
Package inputenc Error: Keyboard character used is undefined in inputencoding ‘ansinew’ See the inputenc package documentation for explanation. You need to provide a definition with

Package inputenc Error: Keyboard character used is undefined in inputencoding ‘ansinew’ See the inputenc package documentation for explanation. You need to provide a definition with

PQXA2.421 Package inputenc Error: Keyboard character used is undefined in inputencoding ‘ansinew’ See the inputenc package documentation for explanation. You need to provide a definition with

toc Package inputenc Error: Keyboard character used is undefined in inputencoding ‘ansinew’ See the inputenc package documentation for explanation. You need to provide a definition with

karta81 Package inputenc Error: Keyboard character used is undefined in inputencoding ‘ansinew’ See the inputenc package documentation for explanation. You need to provide a definition with

Package inputenc Error: Keyboard character used is undefined in inputencoding ‘ansinew’ See the inputenc package documentation for explanation. You need to provide a definition with

toc

Conclusion 28

Package inputenc Error: Keyboard character used is undefined in inputencoding ‘ansinew’ See the inputenc package documentation for explanation. You need to provide a definition with

toc

Package inputenc Error: Keyboard character used is undefined in inputencoding ‘ansinew’ See the inputenc package documentation for explanation. You need to provide a definition with

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle
MÉMOIRE DE MAGISTER
En
Mathématiques Appliquées

Option
Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

*Approximation dans les
systèmes d'attente avec
discipline hystérétique*

Présenté par:
M^{elle} Aoumer Sabrina

Devant le jury composé de:

Président	M ^r S. Adjabi	M. C. A	U. A/Mira Béjaia.
Rapporteur	M ^r D. Aïssani	Professeur	U. A/Mira Béjaia.
Examineurs	M ^r D. Hamadouche	Professeur	U. Tizi Ouzou.
	M ^{me} L. Bouallouche	M. C. A	U. A/Mira Béjaia.
Invités	M ^{me} F. Aoudia	M. C. B	U. A/Mira Béjaia.
	M ^r K. Abbas	M. C. B	U. A/Mira Béjaia.

Béjaia, 2010

Remerciements

**Louange A Dieu, le miséricordieux, sans Lui rien de tout cela
n'aurait pu être.**

Je tiens en premier lieu à exprimer ma profonde reconnaissance à *M^r* D. Aïssani, Professeur à l'université A. Mira de Béjaia, qui a bien voulu accepter la tâche de rapporteur. Je le remercie d'avoir consacré une partie de son temps à l'examen de ce travail.

J'exprime également toute ma gratitude à Monsieur Karim. Abbas pour avoir encadré mon travail. Il a toujours su m'accorder de son temps précieux lorsque j'en avais besoin, sans lui la rédaction de ce manuscrit n'aurait pas été possible.

Je tiens également à remercier *M^r* S. Adjabi, d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie *M^r* D. Hamadouche, *M^{me}* L. Bouallouche et *M^{me}* F. Aoudia d'avoir acceptés de faire partie du jury et consacrés leur temps à la lecture et à la correction de ce mémoire.

Mes remerciements les plus vifs vont tout particulièrement à mes parents, mon Fiancé et mes amis.

Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Sabrina

Résumé

Dans ce mémoire, nous prouvons l'applicabilité de la méthode de stabilité forte à l'étude de système de files d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles lorsque celui-ci est soumis à des perturbations dans le taux de vacances.

Nous montrons que sous certaines conditions, la chaîne de Markov induite associée au système $GI/M/1$ est fortement v -stable, après perturbation de taux de vacances et écriture des deux opérateurs sous la même structure matricielle à bloc-Jacobi. Ceci revient à clarifier les conditions pour lesquelles les caractéristiques stationnaires du $GI/M/1$ avec vacances exponentielles peuvent être approximées par celles correspondantes du système $GI/M/1$ classique modifié. Nous obtenons ainsi les inégalités de la stabilité, avec un calcul exact des constantes.

Afin de mesurer les performances de la méthode de stabilité forte et estimer la précision de l'erreur d'approximation, nous proposons une approche de simulation pour confirmer les résultats obtenus.

Mots clés: Système d'attente avec discipline hystérétique, Vacances, Inégalité de stabilité, Perturbation, Stabilité forte, Simulation.

Abstract

In this memory, we prove the applicability of the strong stability method being studied of queueing system $GI/M/1$ with exponential vacation when this one is subjected to a perturbation in the rate of vacation.

We show that under some conditions, embedded Markov chain associated the system $GI/M/1$ is strongly v -stable, after perturbation of rate of vacation and we express the transition matrix of the embedded Markov chain as a block-Jacobi form.

This amount clarifying the conditions for which the stationary characteristics of $GI/M/1$ with exponential vacation can be approximated by those corresponding of the modified queueing system $GI/M/1$. We obtain the stability inequalities with an exact computation of constants.

In order to measure the performances of the strong stability method and to estimate the precision of the error of approximation, we propose an approach of simulation to confirm the results obtained.

Key words: Queueing system with hysteretic policy, Vacation, Stability inequalities, Perturbation, strong Stability, Simulation.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	3
Liste des figures	4
Liste des tableaux	1
Introduction générale	1
1 Les modèles d'attente avec discipline hystérétique	8
Introduction	8
1.1 Formalisme des files d'attente	8
1.2 Analyse mathématique des systèmes de files d'attente	10
1.3 Analyse opérationnelle des systèmes de files d'attente	11
1.4 Étude du Système $GI/M/1$ classique	11
1.5 Synthèse bibliographique sur les systèmes d'attente sous discipline hystérétique	17
Conclusion	19
2 Théorie de stabilité forte	20
Introduction	20
2.1 Notions et concepts fondamentaux	21
2.2 Ergodicité uniforme et stabilité forte d'une chaîne de Markov	23

2.3	v -Stabilité d'une chaîne de Markov	27
2.4	Inégalités de stabilité forte	28
3	Stabilité forte dans le modèle de file d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles	30
	Introduction	30
3.1	Description du modèle et position du problème	31
3.2	Perturbation du taux de vacances exponentielles dans le système d'attente $\tilde{\Sigma}$	37
3.2.1	v -stabilité forte	37
3.3	Inégalités de stabilité forte	44
3.4	Estimation de l'erreur d'approximation	47
	Conclusion	49
4	Mesure de performance de la méthode de stabilité forte dans le système d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles	50
	Introduction	50
4.1	Mesure de performance de la méthode de stabilité forte	51
4.1.1	Approche algorithmique	51
4.1.2	Simulation	53
4.1.3	Validation du simulateur	57
4.2	Application Numérique	58
4.2.1	Cas d'approximation par le Système $M/M/1$ modifié	58
4.2.2	Cas d'approximation par le Système $H_2/M/1$ modifié	61
4.2.3	Discussion et interprétation des résultats	63
	Conclusion	63
	Conclusion générale	64
	Annexe	65
	Bibliographie	72

TABLE DES FIGURES

1.1	Description d'une file d'attente	9
1.2	Le diagramme des probabilités de transition	14
3.1	Convexité de la fonction ϕ	40
4.1	Organigramme du simulateur du système $GI/M/1$ modifié	55
4.2	Organigramme du simulateur du système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles	56
4.3	Graphe des erreurs pour le cas $M/M/1$	60
4.4	Graphe des erreurs pour le cas $H_2/M/1$	62

LISTE DES TABLEAUX

3.1	L'opérateur de transition du système $\tilde{\Sigma}$	45
3.2	L'opérateur de transition du système Σ	45
4.1	Résultats obtenus pour la borne d'approximation dans le cas $M/M/1$	59
4.2	Résultats obtenus pour la borne d'approximation dans le cas $H_2/M/1$	61

Introduction générale

"Une mesure exacte vaut l'avis d'un millier d'experts."

Grace Hopper

Il y a beaucoup de raisons de vouloir évaluer la performance d'un système. Pour le développement d'un nouveau système, la modélisation est la seule façon de déterminer si les spécifications de performance seront respectées. Quand un système doit être configuré pour une tâche spécifique, modéliser est le moyen le plus économique de limiter la recherche parmi les innombrables configurations possibles.

La plupart des systèmes rencontrés dans différents domaines de la vie apparaissent en plusieurs situations en apparence très diverses, mais la majorité de ces derniers relèvent néanmoins du schéma descriptif général suivant:

Des clients arrivent à des intervalles aléatoires dans un système comportant un ou plusieurs serveurs auxquels ils vont adresser une requête. La durée du service auprès de chaque serveur est elle-même aléatoire. Après avoir été servis, les clients quittent le système; d'où la nécessité de faire appel à la théorie des files d'attente qui s'attache à modéliser et à analyser ce genre de problèmes.

Quelques modèles dans la théorie des files d'attente classique offrent deux possibilités pour résoudre le conflit qui apparaît lorsqu'un client arrive dans un système et trouve le serveur occupé ou en vacance. Soit il quitte le système sans avoir reçu le service, soit il attend jusqu'à ce que le serveur soit disponible.

Plusieurs modèles de files d'attente ont été étudiés depuis Erlang, et plusieurs formules "élégantes" ont été élaborées et proposées comme étant des solutions analytiques de certains types de problèmes de files d'attente. Néanmoins, il arrive que la complexité de ces formules ne permette pas de les exploiter dans la pratique. Par exemple, la formule de Pollaczek-Khintchine exige une inversion numérique de la transformée de Laplace pour déterminer la distribution de la durée d'attente. Et dans plusieurs cas, même la transformée de Laplace ou la fonction génératrice ne sont pas disponibles sous forme explicites (c'est la cas, par exemple, du système d'attente $GI/GI/1$). En général, quand le serveur prend des vacances (par exemple lorsqu' il y a moins de clients dans le système), ceci mène à minimiser le coût. Mais également réduit l'efficacité opérationnelle du système et cause la perte et le mécontentement des clients. Comment pouvons nous résoudre ce problème et faire en sorte que le système puisse opérer plus efficacement ?

C'est pour cela que, lors de la modélisation d'un système réel, on est souvent amené à remplacer les éléments stochastiques réels jugés rigoureux mais compliqués gouvernant le système, par d'autres éléments plus simples. Ces derniers sont supposés être, dans un certain sens, proches des éléments réels. Le modèle ainsi utilisé représente une "idéalisaton" du système réel. Alors le point capital est d'évaluer ainsi l'erreur commise par cette approximation, d'où l'apparition du problème de "*stabilité*".

Le problème de stabilité en théorie de files d'attente permet de délimiter le domaine dans lequel le modèle idéal peut être utilisé comme une bonne approximation du système réel et occupe une place remarquable dans la théorie qualitative et quantitative des systèmes dynamiques, ainsi que dans celle des systèmes stochastiques. Pour mieux définir ce concept de stabilité, considérons un système de files d'attente comme une application $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, où l'ensemble \mathcal{X} représente les paramètres du système (les éléments stochastiques gouvernant le système). Les paramètres du système peuvent être: la distribution du flux des arrivées, la loi du service, la structure du système, etc. L'ensemble \mathcal{Y} est l'ensemble des caractéristiques du système. Ces dernières peuvent être: le nombre moyen de clients dans le système, le taux d'occupation du système, etc. La notion de stabilité en théorie de files d'attente est identique à celle de continuité de l'application F .

"Un système de files d'attente est dit stable, lorsqu'une petite perturbation dans ses paramètres (entrées) entraîne une petite perturbation dans ses caractéristiques (sorties)."

Par conséquent, la déviation des caractéristiques correspondantes de deux systèmes de files d'attente stables, varie en fonction de la déviation des paramètres d'entrée. En général, les valeurs des paramètres d'un système de files d'attente ne sont connues qu'approximativement (elles sont obtenues à l'aide des méthodes statistiques [77]), ce qui conduit à

des erreurs pour le calcul des caractéristiques recherchées. C'est pourquoi, en pratique, on utilise les inégalités de stabilité pour estimer numériquement l'erreur de définition des caractéristiques en question.

Parmi les méthodes d'approximation qui ont été développées sur la stabilité des modèles stochastiques, on trouve celles obtenus par Rossberg [123], Gnedenko [62] et Franken [59]. Par la suite, sont apparus les travaux de Kenedy [88], Borovkov [32] (méthode de renouvellement), Stoyan [129] (méthode de convergence faible), Kalaschnikov et Tsitsiachvili [78] (méthode des fonctions tests), Zolotariev [148] (méthode métrique), Klebanov [87], Aïssani et Kartashov [19] (méthode de stabilité forte), Rachev [121], Ipsen et Meyer [70] (méthode de stabilité absolue). Tous ces travaux ont considéré différentes positions et différentes approches du problème. Ainsi, un système peut être stable par rapport à une approche et ne pas être stable par rapport à une autre approche. Par ailleurs, la plupart de ces méthodes constituent aujourd'hui l'une des principales activités de recherche dans divers domaines scientifiques, tels que l'économie, les finances, la recherche opérationnelle, la théorie de la décision, etc. En particulier, elles jouent un rôle important dans l'analyse des problèmes complexes de files d'attente et leurs applications en télécommunications, systèmes de production, etc.

Réellement, les besoins de la pratique orientent ces chercheurs vers l'obtention des estimations quantitatives et surtout vers la mesure de performance des méthodes.

La méthode de stabilité forte, connue également sous le nom "méthode des opérateurs de la théorie de stabilité", a été élaborée au début des années 1980 par Aïssani et Kartashov [19]. Les auteurs ont notamment étudié la propriété de stabilité de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov récurrente au sens de Harris dans des espaces de phase quelconques. Cette méthode nous permet à la fois de réaliser une analyse qualitative et quantitative de certains systèmes complexes. Elle permet également de rechercher l'ergodicité et la stabilité des caractéristiques stationnaires et non stationnaires des chaînes de Markov induites [8, 15]. À la différence des autres approches, on suppose que la perturbation du noyau de transition est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir essentiellement de meilleures approximations pour les distributions stationnaires perturbées. De plus, sur la base de cette méthode, il est possible d'obtenir des inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes. Les résultats fondamentaux de cette méthode ont fait l'objet de la publication en 1996 d'une monographie de Kartashov [81].

Cette méthode est applicable à tous les modèles stochastiques de recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov. Elle a été principalement appliquée aux modèles d'attente classiques (Aïssani et Kartashov [20], Aïssani [8], Bouallouche-Medjkoune

et Aïssani [39, 40] et Benaouicha et Aïssani [23]), modèles d'attente avec rappels (Berdjoudj et Aïssani [26]), modèles d'attente avec vacances (Rahmoune et Aïssani [122]), modèles d'attente avec impatiences (Mouhoubi et Aïssani [110]), modèles d'attente avec arrivées négatives (Abbas et Aïssani [1]), modèles d'attente à serveur non fiable ([4]), modèles d'attente avec priorités (Bouallouche-Medjkoune et Aïssani [41] et Hamadouche et Aïssani [64]), modèles d'attente avec arrivées par groupes (Boukir et al. [42]), réseaux de files d'attente (Lekadir et Aïssani [94, 95]), modèles stochastiques de gestion des stocks (Rabta et Aïssani [120, 118, 117]), (Mouhoubi et Aïssani [109]) et modèles de risques (Benouaret et Aïssani [25, 24]). En outre, des précisions et des compléments à des résultats sur l'estimation de la vitesse de convergence et de la stabilité pour le cas aperiodique ont été apportés par Mouhoubi [102] et Mouhoubi et Aïssani [104, 103]. De même, Rabta et Aïssani [119] ont récemment obtenu des bornes de perturbation des chaînes de Markov discrètes à espace d'états fini ou dénombrable. Toutefois, l'applicabilité de la méthode de stabilité forte, du point de vue théorique, est loin d'être évidente, notamment pour les systèmes complexes. En effet, en plus de l'identification du paramètre à perturber (flux des arrivées, structure du système, intensité du service, etc), les difficultés se situent dans l'écriture des noyaux de transition et surtout dans le choix des normes poids. Par ailleurs, elle nécessite souvent la réalisation d'une série de recherches intermédiaires, qui ont un intérêt particulier. Dans la théorie des files d'attente la politique par hystérétique signifie que la paire des taux d'arrivée et de service (λ, μ) est choisie parmi un ensemble de choix qui s'offrent à chaque arrivée ou fin d'un service selon le nombre de clients dans le système.

Donc, il est à noter que dans le cas des systèmes d'attente avec pannes actives et réparations, les périodes de pannes ou de réparations peuvent-être vues comme des périodes de vacances. De même, les systèmes de files d'attente avec rappels peuvent-être considérées comme cas particulier de ce type de systèmes, où la période de vacance commence à la fin de chaque temps de service et dure jusqu'à ce que serveur soit réactivé par l'arrivée d'un client primaire ou secondaire [57]. Par ailleurs, il est important de signaler que les caractéristiques de la théorie des systèmes d'attente avec rappels sont différentes de celles correspondantes aux systèmes avec vacances [57].

L'étude des systèmes de files d'attente avec vacances est très riche. Les recherches sont principalement concentrées sur l'étude complète des modèles $M/G/1$: citons par exemple les travaux de Fuhrmann [60], Keilson et Ramaswamy [86], Kleinrock [96], Yechiali [97], Scholl et Kleinrock [124], et Tian [137, 138]. Bien que Doshi [50, 51, 52], Keilson et Servi [85] aient considéré le $GI/G/1$ avec vacances du serveur, ils n'ont donné que quelques résultats de décomposition du temps d'attente.

Cependant, Naishou Tian, Daqing Zhang and Chengxuan Cao ont étudié le modèle

$GI/M/1$ avec vacances exponentielles. Ils ont choisi les temps d'arrivées en tant que points inclus. Cependant, ni les points de départ, ni les points finaux des vacances appartiennent à l'ensemble constitué par ces points inclus. Ceci fait que le modèle $GI/M/1$ est plus difficile à analyser.

Dans ce travail, nous prouvons pour la première fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux systèmes de files d'attente avec vacances exponentielles où l'opérateur de transition est écrit sous forme d'une matrice à bloc-Jacobi. Naishou Tian, Daqing Zhang and Chengxuan Cao [139] ont utilisé l'approche de la matrice géométrique pour déterminer les probabilités stationnaires de la chaîne de Markov associée à ce modèle. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'étude de la méthode de stabilité forte dans le système de files d'attente considéré, avec vacances exponentielles, et ceci en perturbant le taux de vacances. Nous mettons en évidence les conditions pour lesquelles il sera possible d'approcher les caractéristiques du système perturbé par celles correspondantes du modèle idéal. Après avoir prouvé le fait de stabilité forte, nous obtenons les inégalités de stabilité, avec un calcul exact des constantes. Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à la mesure de performance de la méthode de stabilité forte du système complexe de files d'attente, $GI/M/1$ avec vacances exponentielles après perturbation de son paramètre de vacances. Notons que c'est la première fois que l'analyse de performance de la méthode de stabilité forte est considérée pour ces types de systèmes. Pour cela, nous avons construit, à partir des résultats de la méthode de stabilité forte, un algorithme permettant d'estimer l'erreur due à l'approximation ainsi que la norme par rapport à laquelle l'erreur est établie. De plus, nous avons élaboré un simulateur dont l'objectif est de valider les résultats obtenus par un procédé algorithmique.

Ce mémoire est structuré de la manière suivante:

- Le premier chapitre comprend les définitions et les concepts de base de la théorie de files d'attente ainsi qu'une synthèse bibliographique sur les systèmes de files d'attente avec discipline hystérétique. Le but de ce chapitre est d'introduire les éléments essentiels permettant d'aborder le problème de stabilité forte dans les systèmes de files d'attente.

- Dans le deuxième chapitre, nous présentons la méthode de stabilité forte ainsi que ses propriétés telles qu'elles ont été introduites en théorie des chaînes de Markov [82, 81]. Ainsi, on a axé notre présentation principalement sur les éléments essentiels permettant d'aborder le problème de stabilité forte dans les systèmes de files d'attente avec vacances exponentielles.

- Le troisième chapitre concerne l'étude de la stabilité forte de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov incluse dans le système de files d'attente $GI/M/1$ avec

vacances exponentielles, après perturbation du paramètre de vacances. Pour cela, nous construisons la fonction test, puis nous écrivons l'opérateur de transition du système idéal, i.e $GI/M/1$ modifié, sous la structure du système perturbé, puis nous vérifions le critère de stabilité forte. Nous clarifions par la suite les conditions pour lesquelles les caractéristiques du système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles peuvent être approximées par celles correspondantes du système $GI/M/1$ modifié. Ainsi, nous obtenons les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes. Nous estimons l'écart de déviation de l'opérateur de transition et celui de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite, après perturbation du paramètre associé aux vacances exponentielles.

- Le quatrième chapitre représente la partie pratique de la thèse. Nous nous intéressons à la mesure de performance de la méthode de stabilité forte dans le modèle de files d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles après perturbation du paramètre de vacances. Pour cela, nous discutons les résultats numériques concernant l'estimation de borne de perturbation, ainsi que ceux obtenus par simulation. À cet effet, une comparaison entre les résultats algorithmiques et de simulation est effectuée.

Le travail s'achève par une conclusion mettant l'accent sur les perspectives de recherche induites par les résultats obtenus.

CHAPITRE 1

Les modèles d'attente avec discipline hystérétique

Introduction

Les origines de la théorie des files d'attente remontent à 1909 à l'époque où A. K. Erlang en a posé les bases dans ses recherches sur le trafic téléphonique. Ses travaux ont par la suite été intégrés à la recherche opérationnelle.

1.1 Formalisme des files d'attente

La théorie des files d'attente s'attache à modéliser et à analyser de nombreuses situations différentes en apparence. Un système de files d'attente général peut être vu comme une boîte noire dans laquelle les clients arrivent suivant un processus quelconque, séjournent pour recevoir un ou plusieurs services et finalement quittent le système. Ce système pourra être composé d'une file simple ou d'un ensemble de files appelé *réseau de files d'attente*.

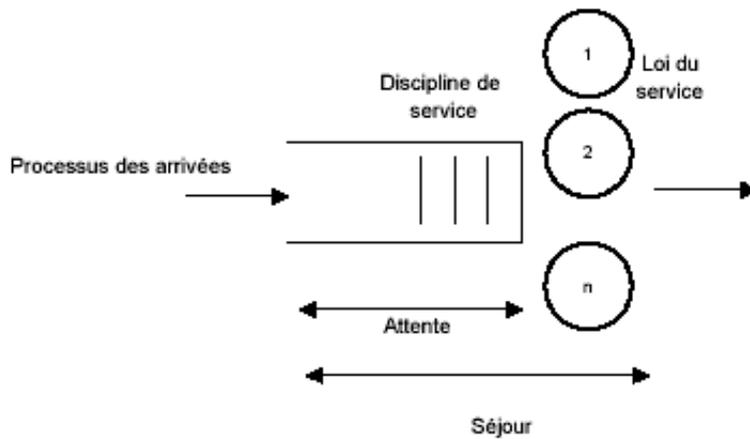


FIG. 1.1 –: Description d'une file d'attente

Un *système de files d'attente* est l'abstraction mathématique d'un sujet qu'on peut décrire par les éléments suivants:

1. Le flot des arrivées des clients.
2. La source des clients.
3. La loi de la durée de service de chaque client.
4. La discipline de service.
5. Le nombre de serveurs.
6. La capacité de la file.

Notation de Kendall

Pour la classification des systèmes d'attente, on a recours à *la notation symbolique* introduite par Kendall au début des années cinquante. Cette notation comprend quatre symboles rangés dans l'ordre

$$A/B/S/N$$

où

A = distribution des temps entre deux arrivées successives,

B = distribution des durées de service,

S = nombre de postes de service en parallèle,

N = capacité du système

On peut toutefois faire abstraction du dernier symbole lorsque $N = \infty$. Pour spécifier les distributions A et B , les symboles suivants sont utilisés:

- M = arrivées markoviennes,
- E_k = distribution d'Erlang d'ordre k ,
- H_k = distribution hyperexponentielle d'ordre k ,
- G = distribution générale,
- D = cas déterministe.

Notion de classes de clients

Une file d'attente peut être parcourue par différentes classes de clients. Ces différentes classes se distinguent par:

- des processus d'arrivée différents;
- des temps de service différents;
- un ordonnancement dans la file d'attente en fonction de leur classe.

Pour définir une file multiclasse, il y a lieu de préciser pour chaque classe de clients le processus d'arrivée et la distribution du temps de service associé ainsi que la manière dont les clients des différentes classes s'ordonnent dans la file.

1.2 Analyse mathématique des systèmes de files d'attente

L'étude mathématique d'un système d'attente se fait le plus souvent par l'introduction d'un processus stochastique défini de façon appropriée. En général, on s'intéresse au nombre $X(t)$ de clients se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$). En fonction des quantités qui définissent la structure du système, on cherche à calculer

- ★ les *probabilités d'état* $p_n(t) = P(X(t) = n)$ qui définissent le *régime transitoire* du processus $\{X(t)\}_{t \geq 0}$; les probabilités $p_n(t)$ doivent évidemment dépendre de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.
- ★ le *régime stationnaire* du processus stochastique, défini par

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = P[X(+\infty) = n] \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A partir de la distribution stationnaire du processus $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, il est possible d'obtenir d'autres *caractéristiques d'exploitation* du système.

1.3 Analyse opérationnelle des systèmes de files d'attente

Cette analyse, plus connue sous le nom de *l'évaluation de performances*, consiste au calcul des caractéristiques de performances d'un système. Cette opération s'impose dès lors où l'on souhaite connaître les performances d'un système réel et que l'on ne peut effectuer de mesure directe sur celui-ci. Les paramètres de performances que l'on souhaite obtenir sont de différents ordres en fonction des systèmes considérés. C'est ainsi que dans les systèmes de production, le paramètre de performance important est le *débit* en produits finis. Tandis que pour le cas d'un guichet, le paramètre de performance qui intéresse l'utilisateur est le *temps d'attente* alors que la direction quand à elle s'intéresse au *nombre de clients* en attente au guichet.

Les caractéristiques de performance

Les *caractéristiques d'exploitation* du système auxquelles on s'intéresse le plus souvent sont:

- Le nombre moyen de clients dans le système.
- La durée de séjour d'un client dans le système.
- La durée d'attente d'un client.
- Le taux d'occupation des postes de service.

1.4 Étude du Système $GI/M/1$ classique

Description du modèle

Considérons le système de files d'attente $GI/M/1(FIFO, \infty)$ classique. Ce système est décrit comme suit: Soit τ_n représentant le point d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client avec $\tau_0 = 0$, les temps des inter-arrivées $\{T_n, n \geq 1\}$ sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d) avec une fonction de distribution générale $A(t) = P(\tau_n - \tau_{n-1} < t)$, de moyenne $\lambda^{-1} = \mathbb{E}(\tau_n - \tau_{n-1})$ et la transformée de Laplace Stieltjes (TLS) $A^*(s)$. Les temps de service S_n sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d) avec une fonction de répartition $B(t) = P(S_n < t) = 1 - e^{-\mu t}$. Ce système a été traditionnellement représenté par le symbole $GI/M/1$ (GI – *General Independent*) et nous employons la représentation symbolique $G/M/1$ par symétrie avec le système $M/G/1$.

Soit $Q(\tau)$ le nombre de clients dans le système à l'instant τ et on définit comme étant $Q(\tau_n - 0) = Q_n$, $n = 1, 2, \dots$ le nombre de clients dans le système juste après la $n^{\text{ème}}$ arrivée.

Soit Z_n le nombre de service potentiel complété durant la période des inter-arrivés T_n . Le mot "potentiel" indique qu'il n'y a pas Z_n services effectués, si le nombre de clients dans le système après $Q(\tau_n)$ est inférieur à ce nombre.

Soit

$$b_k = P(Z_n = k) = \int_0^\infty \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} dA(t) \quad (1.1)$$

Maintenant, considérons la relation entre Q_n et Q_{n+1} . On a

$$Q_{n+1} = \begin{cases} Q_n + 1 - Z_{n+1} & \text{Si } Q_n + 1 - Z_{n+1} > 0; \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Notons que Z_{n+1} est définie comme étant le nombre de départs, $Q_n + 1 - Z_{n+1}$ peut être < 0 .

Il est clair que Q_{n+1} ne dépend que des variables aléatoires indexées par n (en d'autres termes, il ne dépend pas du passé).

Par conséquent, $\{Q_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ est une chaîne de Markov induite à espace des états dénombrable.

Régime transitoire

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite $\{Q_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ sont données par

$$P_{ij} = \mathbb{P}(Q_{n+1} = j | Q_n = i) \quad (1.2)$$

$$P_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}(Z_{n+1} = i - j + 1) & \text{Si } j > 0, i \geq 0; \\ \mathbb{P}(Z_{n+1} \geq i + 1) & \text{Si } j = 0, i \geq 0; \\ 0 & \text{Sinon;} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$P_{ij} = \begin{cases} b_{i-j+1} & \text{Si } 1 \leq j \leq 1+i; \\ \sum_{n=i+1}^{\infty} b_n & \text{Si } j=0, i \geq 0; \\ 0 & \text{Sinon;} \end{cases} \quad (1.4)$$

Le diagramme des probabilités de transition est donné dans la figure(1.2) suivante

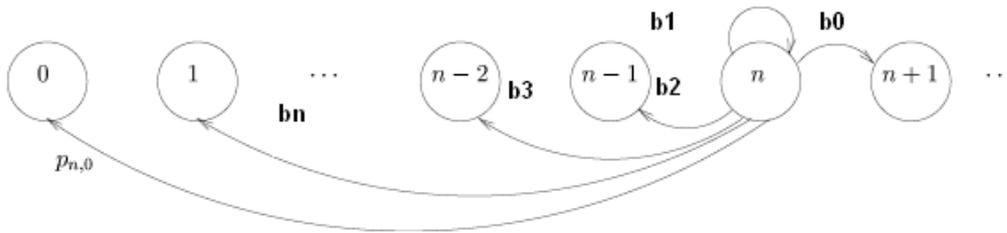


FIG. 1.2 –: Le diagramme des probabilités de transition

L'opérateur de transition est donné sous la forme suivante:

$$P = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} b_n & b_0 & & & \\ \sum_{n=2}^{\infty} b_n & b_1 & b_0 & & \\ \sum_{n=3}^{\infty} b_n & b_2 & b_1 & b_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

D'après la structure de \mathbf{P} , la chaîne de Markov associée est irréductible et apériodique. Soit

$$A^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dA(t), \quad (1.6)$$

la transformée de Laplace Stieltjes (TLS) de $A(\cdot)$. La fonction génératrice des $\{b_j\}$ est

$$B(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j \quad (1.7)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\mu - \mu z)t} dA(t) \quad (1.8)$$

$$= A^*(\mu - \mu z) \quad (1.9)$$

On définit l'intensité du trafic ou bien la charge du système par (Taux des arrivées/Taux de service)

$$\rho = \lambda/\mu \quad (1.10)$$

Il est clair que la chaîne de Markov est positive récurrente si $\rho < 1$, nulle récurrente si $\rho = 0$ et transitoire si $\rho > 1$. Les probabilités de transition à la $n^{\text{ième}}$ étape $\mathbf{P}_{ij}^{(n)}$ de la chaîne de Markov $\{Q_n\}$ sont obtenues comme des éléments de la $n^{\text{ième}}$ puissance de \mathbf{P} .

Les observations faites sous $M/G/1$ concernant le comportement de \mathbf{P} se tient aussi bien dans le cas $G/M/1$. Pour des expressions analytiques de $\mathbf{P}_{ij}^{(n)}$ le lecteur peut se rapporter aux mêmes références, Takács [1962], Prabhu et Bhat [1963], et Prabhu [1965].

cependant, dans la pratique, l'espace des états peut être limité à la capacité de l'ordinateur à cause des multiplications successives de \mathbf{P} .

Régime stationnaire

Soit $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ le vecteur des probabilités limites vérifiant $\pi \mathbf{P} = \pi$, où $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{ij}^{(n)}$. Cette distribution limite existe si la chaîne de Markov associée est irréductible apériodique et récurrente positive, i.e ($\rho < 1$). Nous avons le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} & \text{Si } j = 0, 1, 2, \dots; \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \end{cases} \quad (1.11)$$

En utilisant (1.5), nous obtenons

$$\begin{cases} \pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \left(\sum_{n=i+1}^{\infty} b_n \right) \\ \pi_j = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{j+n-1} b_n & j \geq 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

Si le système d'équations considéré admet une solution, l'équation

$$\pi_j = \sum_0^{\infty} \pi_{j+n-1} b_n, \quad j \geq 1$$

peut alors s'écrire:

$$\pi_j = C\sigma^j = \sum_{k \geq j-1} C\pi^k b_{k+1-j}, \quad j \geq 1 \quad (1.13)$$

avec $\sigma \neq 0$ et $C \neq 0$

$$\sigma = \sum_{k \geq j-1} \sigma^{k+1-j} b_{k+1-j} = \sum_{k \geq 0} \sigma^k b_k = \int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-\sigma)} dA(t) = A^*(\mu(1-\sigma))$$

σ est donc solution de l'équation

$$\sigma = A^*(\mu(1-\sigma)) \quad (1.14)$$

Si de plus $(\lambda/\mu) < 1$, elle est unique.

Comme $\sigma < 1$ et $\sum_j \pi_j = 1$, on obtient

$$\sum_j \pi_j = C \sum_j \sigma^j = \frac{C}{1-\sigma} = 1$$

Donc

$$C = (1-\sigma) \quad (1.15)$$

Substituant ceci de nouveau dans (1.13), nous obtenons

$$\pi_j = (1-\sigma)\sigma^j \quad \forall j \geq 0 \quad (1.16)$$

comme distributions stationnaires du système dans la file d'attente $GI/M/1$.

Avec la structure géométrique de la distribution stationnaire (1.16), la moyenne et la variance de la variable Q sont facilement obtenues. Nous avons

$$L = E(Q) = \frac{\sigma}{1-\sigma}, \quad V(Q) = \frac{\sigma^2}{1-\sigma}.$$

La distribution limite du nombre de clients dans le système

Notons que $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P[Q(t) = j]$, où $Q(t)$ est le nombre de clients dans le système à l'instant quelconque t . Prabhu (1965) et Bhat (1968) arrivent à l'expression explicite suivante pour la distribution limite de $\{p_j, j = 0, 1, 2, \dots\}$, quand $\rho < 1$

$$p_0 = 1 - \rho \quad (1.17)$$

$$p_j = \rho(1-\sigma)\sigma^{j-1} \quad j \geq 1 \quad (1.18)$$

Nous obtenons les caractéristiques suivantes:

- Le nombre moyen de clients dans le système L :

$$L = \frac{\rho}{1 - \sigma} \quad (1.19)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file L_q :

$$L_q = \frac{\rho\sigma}{1 - \sigma} \quad (1.20)$$

Temps d'attente

Pour déterminer la distribution du temps d'attente d'un client, nous avons besoin de la distribution du nombre de clients dans le système à l'instant de son arrivée. Les temps de service des clients dans le système sont exponentiels avec un taux μ . Sans entrer dans les détails de leur dérivation, nous pouvons écrire,

$$W_q = E[T_q] = \frac{\sigma}{\mu(1 - \sigma)} \quad (1.21)$$

Le temps T passé par le client (le temps de séjour) dans le système est obtenu en ajoutant le temps de service à T_q (le temps d'attente). Nous obtenons

$$W = E[T] = E[T_q] + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1 - \sigma)} \quad (1.22)$$

Cycle d'activité

Un cycle d'activité d'une file d'attente $G/M/1$, une fois modélisé comme étant une chaîne de Markov incluse, est le nombre de transitions que le processus prend pour aller de l'état 0 à l'état 0 pour la première fois. Cet intervalle est également connu comme période de récurrence (répétition) de l'état 0.

Le cycle d'activité (cycle d'occupation) inclut la période d'activité quand le serveur est occupé (sans interruption de service), et la période à vide (vacance), quand il n'y a aucun client dans le système.

La longueur moyenne du cycle d'occupation (notée CA) est obtenue comme produit (nombre de transitions prévues) \times (la moyenne des inter-arrivées).

$$E[CA] = \frac{E(T)}{(1 - \sigma)} \quad (1.23)$$

Exemple

Prenons comme exemple le système de files d'attente $M/M/1$. Soit $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ($t \geq 0$). Alors, on a

$$A^*(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \quad (1.24)$$

$$A^*(\mu - \mu z) = \frac{\lambda}{\lambda + (\mu - \mu z)} \quad (1.25)$$

Donc, la solution de l'équation $z = A^*(\mu - \mu z)$ est

$$z = \frac{\lambda}{\lambda + (\mu - \mu z)} \quad (1.26)$$

$$-\mu z^2 + \mu z - \lambda = 0 \quad (1.27)$$

Cette équation quadratique a deux racines 1 et $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$. En remplaçant ces valeurs dans (1.19) - (1.20) - (1.21) - (1.22) - (1.23), nous obtenons la distribution limite ainsi que les caractéristiques de performance de la file d'attente $M/M/1$.

1.5 Synthèse bibliographique sur les systèmes d'attente sous discipline hystérétique

la théorie des files d'attente la politique par **hystérétique** signifie que la paire des taux d'arrivée et de service (λ, μ) est choisie parmi un ensemble de choix qui s'offrent à chaque arrivée ou fin d'un service selon le nombre de clients dans le système."

Les systèmes de files d'attente qui comportent des arrivées par groupes, service par groupes et des vacances du serveur appartiennent à des modèles d'attente avec discipline **hystérétique**.

Cette politique d'entrer et de quitter le système en période d'activité signifie que, initialement, le serveur quitte le système sur une ou plusieurs vacances chaque fois que le système est inférieur à un seuil r , et reprend le service lorsque la file d'attente atteint un nombre N de clients. Donc, le mode actif ou inactif dépendra de l'information, par conséquent, si la file d'attente franchit le seuil r ou pas.

Les systèmes de files d'attente avec discipline hystérétique comprennent deux politiques selon les situations.

La première politique est spécifiée par le seuil de contrôle r . Elle est généralement utilisée pour les modèles d'attente avec arrivées par groupe et connue sous le nom "la règle r ", si la capacité du serveur notée R est supérieure à 1. Des exemples très communs

de cette situation sont service de courriers par groupe et le transport(dans lequel les machines doivent charger un certain pourcentage minimum de leur capacité de démarrage). Des travaux dans cette voie ont été développés par Muh [112].

La deuxième discipline est spécifiée par le niveau de contrôle N , appelée généralement par la " N -politique " où $N \geq r$. Elle a été étudiée par Yadin et Noar dans leur article cité en [147]. En réalité, N devrait être sensiblement supérieur à R pour éviter la file oscillant autour du seuil R , ce qui apporterait des changements non désirés entre le mode actif et inactif. Par la suite, plusieurs études ont été faites dans cette approche et vers la fin des années 70, ces modèles sont connus dans la littérature des files d'attente par les modèles avec discipline hystérétique de contrôle.

La combinaison des deux politiques donne la (r, N) politique. C'était le sujet d'étude et de discussion dans les années 70, voir [45, 56, 65, 112].

La troisième façon de contrôler le système est de permettre au serveur d'utiliser son temps pendant les phases inactives (vacances). Au lieu que la file s'accumule à N , le serveur exécute certaines tâches. Ceci est connu sous le nom de " *Vacances de travail* ". Dans la littérature des files d'attente, les vacances de travail sont souvent interprétés comme étant le service d'autres clients d'une seconde priorité.

Parmi les différentes sous catégories de discipline avec vacances, l'une des plus courantes est appelée " *Vacances Multiples* ".

Toutes les vacances sont classées dans un certain nombre de voyages appelés "segments", de sorte que la fin de chaque segment est caractérisé par le retour du serveur au système et l'inspection de la file d'attente. Lors de tout retour, le serveur devient disponible à condition que le seuil N est atteint. Sinon d'autre vacances auront lieu.

Jusqu'ici, la recherche sur les systèmes d'attente avec vacances s'est principalement concentrée sur des modèles $M/G/1$, citons par exemple les travaux de Fuhrmann [60], Keilson et Ramaswamy [86], Kleinrock [96], Yechiali [97], Scholl et Kleinrock [124] et Tian [137, 138]. Bien que Doshi [50, 51, 52], Keilson et Servi [85] aient considéré le $GI/G/1$ avec vacances du serveur, ils n'ont donné que quelques résultats de décomposition du temps d'attente.

Cependant, Naishou Tian, Daqing Zhang and Chengxuan Cao ont étudié le modèle $GI/M/1$ avec vacances exponentielles. Ils ont choisi les temps d'arrivées en tant que points inclus. Cependant, ni les points de départ, ni les points finaux des vacances appartiennent à l'ensemble constitué par ces points inclus. Ceci fait que le modèle $GI/M/1$ est plus difficile à analyser.

Enfin, plusieurs modèles de files d'attente ont été modélisés sous les discipline cités précédemment voir Dshalalow [53, 55], Dshalalow et Russell [53] et Tadj [131]. Pour plus de références sur les politiques de (r, N) , les vacances, et les dépendances d'état, le lecteur

peut se référer à [54].

Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre, de façon introductive et claire, les notions de base de la théorie de files d'attente. Par la suite, nous avons étudié le système $GI/M/1$ classique de la théorie de files d'attente et nous avons pris comme exemple le système élémentaire $M/M/1$. Enfin, nous avons effectué une synthèse bibliographique sur les modèles d'attente avec discipline hystérétique, plus particulièrement sur les modèles d'attente avec vacances.

CHAPITRE 2

Théorie de stabilité forte

Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter les notions générales et les théorèmes fondamentaux concernant les concepts et les critères d'ergodicité uniforme et de stabilité des chaînes de Markov, par rapport à des normes données dans des espaces de mesures et de noyaux de transitions [79]. En particulier, nous nous intéressons à la méthode de stabilité forte, qui est basée sur la théorie de perturbation des opérateurs linéaires. Cette méthode est applicable à tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov. Pour les démonstrations, on peut par exemple se référer à [81]. La méthode de stabilité forte a été appliquée à plusieurs systèmes stochastiques régis par des chaînes de Markov: systèmes d'attente avec rappels [26], systèmes d'attente avec priorités [41, 64], systèmes d'attente avec pannes et réparations [2, 3, 4], systèmes d'attente avec vacances [122], systèmes d'attente classiques [39, 40, 23], systèmes d'attente avec arrivées par groupes [42], systèmes de gestion de stocks [118, 120], modèles de risque [25, 24] et réseaux de files d'attente [95, 94].

2.1 Notions et concepts fondamentaux

Dans ce paragraphe, nous allons présenter tous les objets mathématiques ainsi que quelques notions nécessaires à la compréhension des théorèmes fondamentaux d'ergodicité uniforme et de stabilité forte.

Nous définissons dans la catégorie des espaces topologiques, la sous catégorie particulière des espaces mesurables, de la manière suivante :

1. Soit (E, ε) un espace mesurable, où ε est une σ -algèbre engendrée par une partie dénombrable de E .
2. On considère $X = X_t$, $t = 0, 1, \dots$ une chaîne de Markov à valeurs dans E , donnée par un noyau de transition régulier $P(x, A)$, $x \in E$, $A \in \varepsilon$.
3. On suppose que la chaîne admet une unique mesure invariante π de l'opérateur P tel que $\pi(E) = 1$ (mesure de probabilité).
4. On considère $m\varepsilon$ ($m\varepsilon^+$), l'espace des mesures finies (non négative) sur ε .
5. On considère $f\varepsilon$ ($f\varepsilon^+$), l'espace des fonctions mesurables (non négatives sur E).
6. On considère \mathcal{J} (\mathcal{J}^+), l'espace des fonctions mesurables bornées (non négatives).

Soient:

$$\mathcal{L}_p : m\varepsilon \rightarrow m\varepsilon$$

et

$$\mathcal{L}_p^* : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$$

définies par

$$\mu P(A) = \mathcal{L}_P(\mu)(A) = \int_E \mu(dx) P(x, A) \quad \forall A \in \varepsilon, \quad (2.1)$$

et

$$P f(A) = \mathcal{L}_p^*(f)(x) = \int_E P(x, dy) f(y) \quad \forall x \in E. \quad (2.2)$$

Le produit de la mesure $\mu \in m\varepsilon$ et la fonction $f \in \mathcal{J}$, sera notée μf , et définit par

$$\mu f = \int_E \mu(dx) f(x). \quad (2.3)$$

Le produit des deux noyaux de transitions P et Q est défini de la manière suivante:

$$PQ(x, A) = \int_E P(x, dy) Q(y, A) \quad \forall x \in E, \forall A \in \varepsilon. \quad (2.4)$$

Supposons que l'espace $m\varepsilon$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$, qui confère au sous espace $\mathcal{M} = \{\mu \in m\varepsilon : \|\mu\| < \infty\}$ une structure d'espace normé complet et par suite d'espace de Banach. Cette norme met en évidence dans la classe des applications linéaires de l'espace \mathcal{M} dans \mathcal{M} , l'espace β des opérateurs bornés dont la norme induite par celle de \mathcal{M} est défini par

$$\|P\| = \sup\{\|\mu P\|, \|\mu\| \leq 1\} \quad (2.5)$$

Remarque 2. 1

Le produit μf définit une forme bilinéaire qui établit la dualité entre les deux espaces \mathcal{M} et \mathcal{J} . Les opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{L}_p^ sont transposés, en d'autres termes:*

$$\mu(Pf) = (\mu P)f \quad (2.6)$$

Dans la suite, on notera

a) $\mathcal{L}_p(\mu)$ par μP pour $\mu \in \mathcal{M}$.

b) $\mathcal{L}_p^*(f)$ par Pf pour $f \in \mathcal{J}$

Pour cela, le noyau stochastique P correspond à un opérateur linéaire positif P sur le cône $\mathcal{M}^+ = m\varepsilon^+ \cap \mathcal{M}$. On suppose de plus que la norme $\|\cdot\|$ est compatible avec l'ordre structurel sur \mathcal{M} et de topologie uniforme sur le cône \mathcal{M}^+ , c'est à dire :

1)

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\| \quad \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+ \quad \forall i = 1,2; \quad (2.7)$$

2)

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\| \quad \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+ \quad \text{et} \quad \mu_1 \perp \mu_2; \quad (2.8)$$

3)

$$|\mu|(E) \leq k\|\mu\| \quad \mu \in \mathcal{M}; \quad (2.9)$$

où $|\mu|$ est la variation de la mesure μ et k une certaine constante finie positive.

4) On suppose que la condition ci-dessous soit vérifiée

$$\|P\| < \infty; \quad (2.10)$$

Supposons, en plus, que la propriété suivante soit vérifiée

5)

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = \|\mu_1 + \mu_2\| \quad \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+ \quad \text{et} \quad \mu_1 \perp \mu_2 \quad (2.11)$$

Cette condition signifie que $|\mu|$ et μ ont la même norme. De plus, $|\mu(E)| \leq k\|\mu\|$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}$.

Remarquons ici que les classes de normes définies par

$$\|\mu\|_v = \int_E v(x)|\mu|(dx), \tag{2.12}$$

$$\|\mu\|_{q,\varphi} = \begin{cases} (\int_E |\frac{d\mu}{d\varphi}|)^{\frac{1}{q}} & \forall \mu \ll \varphi \text{ et } q \geq 1, \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.13}$$

et vérifient les conditions (2.7), (2.8) et (2.9), où v est une fonction mesurable bornée arbitraire strictement positive (pas nécessairement finie) et φ mesure finie positive. Notons que dans l'expression (2.9)

$$|\mu \mathbf{1}| = |\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq k\|\mu\| \quad \forall \mu \in \mathcal{M} \Rightarrow \|\mathbf{1}\| \leq k < +\infty \Rightarrow \mathbf{1} \in \mathcal{J}, \tag{2.14}$$

où $\mathbf{1}$ est la fonction identiquement égale à l'unité. On note par $\Pi = \mathbf{1} \circ \pi$ le projecteur stationnaire du noyau P . En d'autre termes, le noyau défini par

$$\Pi(x,dy) = \mathbf{1}(x)\pi(dy), \quad \forall (x,dy) \in E \times \varepsilon, \tag{2.15}$$

et par I l'opérateur identité sur \mathcal{M}

2.2 Ergodicité uniforme et stabilité forte d'une chaîne de Markov

Introduisons à présent les notions d'ergodicité uniforme et de stabilité forte et présentons les théorèmes fondamentaux.

Définition 2.1 *La chaîne X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si elle admet une mesure invariante unique π et*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|P^t - \pi\| = 0 \tag{2.16}$$

Définition 2.2 La chaîne de Markov \bar{X}_n , d'opérateur de transition \bar{P} , et de mesure invariante $\bar{\pi}$ est dite fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$ si $\|\bar{P}\|_v < +\infty$, chaque noyau de transition sur l'espace $(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{N}))$ d'un certain voisinage $\{P : \|P - \bar{P}\|_V \leq \epsilon\}$ admet une mesure invariante unique $\pi = \pi(P)$ et s'il existe une constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\bar{P})$ telle que:

$$\|\pi - \bar{\pi}\|_v \leq \mathcal{C}\|P - \bar{P}\|_v \tag{2.17}$$

Définition 2.3 La chaîne de Markov X est dite fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si

1)

$$\|P\| < +\infty \tag{2.18}$$

2) Chaque noyau de transition Q dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$ admet une mesure invariante unique $v = v(Q)$

3) Il existe une constante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P)$, telle que

$$\|v - \pi\| \leq \mathcal{C}\|P - Q\| \tag{2.19}$$

Théorème 2.1 [19, 79] La chaîne X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si l'opérateur $I - P + \Pi$ est inversible et borné

$$\|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty \tag{2.20}$$

De plus, la relation 2.9 entraîne $\|\Pi\| < \infty$

Théorème 2.2 Une chaîne X est fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si elle est uniformément ergodique par rapport à la même norme.

Remarque 2.2 Il est important de noter que:

- Les définitions d'ergodicité uniforme et de stabilité forte dépendent essentiellement des propriétés de l'opérateur $(I - P + \Pi)$.
- Une chaîne uniformément ergodique par rapport à une norme peut ne pas l'être par rapport à une autre norme, si ces normes ne sont pas équivalentes.
- Notons qu'une chaîne peut être stable par rapport à une norme et instable par rapport à une autre norme, si ces norme ne sont pas équivalentes.
- L'inverse de $B = I - P + \Pi$ est défini dans le sous espace \mathcal{MB}

$$\mathcal{MB} = \{\mu P : \mu \in \mathcal{M}, P \in \mathcal{B}\} \tag{2.21}$$

De plus,

$$\|B^{-1}\| = \sup(\|\mu B^{-1}\| : \|\mu\| \leq 1, \mu \in \mathcal{MB}) \quad (2.22)$$

Théorème 2.3 [19, 8]

Soit une chaîne uniformément ergodique. Alors, chaque noyau stochastique Q dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$ à une chaîne de Markov uniformément ergodique et fortement stable par rapport à la même norme $\|\cdot\|$.

Remarque 3 *Le théorème (2.3) énonce que l'ergodicité uniforme par rapport à la norme $\|\cdot\|$ est préservée sous de petites perturbations du noyau de transition.*

Théorème 2.4 [19, 79]

Supposons que la chaîne X est fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$. Alors, pour un noyau stochastique Q dans un certain voisinage de P , on a

$$\|v - \pi\| \leq C\|Q - P\| \quad (2.23)$$

$$\sup_t \|Q^t - P^t\| \leq C\|Q - P\|. \quad (2.24)$$

où v est une mesure invariante $v = v(Q)$ et $C = C(P)$ est une constante.

Récurrence au sens de Harris Présentons la notion de récurrence au sens de Harris qui joue un rôle primordial dans les conditions imposées dans les théorèmes d'ergodicité et de stabilité.

Définition 2.4 *La chaîne de Markov X d'espace de phase (E, ϵ) et de noyau de transition P est récurrente au sens de Harris s'il existe une mesure invariante π σ -positive telle que $\pi(A) > 0$ entraîne*

$$P_x\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_A(X_n) = \infty\right] = 1, \quad (2.25)$$

pour tout $x \in E$, où \mathbb{I}_A est la fonction indicatrice sur A .

Donc, nous dirons plus simplement que X est une chaîne de Harris et son noyau de transition est de Harris. Comme nous pouvons dire que la chaîne passe par chaque ensemble non négligeable par rapport à la mesure π , un nombre infini de fois presque sûrement pour tout x dans E .

C'est à dire:

$$\forall A \in \mathcal{E} : \pi(A) > 0 \Rightarrow P_x\{X_n \in A, \text{ pour un ensemble infini de valeur de } n\} = 1, x \in E \quad (2.26)$$

Si $\pi(A) < \infty$, alors

X est dite récurrente positive et si $\pi(A) = \infty$, alors X est dite récurrente nulle.

Remarque 2.4 Une chaîne de Harris est une chaîne irréductible.

Une chaîne irréductible discrète et récurrente est de Harris.

Définition 2.5 Une chaîne de Markov \hat{X} de noyau de transition \hat{P} et de mesure invariante $\hat{\pi}$ est dite fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$ (fortement v -stable), si chaque noyau stochastique P dans un certain voisinage $\{P : \|P - \hat{P}\| < \epsilon\}$ admet une probabilité stationnaire unique π telle que :

$$\|\pi - \hat{\pi}\|_v \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|P - \hat{P}\|_v \longrightarrow 0. \quad (2.27)$$

Théorème 2.5 [79]

Une chaîne de Markov X , récurrente au sens de Harris, est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ et apériodique si et seulement s'il existe une mesure $\beta \in \mathcal{M}^+$, une fonction mesurable $h \in \mathcal{J}^+$ et un entier naturel $n \geq 1$ tel que les conditions suivantes soient vérifiées

A) $\pi h > 0, \beta \mathbf{1} = 1, \beta h > 0$.

B) Le noyau $T = P^n - h\beta$ est non négatif.

C) $\|T^m\| \leq \rho$ pour un certain entier $m \geq 1$ et $\rho < 1$.

De plus, l'ergodicité uniforme de la chaîne X entraîne que la condition C) est satisfaite pour tout n, β et h , vérifiant A), B). D'après ce théorème, on peut déduire que l'hypothèse de récurrence au sens de Harris n'est pas nécessaire pour démontrer l'ergodicité uniforme de la chaîne X sous les conditions A), B) et C).

De plus, les conditions A) et B), sont toujours vérifiées pour toute chaîne X récurrente au sens de Harris.

2.3 v -Stabilité d'une chaîne de Markov

Munissons l'espace \mathcal{M} d'une certaine norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_v$, définie par

$$\|\mu\|_v = \int_E \nu(x) |\mu|(dx) \quad (2.28)$$

où $v: E \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

Elle vérifie les propriétés suivantes:

- 1) $\sup[v(x)^{-1}, x \in E] = \varrho > 0$
- 2) v est ε -mesurable.

La norme induite dans l'espace \mathcal{J} est

$$\|f\|_v = \sup\{|\mu f|, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup\left(\frac{|f(x)|}{v(x)}, x \in E\right) \quad (2.29)$$

Elle met en évidence dans la classe des applications linéaires de \mathcal{M} dans \mathcal{M} , l'espace \mathcal{B} des opérateurs linéaires bornés, de normes

$$\|P\|_v = \sup\{\|\mu P\|_v, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup\left(\frac{\int_E v(y) |p(x, dy)|}{v(x)}, x \in E\right) \quad (2.30)$$

Remarque 2.5 Pour la classe de norme $\|\cdot\|_v$ donnée par (2.28), la condition C) est équivalente à la condition

$$T^m v(x) \leq \rho v(x) \quad \forall x \in E \quad \text{pour un certain } 0 < \rho < 1 \quad (2.31)$$

Corollaire 2.1 Pour que la chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris soit v -fortement stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. Il existe une mesure $\beta \in \mathcal{M}^+$ et une fonction mesurable $h \in f\varepsilon^+$ telles que

$$\pi h > 0, \beta \mathbf{1} = 1, \beta h > 0 \quad (2.32)$$

2. Le noyau $T = P - h\circ\beta$ est non négatif.
3. Il existe $\rho < 1$ tel que, $Tv(x) \leq \rho v(x)$ pour tout $x \in E$

2.4 Inégalités de stabilité forte

Sous les conditions du théorème (2.5), on peut obtenir les estimations quantitatives de stabilité, telles que la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov X en termes des fonctions v , h et la mesure β

Théorème 2.6 [82] *Soit une chaîne X fortement v -stable et vérifiant les conditions du théorème (2.5). Si v est la mesure invariante du noyau Q , alors pour des normes $\|Q - P\|_v$ suffisamment petites, on a l'égalité:*

$$v = \pi[I - \Delta R_0(I - \Pi)]^{-1} = \pi + \sum_{t=1}^{\infty} \pi[\Delta R_0(I - \Pi)]^t \quad (2.33)$$

où

$$\Delta = Q - P \quad (2.34)$$

$$R_0 = (I - T)^{-1} \quad (2.35)$$

Conséquence 2.1 *Dans les conditions du théorème (2.5)*

$$v = \pi + \pi\Delta R_0(I - \Pi) + o(\|\Delta\|_v^2) \quad (2.36)$$

pour

$$\|\Delta\|_v \rightarrow 0 \quad (2.37)$$

Conséquence 2.2 *Dans les conditions du théorème (2.5), pour $\|\Delta\|_v < \frac{1-\rho}{c}$, on a l'estimation*

$$\|v - \pi\|_v \leq \|\Delta\|_v c \|\pi\|_v (1 - \rho - c\|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (2.38)$$

où

$$c = m\|P\|_v^{m-1}(1 + \|\mathbb{I}\|_v\|\pi\|_v), \quad (2.39)$$

$$\|\pi\|_v \leq (\beta v)(1 - \rho)^{-1}(\pi h)m\|P\|_v^{m-1}, \quad (2.40)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov. En effet, la méthode de stabilité forte, initialement introduite dans la théorie de stabilité des chaînes de Markov, peut s'appliquer d'une manière efficace aux systèmes de files d'attente du moment que la plupart de ces derniers peuvent être régis par des chaînes de Markov. À la différence des autres méthodes, elle permet, outre l'approximation du système perturbé, l'estimation des écarts asymptotiques entre les caractéristiques des deux systèmes, réel et idéal.

La recherche de stabilité forte d'une chaîne de Markov se ramène au choix de la fonction mesurable bornée non négative h , de la mesure finie non négative α et de la norme vérifiant les conditions du théorème (2.5). Dans le cas de la ν -stabilité forte, le choix de la norme appropriée se réduit à la recherche de la fonction test ν . Cette dernière doit être mesurable, bornée inférieurement (par une constante finie, positive, non nulle) et pas nécessairement finie. Le choix de ces normes poids représente la difficulté majeure dans l'étude de la ν -stabilité forte. Il dépend essentiellement de la structure du noyau de transition de la chaîne de Markov étudiée.

L'objectif de notre travail est d'élargir le champs d'application de la méthode de stabilité forte aux systèmes de files d'attente avec vacances exponentielles. Pour cela, nous avons choisi le modèle d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles et $GI/M/1$ classique mais modifié. Les résultats d'application de ce concept aux tels types de modèles sont présentés dans les prochains chapitres.

CHAPITRE 3

Stabilité forte dans le modèle de file d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles

Introduction

Après avoir énoncé précédemment quelques notions sur les systèmes de files d'attente avec discipline hystérique, plus particulièrement avec vacances, ainsi que quelques notions fondamentales sur la méthode de stabilité forte, nous allons nous intéresser à l'application de la méthode de stabilité forte sur les systèmes de files d'attente avec vacances exponentielles. Dans ce chapitre, nous considérons le système de files d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles. Notre tâche consiste à préciser la sensibilité des caractéristiques de ce système relativement à ses paramètres. En d'autres termes, décrire le comportement de la variation des caractéristiques du système après perturbation de ses paramètres. Ce comportement sera décrit d'un point de vue qualitatif et quantitatif. Plus précisément, le comportement qualitatif du système signifie qu'une petite perturbation dans les paramètres induit une petite perturbation dans ces caractéristiques, et cela relativement à une métrique donnée. C'est-à-dire que le processus décrivant l'état du système est fortement stable à cette métrique. Le deuxième aspect concerne l'obtention des bornes de stabilité forte (bornes de perturbation) après perturbation de la structure du système

étudié (perturbation du taux de vacances exponentielles). Pour cela, nous commencerons par la description du modèle considéré dans cette étude. Puis, nous présenterons les résultats théoriques obtenus en appliquant la méthode de stabilité forte sur ce type de systèmes de files d'attente .

3.1 Description du modèle et position du problème

Considérons le système de files d'attente $GI/M/1(FIFO, \infty)$ avec vacances exponentielles. Ce système est décrit comme suit: Soit τ_n représentant le point d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client avec $\tau_0 = 0$, les temps des inter-arrivées $\{T_n, n \geq 1\}$ sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d) avec une fonction de distribution générale $A(t) = P(\tau_n - \tau_{n-1} < t)$, de moyenne $\lambda^{-1} = \mathbb{E}(\tau_n - \tau_{n-1})$ et sa Transformée de Laplace Stieltjes (TLS) $A^*(s)$. Les temps de service S_n sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d) avec une fonction de répartition $B(t) = P(S_n < t) = 1 - e^{-\mu t}$, ce système sera noté par $\tilde{\Sigma}$. Il y a un seul serveur, dès que le système devient vide, le serveur prend des vacances V tel que $V(t) = P(V < t) = 1 - e^{-\theta t}$. Quand les vacances sont terminées, si le système est toujours vide, alors le serveur prend encore d'autres vacances; autrement il retourne au service. Finalement, les temps des inter-arrivées, les temps de service et de vacances sont mutuellement indépendants.

Soit $X(t)$: le nombre de client dans le système à l'instant t .

On choisit τ_n comme étant le point de discrétisation et on denote $\tilde{Q}_n = \tilde{Q}(\tau_n - 0)$ la longueur de la file à l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client. Soit

$$\tilde{J}_n = \begin{cases} 0 & \text{Si la } n^{\text{ème}} \text{ arrivée se produit en période de vacance;} \\ 1 & \text{Si la } n^{\text{ème}} \text{ arrivée se produit en période d'activité.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Clairement, J_n est une variable aléatoire car les temps de service et ceux de vacances sont des variables aléatoires ayant les deux la propriété de Markov (absence de mémoire). Par conséquent le processus $(\tilde{Q}_n, \tilde{J}_n)$ forme une chaîne de Markov induite notée par CMI à espace d'états :

$$\Omega = \{(i, j) : i = 1, 2, \dots; j = 0, 1\} \quad (3.2)$$

Pour $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\tilde{b}_k = \int_0^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} dA(t) \quad (3.3)$$

Où $(\tilde{b}_k, k \geq 0)$ exprime la probabilité que k services complétés pendant un temps d'inter-arrivée dans une période de service.

$$v_k = \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{[\mu(t-u)]^k}{k!} e^{-\mu(t-u)} \theta e^{-\theta u} du \right\} dA(t) \quad (3.4)$$

Ces quantités v_k représentent la probabilité que le nombre de clients servis pendant la fin de vacance et l'arrivée d'un client est exactement k .

Pour exprimer la matrice de transition de la chaîne de Markov induite $(\tilde{Q}_n, \tilde{J}_n)$, soit

Pour $j, l \in \{0, 1\}$ $0 \leq k \leq i + 1$

$$\tilde{P}_{(i,j)(k,l)} = \mathbb{P} \left\{ \tilde{Q}_{n+1} = k, \tilde{J}_{n+1} = l \mid \tilde{Q}_n = i, \tilde{J}_n = j \right\}, \quad (3.5)$$

Considérons maintenant les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite $(\tilde{Q}_n, \tilde{J}_n)$.

Premièrement, on observe que dans le cas où le système $GI/M/1$ est sans vacances, on a

$$\tilde{P}_{(i,1)(k,1)} = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!} e^{-\mu t} dA(t), & k=1, 2, \dots, i+1; \\ 0, & k=i+2, \dots, \end{cases} \quad (3.6)$$

En d'autres termes, on considère la période de service régulière, donc la transition de $(i, 1)$ à $(i + 1 - k, 1)$ se produit si il y a k services effectués pendant la période des inter-arrivées, Où $0 \leq k \leq i + 1$. Donc, on aura

$$\tilde{P}_{(i,1)(i+1-k,1)} = \tilde{b}_k, \quad 0 \leq k \leq i + 1, \quad (3.7)$$

Par contre, la transition $(i, 1)$ à $(0, 0)$ signifie que le serveur a déjà servi exactement $i + 1$ clients dans un temps d'absence de clients qui arrivent. Donc, on aura

$$\tilde{P}_{(i,1)(0,0)} = \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{\mu(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} du \right\} dA(t) = 1 - \sum_{n=0}^i \tilde{b}_n, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Deuxièmement, on note que la transition de $(i, 0)$ à $(k, 0)$ est possible, seulement si $k = i + 1$. Cette transition se produit si et seulement si le temps restant de vacance est plus grand que le temps des inter-arrivées. Car les temps de vacance ont la propriété

d'absence de mémoire, on notera dorénavant le temps restant de vacances par V . Alors

$$\tilde{P}_{(i,0)(i+1,0)} = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} dA(t) = A^*(\theta), \quad (3.9)$$

Où la quantité $A^*(\theta)$ es la Transformée de Laplace Stieltjes (TLS) du temps des inter-arrivées, également elle représente la probabilité que les vacances sont plus long que le temps des inter-arrivées.

La transition de l'état $(i,0)$ à l'état $(0,0)$ se produise si le temps des inter-arrivées est plus grand que la somme des temps restants de vacances et il y a $i + 1$ services effectués. Donc, on aura

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{(i,0)(0,0)} &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t \left[\int_0^{t-v} \frac{\mu(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} du \right] \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t \left[1 - \sum_{n=0}^i \frac{[\mu(t-v)]^n}{n!} e^{-\mu(t-v)} \right] \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \\ &= 1 - A^*(\theta) - \sum_{n=0}^i v_n, \quad (i \geq 0) \end{aligned}$$

Donc

$$\tilde{P}_{(i,0)(0,0)} = 1 - A^*(\theta) - \sum_{n=0}^i v_n, \quad (i \geq 0) \quad (3.10)$$

Finalement, la transition de l'état $(i,0)$ à l'état $(k,1)$ se produit s'il y a $i + 1 - k$ services effectués pendant la fin des vacances et l'arrivée d'un client. Ceci donne

$$\tilde{P}_{(i,0)(k,1)} = \begin{cases} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t \frac{[\mu(t-u)]^{i+1-k}}{(i+1-k)!} e^{-\mu(t-u)} \theta e^{-\theta u} du \right\} dA(t), & \text{si } 1 \leq k \leq i + 1; \\ 0, & \text{si } k = i + 2, \dots, \end{cases} \quad (3.11)$$

On peut écrire aussi

$$\tilde{P}_{(i,0)(k,1)} = \begin{cases} v_{i+1-k}, & \text{si } 1 \leq k \leq i+1; \\ 0, & \text{si } k = i+2, \dots, \end{cases} \quad (3.12)$$

En conclusion, $(\tilde{Q}_n, \tilde{J}_n)$ est une chaîne de Markov homogène.

Si on peut écrire les états comme étant des vecteurs composés dans cet ordre $(0,0), ((j,1), (k,0))$ $k = 1, 2, \dots$ alors l'opérateur de transition $\tilde{\mathbb{P}}$ peut être écrit comme matrice à Bolc-Jacobi :

$$\tilde{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} B_{00} & \mathbb{A}_{01} & 0 & 0 & \cdots \\ \mathbb{B}_{10} & \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 & 0 & \cdots \\ \mathbb{B}_{20} & \mathbb{A}_2 & \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 & \cdots \\ \mathbb{B}_{30} & \mathbb{A}_3 & \mathbb{A}_2 & \mathbb{A}_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Où

$$B_{00} = 1 - A^*(\theta) - v_0, \quad \mathbb{A}_{01} = (v_0, A^*(\theta)) \quad (3.14)$$

Pour $(k \geq 1)$ on a

$$\mathbb{A}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{b} & 0 \\ v_0 & A^*(\theta) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_k = \begin{pmatrix} \tilde{b}_k & 0 \\ v_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{k0} = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{i=0}^k \tilde{b}_i \\ 1 - A^*(\theta) - \sum_{i=0}^k v_i \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Et 0 est un vecteur nul ou une matrice nulle. À partir de la structure de $\tilde{\mathbb{P}}$, il est clair que la chaîne de Markov est irréductible et apériodique.

Considérons également le système de files d'attente $GI/M/1(FIFO, \infty)$ classique mais modifié associé à la chaîne de Markov incluse qu'on appellera par la suite " le système de files d'attente $GI/M/1(FIFO, \infty)$ modifié" qui a le même flôt d'arrivées et même distribution de services, $A(t)$, que le système d'attente précédent, ce système sera noté par Σ . La chaîne de Markov induite $\{Q_n, n \geq 1\}$ qui représente le nombre de clients dans le système, a les probabilités de transition suivantes:

$$P_{(i,j)(k,l)} = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\mu t)^{i+1-k}}{i+1-k!} e^{-\mu t} dA(t) = b_{i+1-k}, & \text{si } k = 1, 2, \dots, i+1, j = l = 1; \\ 1 - \sum_{n=0}^i \int_0^\infty \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} dA(t), & \text{si } i = 1, 2, \dots, j = 1, l = 0; \\ 1, & \text{si } i = 0, 1, 2, \dots, k = 0, l = 0; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

On peut écrire également

$$P_{(i,j)(k,l)} = \begin{cases} b_{i+1-k}, & \text{si } k = 1, 2, \dots, i+1, j = l = 1; \\ 1 - \sum_{n=0}^i b_n, & \text{si } i = 1, 2, \dots, j = 1, l = 0; \\ 1, & \text{si } i = 0, 1, 2, \dots, k = 0, l = 0; \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.16)$$

L'opérateur de transition \mathbb{P} peut être également écrit comme matrice à Bloc-Jacobi:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} B_{00} & \mathbb{A}_{01} & 0 & 0 & \cdots \\ \mathbb{B}_{10} & \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 & 0 & \cdots \\ \mathbb{B}_{20} & \mathbb{A}_2 & \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_0 & \cdots \\ \mathbb{B}_{30} & \mathbb{A}_3 & \mathbb{A}_2 & \mathbb{A}_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Où

$$B_{00} = 1, \quad \mathbb{A}_{01} = (0, 0) \quad (3.18)$$

$$\mathbb{A}_0 = \begin{pmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_k = \begin{pmatrix} b_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{k0} = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{i=0}^k b_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (k \geq 1) \quad (3.19)$$

La distribution stationnaire de Σ

Théorème 3.1 [Tian et al. 89]

Si $\tau = \lambda/\mu < 1$ et $\theta > 0$, la distribution des probabilités stationnaires pour la chaîne de Markov $\{Q_n, J_n, n \geq 0\}$ du système $\tilde{\Sigma}$ existe et est donnée par

$$\begin{cases} \pi_0 = P_{(0,0)} = \zeta(1 - \sigma), & k = 0; \\ \pi_k = P_{(k,1)} + P_{(k,0)} = \zeta(1 - \sigma)(\gamma\sigma^k + (1 - \gamma)(A^*(\theta))^k), & (k \geq 1). \end{cases} \quad (3.20)$$

Où

$$\zeta = \frac{1 - A^*(\theta)}{1 - \sigma + \gamma(\sigma - A^*(\theta))} = \frac{\theta - \mu(1 - A^*(\theta))}{\theta - \mu(1 - \sigma)} \quad (3.21)$$

$$\gamma = \frac{\theta}{\theta - \mu(1 - A^*(\theta))} \quad (3.22)$$

$\sigma: 0 < \sigma < 1$, est l'unique solution de l'équation:

$$z = A^*[\mu(1 - z)] \quad (3.23)$$

écrite dans l'intervalle $[0,1]$.

Conséquence 3.1 Si $\theta \rightarrow \infty$ et $\tau = \lambda/\mu < 1$, alors

la distribution des probabilités stationnaires pour la chaîne de Markov $\{Q_n, J_n, n \geq 0\}$, $\pi_k(k \in N)$ du système Σ existe et est donnée par la procédure

$$\pi_k = (1 - \sigma)\sigma^k, \quad k \geq 0 \quad (3.24)$$

Où $\sigma, 0 < \sigma < 1$, est l'unique solution de l'équation:

$$z = A^*[\mu(1 - z)]$$

écrite dans l'intervalle $[0,1]$.

Preuve

Si $\theta \rightarrow \infty$ i.e la moyenne de temps de vacance approche de zéro, alors on a

$$A^*(\theta) \rightarrow 0;$$

$$\gamma \rightarrow 1;$$

$$\zeta \rightarrow 1.$$

Donc, en remplaçant ces résultats dans (3.20), on trouve le résultat donné en (3.24). \square

3.2 Perturbation du taux de vacances exponentielles dans le système d'attente $\tilde{\Sigma}$

Cette section concerne l'étude de stabilité forte de la chaîne de Markov induite dans un système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles, après perturbation du taux de vacances exponentielles.

3.2.1 ν -stabilité forte

Dans cette partie, nous étudions la ν -stabilité forte la chaîne de Markov induite $\{Q_n, J_n, n \geq 0\}$ du système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles après perturbation (c'est-à-dire, après passage à un taux de vacances infini). Nous déterminons les conditions pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système $\tilde{\Sigma}$ par celles correspondantes du système Σ . Introduisons à présent le concept de stabilité forte de la chaîne de Markov Q_n .

Définition 3.1 La chaîne de Markov Q_n est dite fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|_\nu$ si les assertions suivantes sont vérifiées.

1. $\|\mathbb{P}\|_\nu < \infty$.
2. Chaque noyau de transition $\tilde{\mathbb{P}}$ dans un certain voisinage $\{\tilde{\mathbb{P}}: \|\tilde{\mathbb{P}} - \mathbb{P}\|_\nu < \epsilon\}$, admet une unique distribution stationnaire $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}\tilde{\mathbb{P}}$ telle que $\|\tilde{\pi} - \pi\|_\nu \rightarrow 0$, uniformément dans ce voisinage, lorsque $\|\tilde{\mathbb{P}} - \mathbb{P}\|_\nu \rightarrow 0$.

Remarque 3.1 Notons que l'assertion 2. est équivalente à l'existence d'une constante $C = C(\mathbb{P})$ telle que

$$\|\tilde{\pi} - \pi\|_v \leq C(\mathbb{P}) \|\tilde{\mathbb{P}} - \mathbb{P}\|_v,$$

pour tout $\tilde{\mathbb{P}}$ dans le voisinage $\{\tilde{\mathbb{P}} : \|\tilde{\mathbb{P}} - \mathbb{P}\|_v < \epsilon\}$.

À présent, énonçons le lemme suivant que nous utiliserons dans la démonstration de la v -stabilité forte de la chaîne de Markov $\{Q_n, J_n\}$.

D'après le critère de stabilité forte, pour vérifier la stabilité forte de la chaîne de Markov induite $\{Q_n, J_n\}$, il suffit de trouver une mesure α et une fonction mesurable h sur $N \times \{0,1\}$, telles que:

A) $\pi h > 0$, $\alpha \mathbf{1} = 1$, $\alpha h > 0$.

B) Le noyau $T = \mathbb{P}^n - h\alpha$ est non négatif.

C) $\|T^m\| \leq \rho$ pour un certain entier $m \geq 1$ et $\rho < 1$.

Introduisons dans \mathcal{M} , une classe spéciale de normes. Soit $V(n,m)$ une fonction finie, pas nécessairement bornée, différente de zéro sur $N \times \{0,1\}$. Définissons :

$$\|\mu\|_v = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} V(i,j) |\mu(i,j)| \tag{3.25}$$

et

$$\|f\|_v = \sup_{k \geq 0} \sup_{l \geq 0} \frac{|f(k,l)|}{V(k,l)} \tag{3.26}$$

où $|\mu|$ désigne la variation de la mesure μ .

Cette norme met en évidence dans la classe de tous les opérateurs linéaires, l'espace des opérateurs linéaires bornés, de norme

$$\|P\|_v = \sup_{k \geq 0} \sup_{l \geq 0} \frac{1}{V(k,l)} \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} V(i,j) P_{k,l}(i,j) \tag{3.27}$$

Lemme 3.1 Supposons que dans le système d'attente Σ les conditions suivantes sont vérifiées:

1. $\varrho = \bar{\tau}\mu > 1$ (la condition d'ergodicité géométrique)
2. $\exists a > 0$, $\mathbb{E}(e^{aT}) = \int e^{at} dA(t) < \infty$ (condition de Cramér).

Alors, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ tel que, $1 < \beta < 1/\sigma$, l'inégalité suivante:

$$\beta A^*[\mu(1 - \frac{1}{\beta})] < 1 \tag{3.28}$$

est vraie, où σ et A^* sont définis en (3.23) et $\bar{\tau} = \mathbb{E}(T)$ est le temps moyen entre les arrivées des clients .

Démonstration Considérons la fonction ϕ définie par:

$$\varphi(\beta) = A^*(\mu(1 - 1/\beta)), \beta > 1.$$

Elle est continue et différentiable sur $[1, 1/\sigma]$ [23]. En plus,

$$\varphi'(\beta) = -\mu/\beta^2 \int t e^{-\mu(1-1/\beta)t} dA(t) < 0$$

et

$$\varphi''(\beta) = 2\beta\mu/\beta^4 \int t e^{-\mu(1-1/\beta)t} dA(t) + \mu^2/\beta^4 \int t^2 e^{-\mu(1-1/\beta)t} dA(t) > 0$$

Elle est donc strictement décroissante et strictement convexe sur $[1, 1/\sigma]$. Par conséquent, la fonction

$$\phi = \beta\varphi(\beta) = \beta A^*(\mu(1 - 1/\beta)), \beta > 1.$$

est continue et différentiable sur $[1, 1/\sigma]$.

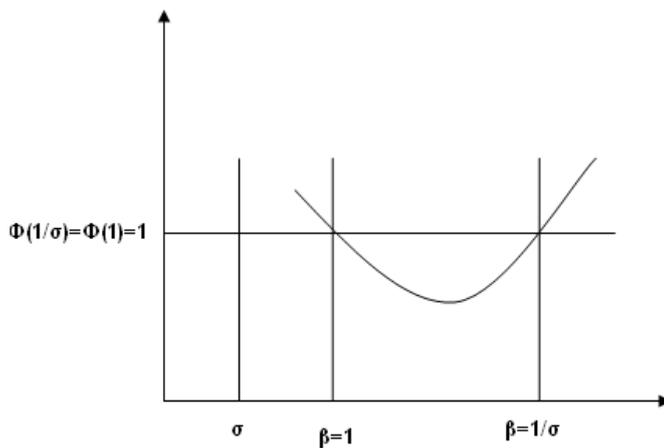


FIG. 3.1 –: Convexité de la fonction ϕ

Et $\forall \beta \in [1, 1/\sigma]$, on a

$$\begin{aligned}\phi'(\beta) &= \phi(\beta) + \beta\phi'(\beta) \\ &= A^*(\mu(1 - 1/\beta)) - \mu/\beta \int te^{-\mu(1-1/\beta)t} dA(t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\phi''(\beta) &= 2\phi'(\beta) + \beta\phi''(\beta) \\ &= \mu^2/\beta^3 \int t^2 e^{-\mu(1-1/\beta)t} dA(t) > 0\end{aligned}$$

Donc ϕ est strictement convexe sur $[1, 1/\sigma]$.

De la condition d'ergodicité géométrique, on déduit que $\phi'(1) < 0$.

Donc au voisinage de 1, ϕ est strictement décroissante.

Par conséquent, $\exists \beta > 1$ tel que $\beta A^*(\mu(1 - 1/\beta)) < 1$.

De la convexité et la monotonie de la fonction ϕ , découle le résultat.

Théorème 3.2 Supposons que dans le système d'attente Σ les conditions du Lemme (3.1) soient vérifiées. Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < 1/\sigma$, la chaîne de Markov $\{Q_n, J_n\}$ est fortement v -stable pour une fonction test $v(i, j) = \beta^{i+j}$.

Preuve Pour se faire, choisissons:

une fonction V définie par:

$$\begin{aligned}V : N \times \{0,1\} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (i, j) &\longrightarrow V(i, j) = \beta^{i+j}, \beta > 1,\end{aligned}$$

une fonction mesurable h définie par :

$$\begin{aligned}h : N \times \{0,1\} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ h(i, j) &= \begin{cases} \varpi_i = 1 - \sum_{n=0}^i b_n, & Si \ j = 0, \ i \geq 1; \\ 1, & Si \ j = 0, \ i \geq 1. \\ 1, & Si \ j = 0, \ i = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

et une mesure α telle que

$$\alpha : \mathbb{N} \times \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$$

$$\alpha(k,l) = 1_{k=0,l=0} = \begin{cases} 1, & \text{Si } k = 0, l = 0; \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

Ainsi, on a:

$$\star \quad \alpha 1 = \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \alpha(k,l) = \alpha(0,0) = 1.$$

$$\begin{aligned} \star \quad \pi h &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j \in \{0,1\}} \pi(i,j) h(i,j) \\ &= \sum_{i \geq 0} \pi(i,0) h(i,0) + \sum_{i \geq 0} \pi(i,1) h(i,1) \\ &= \pi(0,0) h(0,0) + \pi(0,1) h(0,1) + \sum_{i \geq 1} (\pi(i,0) h(i,0) + \pi(i,1) h(i,1)) \\ &= [\pi(0,0)] + [(\pi(1,1) \varpi_1) + (\pi(1,0) \times 1)] + [(\pi(2,1) \varpi_2) + (\pi(2,0) \times 1)] + \dots \\ &= \{\pi(0,0) + \pi(1,0) + \pi(2,0) + \dots\} + \{\pi(1,1) \varpi_1 + \pi(2,1) \varpi_2 + \dots\} \\ &= \sum_{i \geq 0} \pi(i,0) + \sum_{i \geq 1} \pi(i,0) \varpi_i > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star \quad \alpha h &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j \in \{0,1\}} \alpha(i,j) h(i,j) \\ &= \sum_{k \geq 0} \alpha(i,0) h(i,0) + \sum_{i \geq 0} \alpha(i,1) h(i,1) \\ &= \alpha(0,0) h(0,0) \\ &= h(0,0) \\ &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant la condition **a)** :

L'opérateur $T_{(i,j)(k,l)} = P_{(i,j)(k,l)} - h(i,j) \alpha(k,l) \geq 0$.

Nous avons deux cas à vérifier :

1) Si $(k,l)=(0,0)$

$$\begin{aligned} T_{(i,j)(0,0)} &= P_{(i,j)(0,0)} - h(i,j) \cdot \alpha(0,0) \\ &= P_{(i,j)(0,0)} - h(i,j) \\ &= P_{(i,1)(0,0)} - P_{(i,1)(0,0)} = 0 \end{aligned}$$

2) Si $(k, l) \neq (0,0)$

$$T_{(i,j)(0,1)} = P_{(i,j)(k,l)} \geq 0$$

D'où $T_{k,l}(i, j)$ est non négatif.

Vérification de la condition **b**).

On a

$$TV(k,l) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \in \{0,1\}} V(i, j) T_{k,l}(i, j).$$

Alors pour :

$$\begin{aligned} TV(k,l) &= \left\{ \sum_{j \in \{0,1\}} \beta^j T_{(k,l)(0,j)} \right\} + \left\{ \sum_{i > 0} \sum_{j \in \{0,1\}} \beta^{i+j} T_{(k,l)(i,j)} \right\} \\ &= \beta T_{(i,j)(0,1)} + \beta^0 T_{(i,j)(0,0)} + \sum_{i > 0} \sum_{j \in \{0,1\}} \beta^{i+j} T_{(k,l)(i,j)} \\ &= \sum_{i > 0} \sum_{j \in \{0,1\}} \beta^{i+j} T_{(k,l)(i,j)} \\ &= \sum_{i > 0} \beta^i P_{(k,l)(i,0)} + \sum_{i > 0} \beta^{i+1} P_{(k,l)(i,1)} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \beta^{i+1} P_{(k,l)(i,1)} \\ &= \sum_{i=0}^k \beta^{k-i+2} P_{(i,1)(i+1-k,1)} \\ &= \sum_{i=0}^k \beta^{k-i+2} \int_0^\infty \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} dA(t) \\ &\leq \beta^{k+2} \int_0^\infty \sum_{i=1}^\infty \frac{(\frac{\mu t}{\beta})^i}{i!} e^{-\mu t} dA(t) \\ &\leq \beta^{k+2} \int_0^\infty e^{(\frac{\mu t}{\beta})} e^{-\mu t} dA(t) \end{aligned}$$

$$TV(k,l) \leq \beta^{k+1} \beta \int_0^\infty e^{-[\mu(1-\frac{1}{\beta})]t} dA(t)$$

On pose

$$\rho = \beta \int_0^\infty e^{-[\mu(1-\frac{1}{\beta})]t} dA(t) = \beta A^*[\mu(1 - \frac{1}{\beta})] \quad (3.29)$$

Nous concluons que :

$$TV(k,l) \leq \rho V(k,l).$$

pour $(k,l) \in N \times \{0,1\}$.

Vérifions la condition **c**) : $\|\mathbb{P}\|_v < \infty$

$$\begin{aligned} T = \mathbb{P} - h \circ \alpha &\implies \mathbb{P} = T + h \circ \alpha. \\ &\implies \|\mathbb{P}\|_v = \|T\|_v + \|h\|_v \cdot \|\alpha\|_v. \end{aligned}$$

Nous avons d'après (3.27)

$$1) \|T_{(i,j)(k,l)}\|_v = \sup_{k \geq 0} \sup_{l \in \{0,1\}} \frac{1}{V(k,l)} \sum_{i \geq 0} \sum_{j \in \{0,1\}} V(i,j) |T_{(k,l)(i,j)}|.$$

Comme:

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} V(i,j) T_{(k,l)(i,j)} = \|TV(k,l)\|_v \leq \rho V(k,l).$$

Donc

$$\|T_{k,l}(i,j)\|_v \leq \sup_{k \geq 0} \sup_{j \in \{0,1\}} \frac{1}{V(k,l)} \rho V(k,l) \leq \rho < 1.$$

Calculons maintenant $\|\alpha\|_v$, d'après (3.25)

$$\begin{aligned} 2) \|\alpha\|_v &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j \in \{0,1\}} V(i,j) |\alpha(i,j)| \\ &= V(0,0) |\alpha(0,0)| = 1. \end{aligned}$$

Nous terminons par le calcul de $\|h\|_v$, d'après (3.26)

$$\begin{cases} Si (k,l) = (0,0) & alors \|h\|_v = 1; \\ Si (k,l) \neq (0,0) & alors \|h\|_v = \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^{k+1}} \varpi_k \leq 1. \end{cases}$$

Car

$$\begin{cases} \beta > 1 & ; \\ \varpi_k = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n < 1 & . \end{cases} \quad (3.30)$$

Par conséquent

$$\|\mathbb{P}\|_v \leq \rho + 1 < \infty.$$

Remarque 3.2 La construction de la fonction test V est liée au choix convenable de la norme $\|\cdot\|_v$. Le choix de V , h et α constitue la difficulté majeure dans l'étude de la v -stabilité forte, puisqu'elles dépendent essentiellement de la structure du noyau de transition de la chaîne de Markov étudiée.

3.3 Inégalités de stabilité forte

Estimation de la déviation entre les opérateurs de transition

Afin d'estimer la déviation entre les distributions stationnaires des deux chaînes de Markov \tilde{Q}_n et Q_n , on estime au préalable d'abord la norme de la déviation entre les opérateurs de transition.

Théorème 3.3 Soit $\tilde{\mathbb{P}}$ (respectivement \mathbb{P}) l'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite dans le système d'attente Σ (respectivement dans $\tilde{\Sigma}$). Alors, pour tout $1 < \beta < \frac{1}{\sigma}$, on a:

$$\|\mathbb{P} - \tilde{\mathbb{P}}\|_v = 1 - \left\{ \frac{(1-\beta)(\theta\beta + \mu)}{\mu(1-1/\beta) - \theta} A^*(\theta) - \frac{\theta\beta^2}{\mu(1-1/\beta) - \theta} A^*(\mu(1-1/\beta)) \right\} \quad (3.31)$$

Preuve

Selon la structure des opérateurs de transition $\tilde{\mathbb{P}}$ et \mathbb{P} , le calcul de l'erreur commise en approximant les deux systèmes sera fait de la manière suivante:

$I \setminus J$		0	1	2	3		
		0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
0	0	$1 - A^*(\theta) - v_0$	$v_0 A^*(\theta)$	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	$1 - \sum_{i=0}^1 b_i$	$b_1 0$	$b_0 0$	0 0	0 0	...
1	0	$1 - A^*(\theta) - \sum_{i=0}^1 v_i$	$v_1 0$	$v_0 A^*(\theta)$	0 0	0 0	0 0
	2	$1 - \sum_{i=0}^2 b_i$	$b_2 0$	$b_1 0$	$b_0 0$	0 0	...
2	0	$1 - A^*(\theta) - \sum_{i=0}^2 v_i$	$v_2 0$	$v_1 0$	$v_0 A^*(\theta)$	0 0	...
	3

TAB. 3.1 – L'opérateur de transition du système $\tilde{\Sigma}$.

Et l'opérateur de transition du système Σ prend également la forme suivante:

$I \setminus J$		0	1	2	3		
		0	1 0	1 0	1 0	1 0	1 0
0	0	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	$1 - \sum_{i=0}^1 b_i$	$b_1 0$	$b_0 0$	0 0	0 0	...
1	0	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	2	$1 - \sum_{i=0}^2 b_i$	$b_2 0$	$b_1 0$	$b_0 0$	0 0	...
2	0	1	0 0	0 0	0 0	0 0	...
	3

TAB. 3.2 – L'opérateur de transition du système Σ .

Conformément à la définition de la norme d'opérateur (3.27), on a:

$$\| \Delta_{(i,j)(k,l)} \|_v = \| \mathbb{P} - \tilde{\mathbb{P}} \|_v = \sup_{i \geq 0} \sup_{j \geq 0} \frac{1}{\beta^{i+j}} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \beta^{k+l} | \Delta_{(i,j)(k,l)} |$$

Donc

$$\begin{aligned} \| \mathbb{P} - \tilde{\mathbb{P}} \|_v &= \sup_{i \geq 0} \sup_{j \in \{0,1\}} \frac{1}{\beta^{i+j}} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \in \{0,1\}} \beta^{k+l} | \Delta_{(i,j)(k,l)} | \\ &\leq \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} [| \Delta_{(i,0)(0,0)} | + \sum_{k=1}^{i+1} (\beta^{k+1} | \Delta_{(i,0)(k,1)} | + \beta^k | \Delta_{(i,0)(k,0)} |)] \\ &\leq \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \{ | (1 - 1 - A^*(\theta) - \sum_{k=0}^i v_{i-k}) | + \sum_{k=1}^{i+1} \beta^{k+1} | 0 - v_{i+1-k} | + \beta^{i+1} | 0 - A^*(\theta) | \} \\ &= \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \{ A^*(\theta) + \sum_{k=0}^i v_{i-k} + \sum_{k=1}^{i+1} \beta^{k+1} v_{i+1-k} + \beta^{i+1} A^*(\theta) \} \\ &\leq A^*(\theta) + \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \sum_{k=0}^i v_{i-k} + \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \sum_{k \geq 1} \beta^{k+1} v_{i+1-k} + \beta A^*(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{P} - \tilde{\mathbb{P}}\|_v &\leq (\beta + 1)A^*(\theta) + \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \left[\int_0^\infty \left\{ \int_0^t \sum_{k=0}^i \frac{[\mu(t-v)]^{i-k}}{(i-k)!} e^{-[\mu(t-v)]} \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \right] \\
&\quad + \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \left[\sum_{k \geq 1} \beta^{k+1} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \sum_{k=0}^i \frac{[\mu(t-v)]^{i+1-k}}{(i+1-k)!} e^{-[\mu(t-v)]} \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \right] \\
&\leq (\beta + 1)A^*(\theta) + \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \left[\int_0^\infty \left\{ \int_0^t \sum_{k=0}^i \frac{[\mu(t-v)]^k}{(k)!} e^{-[\mu(t-v)]} \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \right] \\
&\quad + \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \left[\sum_{k \geq 1} \beta^{i+2-k} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \sum_{k \geq 0} \frac{[\mu(t-v)]^k}{(k)!} e^{-[\mu(t-v)]} \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \right] \\
&\leq (\beta + 1)A^*(\theta) + \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \\
&\quad + \sup_{i \geq 0} \frac{1}{\beta^i} \left[\sum_{k \geq 1} \beta^{i+2} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \sum_{k \geq 0} \frac{[(\mu/\beta)(t-v)]^k}{(k)!} e^{-[\mu(t-v)]} \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \right] \\
\|\mathbb{P} - \tilde{\mathbb{P}}\|_v &\leq (\beta + 1)A^*(\theta) + \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) + \beta^2 \int_0^\infty \left\{ \int_0^t e^{-\mu(t-v)(1-1/\beta)} \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t)
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\mathbb{P} - \tilde{\mathbb{P}}\|_v \leq (\beta + 1)A^*(\theta) + \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) + \beta^2 \int_0^\infty \left\{ \int_0^t e^{-\mu(t-v)(1-1/\beta)} \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \quad (3.32)$$

Posons

– La première expression

$$S_1 = \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \quad (3.33)$$

– La deuxième expression

$$S_2 = \beta^2 \int_0^\infty \left\{ \int_0^t e^{-\mu(t-v)(1-1/\beta)} \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \quad (3.34)$$

Calculons alors ces expressions

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \theta e^{-\theta v} dv \right\} dA(t) \\
 &= \int_0^\infty (1 - e^{-\theta t}) dA(t) \\
 S_1 &= 1 - A^*(\theta)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{S_1 = 1 - A^*(\theta)} \quad (3.35)$$

et

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \beta^2 \int_0^\infty e^{-\mu(1-\frac{1}{\beta})t} \left\{ \theta \int_0^t e^{(\mu-\frac{\mu}{\beta}-\theta)v} dv \right\} dA(t) \\
 &= \left(\frac{\theta\beta^2}{\mu-\frac{\mu}{\beta}-\theta} \right) \left[\int_0^\infty e^{-\theta t} dA(t) - \int_0^\infty e^{-\mu(1-\frac{1}{\beta})t} dA(t) \right] \\
 S_2 &= \left(\frac{\theta\beta^2}{\mu-\frac{\mu}{\beta}-\theta} \right) [A^*(\theta) - A^*(\mu(1-\frac{1}{\beta}))]
 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{S_2 = \left(\frac{\theta\beta^2}{\mu-\frac{\mu}{\beta}-\theta} \right) [A^*(\theta) - A^*(\mu(1-\frac{1}{\beta}))]} \quad (3.36)$$

En remplaçant les résultats trouvés en (3.35) et (3.36) dans (3.32), on obtient le résultat ci-dessous:

$$\|\mathbb{P} - \tilde{\mathbb{P}}\|_v = 1 - \left\{ \frac{(1-\beta)(\theta\beta + \mu)}{\mu(1-1/\beta) - \theta} A^*(\theta) - \frac{\theta\beta^2}{\mu(1-1/\beta) - \theta} A^*(\mu(1-1/\beta)) \right\} \quad (3.37)$$

D'où le résultat. \square

3.4 Estimation de l'erreur d'approximation

Cette section consiste à obtenir la déviation entre les probabilités stationnaires des deux chaînes de Markov \tilde{Q}_n et Q_n . Le théorème suivant permet de délimiter le domaine d'approximation et de fournir l'erreur commise sur la distribution stationnaire.

Théorème 3.4 Soit $\tilde{\pi}, \pi$ les distributions stationnaires des chaînes ces Markov induites \tilde{Q}_n et Q_n respectivement. Alors, pour tout $1 < \beta < \frac{1}{\sigma}$, et sous la condition:

$$\|\Delta\|_v < \frac{(1-\rho)}{c} \quad (3.38)$$

On a:

$$\|\pi - \tilde{\pi}\|_v \leq c_0 c M (1 - \rho - cM)^{-1} \quad (3.39)$$

Avec

$$c_0 = \frac{(1-\sigma)\beta}{1-\sigma\beta} \quad (3.40)$$

$$c = \frac{(1+\beta) - 2\sigma\beta}{1-\sigma\beta} \quad (3.41)$$

Et

$$M = 1 - \left\{ \frac{(1-\beta)(\theta\beta + \mu)}{\mu(1-1/\beta) - \theta} A^*(\theta) - \frac{\theta\beta^2}{\mu(1-1/\beta) - \theta} A^*(\mu(1-1/\beta)) \right\} \quad (3.42)$$

Preuve Notons par

$$\pi_{k,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n = k, J_n = 1), \quad \pi_{k,0} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n = k, J_n = 0)$$

L'utilisation du Théorème (2.6) nous permet de constater que pour prouver le théorème précédent, il est suffisant d'estimer $\|\pi\|_v$ et $\|I\|_v$.

Calculons d'abord la constante c

Où

$$V(i,j) = \beta^{i+j}$$

$$\begin{aligned} \|\pi\|_v &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} V(i,j) \pi_{i,j} \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^1 V(i,j) \pi_{i,j} \\ &= \sum_{i \geq 0} V(i,0) \pi_{i,0} + \sum_{i \geq 0} V(i,1) \pi_{i,1} \\ &= \sum_{i \geq 0} \beta^{i+1} \pi_{i,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\pi\|_v &= \sum_{i \geq 0} \beta^{i+1} (1 - \sigma) \sigma^i \\
&= \beta(1 - \sigma) \sum_{i \geq 0} (\beta\sigma)^i \\
\|\pi\|_v &= \frac{(1 - \sigma)\beta}{1 - \sigma\beta} \text{ car } \beta < 1/\sigma
\end{aligned}$$

Donc

$\|\pi\|_v = c_0$, où $c_0 = \frac{(1-\sigma)\beta}{1-\sigma\beta}$, et σ est défini dans la relation (3.23).

De l'équation (3.26) et de l'inégalité $\beta^{i+1} \geq 1$, nous avons:

$$\|I\|_v = \sup_{i \geq 0} \sup_{j \geq 0} \frac{1}{\beta^{i+j}} \leq 1$$

Par définition,

$$c = 1 + \|\pi\|_v \|I\|_v = 1 + c_0 \quad (3.43)$$

$$\|\Delta\|_v \|I\|_v \leq \frac{1 - \rho}{c} = \frac{1 - \rho}{1 + c_0} \quad (3.44)$$

Par conséquent,

$$\|\pi - \tilde{\pi}\|_v \leq c_0 c M (1 - \rho - cM)^{-1} \quad (3.45)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le comportement de la méthode de stabilité forte dans le système de files d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles après perturbation du taux de vacances. Le principal atout de la méthode est le fait qu'elle permet d'estimer la borne d'écart entre les distributions stationnaires du système réel ($GI/M/1$ avec vacances exponentielles $\tilde{\Sigma}$) et celles du système perturbé ($GI/M/1$ classique modifié Σ).

CHAPITRE 4

Mesure de performance de la méthode de stabilité forte dans le système d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un algorithme basé sur les résultats théoriques présentés dans le chapitre précédent en s'inspirant de l'algorithme proposé par M^{me} Bouallouche [39] qui consiste à évaluer l'erreur commise lors de l'approximation des caractéristiques du système de files d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles par celles du système $GI/M/1$ modifié. Par la suite, nous intéressons à la validation de ces résultats théoriques tout en utilisant l'outil de simulation. Et enfin, nous étudions les conditions de stabilité de notre système tout en discutant les résultats obtenus par les deux approches.

4.1 Mesure de performance de la méthode de stabilité forte

Plus précisément, dans le cas d'un système d'attente avec vacances exponentielles du serveur, le paramètre le plus important est la borne à partir de laquelle on peut approximer ce système par un autre dont les caractéristiques de performance sont connues ainsi que l'erreur due à cette approximation.

Remarque 4.1 A l'aide de l'environnement de "MATLAB 7.0" , nous avons réalisé une application qui consiste :

- ▶ Calcul de l'erreur théorique commise lors de l'approximation d'un système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles par le système $GI/M/1$ modifié.
- ▶ Simulation d'un système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles et $GI/M/1$ modifié. Ensuite, le calcul d'écart entre les distributions stationnaires de ces deux systèmes.

4.1.1 Approche algorithmique

En se basant sur les résultats théoriques énoncés dans le chapitre précédent, on élabore l'algorithme suivant:

Algorithme principal

Étape 1

Définition des paramètres d'entrée

- ▶ La distribution d'inter-arrivées des clients: $A(\cdot)$;
- ▶ Le taux moyen de service : μ ;
- ▶ Le taux moyen de vacances exponentielles : θ ;
- ▶ La précision avec laquelle l'erreur sera déterminée: ϵ ;

Étape 2

Détermination de l'espérance de la variable aléatoire T qui caractérise le temps des inter-arrivées des clients

$$\mathbb{E}[T] \leftarrow \int_0^{\infty} tA(t)dt$$

Étape 3

Vérification de la condition d'ergodicité géométrique du système $GI/M/1$ modifié avec les mêmes paramètres d'entrée et la même distribution de la durée de service que le système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles.

si $\mathbb{E}(T)\mu \leq 1$ alors

Écrire \asymp le système est instable \asymp aller à l'**Étape 8** ;

sinon

poser

$$A^*(s) = \mathbb{E}(e^{-su}) = \int_0^{+\infty} e^{-st} A(t)dt;$$

aller à l'**Étape 4**;

Étape 4

Détermination de $\beta_0 \leftarrow \sup(\beta \text{ tel que } A^*(\mu - \mu/\beta) < \beta)$

Étape 5

Détermination de β_{min} (β_{min} la borne inférieure de l'intervalle dans lequel se trouve β associé à l'erreur minimale).

$$\beta_{min} = \min\{\beta \text{ tel que } 1 < \beta < \beta_0, , D < \frac{1-\rho}{C}\}.$$

Étape 6

Détermination de β_{max} (β_{max} la borne supérieure de l'intervalle dans lequel se trouve β associé à l'erreur maximale)

$$\beta_{max} = \max\{\beta \text{ tel que } 1 < \beta < \beta_0, , D < \frac{1-\rho}{C}\}.$$

Étape 7

Détermination de l'erreur $\|\pi - \tilde{\pi}\|_v$:

Pour β de β_{min} à β_{max} , Effectuer

$$c_0 \leftarrow \frac{(1 - \sigma)\beta}{1 - \sigma\beta}$$

$$c \leftarrow 1 + c_0$$

$$M \leftarrow 1 - \left\{ \frac{(1 - \beta)(\theta\beta + \mu)}{\mu(1 - 1/\beta) - \theta} A^*(\theta) - \frac{\theta\beta^2}{\mu(1 - 1/\beta) - \theta} A^*(\mu(1 - 1/\beta)) \right\}$$

$$\|\pi - \tilde{\pi}\|_v \leftarrow c_0 c M (1 - \rho - cM)^{-1}$$

Étape 8

fin.

4.1.2 Simulation

Dans l'optique de simuler la somme des écarts entre les distributions stationnaires du système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles et $GI/M/1$ modifié par rapport à une norme donnée. Nous allons construire notre simulateur par juxtaposition de deux procédures dont l'une permettra de simuler les distributions stationnaires du système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles et l'autre les distributions stationnaires du système $GI/M/1$ modifié. Après obtention des deux distributions stationnaires, il ne reste qu'à se servir des paramètres de la norme donnée pour calculer la somme des écarts par rapport à celle-ci.

Simulateur

Étape 1 Simulation des distributions stationnaires du système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles ($\tilde{\pi}$);

Étape 2 Simulation des distributions stationnaires du système $GI/M/1$ modifié (π);

Étape 3 Calcul de la somme des écarts entre les distributions stationnaires par rapport à la norme donnée β par la formule suivante:

$$erreur \leftarrow \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \beta^{i+j} |\pi_j(i) - \tilde{\pi}_j(i)|$$

Nous présentons ainsi les organigrammes de simulation des deux systèmes donnés par les figures (4.1) et (4.2). Soient les notation suivantes:

μ : Le taux moyen de service.

θ : Le taux moyen de vacances exponentielles.

$A(\cdot)$: La distribution des arrivées des clients de moyenne $1/\lambda$.

$Tmax$: Le temps de simulation.

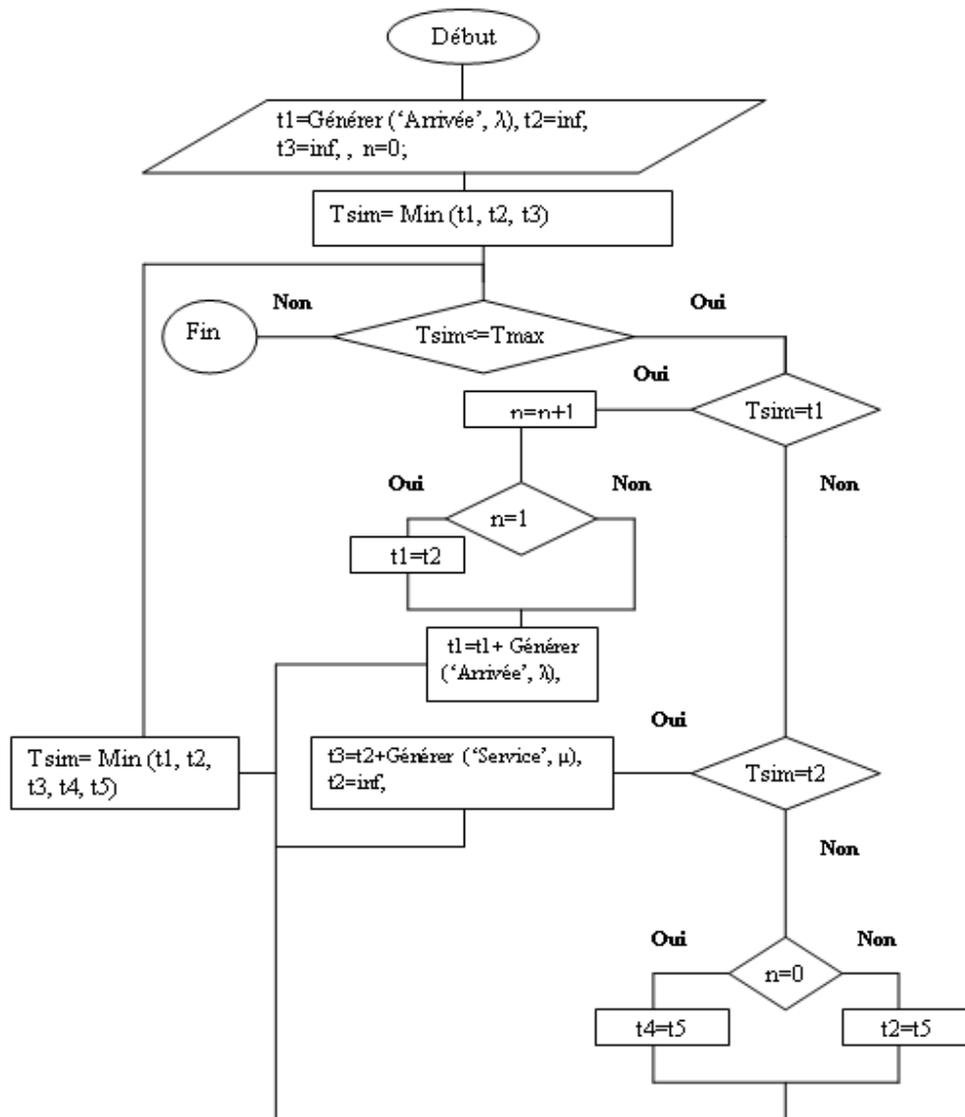
$\pi_i(\cdot)$: Le vecteur stochastique des distributions stationnaires du système $GI/M/1$ modifié.

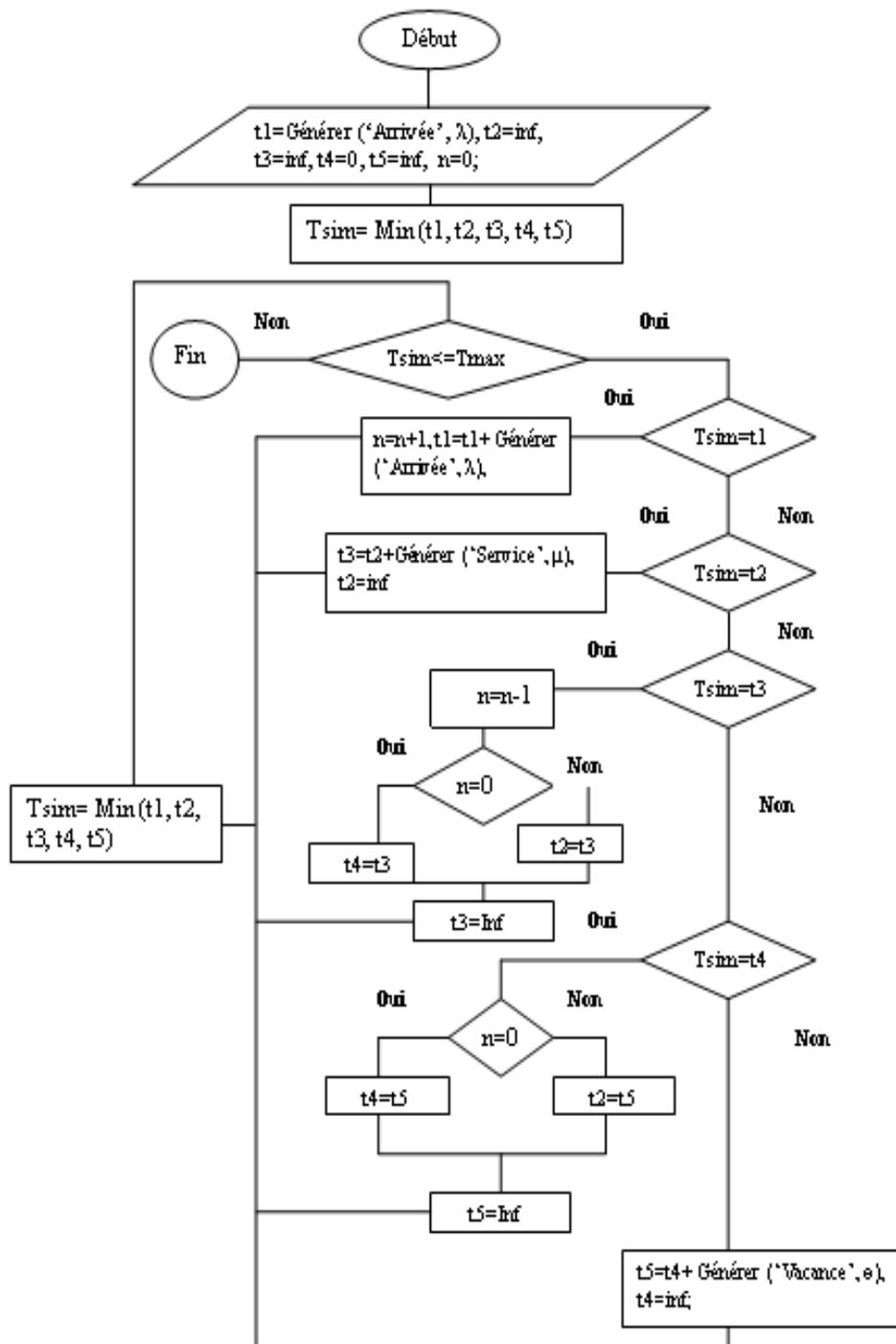
$\tilde{\pi}_i(\cdot)$: Le vecteur stochastique des distributions stationnaires du système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles.

n : Le nombre de clients dans le système à un instant donné.

$Tsim$: L'horloge du simulateur.

$n_i(\cdot)$: Vecteur de même dimension que $\pi(\cdot)$ qui permettra de sauvegarder le temps pendant lequel la taille du système est égale à n .

FIG. 4.1 –: Organigramme du simulateur du système $GI/M/1$ modifié

FIG. 4.2 – Organigramme du simulateur du système $GI/M/1$ avec vacances exponentielles

4.1.3 Validation du simulateur

C'est la dernière étape dans la réalisation d'un simulateur, car il doit se comporter comme un système réel (ces caractéristiques doivent être les mêmes que celles du système réel). A cet effet, on fait appel aux tests paramétriques. Pour cela, on effectue le test de Student sur la moyenne m qui est le nombre de clients dans le système à un moment donné.

D'où on aura l'hypothèse à tester s'écrivant sous la forme suivante:

$$"H_0 : m_{th} = m_0" \text{ contre } "H_1 : m_{th} \neq m_0"$$

Tel que :

m_{th} : est la moyenne du nombre de clients dans le système obtenu par le simulateur qui se calcule par la formule:

$$m_{th} = \sum_{i=0}^{\infty} (i * \pi_i) \quad (4.1)$$

m_0 : est la moyenne théorique du nombre de clients dans le système qui se calcule par la formule :

$$m_0 = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (4.2)$$

Avec $\rho = \lambda/\mu$

Donc, pour réaliser ce test, on doit exécuter le simulateur plusieurs fois (" n " doit être très grand dans l'objectif d'appliquer le Théorème Central Limite) pour générer des variables aléatoires m_{thi} ; afin qu'on puisse estimer leurs moyenne \bar{m} et leur variance S'^2 (estimateur sans biais de σ^2).

Enfin, on aura la région de rejet suivante:

$$D = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) / \frac{\sqrt{n} |\bar{m} - m_0|}{S'} > t_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}\}$$

Validation du système GI/M/1 Avec vacances exponentielles

Soient:

- Le temps des arrivées des clients suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0.2$;
- Le taux de service $\mu = 1$;
- Le taux de vacances exponentielles $\theta = 10$;
- Temps de simulation est: $T_{max} = 1000$.

Après l'exécution du simulateur 100 fois ($n=100$) on a obtenu les résultats suivants:

$$\bar{m} = 0.3860;$$

$$S'^2 = 6.1097 \cdot 10^{-1};$$

D'où la valeur de la statistique $T = \frac{\sqrt{n} |\bar{m} - m_0|}{S'} = 1.7399$.

Au seuil du risque $\alpha = 0.05$ sur la table de la loi Student $t_{(99,0.025)} = 1.98$, on constate que $T_{99} < t_{(99,0.025)}$, ce qui signifie qu'on ne rejette pas l'hypothèse H_0 , autrement dit le simulateur est valide.

Validation du système $GI/M/1$ modifié

Pour les mêmes paramètres que le simulateur précédent, on aura les résultats suivants :

$$\bar{m} = 0.3660;$$

$$S'^2 = 3.6897 \cdot 10^{-1};$$

D'où la valeur de la statistique $T = \frac{\sqrt{n} |\bar{m} - m_0|}{S'} = 1.9097$.

Au seuil du risque $\alpha = 0.05$ sur la table de la loi Student $t_{(99,0.025)} = 1.98$, on constate que $T_{99} < t_{(99,0.025)}$, D'où la validation du simulateur $GI/M/1$ modifié.

4.2 Application Numérique

Nous allons maintenant illustrer l'application de la méthode de stabilité forte sur des exemples numériques. Considérons un système de files d'attente $GI/M/1$ Avec vacances exponentielles dont les durées de service et de vacances sont exponentielles de paramètres μ et θ respectivement. Les durées entre deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, dont la densité $A(\cdot)$ est générale.

4.2.1 Cas d'approximation par le Système $M/M/1$ modifié

Les durées entre deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires exponentielles (i.i.d) et la densité $A(\cdot)$ est donnée par:

$$A(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0; \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus sous différentes intensités du trafic et différentes valeurs de θ .

ρ	θ	Algorithmique					Simulation
		β_0	β_{\min}	β_{\max}	β_{opt}	$Erreur_{Algo}$	$Erreur_{sim}$
0.2/1	1.95	4.9999	∞	∞	∞	-	-
	2	4.9999	1.0700	1.4200	1.1622	3.0965	0.1693
	5	4.9999	1.0700	2.2200	1.0100	0.0553	0.0673
	10	4.9999	1.0100	2.3900	1.0100	0.0407	0.0287
	50	4.9999	1.0100	3.1100	1.0100	0.0103	0.0075
	75	4.9999	1.0100	3.3300	1.0100	0.0070	0.0083
	100	4.9999	1.0100	3.4700	1.0100	0.0053	0.0061
	500	4.9999	1.0100	4.1600	1.0100	0.0011	0.0044
	1000	4.9999	1.0100	4.3500	1.0100	$5.8399 \cdot 10^{-4}$	0.0076
	5000	4.9999	1.0100	4.6500	1.0100	6.729110^{-5}	0.0028
5/9	10	1.7999	1.0100	1.0600	1.0100	3.0012	0.2985
	25	1.7999	1.0100	1.0700	1.0100	1.7190	0.1500
	50	1.7999	1.0100	1.2000	1.0100	0.6370	0.0795
	100	1.7999	1.0100	1.3100	1.0100	0.2768	0.0475
	500	1.7999	1.0100	1.5400	1.0100	0.0508	0.01980
	1000	1.7999	1.0100	1.6000	1.0100	0.0266	0.0138
	5000	1.7999	1.0100	1.6600	1.0100	0.0124	0.0227
9/11	50	1.2221	∞	∞	∞	-	-
	75	1.2221	1.0100	1.0100	1.0100	22.4290	0.7420
	100	1.2221	1.0100	1.0100	1.0100	18.8756	0.7000
	200	1.2221	1.0100	1.0600	1.0100	1.1224	0.0832
	500	1.2221	1.0100	1.1200	1.0100	0.2945	0.0187
	1000	1.2221	1.0100	1.1500	1.0100	0.1400	0.0788
	5000	1.2221	1.0100	1.1700	1.0100	0.0620	0.0332

TAB. 4.1 – Résultats obtenus pour la borne d'approximation dans le cas $M/M/1$.

Le graphe des erreurs d'approximation en fonction de θ dans le cas $M/M/1$ avec trois différentes intensités de trafic ci-dessous:

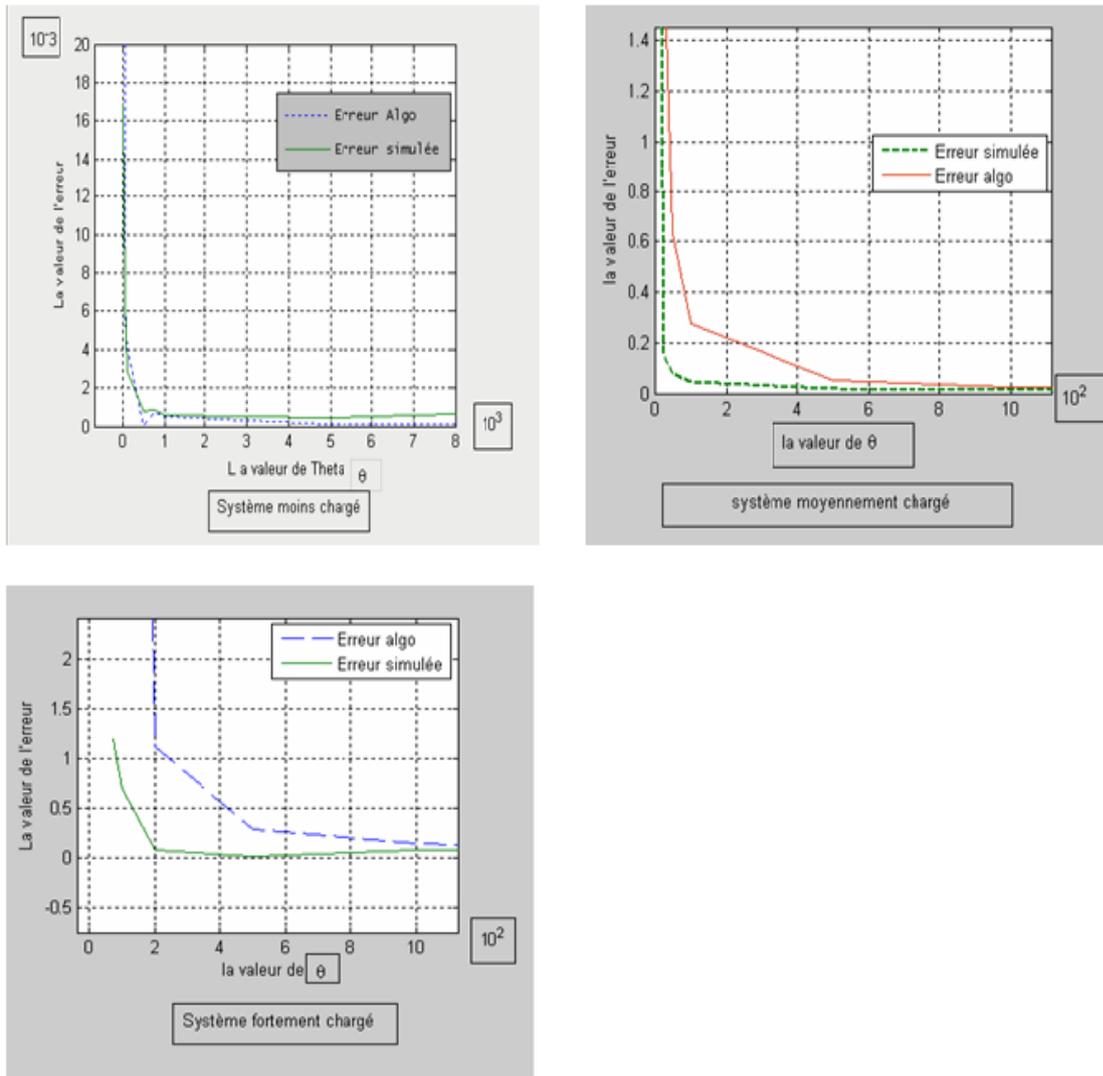


FIG. 4.3 –: Graphe des erreurs pour le cas $M/M/1$

4.2.2 Cas d'approximation par le Système $H_2/M/1$ modifié

Dans ce cas, les durées entre deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires (i.i.d) suivent une loi Hyperexponentielle d'ordre 2 qui est un cas particulier de la loi Cox2.

$$A(t) = p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad t > 0.$$

Comme exemple, soit

$$A(t) = \frac{1}{3} e^{-t} + 2e^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

ρ	θ	Algorithmique					Simulation	
		β_0	β_{\min}	β_{\max}	β_{opt}	$Erreur_{Algo}$	$Erreur_{sim}$	
0.30	8	3.3333	1.0600	1.3256	1.1090	7.2562	2.1495	
	15	3.3333	1.0700	1.7609	1.1000	4.0055	1.1173	
	50	3.3333	1.0100	1.9876	1.0900	1.9435	0.2987	
	75	3.3333	1.0100	2.3451	1.0100	0.3070	0.0756	
	100	3.3333	1.0100	2.7895	1.0100	1.9001	0.0083	
	500	3.3333	1.0100	2.8801	1.0100	0.0832	0.0062	
	1000	3.3333	1.0100	2.9954	1.0100	0.0072	0.0044	
	5000	3.3333	1.0100	3.0933	1.0100	0.0051	0.0026	
0.5143	8	1.9445	∞	∞	∞	-	-	
	15	1.9445	1.0300	1.1324	1.0100	8.0965	1.8493	
	50	1.9445	1.0100	1.2876	1.0100	3.0553	1.2363	
	75	1.9445	1.0100	1.3090	1.0100	2.4090	0.2809	
	100	1.9445	1.0100	1.5643	1.0100	0.6770	0.01886	
	500	1.9445	1.0100	1.7533	1.0100	0.4953	0.0652	
	1000	1.9445	1.0100	1.8900	1.0100	0.0910	0.0481	
	5000	1.9445	1.0100	1.9000	1.0100	0.0102	0.0127	
0.90	40	1.1111	∞	∞	∞	-	-	
	75	1.1111	1.0200	1.0316	1.0100	19.8763	1.7993	
	100	1.1111	1.0100	1.0393	1.0100	7.2981	0.9288	
	200	1.1111	1.0100	1.0505	1.0100	1.0872	0.2875	
	500	1.1111	1.0100	1.0798	1.0100	0.5652	0.1654	
	1000	1.1111	1.0100	1.0985	1.0100	0.0129	0.0028	
	5000	1.1111	1.0100	1.1000	1.0100	0.0021	0.0012	

TAB. 4.2 – Résultats obtenus pour la borne d'approximation dans le cas $H_2/M/1$.

Le tableau ci-dessus résume les résultats obtenus sous différentes intensités du trafic et différentes valeurs de θ . Le graphe des erreurs d'approximation en fonction de θ dans le cas $H_2/M/1$ avec trois différentes intensités du trafic est donné ci-dessous:

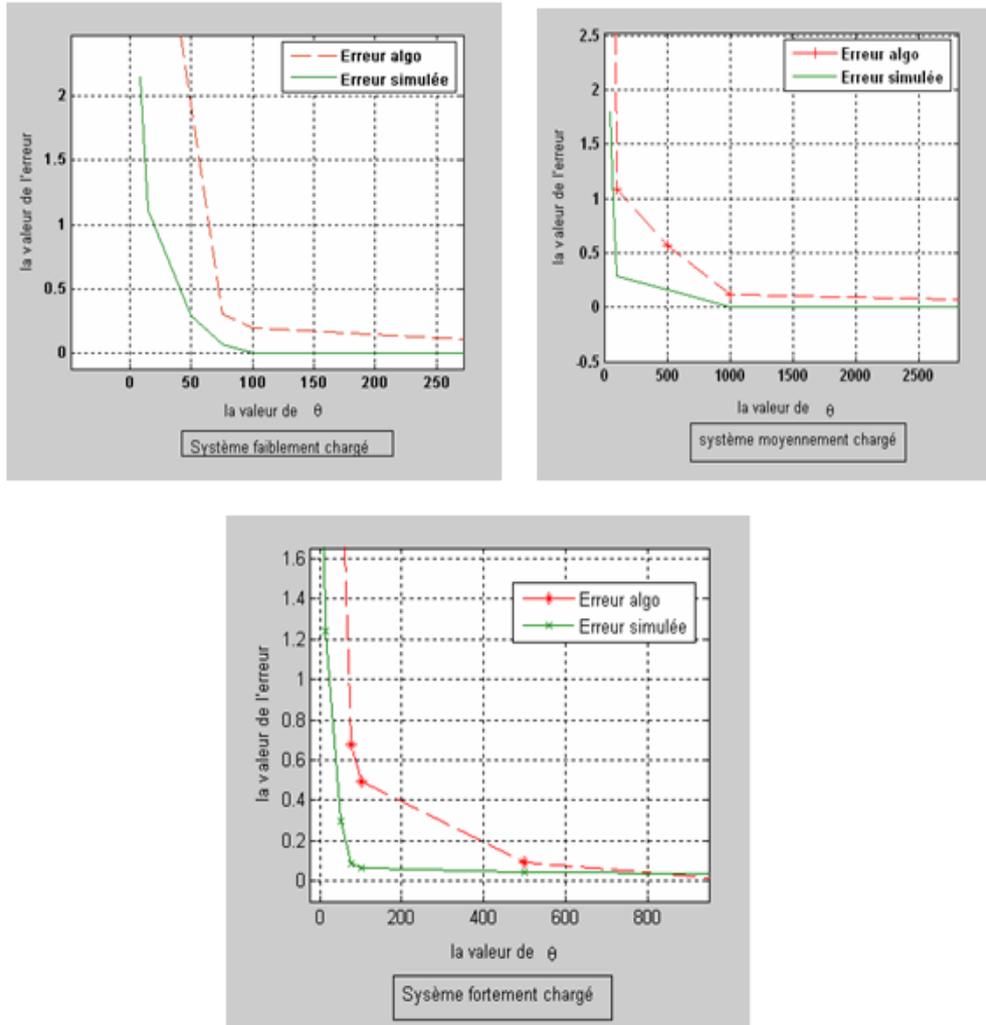


FIG. 4.4 –: Graphe des erreurs pour le cas $H_2/M/1$

4.2.3 Discussion et interprétation des résultats

D'après les graphes (4.3) et (4.4), nous pouvons constater que les résultats de l'algorithme et ceux du simulateur sont proches lorsque le système est faiblement chargé mais il est plus sensible aux variations de la valeur du paramètre θ par rapport au simulateur dans le cas où le système $\tilde{\Sigma}$ est moyennement ou fortement chargé. En plus, les résultats obtenus par ce dernier sont inférieurs à ceux obtenus par l'algorithme. Comme nous pouvons remarquer sur les tableaux (4.1) et (4.2) que l'erreur diminue avec l'augmentation de la valeur du taux de vacances θ (les erreurs sont inversement proportionnelles à θ), ce qui signifie que lorsque le système est moins chargé (c'est-à-dire le système peut devenir presque vide car l'intensité du trafic est petite, par conséquent, le serveur a le temps de prendre les vacances exponentielles). Egalement, la valeur de β qui donne une valeur minimale de l'erreur tend vers la borne inférieure de l'intervalle $]1, 1/\sigma[$, alors l'erreur tend vers zéro. Ceci peut être expliqué par le fait qu'à une certaine valeur de θ grande, à partir d'un certain rang, tout dépend de la charge du système, les vacances deviendront non significatives et le système $\tilde{\Sigma}$ se comportera comme le système classique modifié Σ . Par conséquent, l'approximation est meilleure lorsque la durée de vacances exponentielles du $\tilde{\Sigma}$ est petite. Toutefois, nous pouvons aussi remarquer que l'erreur obtenue par le simulateur (si ce dernier représente fidèlement le système réel) est toujours inférieure à l'erreur algorithmique. Ceci signifie que l'erreur numérique n'est qu'une majoration de l'erreur qu'on peut faire lors du passage du système $\tilde{\Sigma}$ vers le système classique modifié Σ . Il ressort que l'approximation est légitime lorsque les durées de vacances exponentielles sont suffisamment petites et lorsque la charge de système est considérable.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons implémenté un algorithme et un simulateur nous permettant de déterminer le domaine d'approximation des caractéristiques stationnaires des systèmes relatif à la borne obtenue, tout en utilisant les conditions imposées dans la partie théorique. Les erreurs d'approximation ont été comparées à celles obtenues par simulation, ce qui nous a permis de valider l'applicabilité de la méthode de stabilité forte et d'évaluer la qualité des bornes de stabilité théoriquement établies. Ainsi, dans l'approximation considérée, nous remarquons que la méthode de stabilité forte donne des bornes assez raffinées des erreurs dues à l'approximation par rapport à la simulation.

Conclusion générale

*il n'y a pas des problèmes qu'on se pose,
il y a des problèmes qui se posent, il n'y a pas de problèmes résolus,
il y a des problèmes plus au moins résolus
** Henri Poincaré***

La complexité des phénomènes et des processus technologiques croit sans cesse. Ceci a poussé les chercheurs à élaborer des théories et des techniques d'analyse et d'approximation qui sont elles mêmes aussi complexes. Parmi ces principales approches, nous nous sommes intéressés à la méthode de stabilité forte, à l'exploitabilité de ses résultats ainsi qu'à sa mesure de performance par rapport à la technique de simulation, pour le cas des systèmes d'attente avec discipline hystéritique, plus particulièrement, avec vacances exponentielles du serveur.

Pour évaluer les performances d'un système complexe, il est parfois nécessaire de recourir à des approximations de modèles très compliqués par d'autres plus simples ou pour lesquels des résultats analytiques existent.

Dans ce mémoire, nous prouvons pour la première fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte au système d'attente $GI/M/1$ avec vacances exponentielles. Nous avons constaté que la théorie analytique de ce genre de modèles d'attentes a une portée limitée en raison de la complexité des résultats connus car pour la majorité de ces modèles, les opérateurs de transition sont écrits sous forme de matrice à bloc-Jacobi. Cependant, les

résultats obtenus ne sont pas facilement interprétables du point de vue pratique. C'est pourquoi nous avons montré la possibilité d'approximer les caractéristiques stationnaires de ce système par celles correspondantes d'un autre système plus simple. Pour se faire, nous avons été amenés à considérer la méthode de stabilité forte. Une contribution majeure de ce travail consiste à obtenir une borne de perturbation, pour l'approximation des probabilités stationnaires du système analysé.

À cet effet, nous nous sommes intéressés dans un deuxième temps à la mesure de performance de cette méthode, pour différentes perturbations du taux de vacances, après avoir écrit l'opérateur de transition du modèle idéal sous la structure du modèle perturbé. Une comparaison entre les résultats de simulation et ceux obtenus par approche algorithmique a été réalisée. Nous avons montré que dans la plupart des cas, la borne obtenue par la méthode de stabilité forte est meilleure à celle obtenue numériquement. Ceci nous permet de confirmer que lorsque l'approximation est possible, la méthode de stabilité forte nous donne une bonne majoration de l'erreur commise sur la distribution stationnaire de la chaîne de Markov décrivant le comportement du système étudié. De ce fait, nous constatons que la méthode de stabilité forte peut faire ses preuves dans l'évaluation de performances des systèmes complexes pouvant être régis par des chaînes de Markov.

L'obtention de ces résultats ouvre de nombreuses perspectives de recherche. Parmi les directions les plus significatives:

- Application de la méthode de stabilité forte à un cas plus général de système d'attente $GI/GI/1$ avec vacances exponentielles.
- Application de la méthode de stabilité forte à d'autres modèles d'attente dont l'opérateur de transition associé prend la forme matricielle à bloc-Jacobi.
- Élargir l'application de la méthode de stabilité forte aux modèles de files d'attente avec discipline hystérétique à structure plus complexe telle que: vacances multiples, vacances de travail exponentielles, etc.
- La mesure de performance de la méthode de stabilité forte a été abordée, tout en se servant de la technique de simulation. Ce problème peut-être envisagé dans le cas où nous considérons d'autres méthodes d'approximation.

Annexe

Notions et concepts fondamentaux

Processus stochastique

Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \in T}$, est une fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire. A chaque instant $t \in T$, $X(t)$ est donc une variable aléatoire. Un processus stochastique peut être donc considéré comme une famille de variables généralement non indépendantes. L'ensemble des temps T peut être discret ou continu. $X(t)$ définit l'état du processus à un instant donné t . L'ensemble noté E des valeurs que peut prendre le processus à chaque instant est appelé **espace d'état** et peut, de même que T , être discret (fini ou infini) ou continu. En fonction des valeurs possibles de T et de E .

Chaîne de Markov

Les chaînes de Markov sont des classes de processus aléatoires qui se caractérisent par la propriété que *l'état présent* du processus résume toute l'information utile pour connaître son *évolution future*. En d'autres termes, la prévision de cette dernière ne peut être améliorée par une connaissance supplémentaire du passé du processus. Ce sont des processus sans mémoire.

Chaînes de Markov à espace d'état discret

Considérons un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à espace d'état discret E (fini ou infini mais dénombrable car discret) et à temps discret.

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une *chaîne de Markov à temps discret* si et seulement si

$$P[X_n = j / X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_n = j / X_{n-1} = i_{n-1}].$$

La probabilité pour que la chaîne soit dans un certain état à la $n^{\text{ième}}$ étape du processus ne dépend donc que de l'état du processus à l'étape précédente (la $n - 1^{\text{ième}}$ étape) et pas de son évolution antérieure (c'est à dire les étapes j , pour tout $j = 0, \dots, n - 2$).

En général, on s'intéresse aux chaînes de Markov à temps discret *homogènes*.

En effet, ces dernières sont telles que leurs probabilités ne dépendent pas de n . On peut alors définir la *probabilité de transition* d'un état i vers un état j , p_{ij} (qui ne dépend donc pas de l'étape n):

$$p_{ij} = P(X_n = j / X_{n-1} = i) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Avec évidemment

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$$

Processus de Markov

On considère un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ à espace d'état discret E (fini ou infini mais dénombrable car discret) et à temps continu. $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu si et seulement si

$$P[X(t_n) = j / X(t_{n-1}) = i_{n-1}, X(t_{n-2}) = i_{n-2}, \dots, X(t_0) = i_0] = P[X(t_n) = j / X(t_{n-1}) = i_{n-1}]$$

$$\forall n \text{ et } \forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

Contrairement au cas des chaînes de Markov à temps discret, on ne dispose jamais, dans le cas d'une chaîne de Markov à temps continu (après discrétisation), d'un historique complet du processus. En effet, on observe celui-ci à certains instants dans le temps, choisis aussi nombreux que l'on veut et répartis comme on veut, mais on ignore ce qui se passe entre deux observations. Cependant, la propriété ci-énoncée permet d'affirmer qu'une connaissance très détaillée du passé ne fournit pas plus d'information que la dernière observation sur l'évolution future du processus.

Dans ce cas aussi, on s'intéresse surtout aux chaînes *homogènes*. Ces dernières sont telles que les probabilités $P[X(t_n) = j / X(t_{n-1}) = i_{n-1}]$ ne dépendent pas des instants d'observation t_n et t_{n-1} , mais uniquement de la durée $(t_n - t_{n-1})$ qui sépare les deux

observations. On peut alors définir la probabilité $p_{ij}(t)$ de se trouver en j alors qu'on était en i il y a t instant de cela:

$$[p_{ij}(t) = P[X(s+t) = j / X(s) = i], \quad \forall s \geq 0]$$

Processus de Poisson

Soit $N(t)$ le nombre d'occurrence d'un processus quelconque dans un intervalle de temps $[0, t]$.

On dit que ce processus est un *processus de Poisson* de taux λ si $N(t)$ suit une *loi de Poisson* de paramètre λt . Ce qui revient à dire que le temps des inter-occurrences successives suit une *loi exponentielle* de paramètre λt .

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad k=0, 1, 2, \dots \quad 1.2$$

La moyenne et la variance de $N(t)$ sont respectivement

$$E(N(t)) = \lambda t \quad \text{et} \quad \sigma^2(N(t)) = \lambda t.$$

Il a été empiriquement prouvé que dans plusieurs circonstances, le processus stochastique régi peut être approximé par un processus de Poisson.

Processus de naissance et de mort

Le processus d'état stochastique $\{N(t) : t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort si, pour chaque $n = 0, 1, 2, \dots$, il existe des paramètres λ_n et μ_n (avec $\mu_0 = 0$) tels que, lorsque le système est dans l'état n , le processus d'arrivée est poissonnien de taux λ_n et le processus de sortie est poissonnien de taux μ_n .

Fonction génératrice d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète non négative telle que

$$P(X = n) = p(n), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

La fonction génératrice $P_X(z)$ de X est définie par:

$$P_X(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n.$$

Du fait que $p(n) \geq 0$ et que $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$, la fonction $P_X(z)$ est définie pour z tel que $|z| \leq 1$ (z une variable complexe).

$$P_X(0) = p(0), \quad P_X(1) = 1, \quad P'_X(1) = E(X).$$

Soit $Z = X + Y$ la somme de deux variables aléatoires indépendantes et discrètes X et Y . Alors,

$$P_Z(z) = P_X(z) \cdot P_Y(z).$$

Lorsque Z a une probabilité q d'être égale à X et une probabilité $(1 - q)$ d'être égale à Y , alors

$$P_Z(z) = qP_X(z) + (1 - q)P_Y(z)$$

Transformée de Laplace-Stieltjes

La transformée de Laplace-Stieltjes $\tilde{X}(s)$ d'une variable aléatoire non négative X de fonction de répartition $F(x)$, est définie par:

$$\tilde{X}(s) = E(e^{-sX}) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} dF(x), \quad s \geq 0.$$

Lorsque la variable aléatoire admet une densité de probabilité $f(x)$, la transformée se simplifie comme suit:

$$\tilde{X}(s) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Notifions que $|\tilde{X}(s)| \leq 1$ pour tout $s = a + ib$, tel que $a \geq 0$.

$$\tilde{X}(0) = 1, \quad \tilde{X}'(0) = -E(X), \quad \tilde{X}^{(k)}(0) = (-1)^k E(X^k).$$

Où l'exposant (k) désigne la $k^{\text{ième}}$ dérivée .

Soit $Z = X + Y$ la somme de deux variables aléatoires indépendantes et discrètes X et Y . Alors,

$$\tilde{Z}(s) = \tilde{X}(s) \cdot \tilde{Y}(s).$$

Lorsque Z a une probabilité q d'être égale à X et une probabilité $(1 - q)$ d'être égale à Y , alors

$$\tilde{Z}(s) = q\tilde{X}(s) + (1 - q)\tilde{Y}(s).$$

Formule de Little

Considérons un système en équilibre dans lequel des clients arrivent, restent dans le système une période de temps (dit temps d'attente dans le système), et repartent après. Soit λ le taux des arrivées, W^1 le temps moyen d'attente (ou durée moyenne de séjour dans le système), et L le nombre moyen de clients présents dans le système. Alors, si λ , W et L existent, ils sont reliés l'un à l'autre par l'équation

$$L = \lambda W. \tag{4.3}$$

1. On utilisera cette notation uniquement ici pour les raisons historiques de l'autre appellation de la formule de Little: "Formule $L = \lambda W$."

Cette formule est l'un des résultats les plus généraux et utiles dans la théorie des files d'attente.

Distributions usuelles des probabilités

Dans cette section, nous allons présenter quelques distributions de probabilité d'usage courant.

Loi de Poisson

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre μ si sa densité de probabilité est de la forme

$$P(X = n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pour cette distribution, on a

$$P_X(z) = e^{-\mu(1-z)}, \quad E(X) = \sigma^2(X) = \mu.$$

Loi exponentielle

La densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre μ est donnée par

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

La fonction de répartition est de la forme

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Pour cette distribution on a:

$$\tilde{X}(s) = \frac{\mu}{\mu + s}, \quad E(X) = \frac{1}{\mu}, \quad \sigma^2(X) = \frac{1}{\mu^2}.$$

Une propriété importante de la loi exponentielle est son absence de mémoire. Cette propriété qui joue un rôle fondamental dans la discussion de plusieurs de processus stochastiques.

Loi d'Erlang

Une variable aléatoire X suit une loi d'Erlang d'ordre k si elle est la somme de k variables indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi exponentielle de paramètre μ . La densité de probabilité d'une Erlang d'ordre k est donnée par

$$f(t) = \mu \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

La fonction de répartition est:

$$F(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Les paramètres μ et k sont appelés respectivement paramètre d'échelle et de forme.

Pour cette distribution, on a

$$\tilde{X}(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^k, \quad E(X) = \frac{k}{\mu}, \quad \sigma^2 = \frac{k}{\mu^2}.$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^k p_i \mu_i e^{-\mu_i t}, \quad t > 0.$$

La moyenne et la transformée de Laplace-Stieltjes pour cette distribution sont respectivement

$$E(X) = \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{\mu_i}, \quad \tilde{X}(s) = \sum_{i=1}^k \frac{p_i \mu_i}{\mu_i + s}.$$

Lorsque $k=2$ on aura la loi hyperexponentielle d'ordre 2.

Loi de type phases à k étages

Ces distributions sont caractérisées par une chaîne de Markov à k états (d'où leur appellation) et d'une matrice de probabilité, permettant le passage d'un état à un autre. A chaque état i , la durée de service suit une loi exponentielle de paramètre μ_i . Parmi ces distributions, nous allons exposer deux types :

loi de Cox: Une variable aléatoire X suit une loi de Cox d'ordre k si elle passe par au moins la première phase et ne peut parcourir tout au plus k phases. La durée de service au niveau de la phase i est une loi exponentielle de paramètre μ_i , $i = 1, \dots, k$.

Après la $i^{\text{ème}}$ phase, on a une probabilité p_i de passer à la phase suivante et une probabilité $(1 - p_i)$ de sortir. Évidemment, $p_k = 0$.

La densité de probabilité, $b(u)$, d'une variable aléatoire X suivant une loi de Cox à deux phases, de paramètres μ_1 , a et μ_2 , est définie par

$$b(u) = (1 - a)b_1(u) + a(b_1 * b_2)(u),$$

où

$$b_1 * b_2(u) = \int_0^u b_1(x)b_2(u-x)dx$$

est le produit de convolution des deux fonctions $b_1(u)$ et $b_2(u)$, et

$$b_i(u) = \begin{cases} \mu_i e^{-\mu_i u} & \text{si } u \geq 0 \quad i = 1, 2. \\ 0 & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

On écrit :

$$X \rightsquigarrow \text{Cox-2}(\mu_1, a, \mu_2)$$

Pour indiquer que la variable aléatoire X suit une loi de Cox à deux phases, paramètres μ_1 , a et μ_2 .

Finalement,

$$b(u) = \begin{cases} (1-a)\mu_1 e^{-\mu_1 u} + \frac{a\mu_1\mu_2}{\mu_2-\mu_1} e^{-\mu_1 u} + \frac{a\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2} \mu_1 e^{-\mu_2 u} & u \geq 0 \text{ et } \mu_1 \neq \mu_2. \\ (1-a)\mu_1 e^{-\mu_1 u} + a\mu_1^2 e^{-\mu_1 u} & u \geq 0 \text{ et } \mu_1 = \mu_2. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espérance mathématique de X est

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2}.$$

La variance de X est

$$V(X) = \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{a(2-a)}{\mu_2^2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abbas, K. and Aïssani, D. (2010). Strong stability of the embedded Markov chain in an GI/M/1 queue with negative customers. *International Journal of Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, issue 10, pp. 2806-2812.
- [2] Abbas, K. and Aïssani, D. (2007). Approximation in an M/G/1 queueing system with breakdowns and repairs. *EWIC review*, British Computer Society Ed. (<http://www.bcs.org/ewic>).
- [3] Abbas, K. and Aïssani, D. (to appear). Approximation of performance measures in an M/G/1 queue with breakdowns. *International Journal of Quality Technology and Quantitative Management*.
- [4] Abbas, K. and Aïssani, D. (2010). Structural perturbation analysis of a single server queue with breakdowns. *International Journal of Stochastic Models*, vol. 26, issue 1, pp. 78-97.
- [5] Aïssani, A. (1994). A retrial queue with redundancy and unreliable server. *Queueing systems* 17: 431 – 449.
- [6] Aïssani, A. (1994). A survey on retrial queueing models. *Actes des Journées de Statistiques Appliquées*, USTHB, Alger; pp. 1 - 11.
- [7] Aïssani, A. (2003). An $M^X/G/1$ retrial queue with unreliable server and vacations. *Proceedings of the 17th European Simulation Multiconference*; pp. 175 - 180.
- [8] Aïssani, D. (1990). Ergodicité uniforme et stabilité des chaînes de Markov: Application aux systèmes de files d'attente. *Séminaire Mathématiques de Rouen N° 167*, C.N.R.S. Edition; pp. 115 - 121.
- [9] Aïssani, D. (1982). Estimate of the Strong Stability in an M/G/1 System. VINITI 4119-82, *R. Journal Matematika* IB 83: 1 – 33.

- [10] Aïssani, A. (1992). Heavy loading approximation of the unreliable queue with repeated orders. *Actes du Colloque International MOAD'92 "Méthodes et Outils d'Aide à la Décision"*: Béjaïa; pp. 97 – 102.
- [11] Aïssani, A. (1991). Influence de la fiabilité des serveurs sur la distribution du nombre de clients en orbite dans un système $M/G/1/0$ avec rappels. *International Journal "Technologies Avancées"* 2 (2): 23 – 28.
- [12] Aïssani, A. (1991). Modèles d'attente avec rappels: Influence de la fiabilité du canal. *Actes du 3-ème Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur*: Tunis; *Annales Maghrébines de l'Ingénieur* 2: 60 – 68.
- [13] Aïssani, A. (1988). On the $M/G/1/1$ queueing system with repeated orders and unreliable server. *Journal of Technology* 6: 98 – 123.
- [14] Aïssani, A. (1983). Queueing systems with a single unreliable server. Paper 756-Be-D83, Bielorrussian Institute for Scientific and Technical Information, Minsk.
- [15] Aïssani, D. (1992). Strong stability of an imbedded Markov chain in an $G/M/\infty$ system. *International Journal "Technologies Avancées"* 2 (1): 33 – 38.
- [16] Aïssani, A. (1986). Systèmes de files d'attente avec pannes. *Actes du 1-er Séminaire National "Statistique et Applications"*: Constantine.
- [17] Aïssani, A. (1993). Unreliable queueing with repeated orders. *Microelectronics and Reliability* 33 (14): 2093 – 2106.
- [18] Aïssani, A. and Artalejo, J.R. (1998). On the single server retrial queue subject to breakdowns. *Queueing Systems* 30: 309 – 321.
- [19] Aïssani, D. and Kartashov, N.V. (1983). Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, ser. A, 11: 3 – 5.
- [20] Aïssani, D. and Kartashov, N.V. (1984). Strong stability of the imbedded Markov chain in an $M/G/1$ system. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics* 29: 1 – 5.
- [21] Aïssani, A. and Oukid, N. (1994). Bounds for the mean busy and idle periods of some unreliable retrial queues. *Actes des Journées de Statistiques Appliquées*, USTHB, Alger; pp. 76 – 84.
- [22] A. Aïssani, (1998) *Eléments de simulation statistique*. USTHB Alger.
- [23] Benaouicha, M. and Aïssani, D. (2004). Strong stability in a $G/M/1$ queueing system. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics* 71: 22 – 32.
- [24] Benouaret, Z. and Aïssani, D. (2008). Stabilité forte d'un modèle de risque classique modifié. *Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications*, Constantine: 18 - 19; pp. 71 – 74.

- [25] Benouaret, Z. and Aïssani, D. (**to appear**). Strong stability in a two-dimensional classical risk model with independant chains. *Scandinavian Actuarial Journal*.
- [26] Berdjoudj, L. and Aïssani, D. (**2003**). Strong stability in retrial queues. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics* 68: 11 – 17.
- [27] Borovkov, A.A. (**1984**). Asymptotic Methods in Queueing Theory, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [28] Borovkov, A.A. (**1998**). Ergodicity and Stability of Stochastic Processes, Wiley and Sons, New York.
- [29] Borovkov, A.A. (**1978**). Ergodicity and stability theorems for a class of stochastic equations and their applications. *Theory of Probability and their Applications* 23 (2): 227 – 247.
- [30] Borovkov, A.A. (**1988**). On ergodicity and stability of the sequence $w_{n+1} = f(w_n, \xi_n)$: Applications to communication networks. *Theory of Probability and its Applications* 33 (4): 595 – 611.
- [31] Borovkov, A.A. (**1977**). Some estimates of the convergence rate of stability theorems. *Theory of Probability and its Applications* 22 (4): 668 – 678.
- [32] Borovkov, A.A. (**1977**). Some rate of convergence estimates in stability theorems. *Theor. Prob. and its Appl.* 22 (4): 689 – 699.
- [33] Borovkov, A.A. (**1976**). Stochastic Processes in Queueing Theory, Springer Verlag.
- [34] Borovkov, A.A. (**1972**). The Probabilistic Processes in Theory of Queueing Systems, Navka Edition, Moscow.
- [35] Borovkov, A.A. and Foss, S.G. (**1992**). Stochastically recursive sequences and their generalizations. *Siberian Advances in Mathematics* 2 (1): 16 – 81.
- [36] Borovkov, A.A. and Shassberger, R.A. (**1972**). Continuity theorems for multichannel systems with refusals. *Theor. Prob. Appl.* 17: 434 – 444.
- [37] Borovkov, A.A. and Shassberger, R. (**1994**). Ergodicity of a Jackson network with batch arrivals. *Journal of Applied Probability* 31 (3): 847 – 853.
- [38] Borovkov, A.A. and Shassberger, R. (**1994**). Ergodicity of polling network. *Stochastic Processes and their Applications* 50 (2): 253 – 262.
- [39] Bouallouche-Medjkoune, L. and Aïssani, D. (**2005**). Measurement and performance of the strong stability method. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics* 72: 1 – 9.
- [40] Bouallouche-Medjkoune, L. and Aïssani, D. (**2006**). Performance analysis approximation in a queueing system of type $M/G/1$. *International Journal Mathematical Methods of Operation Research* 63 (2): 341 – 356.

- [41] Bouallouche-Medjkoune, L. and Aïssani, D. (2008). Quantitative estimates in an $M_2/G_2/1$ priority queue with non-preemptive priority: The method of strong stability. *Stochastic Models* 24: 1 – 21.
- [42] Boukir, L., Bouallouche-Medjkoune, L. and Aïssani, D. (2010). Strong stability of the batch arrival queueing systems. *International Journal of Stochastic Analysis and Applications*, vol.28 issue1, pp.08-25.
- [43] J.W. Cohen (1982), *The Single Server Queue*, 2nd ed. (North-Holland, Amsterdam, New York).
- [44] Cho, G.E. and Meyer, C.D. (2001). Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain. *Linear Algebra and its Applications* 335: 137 – 150.
- [45] M. L. Choudhry and J. G. C. Tompleton (1983), *A First Course in Bulk Queues*. Wiley, New York.
- [46] M. L. Choudhry and J. G. C. Tompleton (1981), The queueing system $M/G^B/1$ and its ramifications. *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 6, pp. 56-60.
- [47] M. L. Choudhry and B. R. Madill and G. Brière (1987), Computational analysis of steady-state probabilities of $M/G^{ab}/1$ and related nonbulk queues. *Queue. Syst.*, vol. 2, pp. 93-114.
- [48] Choudhury, G., Ke, J.C. and Tadj, L. (2009). The N -policy for an unreliable server with delaying repair and two phases of service. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 231: 349 – 364.
- [49] Dimitrov, B. and Khalil, Z. (1990). On a new characterization of the exponential distribution related to a queueing system with an unreliable server. *Journal of Applied Probability* 27: 221 – 226.
- [50] B.T. Doshi, A note on stochastic decomposition in a GI/G/1 queue with vacations or set up times, *J. Appl. Prob.* 22 (1985) 419-428.
- [51] B.T. Doshi (1986), Queueing systems with vacations-a survey, *Queueing Systems* 29-66.
- [52] B.T. Doshi (1987), Generalizations of the stochastic decomposition results for single server queues with vacations, *Stochastic Models*.
- [53] J. H. Dshalalow and G. Russell (1992), On a single-server queue with fixed accumulation level, state dependent service, and semi-Markov modulated input flow. *Internat. J. Math. Math. Sci.* vol. 15, N°2, pp. 593-600.
- [54] J. H. Dshalalow (1997), Queueing systems with state dependent parameters. In: J.H. Dshalalow (Ed), *Frontiers in Queueing: Models and Applications in Science and Engineering*, CRC Press, Boca Raton, pp. 61-116.

- [55] J. H. Dshalalow (1991), A single server queue with random accumulation level. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* vol. 4, N°3, pp. 203-210.
- [56] J. H. Dshalalow, (1992) A queueing system with a fixed accumulation level, random server capacity and capacity dependent service time. *Intenat. J. Math. Math. Sci.* vol. 5, N°1, pp. 189-194.
- [57] G. I. Falin and J. R. Artalejo (1991), *Stochastic Models in Reliability*. Spriger edition, Alger.
- [58] Feller, W. (1950). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, J. Wiley, New York.
- [59] Franken, P. (1970). Ein stetigkeitssatz für verlustsysteme. *Operations-forschung und Math. Stat.* 11: 1 – 23.
- [60] S.W. Fuhrmann (1984), A note on the M/G/1 queue with server vacation, *Opns. Res.* 32. 1368-1373.
- [61] Gnedenko, B.V. and Kovalenko, I.N. (1989). *Introduction to Queuing Theory*, Birkhuser, Boston.
- [62] Gnedenko, B.V. (1970). On some non resolvable problems of the queueing theory. *Proceedings of the Six Internationnal Telegraphic Congress*, Munich.
- [63] Grey, W.J., Wang, P.P. and Scott, M.K. (2000). A vacation queueing model with service breakdown. *Applied Mathematical Modelling* 24: 391 – 400.
- [64] Hamadouche, N. and Aïssani, D. (2008). Stabilité forte d'un système d'attente $M_2/G_2/1$ avec priorité absolue. *Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications*, Constantine: 18 - 19 Octobre; pp. 63 – 66.
- [65] D.P. Heyman (1977), The T-policy for the M/G/1 queue, *Manag. Sci.* 23 . 775–778.
- [66] Hunter, J. (2002). Generalized inverses, stationary distributions and mean first passage times with applications to perturbed Markov chain. *Res. Lett. Inf. Math. Sci.* 1: 99 – 116.
- [67] Hunter, J. (2002). Stationary distributions and mean first passage times of perturbed Markov chains. *Res. Lett. Inf. Math. Sci.* 1: 85 – 98.
- [68] Hunter, J. (1986). Stationary distributions of perturbed Markov chains. *Linear Algebra and its Applications* 82: 201 – 214.
- [69] Ibe, O.C. and Trivedi, K.S. (1990). Two queues with alternating service and server breakdown. *Queueing Systems* 7: 253 – 268.
- [70] Ipsen, C.F. and Meyer, D. (1994). Uniform stability of Markov chains. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 15 (4): 1061 – 1074.
- [71] JA.Incera Diéguez (2001), *Contributions à la Modélisation et à la Simulation Accélérée de Réseaux de communication*. Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, mars 2001.

- [72] M. J. Jacob and T. P. Madhusoodanan (1987), Transient Solution for a finite capacity $M/G^{a,b}/1$ queueing system with vacations to the server. *Queue. Syst*, vol. 2, pp. 381-386.
- [73] M. J. Jacob and A. Krishnamoorthy and T. P. Madhusoodanan (1988), Transient Solution of a finite capacity $M/G^{ab}/1$ queueing system. *Nav. Res. Log.*, vol. 2, pp. 437-441.
- [74] Jain, M. (1997). Optimal N -policy for single server Markovian queue with breakdown, repair and state dependent arrival rate. *International Journal of Management and Systems* 13 (3): 245 – 260.
- [75] Jain, M. and Jain, A. (2010). Working vacations queueing model with multiple types of server breakdowns. *Applied Mathematical Modelling* 34: 1 – 13.
- [76] Kalashnikov, V.V. (1978). Qualitative Analysis of Complex Systems behavior by the Test Functions Method, Nauka Edition, Moscow.
- [77] Kalashnikov, V.V. and Tsitsiashvili, G.S. (1972). On the stability of queueing systems with respect to disturbances of their distribution functions. *Engrg. Cybernetics* 10: 211 – 217.
- [78] Kalashnikov, V.V. and Tsitsiashvili, G.S. (1972). Sur la stabilité des systèmes de files d'attente relativement à leurs fonctions de répartition perturbées. *Journal Izv AN USSR Technique Cybernétique* 2: 41 – 49.
- [79] Kartashov, N.V. (1985). Criteria for uniform ergodicity and strong stability of Markov chains with a common phase space. *Theor. Prob. and Math. Stat.* 30: 71 – 89.
- [80] Kartashov, N.V. (1981). On ergodicity and stability properties of Markov chains with respect to various norms in the measure space. *Theor. Prob. and its Appl.* 29 (1): 195 – 196.
- [81] Kartashov, N.V. (1996). Strong Stable Markov Chains, Edition VSP, Utrecht TBIMC Scientific Publishers, Kiev.
- [82] Kartashov, N.V. (1981). Strongly stable Markov chains, *Stability Problems for Stochastic Models. VNISSI, Vsesayouzni Seminar on Stability Problems for Stochastic Models*, Moscow; pp. 54 – 59, (see also: *J. Sovi. Math.* 34: 1493 – 1498, 1986).
- [83] Ke, J.C. (2005). Modified T vacation policy for an $M/G/1$ queueing system with an unreliable server and startup. *Mathematical and Computer Modeling* 41: 1267 – 1277.
- [84] Ke, J.C., Lin, C.H., Yang, J.Y. and Zhang, Z.G. (2009). Optimal (d,c) vacation policy for a finite buffer $M/M/c$ queue with unreliable servers and repairs. *Applied Mathematical Modelling* 33: 3949 – 3962.

- [85] J. Keilson and L.D. Servi (1986), Oscillating random walks models for GI/G/1 vacation systems with Bernoulli schedules, *J. Appl. Prob.* 23 (1986) 790-802.
- [86] J. Keilson and R. Ramaswamy (1988), The backlog and depletion-time process for M/G/1 vacation models with exhaustive service discipline, *J. Appl. Prob.* 25 (1988) 404-412.
- [87] Klebanov, L.B. (1980). Quelques résultats liés à la caractérisation de la distribution exponentielle. *Journal Theory of Probability and their Applications* 25 (3): 628 – 633.
- [88] Kennedy, D. (1972). The continuity of the single server queue. *J. Appl. Probab.* 9 (3): 370 – 381.
- [89] L.Kleinrock (1975), Queueing Systems, Vol. I: Theory. Wiley, New York.
- [90] L.Kleinrock (1993), On the modeling and Analysis of Computer Networks, Proceedings of the IEEE. août 1993.
- [91] Lam, Y., Zhang, Y.L. and Liu, Q. (2006). Geometric process model for M/M/1 queueing system with a repairable service station. *European Journal of Operational Research* 168: 100 – 121.
- [92] M. Lefebvre (2005), Processus stochastiques appliquées, Presses intl, Polytechnique.
- [93] M. Lefebvre (2003), Cours et exercices de Probabilités appliquées, Presses intl, Polytechnique.
- [94] Lekadir, O. and Aïssani, D. (2008). Approximation de deux files d'attente en série avec blocage et priorité relative. *Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications*, Constantine: 18 - 19 Octobre; pp. 67 – 70.
- [95] Lekadir, O. and Aïssani, D. (2007). Strong stability in a Jackson queueing network. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics* 77: 86 – 98.
- [96] H. Levy and L. Kleinrock (1986), A queue with starter and a queue with vacations: delay analysis by decomposition, *Opns. Res.* 34 (1986) 426-436.
- [97] Y. Levy and U. Yechiali (1975), Utilization of idle time in an M/G/1 queueing system, *Manag. Sci.* 22. 202-211.
- [98] Liu, Z., Wu, J. and Yang, G. (2009). An M/G/1 retrial G-queue with preemptive resume and feedback under N-policy subject to the server breakdowns and repairs. *Computers and Mathematics with Applications* 58: 1792 – 1807.
- [99] A. Martel, Techniques et applications de la recherche opérationnelle, 1979.
- [100] {Meyer, C.D. (1982). Sensitivity of the stationnary distribution of the Markov chains. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal "Matrix Anal. App."* 15 (3): 715 – 728.

- [101] Meyer, C.D. (1980). The condition of finite Markov chain and perturbation bounds for the limiting probability. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 1: 273 – 283.
- [102] Mouhoubi, Z. (2001). Sur les estimations quantitatives de l'ergodicité et de la stabilité dans les chaînes de Markov. Thèse de Magister, Université de Béjaïa.
- [103] Mouhoubi, Z. and Aïssani, D. (2005). Some inequalities of uniform ergodicity and strong stability of homogeneous Markov chains. *Pliska Studia Mathematica Bulgarica* 17: 171 – 186.
- [104] Z. Mouhoubi and D. Aïssani, (2002) On the Quantitatives Estimates of the Uniform Ergodicity for Markov chains. Proceeding of the 8-th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Vilnius, Lithuania, pp. 7-8.
- [105] Z. Mouhoubi and D. Aïssani (2005), Some Inequalities of the Uniform Ergodicity and Strong Stability of Homogeneous Markov Chains. *Pliska Stud. math. Bulgar.*, vol. 17, pp. 171-189.
- [106] Z. Mouhoubi and D. Aïssani (2008), Estimates of the Strong Stability and Uniform Ergodicity for Homogeneous Markov Chains. To appear in *J. Math. Sci.*
- [107] Z. Mouhoubi, (2006), Compte rendu du projet de recherche CNEPRU N°B*0601/01/05. Intitulé: Stabilité des modèles stochastiques, 2005/2006.
- [108] Z. Mouhoubi, (2007), Compte rendu du projet de recherche CNEPRU N°B*0601/01/05. Intitulé: Stabilité des modèles stochastiques, 2006/2007.
- [109] Z. Mouhoubi. and D. Aïssani, (2007). Stability of the Inventory-Backordre Process In the (R,S) Inventory Production Model. *Pliska Stud. math. Bulgar.* 18, 255–270.
- [110] Z. Mouhoubi. and D. Aïssani, (2010). New perturbation bounds for denumerable Markov chains. *Lin. Algeb. Appl.* 280, 255–270.
- [111] D. C. R. Muh (1996), On a class of N -policy multilevel control queueing systems. PhD Thesis, Florida Tech, Melbourne, FL, 1994, vol. 12, pp. 455-472.
- [112] D. C. R. Muh (1993), A bulk queueing system under N -policy with bilevel service delay discipline and start-up time, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 6(4) (1993) 359–384.
- [113] M.Nedzela, J.Gianini (1987), *Modèle probabilistes d'aide à la décision*, PUQ, 1987.
- [114] M. F. Neuts (1967), A general class of bulk queues with Poisson input. *Ann. Math. Stat.* vol. 36, pp. 759-770.
- [115] M. F. Neuts (1992), Ergodicity conditions and invariant probability measure for an embedded Markov chain in a controlled bulk queueing system with a bilevel service delay discipline, Part I. *Appl. Math. Lett.* vol. 5, N°4, pp. 25-27.

- [116] Oukid, N. (1995). Comparaisons stochastiques de files d'attente. Thèse de Magister, Université de Blida.
- [117] Rabta, B. (2006). Nouvelles conditions et nouvelles estimations de la stabilité des chaînes de Markov avec application aux modèles stochastiques de gestion des stocks. Thèse de Doctorat, Université de Béjaïa.
- [118] Rabta, B. and Aïssani, D. (2004). Stability analysis in an inventory model. *Theory of Stochastic Processes* 10 (26): 129 – 135.
- [119] Rabta, B. and Aïssani, D. (2008). Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains. *Linear Algebra and its Applications* 428: 1921 – 1927.
- [120] Rabta, B. and Aïssani, D. (2005). Strong stability in an (R,s,S) inventory model. *International Journal of Production Economics* 97: 159 – 171.
- [121] Rachev, S.T. (1989). The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems* 4: 287 – 318.
- [122] Rahmoune, F. and Aïssani, D. (2008). Strong stability of queues with multiple vacation of the server. *Stochastic Analysis and Applications* 26: 1 – 14.
- [123] Rossberg, H.J. (1965). Über die verteilung von wartereiten. *Mathematische Nachrichten* 30: 1 – 16.
- [124] M. Scholl and L. Kleinrock, On the M/G/1 queue with rest periods and certain service independent queueing disciplines, *Opns. Res.* 31 (1983) 705-709.
- [125] Schweitzer, P.J. (1968). Perturbation theory and finite Markov chains. *J. Appl. Prob.* 5: 401 – 413.
- [126] Seneta, E. (1988). Perturbation of the stationary distribution measured by ergodicity coefficients. *Adv. Appl. Probab.* 20: 228 – 230.
- [127] L.D. Servi (1986), D/G/1 queues with vacations, *Opns. Res.* 34 (1986) 619-629.
- [128] Stoyan, D. (1984). *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, John Wiley, Sons, New York.
- [129] Stoyan, D. (1977). Ein stetigkeitssatz für einlinge wassermodelle der bedienungstheorie. *Math. Operations forshu. Statist.* 3 (2): 103 – 111.
- [130] L.Tadj (2001), A matrix analytic solution to hysteric queueing system with random server capacity. *Appl. Math. Comput*, vol. 119, pp 161-175.
- [131] L.Tadj, On an M/G/1 quorum queueing system under N-policy. *J. Operat. Res. Soc*, vol. 54, pp. 466-471, 2003.
- [132] L. Tadj and L. Benkherouf and L. Aggoun (1998), On a delayed service queueing system with random server capacity and impatient customers. *Internat. J. Appl. Stat. Sci*, vol. III, pp. 309-328.
- [133] L. Tadj and L. Benkherouf and L. Aggoun (1999), A Hysteretic Queueing System with Random server Capacity. *Comput. Math. Appl*, vol. 38, pp. 51-61.

- [134] Tadj, L. and Choudhury, G. (2009). A quorum queueing system with an unreliable server. *Applied Mathematics Letters* 22: 1710 – 1714.
- [135] Tang, Y.H. (1997). A single-server $M/G/1$ queueing system subject to breakdowns-some reliability and queueing problems. *Microelectron and Reliability* 37 (2): 315 – 321.
- [136] L. Takács (1963), Introduction to the Theory of Queues. Oxford University Press, New York, 1963.
- [137] N.S. Tian, D.Q. Zhang and C.X. Cao (1990), $M/G/1$ queue with controllable vacation and optimizing of vacation policy.
- [138] N.S. Tian (1990), Queue $M/G/1$ with adaptive multistage vacations.
- [139] N.S. Tian, D.Q. Zhang and C.X. Cao (1989), The $GI/M/1$ queue with exponential vacations. *Queueing Systems, issue 5 (1989)pp: 331-344*.
- [140] Wang, K.H., Chan, M.C. and Ke, J.C. (2007). Maximum entropy analysis of the $M^{[x]}/M/1$ queueing system with multiple vacations and server breakdowns. *Computers & Industrial Engineering* 52: 192 – 202.
- [141] Wang, K.H. and Huang, K.B. (2009). A maximum entropy approach for the $\langle p, N \rangle$ -policy $M/G/1$ queue with a removable and unreliable server. *Applied Mathematical Modelling* 33: 2024 – 2034.
- [142] Wang, J. and Li, J. (2008). A Repairable $M/G/1$ retrial queue with Bernoulli vacation and two-phase service. *International Journal of Quality Technology and Quantitative Management* 5 (2): 179 – 192.
- [143] Wang, J. and Li, J. (2009). A single server retrial queue with general retrial times and two-phase service. *Jrl Syst. Sci & Complexity* 22: 291 – 302.
- [144] Wang, J. and Zhao, Q. (2007). A discrete time $Geo/G/1$ retrial queue with starting failures and second optional service. *Comput. Math. Appl.* 53: 115 – 127.
- [145] Wang, J. and Zhao, Q. (2007). Discrete-time $Geo/G/1$ retrial queue with general retrial times and starting failures. *Mathematical and Computer Modelling* 45: 853 – 863.
- [146] Xueming, Y. and Li, W. (2003). Availability analysis of the queueing system $GI/PH/1$ with server breakdowns. *Journal of Systems Science and Complexity* 16 (2): 177 – 183.
- [147] M. Yadin and P. Naor (1963), Queueing systems with removable service station, *Oper. Res. Quart.* 14 (1963) 393–405.
- [148] Zolotarev, V.M. (1975). Qualitative estimate for continuity property of queueing systems. *Theor. Prob. Appl.* 20: 211 – 213.
- [149] Zolotarev, V.M. (1976). On stochastic continuity of queueing systems of type $G/G/1$. *Theor. Prob. Appl.* 21: 250 – 269.

-
- [150] Zolotarev, V.M. (1977). *Quantitative estimates in problems of continuity of queueing systems of type $G/G/\infty$. Theor. Prob. Appl. 22: 679 – 691.*