) on obtient

$$-e^{2\lambda r}V(x(r, v(\theta), \theta) - y(r)) \geq 2\varepsilon \int_\theta^r e^{2\lambda t}\left|x(t, v(\theta), \theta) - y(t)\right|^2 dt$$

Car $V(x(\theta, v(\theta), \theta) - y(\theta)) \leq 0$ d'après (4.15) . Ceci et (4.19) donnent

$$\begin{aligned} \int_\theta^r e^{2\lambda t}\left|y(t) - x(t, v(\theta), \theta)\right|^2 dt &\leq (2\varepsilon)^{-1} e^{2\lambda r}\left|x(r, v(\theta), \theta) - y(r)\right|^2 |p| \\ &\leq \varepsilon^{-1}e^{2\lambda r}\left|X - \Pi y(r)\right|^2 |M|^2 |p| \end{aligned} \tag{4.20}$$

pour toute $\theta \leq r$. D'après (4.19), $|x(r, v(\theta), \theta)|$ est bornée pour $\theta \leq r$. Une suite $\{\theta_\nu\}$ peut par conséquent être choisie de sorte que $x(r, v(\theta_v), \theta_v) \to q$ et $\theta_v \to -\infty$, quand $v \to +\infty$, où $q \in \mathbb{R}^n$.

Si $u(t)$ désigne la solution telle que $u(r) = q$, alors $u(t)$ existe sur $[r, +\infty[$ d'après ($\mathbf{H}_6$). De plus $\Pi u(r) = X$ car $X = \Pi x(r, v(\theta_v), \theta_v)$ pour tout v.

On montre maintenant que $u(t)$ existe aussi sur $]-\infty, r]$; pour cela il suffit de montrer qu'elle existe sur tout intervalle $[\beta, r]$ pour tout $\beta < r$.

Lorsque v est suffisamment grand, $\theta_v \leq \beta - 1$, et d'après (4.20) on a

$$\int_{\beta-1}^{\beta} e^{2\lambda(\beta-1)}\left|y(t) - x(t, v(\theta_v), \theta_v)\right|^2 dt \leq \varepsilon^{-1}e^{2\lambda r}\left|X - \Pi y(r)\right|^2 |M|^2 |p| .$$

En appliquant le théorème de la moyenne à cette intégrale on obtient

$$e^{2\lambda(\beta-1)}\left|y(t_v) - x(t_v, v(\theta_v), \theta_v)\right|^2 \leq \varepsilon^{-1}e^{2\lambda r}\left|X - \Pi y(r)\right|^2 |M|^2 |p| .$$

pour un certain nombre t_v dans $[\beta - 1, \beta]$.

Quand β est fixé, ceci montre que t_v et $|x(t_v, v(\theta_v), \theta_v)|$ sont bornés pour tout v assez grands.

D'après le théorème de Weierstrass sur les sous suites, on peut supposer que $t_v \to l$ et $x(t_v, v(\theta_v), \theta_v) \to p$, quand $v \to \infty$; où $l \in [\beta - 1, \beta]$ et $p \in \mathbb{R}^n$. Si $\omega(t)$ désigne la solution de (4.1) ayant $\omega(l) = p$, alors $\omega(t)$ existe sur $[l, +\infty[$ d'après ($\mathbf{H}_6$).

Puisque les solutions dépendent continûment de leurs valeurs initiales $x(t_v, v(\theta_v), \theta_v) \rightarrow \omega(t)$, simplement, dans $[l, +\infty[$ quand $v \rightarrow +\infty$. En particulier

$$\omega(r) = \lim x(r, v(\theta_v), \theta_v) = q = u(r)$$

et par conséquent $\omega(t)$ est un prolongement de $u(t)$ sur $[l, r]$.

Puisque $l \leq \beta$, $u(t)$ existe dans $[\beta, +\infty[$ pour tout $\beta < r$. D'où $u(t)$ existe sur $]-\infty, +\infty[$. Il reste à montrer que $u(t)$ est réductible. Pour $t \geq \theta_v$, (4.15) donne $0 \geq V(y(t) - x(t, v(\theta_v), \theta_v))$. Quand $v \rightarrow \infty$, ceci donne $0 \geq V(y(t) - \omega(t))$ pour $t \geq l$. Puisque $\omega(t)$ coïncide avec $u(t)$, alors $0 \geq V(y(t) - u(t))$ sur $[\beta, +\infty[$ pour tout $\beta < r$. Donc $0 \geq V(y(t) - u(t))$ sur $]-\infty, +\infty[$

Puisque $y(t)$ est une solution réductible le lemme 4.1 montre que $u(t)$ est aussi réductible et alors $u(r) \in A_r$.

On a montré plus haut que $X = \Pi u(r)$, et donc $X \in \Pi A_r$, pour toute X dans $\mathbb{R}^j$ et puisque l'application

$$\Pi : A_r \rightarrow \Pi A_r$$

est un homéomorphisme , alors $\mathbb{R}^j = \Pi A_r$. ■

Corollaire 4.3 *Supposons que l'équation* (4.1) *satisfait* $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_3), (\mathbf{H}_4)$ *et* $(\mathbf{H}_6)$ *avec* $S = \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ *et* $j \geq 1$, *supposons de plus que* (4.1) *possède au moins une solution réductible. Alors il existe une fonction continue* $\phi(t, x)$ *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^j$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *telle que les relations*

$$X(t) = \Pi x(t) \qquad , \qquad x(t) = \phi(t, X(t)) \tag{4.21}$$

donnent une correspondance bijective entre les solutions réductibles $x(t)$ *de* (4.1) *et les solutions* $X(t)$ *de l'équation* $j-$*dimensionnelle*

$$\frac{dX}{dt} = \Pi f(t, \phi(t, X)) \tag{4.22}$$

Démonstration : Si $(t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^j$ alors le théorème 4.9 montre qu'il existe un point unique $\phi(t, X)$ dans A_t tel que $X = \Pi\phi(t, X)$.

Puisque $A_t \subset \mathbb{R}^n$ ceci définit une fonction $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui satisfait

$$x = \phi(t, \Pi x), \qquad \forall x \in A_t$$

De plus (4.11) donne

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,|M|\,|X_1 - X_2| &\geq |\phi(t, X_1) - \phi(t, X_2)| \\ &\geq \left|M^{-1}\right|^{-1} |X_1 - X_2|, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^j \end{aligned} \tag{4.23}$$

On montre maintenant que $\phi(t,X)$ est une fonction continue de (t,X) en tout point (r,X_0) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^j$.

Puisque $\phi(r,X_\circ)\in A_r$, il existe une solution réductible $x_\circ(t)$ de l'équation (4.1) telle que $x_\circ(r)=\phi(r,X_\circ)$. Alors $X_\circ=\Pi x_\circ(r)$. De plus $x_\circ(t)=\phi(t,\Pi x_\circ(t))$ pour tout t, car $x_\circ(t)\in A_t$. De ceci et de (4.23) on obtient

$$\begin{aligned}\phi(t,X)-\phi(r,X_\circ) &= [\phi(t,X)-\phi(t,\Pi x_\circ(t))]+[x_\circ(t)-x_\circ(r)],\\ |\phi(t,X)-\phi(r,X_\circ)| &\leq \sqrt{2}\,|M|\,|X-\Pi x_\circ(t)|+|x_\circ(t)-x_\circ(r)|.\end{aligned}$$

D'Après (4.7)

$$\left|M^{-1}(x_\circ(r)-x_\circ(t))\right|\geq|\Pi(x_\circ(r)-x_\circ(t))|=|X_\circ-\Pi x_\circ(t)|.$$

D'où

$$|\phi(t,X)-\phi(r,X_\circ)|\leq\sqrt{2}\,|M|\,|X-X_\circ|+\left(1+\sqrt{2}\,|M|\left|M^{-1}\right|\right)|x_\circ(t)-x_\circ(r)|.$$

Ceci montre que $\phi(t,X)$ est continue au point $(r,X_\circ)$.

Puisque l'application linéaire

$$\Pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^j$$

ne dépend pas de t, on a

$$\frac{d(\Pi x(t))}{dt}=\Pi\left(\frac{dx}{dt}\right)=\Pi\left(f(t,x(t))\right)$$

pour toute solution $x(t)$ de l'équation (4.1).

Lorsque $x(t)$ est réductible, on a $x(t)=\phi(t,\Pi x(t))$ car $x(t)\in A_t$. Alors $\dfrac{d(\Pi x(t))}{dt}=\Pi f(t,\phi(t,\Pi x(t))$ et $X(t)=\Pi x(t)$ satisfait (4.21) et (4.22). Il reste uniquement à montrer que toute solution $x(t)$ de (4.22) est sous la forme $\Pi(x(t))$.

Il est claire de (4.23) et $(\mathbf{H}_1)$ que la partie droite de (4.22) est continue et localement lipschitzienne en X en tout point $(r,X_\circ)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^j$. D'après le théorème de Picard, il existe une solution unique $X(t)$ de (4.22) telle que $X(r)=X_\circ$.

On a montré ci-dessus qu'il existe une solution réductible $x_\circ(t)$ de (4.1) telle que $\Pi x_\circ(r)=X_\circ$. D'où toute solution $X(t)$ de (4.22) est sous la forme $\Pi x(t)$ où $x(t)$ est une solution réductible de (4.1). ■

Démonstration du théorème 4.8

Puisqu'on a supposé que l'équation (4.1) possède une solution $y(t)$ bornée sur $[t_0,+\infty[$ il existe une constante $k\geq|y(t)|$ pour tout $t\geq t_0$.

On peut alors choisir une suite d'entiers positifs $\{m_v\}$ telle que $m_v \longrightarrow \infty$ et $y(m_v\sigma) \longrightarrow a$ quand $v \longrightarrow \infty$; où $a \in \mathbb{R}^n$.

Supposons que la solution $x(t,a)$ avec $x(0,a) = a$ existe sur $r \leq t \leq s$ où $r < 0 < s$. Puisque $(\mathbf{H}_2)$ est vérifiée, $y(t + m_\nu\sigma)$ est une solution de (4.1) sur $[t_0 - m_v\sigma, \infty[$ et donc $y(t + m_\gamma\sigma) \longrightarrow x(t,a)$ simplement dans $[r,s]$ quand $v \longrightarrow \infty$.

Lorsque v est suffisamment grand $k \geq |y(t + m_v\sigma)|$ pour $r \leq t \leq s$ et donc $k \geq |x(t,a)|$ pour $r \leq t \leq s$.

Ceci montre que le point $x(t,a)$ dans $\mathbb{R}^n$ ne peut jamais rencontrer la frontière ∂N de la boule $N = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1 + k\}$.

La solution $x(t,a)$ existe donc et reste dans N pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors (4.1) possède une solution réductible bornée $x(t,a)$ et donc satisfait toutes les hypothèses du corollaire 4.3

Puisque $j = 2$, l'équation différentielle $\sigma-$périodique (4.22) est de dimension deux, toutes ses solutions existent sur $]-\infty, +\infty[$ car (4.1) satisfait $(\mathbf{H}_6)$.

Puisqu'elle admet la solution bornée $\Pi x(t,a)$, le deuxième théorème de Massera montre que l'équation (4.22) possède au moins une solution $\sigma-$périodique $X(t)$.

Alors le corollaire 4.3 montre que $\phi(t, X(t))$ est une solution $\sigma-$périodique de l'équation (4.1) car $\phi(t + \sigma, X) = \phi(t, X)$ pour tout (t, X) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^j$ ■

5

Conclusion

Les résultats que nous avons présentés, ainsi que d'autres résultats que nous n'avons pas présenté ici (voir [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]) et qui sont obtenus grâce à la théorie de réduction de R.A. Smith, montrent que cette méthode est très prometteuse pour l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires.

Comme perspectives, il serait intéressant de

1) comparer les hypothèses qui ont servi, dans les différents travaux de R.A. Smith, à définir la réduction utilisée.

2) rendre cette (ou ces) hypothèse(s), qui a (ont) permi de définir la réduction, plus simples, c'est-à-dire pouvoir reconnaître, à partir du second membre d'une équation différentielle, si la théorie de réduction de Smith lui est applicable ou non.

Bibliographie

[1] O. ARINO and A. BERBOUCHA, *Estimation sur des solutions globales d'équations différentielles ordinaires,* Maghreb Mathematical Review Volume **11** N°1 (2002), pp 1-13.

[2] O. ARINO and A. BERBOUCHA, *Une généralisation du théorème de Cartwright,* Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin **10** (2003), pp 65-75.

[3] I. BENDIXSON, *Sur les courbes définies par des équations différentielles,* Acta Math. **24** (1901), pp 1-88.

[4] A. BERBOUCHA, *Contribution à l'étude des systèmes dynamiques définis par des équations différentielles ordinaires ou à retard,* Thèse de Doctorat d'Etat, soutenue le 30/06/2005 à l'USTHB Alger.

[5] A. BERBOUCHA and M.S. MOULAY, *Existence of orbitally stable periodic solutions for a delay differential equation,* Far East Journal of Mathematical Sciences, Volume **15 N**°3 (2004), pp 307-317.

[6] J. CRONIN, *A criterion for asymptotic stability,* J. Math. Anal. Appl. **74** (1980), pp 247-269.

[7] J. CRONIN, *Differential Equations : Introduction and Qualitative Theory,* Dekker, New-York, 1980.

[8] B.P. DEMIDOVICH, *On the dissipativity of certain non-linear systems of differential equations I,* Vestnik Moscow. Univ.Ser. I Mat. Mek. **6** (1961), pp 19-27.

[9] H. DULAC, *Recherche des cycles limites,* C. R. Acad. Sci. Paris **204** (1937), pp 1703-1706.

[10] J.K. HALE, *Ordinary differential equations*, Wiley-Interscience, N.Y. 1969.

[11] P. HARTMAN, *Ordinary Differential Equations,* Wiley-Interscience, N.Y. 1964

[12] M. W. HIRSCH and S. SMALE, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra,* Academic Press, NY 1974.

[13] N.G. LLOYD, *Degree Theory,* Cambridge Univ. Press, London, 1978.N.

[14] J.L. MASSERA, *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*, Duke Math. J. **17** (1950), pp 457-475.

[15] M.S. MOULAY and A. BERBOUCHA, Sur les *solutions périodiques d'un système différentiel de* $\mathbb{R}^3$, Bul. Soc. Royale des Sc. de Liège, Vol. **73**, (5-6), (2004), pp. 247-256.

[16] V.V. NEMYTSKII and V.V. STEPANOV, *Qualitative theory of Differential Equations,* princeton Univ. Press, 1960

[17] V.A. PLISS, *Nonlocal problems of the Theory of oscillations, Academic Press, New York, 1966.*

[18] R. REISSIG, G. SANSONE and R. CONTI, *Non-linear Differential Equations of Higher Order,* Noordhoff, leyden, 1974.

[19] N. ROUCHE and J. MAWHIN, *Ordinary Differential Equations, Stability and Periodic Solutions,* Pitman, London, 1980.

[20] N. ROUCHE and J. MAWHIN, *Equations Différentielles ordinaires,* Masson et C^{ie} 1973

[21] A.J. SCHWARTZ, *A generalisation of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds*, Amer. J. Math. **85** (1963), pp 453-458.

[22] G.R. SELL, *Periodic solutions and asymptotic stabilyty,* J. Differential Equations **2** (1966), pp 143-157.

[23] R.A. SMITH, *Absolute stability of certain differential equations,* J. London Math. Soc. **2** (1973), pp 203-210.

[24] R.A. SMITH, *Forced oscilations of the feedback control equation,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **76A** (1976), pp 31-42.

[25] R.A. SMITH, *Some elliptic balls which avoid a nyquist set in* $\mathbb{C}^{n+1}$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **79A** (1977), pp 327-334.

[26] R.A. SMITH, *The Poincaré-Bendixson theorem for certain differential equations of higher order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A, **83** (1979), pp 63-79.

[27] R.A. SMITH, *Existence of periodic orbits of autonomous ordinary differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. **85** (1980), pp 153-172.

[28] R.A. SMITH, *An index theorem and Bendixson's negative criterion for certain differential equations of higher dimension,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A, **91** (1981), pp 63-77.

[29] R.A. SMITH, *Poincaré index theorem concerning periodic orbits of differential equations*, Proc. London Math. Soc. (3). **48** (1984), pp 341-362.

[30] R.A. SMITH, *Certain differential equations have only isolated periodic orbits,* Ann. Mat. Pura Appl. **137** (1984), pp 217-244.

[31] R.A. SMITH, *Massera's convergence theorem for periodic nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **120** (1986), pp 679-708.

[32] R A. SMITH, *Orbital stability for ordinary differential equations,* J. Differential Equations, **69** (1987), pp 265-287.

[33] R.A. SMITH, *Convergence theorems for periodic retarded functional differential equations,* Proc. London Math. Soc. (3) **60** (1990), pp 581-608.

[34] R.A. SMITH, *Poincaré-Bendixson theory for certain retarded functional differential equations*, Differential and Integral Equations, Vol.5, Number**1** (1992), pp 213-240.

[35] T. YOSHIZAWA, *Stable sets and periodic solutions in a perturbed system,* Contrib. Differential Equations 2 (1963), 407-420.