République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de Magister

En

Mathématiques Appliquées

Option

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Sur les jeux stratégiques multicritères avec coalitions et gains non transférables

Présenté par :

Mr MAAFA Khaled.

Devant le jury composé de :

Président	Mr Djamil	AÏSSANI	Professeur	Université de Béjaïa.
Rapporteur	Mr Mohammed Saïd	RADJEF	Professeur	Université de Béjaïa.
Examinateur	Mr Mohand Ouamer	BIBI	Professeur	Université de Béjaïa.
Examinateur	Mr Farid	YAICI	Professeur	Université de Béjaïa.

Béjaïa, 2010

Remerciements

J suis très heureux de saisir cette occasion pour remercier mon directeur de thèse, le Professeur **M.S. RADJEF**. Je le remercie pour toute l'aide qu'il m'a apportée pour la réalisation de ce modeste travail, ses nombreux conseils, et sa grande disponibilité.

Je remercie vivement le Professeur **D. AISSANI**, qui me fait un grand honneur en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie le Professeur **M.O. BIBI** et le Professeur **F. YAICI** pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Dédicace

Je suis heureux de dédier ce modeste travail à :

- ⋆ Mes parents et mes enseignants.
- ⋆ Toute ma famille.
- ⋆ Tous mes amis et collègues du département de Recherche Opérationnelle.

Table des matières

Introduction

Si on examine la carte géopolitique actuelle du monde, on constate l'émergence de nombreux regroupements de pays visant à coordonner leurs efforts pour réaliser des objectifs communs. L'union européenne et l'organisation des nations unies sont des exemples de tels regroupements. Au lendemain de chaque élection, des spéculations concernant les parties qui vont s'allier pour former le prochain gouvernement font la une des journaux. Les fusions d'entreprises, les groupes et les cartels sont aujourd'hui des phénomènes courants dans l'environnement économique mondial. Le point commun entre toutes ces situations est que des individus, des entreprises ou des nations, prennent conscience de l'intérêt d'agir ensemble et s'organisent, par conséquent, en coalitions.

La formation de coalitions a été observée et identifiée comme un élément important dans l'analyse des interactions entre des agents rationnels depuis longtemps. Plusieurs travaux, dont ceux de D'Aspremont et al [9], Gerber [15], Hart et Kurz [20], [21] , Yi [45], ont permis d'éclairer la question relative aux coalitions susceptibles d'émerger lors de ces interactions, mais les processus conduisant à leur formation demeurent peu connus.

La théorie des jeux est l'outil mathématique destiné à analyser la prise de décision dans un environnement caractérisé par la présence de plusieurs agents appelés joueurs, dont les objectifs sont éventuellement contradictoires. Notre objectif dans ce mémoire est d'examiner, à la lumière de la théorie des jeux, le comportement coopératif qui émerge entre des agents rationnels, ayant chacun plusieurs critères à optimiser et en excluant la possibilité de transfert de gains entre ces agents. L'exclusion de la transférabilité des gains est motivée par des considérations d'ordre pratique :

- Les transferts de gains peuvent être prohibés par la loi.
- Souvent les gains ne sont pas monétaires, il n'existe pas alors un moyen permettant leur transfert.
- Même lorsqu'il existe une monnaie d'échange, les joueurs peuvent ne pas accorder tous la même valeur à cette monnaie. Le modèle des jeux coopératifs à gains transférables suppose que tous les joueurs accordent la même valeur pour la monnaie d'échange.

Nous allons donc nous intéresser dans ce mémoire aux jeux multicritères avec formation de

coalitions et à gains non transférables. Le concept de solution étant la pierre angulaire dans l'analyse d'un jeu, notre effort sera orienté vers la définition d'un concept de solution pour la classe des jeux stratégiques multicritères avec coalitions et gains non transférables et l'étude de ses conditions d'existence.
Notre démarche sera la suivante :

1. Etudier le cas monocritère en premier lieu.
2. Essayer, ensuite, de généraliser les résultats connus pour le cas monocritère, au cas multicritère.

C'est le second point qui constitue l'essentiel de notre contribution dans ce mémoire.
Notre travail sera organisé comme suit :

– Dans un premier chapitre, nous allons donner les définitions et notions de base de la théorie des jeux et de l'optimisation multicritère.
– Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude des jeux coopératifs monocritères.
– Dans le troisième chapitre, nous allons présenter les principaux modèles de formation de coalitions dans un jeu monocritère.
– Dans le chapitre quatre, nous étendrons la portée de plusieurs concepts, définis pour les jeux monocritères avec coalitions, aux jeux multicritères. Nous définissons également un concept de solution, pour les jeux multicritères avec coalitions et gains non transférables, le noyau, et nous étudions plusieurs variantes de ce concept ainsi que leurs conditions d'existence.

1

Généralités

Introduction

L'objet de ce premier chapitre est de rappeler les notions fondamentales de la théorie des jeux et de l'optimisation multicritère ainsi que certaines définitions et résultats basiques dont nous aurons besoin dans la suite de notre travail. Ces rappels sont organisés en trois sous-titres :

1. Notions d'analyse mathématique.
2. Théorie des jeux
3. Optimisation multicritère.

1.1 Notions de base

1.1.1 Notions de topologie

Espaces topologiques

Définition 1.1. Soit E un ensemble et τ une famille de parties de E vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $\emptyset$ et E sont des éléments de τ

2. Toute réunion d'éléments de τ, est un élément de τ
3. Toute intersection finie d'éléments de τ et un élément de τ.

les éléments de τ sont appelés ouverts de E et le couple (E, τ) est appelé espace topologique.

Ayant défini la notion d'ouvert, on peut énoncer la définition d'ensemble fermé :

Définition 1.2. Une sous ensemble de E est dit fermé, si son complémentaire par rapport à E est un ouvert.

Remarque 1.1. *Un ensemble peut être à la fois ouvert et fermé. C'est le cas de E et de $\emptyset$.*

Définition 1.3. Soit $x \in E$. Un voisinage de x est toute partie contenant un ouvert contenant x

Définition 1.4. Soit $A \subseteq E$. L'adhérence de A est le plus petit fermé, au sens de l'inclusion, contenant A. L'adhérence de A sera notée $\overline{A}$.

La notion d'adhérence nous permet de définir la frontière d'un ensemble. $C_E A$ désignera le complémentaire de A par rapport à E

Définition 1.5. La frontière de A est l'ensemble : $\partial A = \overline{A} \cap \overline{C_E A}$.

La notion de voisinage permet de définir les points intérieurs d'un ensemble :

Définition 1.6. Soit $A \subseteq E$. Soit $x \in A$. x est dit un point intérieur de A si A est un voisinage de x. L'ensemble de tous les points intérieurs de A est appelé l'intérieur de A et est noté $int(A)$.

La définition suivante introduit la notion d'espace séparé.

Définition 1.7. Soit E un espace topologique. E est dit séparé si pour deux points quelconques de E, on peut trouver deux voisinages, un pour chacun des points, disjoints.

Espaces métriques

Définition 1.8. Soit E un ensemble. Une distance sur E est une application
d : $E \times E \to \mathbb{R}^+$
$(x, y) \mapsto d(x, y)$
vérifiant les propriétés suivantes :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall x, y \in E : \quad d(x, y) = d(y, x)$.
3. $\forall x, y, z \in E : \quad d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$.

   Si d est une distance sur E, alors le couple (E, d) est appelé espace métrique.

Dans un espace métrique (E, d) on peut utiliser la distance d pour définir les ouverts de E, et construire de cette façon un espace topologique, on parle alors de topologie induite sur E par la distance d.
Dans un espace métrique on peut définir la notion de limite d'une suite :

Définition 1.9. Soit (E, d) un espace métrique. une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E converge vers $x \in E$, si la suite des nombres réels $\{d(x_n, x)\}$, converge vers 0

Nous pouvons à présent introduire la notion d'ensemble compact :

Définition 1.10. Une partie $A \subseteq E$ est compacte si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergeant vers un élément de A.

1.1.2 Notions d'analyse convexe

Définition 1.11. Soit E une partie d'un espace vectoriel réel. E est convexe si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha \in [0, 1] : \qquad \alpha x + (1 - \alpha)y \in E$$

Les ensembles convexes possèdent des propriétés intéressantes. On peut en citer quelques unes :

1. Toute intersection d'ensembles convexe est convexe.
2. Tout produit d'ensembles convexes est convexe.
3. L'image d'un ensemble convexe par une application linéaire est convexe.

Définition 1.12. Soit E un ensemble convexe. f une fonction de E dans $\mathbb{R}$. Alors :

1. f est convexe sur E si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha \in [0, 1] : \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

2. f est convexe sur E si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha \in [0, 1] : \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geqq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

3. f est quasi-convexe sur E si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha \in [0, 1] : \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqq Sup[f(x), f(y)].$$

4. f est quasi-concave sur E si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha \in [0, 1] : \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geqq Min[f(x), f(y)].$$

1.2 La théorie des jeux

"Un jeu est l'objet mathématique formalisant un conflit entre plusieurs agents (les joueurs), c'est à dire une situation qu'ils jugent selon des préférences contradictoires et dont ils peuvent influencer certains paramètres"[26]. Partant de cette définition générale et en adoptant divers critères de classement, on peut définir plusieurs classes de jeux.

1.2.1 Classement des jeux selon l'attitude des joueurs face à la coopération

On distingue deux classes principales de jeux : les jeux coopératifs et les jeux non coopératifs. Un jeu est coopératif si les joueurs peuvent communiquer entre eux et conclure des accords contraignants avant le déroulement du jeu. Si ces deux conditions ne sont pas vérifiées, alors le jeu est dit non coopératif.
Lorsque le jeu est coopératif, les accords conclus entre les joueurs peuvent porter sur un choix commun des stratégies à jouer d'une part et d'autre part sur la redistribution des gains issus du jeu, lorsque cette redistribution des gains est possible. On parlera alors de jeux coopératifs à gains transférables. Lorsqu'il n'est pas possible de redistribuer les gains entre les joueurs, on parlera de jeux coopératifs à gains non transférables. C'est cette dernière classe de jeux qui nous intéresse dans notre travail. En pratique, plusieurs raisons peuvent empêcher le jeu d'être à gains transférables :

- L'absence d'une monnaie d'échange entre les joueurs.
- La monnaie d'échange ne représente pas la même valeur pour tous les joueurs.
- L'interdiction des paiements latéraux par les règles du jeu même.

1.2.2 Classement des jeux selon le modèle mathématique utilisé pour les décrire

Le modèle mathématique décrivant le jeu est étroitement lié à la situation réelle qui lui a donné naissance. Selon le modèle utilisé pour décrire le jeu, on distingue ;

1. Les jeux sous forme extensive : Dans cette représentation le jeu est décrit par un arbre qui décrit le déroulement du jeu dans le temps : chaque nœud de l'arbre correspond à une décision d'un joueur donné et chaque décision possible est décrite par une branche issue de ce nœud.
2. Les jeux sous forme normale ou stratégique : Le jeu est dit sous forme normale lorsqu'on dispose des éléments suivants :

(a) L'ensemble des joueurs $\mathcal{N}$

(b) L'ensemble X_j de stratégies de chaque joueur j.

(c) Une fonction d'utilité f_j pour chaque joueur j, donnant son évaluation pour les issues possibles du jeu.

Un jeu sous forme normale est noté : $J = \langle \mathcal{N}, \{X_j\}_{j \in \mathcal{N}}, \{f_j\}_{j \in \mathcal{N}} \rangle$

3. Les jeux sous forme coalitionelle. Très utilisée pour les jeux coopératifs, cette représentation consiste à assigner à chaque coalition, l'ensemble des gains qu'elle peut garantir à ses membres.

1.2.3 Classement des jeux selon la nature de l'information

L'information dont dispose chaque joueur influe beaucoup sur la décision qu'il va prendre et, par conséquent, sur l'évolution du jeu. Il est donc naturel de classer les jeux selon l'information disponible aux joueurs au moment de la prise de décision.

Définition 1.13. Le jeu est à information parfaite, si au moment de choisir sa stratégie, le joueur connaît toutes les décisions prises par tous les joueurs lors des coups précédents. Le jeu est dit à information imparfaite dans le cas contraire.

Définition 1.14. Le jeu est à information complète si chaque joueur connait la structure du jeu, c'est dire l'ensemble des joueurs, les ensembles de stratégies de tous les joueurs, ainsi que leurs fonctions de gain. Chaque joueur sait également que tous les autres joueurs disposent de ces informations, on parle alors de connaissance commune [1]. Le jeu est information incomplète s'il existe une incertitude sur l'un des éléments cités précédemment.

1.2.4 Résolution d'un jeu non coopératif

Dans cette section nous donnons une présentation rapide du concept de solution fondamental pour les jeux non coopératifs, l'équilibre de Nash. Les jeux coopératifs, qui font l'objet de ce mémoire seront étudiés en détail dans les chapitres suivants. Notre point de départ est un jeu sous forme normale : $J = \langle \mathcal{N}, \{X_j\}_{j \in \mathcal{N}}, \{f_j\}_{j \in \mathcal{N}} \rangle$
Une issue du jeu est un élément du produit cartésien : $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$. Si x est une situation du jeu et j un joueur, on notera : $x = (x_j, x_{-j})$ où x_j est la stratégie du joueur j et x_{-j} est le vecteur des strtégies des autres joueurs. On a alors la définition suivante :

1. Common knowledge

Définition 1.15. [26] Une situation $x \in X$ est un équilibre de Nash du jeu si :
$\forall j \in \mathcal{N}, \quad \forall y_j \in X_j \quad : f_j(y_j, x_{-j}) \leqq f_j(x_j, x_{-j})$

Cette définition signifie qu'une situation du jeu est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a intérêt à changer sa stratégie si les autres joueurs gardent leurs stratégies d'équilibre.
Les ensembles X_j contiennent des stratégies dites "pures" du joueur j. Malheureusement un jeu n'admet pas toujours un équilibre en stratégies pures, c'est pour cela qu'on introduit la notion de stratégie mixte.

Définition 1.16. Une stratégie mixte d'un joueur est une distribution de probabilités sur l'ensemble de ses stratégies pures.

Ainsi si un joueur possède n stratégies pures, alors une stratégie mixte pour ce joueur sera de la forme :
$(p_1, p_2, ..., p_n)$ où : $p_i \geqq 0 \quad \forall i = 1..n$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.
On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Tout jeu admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

1.2.5 Sur l'intérêt de la coopération

L'étude du comportement coopératif dans les jeux remonte aux débuts même de la théorie des jeux. En 1947, dans leur ouvrage "Theory of Games and Economic Behavior " Von Neumann et Morgenstern étudient un jeu coopératif à n joueurs et proposent une solution : les ensembles stables. En 1953, Nash propose son modèle de négociations pour deux joueurs. En 1960 Aumann et Peleg introduisent les jeux coopératifs à gains non transférables. Nous allons à travers l'étude d'un exemple, montrer que des joueurs rationnels n'ont pas intérêt à exclure la possibilité de coopérer entre eux pour améliorer leurs gains.

Exemple

Un couple, H (homme) et F (femme) nourrissent le projet de passer un excellent Week-end en allant à quelque spectacle. Tandis que F admire le théâtre, H n'est intéressé que par la boxe. Chacun d'eux, cependant, préfère assister avec son conjoint à un spectacle qui ne l'intéresse pas plutôt que d'aller seul à un spectacle qui l'intéresse. Le tableau suivant donne les utilités de H et F dans chacun des cas.

	T	B
T	(1,4)	(0,0)
B	(0,0)	(4,1)

Ainsi si H et F optent tous les deux pour le théâtre, l'utilité de H sera de 1 et celle de F sera de 4.

Analysons le jeu, en excluant toute coopération entre H et F.

Soit (α, β), $\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0$ $\alpha + \beta = 1$ une stratégie mixte de H sur l'ensemble de ses stratégies pures (T, B).

Soit (λ, γ), $\lambda \geqq 0, \gamma \geqq 0$ $\lambda + \gamma = 1$ une stratégie mixte de F sur l'ensemble de ses stratégies pures (T, B).

Lorsque les stratégies (α, β) et (λ, γ) sont utilisées par H et F respectivement, le gain espéré de H sera :
$U_H = \alpha\lambda + 4\beta\gamma$.
Celui de F sera :
$U_F = \beta\gamma + 4\alpha\lambda$.

Construisons les fonctions de réaction de H et F respectivement. Une fonction de réaction d'un joueur est une correspondance qui donne pour une stratégie donnée de l'adversaire, la ou les meilleures réponses du joueur considéré. Si F utilise la stratégie $(\lambda, 1-\lambda)$ $\lambda \in [0,1]$ alors : $\frac{dU_H}{d\alpha}(\alpha) = 5\lambda - 4$. Compte-tenu de $\alpha \in [0,1]$, on aura :

$\lambda > \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{dU_H}{d\alpha}(\alpha) > 0$ $\forall \alpha \in [0,1]$ U_H est alors maximale pour $\alpha = 1$.

$\lambda < \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{dU_H}{d\alpha}(\alpha) < 0$ $\forall \alpha \in [0,1]$ U_H est alors maximale pour $\alpha = 0$.

$\lambda = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{dU_H}{d\alpha}(\alpha) = 0$ $\forall \alpha \in [0,1]$ U_H constante par rapport à $\alpha =$.

Si C_H est la correspondance qui associe à toute stratégie mixte $(\lambda, 1-\lambda)$ $\lambda \in [0,1]$ de F, l'ensemble des stratégies mixtes de H qui constituent une meilleure réponse de H on aura :

$$C_H(\lambda, 1-\lambda) = \begin{cases} \{(1,0)\} & Si \ \ \lambda > \frac{4}{5} \\ \{(0,1)\} & Si \ \ \lambda < \frac{4}{5} \\ \{(\alpha, 1-\alpha) \ \ \alpha \in [0,1]\} & Si \ \ \lambda = \frac{4}{5} \end{cases}$$

De même, Si C_F est la correspondance qui associe à toute stratégie mixte $(\alpha, 1-\alpha)$ $\alpha \in [0,1]$ de H, l'ensemble des stratégies mixtes de F qui constituent une meilleure réponse de F on aura :

$$C_F(\alpha, 1-\alpha) = \begin{cases} \{(1,0)\} \quad Si \quad \alpha > \frac{1}{5} \\ \{(0,1)\} \quad Si \quad \alpha < \frac{1}{5} \\ \{(\lambda, 1-\lambda) \quad \lambda \in [0,1]\} \quad Si \quad \alpha = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Les correspondances C_H et C_F, permettent de déterminer les équilibres de Nash du jeu. En effet, si $((\alpha, 1-\alpha), (\lambda, 1-\lambda))$ est un équilibre de Nash du jeu, alors chacune de ces eux stratégies est une meilleure réponse à l'autre. On aura alors :

$$\begin{aligned} (\alpha, 1-\alpha) &\in C_H(\lambda, 1-\lambda) \\ (\lambda, 1-\lambda) &\in C_F(\alpha, 1-\alpha) \end{aligned}$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les équilibres de Nash du jeu.

Le tableau suivant donne ces équilibres ainsi que les gains espérés de chaque joueur à l'équilibre.

Equilibre	Stratégie de H	Stratégie de F	Gain espéré de H	Gain espéré de F
1	(1,0)	(1,0)	1	4
2	(0,1)	(0,1)	4	1
3	$(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$	$(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$

Analysons nos résultats : un équilibre de Nash est une issue probable pour le jeu. Nous sommes confrontés ici au problème de la multiplicité des équilibres. Lequel choisir ? il est peu probable qu'un des deux joueurs accepte un gain moyen inférieure à celui du second car ils ont tous deux des opportunités symétriques. C'est pour cela qu'on choisira plutôt l'équilibre 3. Notre argument repose en fait sur l'idée de point focal de Schelling. On conclura que si H et F ne coopèrent pas ils auront chacun un gain moyen de $\frac{4}{5}$.

Observons à présent ce que H et F pourraient réaliser s'ils acceptent la perspective de coopérer. Ils peuvent, à titre d'exemple prendre une pièce et la lancer. Si le résultat est pile ils iraient tous deux au théâtre. Si le résultat est face ils iraient tous deux au match de boxe. Le gain moyen de H et F seraient alors respectivement :

$U_H = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}4 = \frac{5}{2} > \frac{4}{5}$

$U_F = \frac{1}{2}4 + \frac{1}{2}1 = \frac{5}{2} > \frac{4}{5}$

Les résultats montrent clairement que la perspective de coopérer doit être sérieusement envisagée par H et F. Il est clair que si H ou F ne respecte son engagement que lorsque le résultat du lancement de la pièce est à sa faveur conduit à des résultats préjudiciables pour sont conjoint. On comprend alors la nécessité du caractère contraignant des accords dans la théorie des jeux coopératifs.

1.3 Optimisation multicritère

Dans beaucoup de situations réelles, le décideur est confronté à un problème à plusieurs facettes et il doit, de ce fait, concilier des objectifs différents, voire même contradictoires. C'est pour cela que la nécessité de développer une théorie de l'optimisation multicritère s'est fait sentir. Avant d'exposer les notions de base de cette théorie, nous allons donner quelques exemples qui décrivent des situations pratiques qui peuvent donner naissance à un problème d'optimisation multicritère.

Exemple 1 : Une entreprise de production

Une entreprise de production se trouve confrontée à plusieurs objectifs contradictoires :

1. Maximiser son bénéfice en utilisant un procédé de production efficace mais nuisible à l'environnement.
2. Réduire la pollution qu'elle occasionne à l'environnement.

La décision de l'entreprise doit réaliser un compromis entre ces deux critères.

Exemple 2 : Combat aérien

Deux aviateurs sont engagés dans un combat aérien. Chacun d'eux doit manœuvrer de façon à avoir son adversaire à l'intérieure de son champs de tire, mais il doit veiller, au même temps, à ce qu'il ne soit pas lui même à l'intérieure du champ de tir de son adversaire. Chacun des aviateurs est alors face à problème d'optimisation bicritère.

Exemple 3 : Problème de décision de groupe

Une famille composée d'un homme, une femme, et leur jeune fille, envisage d'acheter une maison. Plusieurs offres sont disponibles sur le marché. Puisque ils vont tous vivre dans la maison qu'ils vont acheter, aucun d'eux ne peut se permettre d'imposer son choix aux deux autres. L'évaluation d'une offre par la famille sera alors un vecteur comportant trois composantes correspondant aux évaluations données par chacun des membres de la famille.

Exemple 4 : Une incertitude sur un événement futur [3]

Une incertitude sur un évènement futur, qu'on ne peut pas décrire par une distribution de probabilités, peut donner naissance un problème multicritère. Une entreprise envisage de répondre à un appel d'offre lancé au mois de juin par la commune pour réaliser plusieurs projets d'utilité publique. Elle doit faire son offre, pour un seul projet, avant le 31 juillet. Il se trouve cependant que des élections seront organisées au mois de novembre, et l'ouverture des plis ne se fera qu'après l'installation du nouveau maire. Les n candidats aux élections ont différentes appréciations pour l'intérêt de chacun des projets. Le bénéfice de l'entreprise dépendra donc du candidat élu. L'entreprise décide alors d'évaluer chaque projet par un vecteur à n composantes : la composante j désignera le bénéfice attendu du projet si le j^{eme} candidat est élu. $j = 1..n$.

1.3.1 Notions d'optimalité

Ayant montré, par les exemples précédents, que diverses situations pratiques peuvent donner naissance à un problème de décision multicritère, nous allons nous intéresser à la résolution d'un tel problème.
Soit X l'espace de décisions, ou actions, disponibles au décideur.
Supposons que le décideur ait n critères à maximiser. Chacun de ces critères sera modélisé par une fonction : $f_j : X \to \mathbb{R} \quad j = 1..n$.
Définissons la fonction $f : X \to \mathbb{R}^n$ par : $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ . \\ . \\ f_j(x) \\ . \\ f_n(x) \end{pmatrix}$. Le problème multicritère résultant sera noté :

$$\langle X, f \rangle. \tag{1.1}$$

Le décideur voudrait choisir une décision $x \in X$ qui maximise tous ses critères au même temps. Toutefois ceci est généralement impossible, car certains des critères peuvent être en conflit, c'est dire qu'une augmentation de l'un des critères, conduit à une diminution de l'autre critère. C'est pour cela qu'on doit définir des notions d'optimalité adaptées aux comparaisons multidimensionnelles.
Nous adoptons les notations suivantes pour les comparaisons entre vecteurs :Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$

Préférence faible : $X \geqq Y \Leftrightarrow X_i \geqq Y_i \quad \forall i \in \{1..n\}$

Préférence : $X \geq Y \Leftrightarrow \begin{cases} X_i \geqq Y_i \quad \forall i \in \{1..n\} \\ \exists j \in \{1..n\} \;\; tel\ que \quad : X_j > Y_j. \end{cases}$

Préférence stricte : $X > Y \Leftrightarrow X_i > Y_i \quad \forall i \in \{1..n\}$

Optimalité au sens de Pareto

Définition 1.17. Une décision $x^p \in X$ est dite maximale de Pareto, ou efficace, dans le problème (1.1) si :
$\forall y \in X, f(y) \ngeq f(x)$.

Optimalité au sens de Slater

Définition 1.18. Une décision $x^s \in X$ est dite maximale de Slater, ou faiblement efficace, dans le problème (1.1) si :
$\forall y \in X, f(y) \not> f(x)$.

Optimalité au sens de Geoffrion

[14]

Définition 1.19. Une décision $x^G \in X$ est dite maximale de Geoffrion, ou proprement efficace au sens de Geoffrion, dans le problème (1.1) si :

1. x^G est maximale de Pareto dans le problème (1.1) ;
2. Il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $i \in \{1..n\}$ et $x \in X$ vérifiant $f_i(x) > f_i(x^G)$, il existe un indice $j \in \{1..n\}$ tel que :$f_j(x^G) > f_j(x)$ et ;
$f_i(x) - f_i(x^G) \leqq M[f_j(x^G) - f_j(x)]$.

Propriété

Si on note respectivement, par X^P, X^S, X^G les ensembles de décisions maximales de Pareto, Slater et Géoffrion du problème 1.1, on a :

$$X^G \subseteq X^P \subseteq X^S$$

On a également le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Si dans le problème (1.1) on a :*

1. *L'ensemble X est convexe ;*
2. *La fonction f est strictement quasi-concave sur X ;*

Alors on aura :$X^P = X^S$.

Optimalité lexicographique

En pratique ; le décideur peut avoir des préférences entre ses critères. L'ordre lexicographique permet de modéliser cette situation. Supposons que dans le problème 1.1, les critères sont ordonnés par ordre décroissant d'importance ; c'est à dire que le critère 1 est plus important que le critère 2 et ainsi de suite. Définissons l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^n$:

Définition 1.20. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$.
$x \geqq_{lex} y \Leftrightarrow \exists j \in \{1..n\} \quad tel \quad que \quad : \quad x_i \geqq y_i \quad \forall i \in \{1..j\}$.

Remarque 1.2. *L'ordre lexicographique est un ordre total sur* $\mathbb{R}^n$ *:* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ *on a :* $x \geqq_{lex} y$ *ou* $y \geqq_{lex} x$

On peut à présent énoncer la définition suivante :

Définition 1.21. Une décision $x* \in X$ est optimale au sens lexicographique dans le problème (1.1) si :
$\forall x \in X$; on a : $f(x*) \geqq_{lex} f(x)$.

1.3.2 Structures de dominance

La multiplicité des notions d'optimalité rencontrées dans la littérature sur l'optimisation multicritère ; a conduit les chercheurs à imaginer un cadre général d'analyse, celui des structures de dominance [3], qui englobe, comme cas particuliers, toutes les relations de dominance entre vecteurs qu'on a présenté dans la section précédente : préférence, préférence faible, préférence lexicographique.

Définition 1.22. [25] Un sous-ensemble $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un cône si :

$$\forall d \in \mathcal{C}; \forall \alpha > 0; \quad \alpha d \in \mathcal{C}.$$

Considérons le problème d'optimisation multicritère 1.1.
Soit l'ensemble : $f(X) = \{y \in \mathbb{R}^n \;\; tel \;\; que : \;\; \exists \;\; x \in X : \;\; y = f(x)\}$. Associons un tout élément $v \in f(X)$; un cône convexe de $\mathbb{R}^n$ noté : $D(v)$; et définissons la relation $\succ$ sur $f(X)$; par :
$\forall u, v \in f(X) : u \succ v \Leftrightarrow (v - u \in D(u) \;\; et \;\; v \neq u)$. Une décision $x \in X$ est optimale si elle n'est dominée par aucune autre décision $y \in X$. De façon formelle on a la définition suivante :

Définition 1.23. Une décision $x \in X$ est optimale si : $\forall y \in X : f(y) \not\succ f(x)$.

Définition 1.24. La famille $\{D(u); u \in f(X)\}$ notée $D(.)$ est appelée structure de dominance du problème de décision 1.1.

Nous allons voir à présent que toutes les notions d'optimalité introduites dans la section 1.3.1 ; peuvent être déduites de la définition 1.23, en définissant des structures de dominance appropriées.

Optimalité au sens de Pareto

Soit $u \in f(X)$. Posons :

$$D(u) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \leqq 0\} \tag{1.2}$$

on aura alors :

$$\begin{aligned} y \succ x &\Leftrightarrow (x - y \in D(x) \;\; et \;\; y \neq x) \\ &\Leftrightarrow (x - y \leqq 0 \;\; et \;\; y \neq x); \\ &\Leftrightarrow (y \geqq x \;\; et \;\; y \neq x); \\ &\Leftrightarrow y \geq x. \end{aligned}$$

Les solutions non dominées associée à la structure de dominance (1.2) ; sont donc les solutions Pareto optimales dans le problème (1.1).

Optimalité au sens de Slater

Soit $u \in f(X)$. Posons

$$D(u) = \{d \in \mathbb{R}^n : d < 0\} \tag{1.3}$$

on aura alors :

$$\begin{aligned} y \succ x &\Leftrightarrow (x - y \in D(x) \;\; et \;\; y \neq x) \\ &\Leftrightarrow (x - y < 0 \;\; et \;\; y \neq x) \\ &\Leftrightarrow (y > x \;\; et \;\; y \neq x) \\ &\Leftrightarrow y > x. \end{aligned}$$

les solutions non dominées associées à la structure de dominance (1.3) ; sont donc les solutions optimales au sens de Slater, dans le problème (1.1).

Optimalité lexicographique

Soit $u \in f(X)$. Posons, pour $k \in \{1, ..., n\}$

$$D_k(u) = \{d \in \mathbb{R}^n : d_j \leqq 0 \;\; si \;\; j \in \{1, ..., k\} \;\; et \;\; d_j = 0 sinon\}. \tag{1.4}$$

Définissons l'ensemble $D(u)$ par :

$$D(u) = \bigcup_{k=1}^{n} D_k(u) \tag{1.5}$$

On aura alors :

$$\begin{aligned} y \succ x &\Leftrightarrow (x - y \in D(x) \;\; et \;\; y \neq x) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \{1, ..., n\} : \;\; x - y \in D_k(x) \;\; et \;\; y \neq x) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \{1, ..., n\} y_j \geqq x_j, \forall j \in \{1, ..., k\} \;\; et \;\; y \neq x); \\ &\Leftrightarrow (y \geqq_{lex} x \;\; et \;\; y \neq x). \end{aligned}$$

Les solutions non dominées associées à la structure de dominance (1.5) sont donc les solutions optimales, selon l'ordre lexicographique, dans le problème (1.1).

2

Concepts de solution pour un jeu coopératif monocritère

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue les concepts de solution les plus utilisés pour un jeu coopératif monocritère. L'un des principaux objectifs de notre travail est de généraliser ces concepts aux jeux multicritères. Nous avons rencontré dans la littérature deux familles de concepts de solution :

1. des concepts définis directement à l'aide de la forme stratégique du jeu ;
2. des concepts définis à l'aide de la forme coalitionnelle du jeu.

Pour les concepts appartenant à la seconde famille, notre contribution sera double : exprimer ces concepts directement à l'aide de la forme stratégique du jeu, et généraliser la forme obtenue du concept au cas multicritère.

2.1 Forme stratégique et forme coalitionnelle d'un jeu coopératif

2.1.1 Jeux coopératifs sous forme stratégique

Un jeu est dit sous forme stratégique, ou normale, si on dispose des éléments suivants :

1. un ensemble non vide $\mathcal{N}$ de joueurs ;
2. un ensemble X_j de stratégies pour tout joueur $j \in \mathcal{N}$;
3. pour tout $j \in \mathcal{N}$, on associe une fonction de gain $f_j : X = \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ définissant pour chaque situation $x \in X$ du jeu le gain du joueur j.

Ainsi, on notera un jeu sous forme normale par :

$$J = \langle \mathcal{N}, \{X_j\}_{j \in \mathcal{N}}, \{f_j\}_{j \in \mathcal{N}} \rangle. \tag{2.1}$$

Dans un jeu coopératif, les joueurs peuvent former des coalitions visant à améliorer les gains de leurs membres. Une coalition est une partie non vide de $\mathcal{N}$. Donc pour définir un jeu coopératif, on doit préciser, non seulement les stratégies de chaque joueur, mais également les stratégies dont disposerait chaque coalition possible. Dans le cas général, l'ensemble des stratégies d'une coalition n'est pas la simple combinaison des stratégies individuelles de ses membres. Une coalition peut avoir des perspectives d'action plus riches. On aura alors la définition suivante.

Définition 2.1. [31] Un jeu coopératif sous forme stratégique est un triplet

$$\langle \mathcal{N}, \{X_S\}_{\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}}, \{f_j\}_{j \in \mathcal{N}} \rangle \tag{2.2}$$

qui a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{N}$ est un ensemble fini non vide de joueurs ;
2. à toute coalition $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$, on associe un ensemble non vide X_S contenant les stratégies de la coalition S ;
3. si $\emptyset \neq S, T \subseteq \mathcal{N}$ avec $S \cap T = \emptyset$, alors $X_{S \cup T} \supseteq X_S \times X_T$;
4. on associe à tout joueur $j \in \mathcal{N}$, une fonction des gains $f_j : X_{\mathcal{N}} \to \mathbb{R}$.

2.1.2 Jeux coopératifs sous forme coalitionnelle

Puisque en dernier ressort, ce sont les paiements qu'ils obtiendraient à l'issue du jeu qui intéressent les joueurs, on utilise souvent la forme coalitionelle du jeu pour analyser un jeu coopératif. Dans cette forme, on dispose d'une fonction de coalitions qui associe, pour chaque coalition possible, l'ensemble des paiements que cette coalition peut garantir à ses membres. Nous considérons dans notre travail des jeux à gains non transférables, c'est-à-dire que les joueurs ne peuvent pas effectuer des paiements latéraux entre eux. Les paiements d'une coalition S à ses s membres seront donc un vecteur de $\mathbb{R}^s$. Avant d'introduire le notion de jeu sous forme coalitionnelle, considérons certaines propriétés des fonctions de coalitions :

Définition 2.2. Soit V une fonction qui associe à toute coalition $S \subseteq \mathcal{N}$, avec $|S| = s$ membres, un sous-ensemble $V(S)$ de $\mathbb{R}^s$.

1. V est dite compréhensive, si : $\forall S \subseteq \mathcal{N}, \forall x^s, y^s \in \mathbb{R}^s$:
   $(x^s \in V(S) \;\; et \;\; x^s \geqq y^s) \Rightarrow y^s \in V(S)$.
2. V est dite superadditive, si : $\forall S, T \subseteq \mathcal{N} \;\; telles \;\; que \;\; S \cap T = \emptyset$ on a :
   $V(S \cup T) \supseteq V(S) \times V(T)$.

Définition 2.3. [31] Un jeu coalitionnel à gains non transférables est un couple

$$(\mathcal{N}, V), \tag{2.3}$$

où $\mathcal{N}$ est un ensemble fini non vide de joueurs et V une fonction qui associe, à toute coalition $S \subseteq \mathcal{N}$, un sous-ensemble $V(S)$ de $\mathbb{R}^s$, tel que :

$$V(S) \neq \emptyset, \quad si \quad S \neq \emptyset \quad et \quad V(\emptyset) = \emptyset; \tag{2.4}$$

$$la \quad fonction \quad V(S) \quad est \quad comprehensive; \tag{2.5}$$

$$V(S) \quad \text{est fermé}; \tag{2.6}$$

$$V(S) \cap (x^s + \mathbb{R}^s_+) \quad \text{est borné}, \quad \forall x^s \in \mathbb{R}^s. \tag{2.7}$$

Commentaires

- La condition (2.4) signifie que toute coalition peut garantir un certain gain pour ses membres. $\emptyset$ ne représente pas une coalition.
- Il est naturel d'exiger qu'une fonction de coalition soit compréhensive : si une coalition peut garantir à ses membres au moins un vecteur de paiements α, et si $\alpha \geqq \beta$, alors il va de soit qu'elle peut leur garantir des paiements au moins aussi bons que ceux du vecteur β.
- La fermeture de $V(S)$ est une condition topologique qui nous aide à établir certains résultats.
- La condition (2.7) signifie qu'il ne peut y'avoir de paiements infinis.

Nous allons maintenant reformuler les exigences de rationalité individuelle et collective à l'aide de la forme coalitionnelle du jeu.

Définition 2.4. Soit

$$v_i = \max\{a \in \mathbb{R} \ \ tel \ \ que \ \ a \in V(\{i\})\}.$$

Un vecteur de paiements $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ est individuellement rationnel si :

$$a_i \geqq v_i, \quad \forall i \in \mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}.$$

$a \in \mathbb{R}^n$ est collectivement rationnel, si $\forall b \in V(\mathcal{N}) : b \ngeqq a$.

2.1.3 Relation entre la forme stratégique et la forme coalitionnelle d'un jeu

Dans notre travail, nous sommes concernés par la résolution de jeux sous forme stratégique. Il existe cependant des concepts de solution qui sont définis pour la forme coalitionnelle d'un jeu. Si on veut exploiter de tels concepts, nous devons dériver une forme coalitionnelle du jeu à partir de sa forme stratégique. L'objet de la présente section est de montrer comment on peut réaliser un tel lien. Nous aurons besoin des notions de α-efficacité et β-efficacité.
Considérons le jeu coopératif sous forme stratégique (2.2). Soit $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$ une coalition avec $|S| = s$ membres. On adoptera la notation suivante : Si x est une situation du jeu, c'est-à-dire un vecteur à n composantes dont la composante x_j est la stratégie du joueur j. On écrira : $x = (x_S, x_{-S})$ où :

- x_S est un vecteur à s composantes représentant les stratégies des membres de la coalition S.
- x_{-S} est un vecteur à $n - s$ composantes représentant les stratégies du reste des joueurs.

On a alors $x_S \in X_S$ et $x_{-S} \in X_{-S}$, avec :

- $X_S = \prod\limits_{j \in S} X_j$ est l'ensemble des stratégies de la coalition S.
- $X_{-S} = \prod\limits_{j \in \mathcal{N}, j \notin S} X_j$ est l'ensemble des stratégies de la coalition contenant les joueurs n'appartenant pas à S.

Définition 2.5. Une coalition S est α-effective pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^s$, s'il existe $x_S \in X_S$ telle que :

$$\forall x_{-S} \in X_{-S}, \qquad f_j(x_S, x_{-S}) \geqq v_j, \quad \forall j \in S.$$

Donc, une coalition est α-effective pour $v \in \mathbb{R}^s$, si elle peut garantir pour chacun de ses membres un paiement au moins égal à celui qui lui est imparti dans v, quelle que soit la stratégie de la coalition du reste des joueurs.

Définition 2.6. Une coalition S est β-effective pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^s$, si :

$$\forall x_{-S} \in X_{-S}, \ \ \exists \ \ x_S \in X_S, \ \text{telle que :} \ f_j(x_S, x_{\mathcal{N} \setminus S}) \geqq v_j, \quad \forall j \in S.$$

Une coalition S est β-effective pour $v \in \mathbb{R}^s$, si la contre coalition $\mathcal{N} \setminus S$ ne peut l'empêcher d'obtenir pour chacun de ses membres un paiement au moins égal à celui qui lui est imparti dans v.
On peut à présent construire les deux fonctions de coalitions V_α et V_β définies par :

$$V_\alpha(S) = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^s \ \ tel\ que\ S\ est\ \alpha - effective\ pour\ v\}\ pour\ \emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}, \\ \emptyset, \quad si \ \ S = \emptyset. \end{cases} \tag{2.8}$$

$$V_\beta(S) = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^s \ \ tel\ que\ S\ est\ \beta - effective\ pour\ v\}\ pour\ \emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}, \\ \emptyset, \quad si \ \ S = \emptyset. \end{cases} \tag{2.9}$$

On a la proposition suivante :

Proposition 2.1. *[31] Considérons le jeu coopératif sous forme stratégique (2.2). Supposons que X_S est un espace métrique compact pour tout $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$, f_j est une fonction continue pour tout $j \in \mathcal{N}$ et que les fonctions V_α et V_β soient définies par (2.8)et (2.9) respectivement. Alors, on a :*

1. *$V_\alpha(S) \neq \emptyset, \quad \forall \emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$;*
2. *V_α est compréhensive et $V_\alpha(S)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^s$ pour tout $S \subseteq \mathcal{N}$;*
3. *$\forall S \subseteq \mathcal{N}, \quad \exists y^S \in \mathbb{R}^s \ \ tel \ \ que \ \ : \forall x^S \in V_\alpha(S), \quad y^S \geqq x^S$;*
4. *$V_\beta(S) \neq \emptyset, \quad \forall \emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$;*
5. *V_β est compréhensive et $V_\beta(S)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^s$ pour tout $S \subseteq \mathcal{N}$;*
6. *$\forall S \subseteq \mathcal{N}, \quad \exists y^S \in \mathbb{R}^s \ \ tel \ \ que \ \ : \forall x^S \in V_\beta(S), \quad y^S \geqq x^S$.*

La proposition 2.1 nous garantit que les deux fonctions V_α et V_β vérifient les conditions requises dans la définition 2.3 pour une fonction de coalitions.

Conséquence 2.1. *Sous les hypothèses de la proposition 2.1, on peut associer au jeu coopératif sous forme stratégique (2.2) deux jeux sous coopératifs sous forme coalitionnelle :*

$$(\mathcal{N}, V_\alpha) \tag{2.10}$$

ou

$$(\mathcal{N}, V_\beta). \tag{2.11}$$

2.2 Concepts de solution

2.2.1 Concepts de solution définis directement sur la forme stratégique :

Préliminaires

Considérons le jeu coopératif sous forme stratégique (2.2). On notera par $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ le vecteur de paiements correspondant à l'issue $x \in X = \prod_{i \in \mathcal{N}} X_i$ du jeu.

Les concepts de solution d'un jeu coopératif doivent tenir compte du fait que les joueurs peuvent former des coalitions pour améliorer leurs gains. Avant de considérer les concepts de solution proprement dits, nous allons introduire les notions de rationalité individuelle et de rationalité collective.

Définition 2.7. Une stratégie $\overline{x}_j \in X_j$ est dite stratégie prudente ou stratégie maximin du joueur j dans le jeu (2.1), si :

$$\inf_{x_{-j} \in X_{-j}} f_j(\overline{x}_j, x_{-j}) = \sup_{x_j \in X_j} \inf_{x_{-j} \in X_{-j}} f_j(x_j, x_{-j}) = v_j^G.$$

Le gain v_j^G est le gain minimum garanti du joueur j. Il est sûr d'obtenir au moins ce gain s'il emploie une stratégie prudente. Un joueur rationnel ne peut accepter une issue du jeu qui lui donne un gain inférieur à son gain minimum garanti. Ceci justifie la définition suivante :

Définition 2.8. Une issue $\overline{x} \in X$ du jeu (2.1) est dite individuellement rationnelle, si :

$$f_j(\overline{x}) \geqq v_j^G, \quad \forall j \in \mathcal{N}.$$

Si une issue du jeu améliore les gains de certains joueurs sans diminuer celui des autres joueurs, alors il serait raisonnable de recommander aux joueurs d'adopter cette issue. Ceci nous conduit à définir la notion de rationalité collective.

Définition 2.9. Une issue $\overline{x} \in X$ est dite collectivement rationnelle, si elle est maximale de Pareto dans le problème multicritère $\langle X, f \rangle$.

Concept du k-Equilibre

D'après ce concept, une situation du jeu est considérée comme équilibre si aucune coalition de k joueurs ne peut améliorer les gains de ses membres en déviant de cette situation. Ceci se traduit par la définition suivante.

Définition 2.10. Une situation $\overline{x} \in X$ est un k-équilibre du jeu (2.2), si :
$\forall K \subseteq \mathcal{N}$ *avec* $|K| = k, \nexists\, y_K \in X_K$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in K : f_i(y_k, \overline{x}_{-K}) \geqq f_i(\overline{x}); \\ \\ \exists j \in K : f_j(y_k, \overline{x}_{-K}) > f_j(\overline{x}). \end{cases}$$

Remarque 2.1. *Le k-équilibre est une généralisation de l'équilibre de Nash. En effet, en prenant $k = 1$ dans la définition 2.10, on obtient :*
une situation $\overline{x}$ est un 1-équilibre du jeu (2.2), si :

$$\forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall y_i \in Xi, \;\; f_i(y_i, \overline{x}_{-i}) \leqq f_i(\overline{x}).$$

Cette dernière expression n'est autre que la définition d'un équilibre de Nash du jeu (2.1).

Concept de l'équilibre Pareto fort

Ayant défini le k-équilibre pour $k \in \{1, .., n\}$, il est naturel de s'intéresser aux situations qui sont un k-équlibre pour tout k. Aucune coalition, quel que soit le nombre de ses joueurs, n'a intérêt à dévier d'une telle situation, si le reste des joueurs ne dévient pas. On obtient l'équilibre Pareto fort du jeu (2.2), introduit par Aumann en 1959 :

Définition 2.11. Une situation $\overline{x} \in X$ est un équilibre Pareto fort du jeu (2.2), si :
$\forall K \subseteq \mathcal{N}, \nexists y_K \in X_K$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in K : f_i(y_k, \overline{x}_{-K}) \geqq f_i(\overline{x}); \\ \\ \exists j \in K : f_j(y_k, \overline{x}_{-K}) > f_j(\overline{x}). \end{cases}$$

Propriété 2.1.

1. *Un équilibre Pareto fort du jeu (2.2) est un équilibre de Nash du jeu (2.1). En effet, puisque un équilibre Pareto fort est un k-équilibre pour tout $k \in \{1..., n\}$, alors c'est un 1-équilibre du jeu, ce qui revient à dire que c'est un équilibre de Nash du jeu (2.1).*
2. *Un équilibre Pareto fort du jeu (2.2) est une issue collectivement rationnelle. En effet, en prenant dans la définition 2.11 : $K = \mathcal{N}$, on déduit qu'il n'existe pas de stratégie pour la grande coalition $\mathcal{N}$ qui améliore les gains des joueurs, avec une amélioration stricte pour au moins un joueur, par rapport aux gains de l'équilibre Pareto fort.*

Concept de l'équilibre Slater fort

Si une situation $\overline{x} \in X$ est un équilibre Pareto fort du jeu (2.2), alors il n'existe pas de coalition qui, en déviant unilatéralement de $\overline{x} \in X$, pourrait améliorer les gains de certains de ses membres en gardant les gains des autres membres au moins au même niveau. On voit mal cependant pourquoi un joueur accepterait de dévier de $\overline{x}$, si son gain à lui restera inchangé après la déviation. Ceci justifie la définition d'un autre concept de solution : l'équilibre Slater fort du jeu. Avec ce concept, on ne considère que les coalitions qui peuvent améliorer strictement le gain de chacun de leurs membres.

Définition 2.12. Une situation $\overline{x} \in X$ est un équilibre Slater fort du jeu (2.2), si :

$$\forall K \subseteq \mathcal{N}, \nexists y_K \in X_K \text{ tel que } f_j(y_k, \overline{x}_{-K}) > f_j(\overline{x}),\ \forall j \in K.$$

Propriété 2.2. *L'équilibre Slater fort vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Un équilibre Slater fort est un équilibre de Nash du jeu (2.1).*
2. *Un équilibre Slater fort est une solution faiblement efficace du problème multicritère $\langle X, f\rangle$.*
3. *Tout équilibre Pareto fort du jeu (2.2)est un équilibre Slater fort pour le même jeu.*

Concept du Z-équilibre

La stabilité des concepts de solution présentés jusqu'ici repose sur le fait que dévier de l'équilibre n'apporterait aucun gain si le reste des joueurs gardent leurs stratégies d'équilibre. La stabilité du concept qu'on va présenter dans ce paragraphe, et celle des concepts suivants, découle du fait qu'en cas de déviation, le reste des joueurs peut faire en sorte que le ou les joueurs qui dévient ne gagneraient pas plus qu'ils n'auraient gagné s'ils étaient restés à l'équilibre. Le Z-équilibre a été introduit par Zhukovskii [41] en 1980.

Définition 2.13. [41] Une situation $\overline{x} \in X$ est un Z-équilibre du jeu (2.2), si :

1. $\forall j \in \mathcal{N},\quad \forall x_j \in X_j,\quad \exists x_{-j} \in X_{-j} : f_j(x_j, x_{-j}) \leqq f_j(\overline{x})$;
2. $\overline{x}$ est Pareto optimale, c-à-d : $\forall x \in X,\quad f(x) \ngeq f(\overline{x})$.

En plus d'être une issue collectivement rationnelle du jeu (2.2), comme le stipule la deuxième condition dans la définition ci-dessus, le Z-équilibre est individuellement rationnel. En effet, comme $\forall j \in \mathcal{N},\quad \forall x_j \in X_j,\quad \exists x_{-j} \in X_{-j} : f_j(x_j, x_{-j}) \leqq f_j(\overline{x})$, alors

$$\forall j \in \mathcal{N}, \forall x_j \in X_j : \underset{x_{-j} \in X_{-j}}{Inf}\ f_j(x_j, x_{-j}) \leqq f_j(\overline{x}),$$

d'où

$$\forall j \in \mathcal{N} :\ \underset{x_j \in X_j}{Sup}\ \ \underset{x_{-j} \in X_{-j}}{Inf}\ f_j(x_j, x_{-j}) \leqq f_j(\overline{x}).$$

Le théorème suivant donne des conditions d'existence du Z-équilibre :

Théorème 2.1. *Supposons :*

1. *Les ensembles $X_j, j \in \mathcal{N}$ sont non vides et compacts,*
2. *Les fonctions $f_j, j \in \mathcal{N}$ sont continues,*

alors le jeu (2.2) possède au moins un Z-équilibre.

Concept du α-noyau

Le α-noyau a été introduit par Aumann [1] en 1961. C'est un ensemble d'issues qui possèdent la propriété d'empêcher la formation des coalitions. Si une issue x est dans le α-noyau et si un certain nombre de joueurs envisagent de former une coalition et dévier de x, alors le reste des joueurs possèdent au moins une stratégie qui va dissuader au moins un membre de la coalition envisagée d'y faire partie, car il ne pourra pas obtenir plus. Par conséquent, cette coalition ne se formera pas. De façon formelle, on a la définition suivante :

Définition 2.14. On appelle α-noyau du jeu (2.2) l'ensemble des issues $\overline{x} \in X$ vérifiant la propriété suivante :
Pour toute coalition $K \subseteq \mathcal{N}$, $\forall x_K \in X_K, \exists y_{-K} \in X_{-K}$ telle que le système suivant :

$$\forall i \in K,\ f_i(x_K, y_{-K}) > f_i(\overline{x})$$

n'est pas vérifié.

Remarque 2.2. *Dans la définition (2.19), nous adoptons la convention suivante : la coalition vide possède une seule stratégie : ne rien faire, et lorsque $K = \mathcal{N}$ dans (2.19), le vecteur (x_K, y_{-K}) est identifié avec (x_K). Le résultat est que les situations $x \in X$ telle que $f(x)$, le vecteur des paiements de tous les joueurs, n'est pas faiblement efficace, sont éliminées du α-noyau du jeu (2.2). Nous garderons cette convention tout au long de notre travail.*

Propriété 2.3. *Les issues du α-noyau du jeu (2.2) sont individuellement rationnelles.*

En effet, soit $\overline{x}$ une issue dans le α-noyau du jeu (2.2). Supposons que $\overline{x}$ n'est pas individuellement rationnelle. Alors $\exists i \in \mathcal{N}$ tel que : $f_i(\overline{x}) < \underset{x_i \in X_i}{Sup} \ \underset{x_{-i} \in X_{-i}}{Inf} \ f_i(x_i, x_{-i})$.
Si $\widetilde{x}_i$ est une stratégie prudente du joueur i alors $f_i(\widetilde{x}_i, x_{-i}) > f_i(\overline{x}) \ \ \forall x_{-i} \in X_{-i}$. Donc il existe une coalition $K = \{i\}$ et une stratégie $x_K = \widetilde{x}_i \in K$ telles que la coalition $\mathcal{N} \setminus \{i\}$ ne possède aucune stratégie pour empêcher i d'améliorer son gain en déviant de $\overline{x}_i$, ce qui contredit l'hypothèse que $\overline{x}$ est dans le α-noyau du jeu.

Le théorème suivant donne des conditions qui assurent que le α-noyau du jeu (2.2) n'est pas vide.

Théorème 2.2. *[34] Supposons que dans le jeu (2.2) on a :*

1. *$\forall j \in \mathcal{N}$, X_j un sous-ensemble non vide, convexe et compact d'un espace vectoriel de dimension finie,*
2. *$\forall j \in \mathcal{N}$, f_j continue et quasi-concave,*

alors, le α-noyau du jeu (2.2) n'est pas vide.

Remarque 2.3. *Le α-noyau a suscité depuis son introduction l'intérêt des théoriciens des jeux. Il possède cependant l'inconvénient suivant : il se peut que la stratégie de dissuasion y_{-K} dont dispose la coalition $-K$ conduise à des résultats catastrophiques pour cette coalition, ce qui l'empêchera de l'utiliser. Cet inconvénient a été mis en évidence par Scarf en 1971.*

Concept du $S\alpha$-noyau

Pour introduire ce concept de solution, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 2.15. Soit une $K \subsetneq \mathcal{N}$ et $x \in X$ une situation du jeu (2.2). On dira que la coalition K menace la situation x dans le jeu (2.2), si :

$$\exists y_K \in X_K \text{ telle que } \forall y_{-K} \in X_{-K}, \text{ on a :}$$
$$\begin{cases} \forall i \in K : f_i(y_K, y_{-K}) \geqq f_i(x); \\ \\ \exists j \in K : f_j(y_K, y_{-K}) > f_j(x). \end{cases}$$

Nous dirons que $\mathcal{N}$ menace x, si x n'est pas Pareto optimale dans le jeu (2.2).

Si une coalition K menace une issue x avec une stratégie $y_K \in X_K$, alors les éléments de K ont intérêt à former la coalition K et à adopter la stratégie y_K au lieu de x_K. Donc x ne peut être une issue finale du jeu. Ceci justifie la définition suivante :

Définition 2.16. Le $S\alpha$-noyau du jeu (2.2) est l'ensemble des issues $x \in X$ qu'aucune coalition ne menace.

Remarque 2.4. *Le $S\alpha$-noyau d'un jeu (2.2) est un sous-ensemble de son α-noyau.*

En effet, si une issue $x \in X$ n'est pas dans le α-noyau du jeu (2.2), alors le système :

$$\begin{cases} \forall i \in K, \ f_i(x_K, y_{-k}) \geqq f_i(\overline{x}), \\ \\ \exists j \in K, \ f_j(x_K, y_{-K}) > f_j(\overline{x}), \end{cases}$$

possède une solution (K, x_K) quelle que soit la stratégie y_{-K} du reste des joueurs. La coalition K menace alors x. Donc x n'est pas dans le $S\alpha$-noyau du jeu (2.2).

Le $S\alpha$-noyau est donc un raffinement du α-noyau. Il regroupe les éléments les plus stables du α-noyau.

Propriété 2.4. *Les issues appartenant au $S\alpha$-noyau sont individuellement et collectivement rationnelles.*

Concept du β-noyau

Dans ce paragraphe, nous allons présenter un autre raffinement du α-noyau. Si une coalition K veut dévier d'une issue x qui est dans le α-noyau du jeu, en adoptant une stratégie x_K, alors le reste des joueurs possède une stratégie y_{-K} qui va dissuader au moins un membre de ladite coalition d'y adhérer. Cette stratégie va dépendre, dans le cas général de x_K. Mais pratiquement, si un ensemble de joueurs projette de constituer une coalition K pour dévier de x, le reste des joueurs ne pourra pas deviner quelle stratégie x_K les membres de K vont-ils utiliser, et, par conséquent, ne sauront pas quelle stratégie y_{-K} utiliser pour contrer la formation de K. Ils ont intérêt alors à regarder s'ils disposent d'une stratégie y_{-K} qui va les aider à contrer K indépendamment de x_K. Les issues x possédant cette propriété constituent le β-noyau.

Définition 2.17. Le β-noyau du jeu (2.2) est l'ensemble des issues $\overline{x} \in X$ vérifiant :
$\forall K \subsetneq \mathcal{N}, \quad \exists y_{-K} \in X_{-K}$ telle que $\nexists x_K \in X_K$ qui vérifie le système :

$$\begin{cases} \forall i \in K : f_i(x_K, y_{-K}) \geqq f_i(\overline{x}) \\ \\ \exists j \in K : f_j(x_K, y_{-K}) > f_j(\overline{x}) \end{cases}$$

2.2.2 Concepts de solutions d'un jeu sous forme coalitionelle

Dans cette partie, on considère les jeux sous forme coalitionnelle (2.10) et (2.11) associés au jeu coopératif sous forme stratégique (2.2). Quand on ne veut pas distinguer entre les jeux (2.10) et (2.11), on parlera du jeu (2.3).

Concept du noyau

Pour introduire ce concept, nous allons définir la relation de domination via une coalition. Considérons le jeu coopératif sous forme coalitionnelle (2.3) associé au jeu coopératif sous forme stratégique (2.2). Si $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$ est une coalition et $a \in \mathbb{R}^n$, alors on note par a_S le vecteur obtenu de a en ne considérant que les composantes de a représentant les paiements des éléments de S. Si $|S| = s$, alors $a_S \in \mathbb{R}^s$.

Définition 2.18. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$ une coalition. On dira que b domine a via S, si $b_S \in V(S)$ et $b_S > a_S$.
On dira que b domine a, s'il existe une coalition S telle que b domine a via S.

On peut alors énoncer la définition suivante :

Définition 2.19. Le noyau[1] du jeu $(\mathcal{N}, V)$ est l'ensemble :
$C(\mathcal{N}, V) = \{a \in V(\mathcal{N})$ tel que : a n'est dominé par aucun vecteur de $\mathbb{R}^n\}$.

Les éléments du noyau ont une chance assez forte de représenter les paiements qu'auront les joueurs à l'issue du jeu. Aucune coalition n'a intérêt à se former, car elle ne garantirait pas à tous ses membres des paiements supérieurs à ceux qui leurs sont impartis par un élément du noyau.

On peut définir certaines variantes du noyau d'un jeu (2.3). Si on a certaines raisons qui nous font croire que la répartition finale des gains doit appartenir à un certain ensemble A, l'ensemble des répartitions Pareto-optimales par exemple, alors on doit considérer la relation de dominance à l'intérieur de A uniquement. On aura la définition suivante :

Définition 2.20. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$. Le noyau $C(\mathcal{N}, V, A)$ de A relativement au jeu $(\mathcal{N}, V)$ est l'ensemble :
$C(\mathcal{N}, V, A) = \{a \in A$ tel que : a n'est dominé par aucun élément de $A\}$.

Il est intéressant de considérer les trois cas suivants :

1.) $A = V(\mathcal{N})_e$: l'ensemble des éléments faiblement efficaces de $V(\mathcal{N})$.
2.) $A = V(\mathcal{N})_{ir}$: l'ensemble des éléments individuellement rationnels de $V(\mathcal{N})$.
3.) $A = V(\mathcal{N})_{e,ir}$: l'ensemble des éléments faiblement efficaces et individuellement rationnels de $V(\mathcal{N})$.

On alors le théorème suivant :

Théorème 2.3. *[31] Si la fonction de coalitions V du jeu (2.3) est superadditive, alors :*

$$C(\mathcal{N}, V) = C(\mathcal{N}, V, V(\mathcal{N})_e) = C(\mathcal{N}, V, V(\mathcal{N})_{ir}) = C(\mathcal{N}, V, V(\mathcal{N})_{e,ir}).$$

Ce théorème vient ajouter une propriété intéressante aux éléments du noyau $C(\mathcal{N}, V)$, lorsque V est superadditive. En effet, en plus du fait qu'ils ne sont dominés par aucun vecteur de $\mathbb{R}^n$, ils sont faiblement efficaces et individuellement rationnels.

Remarque 2.5. *On peut montrer que la fonction V_α, définie par (2.8) à partir de la forme stratégique du jeu, est superadditive.*

Les issues du noyau sont intéressantes vues les propriétés qu'elles possèdent. Il faut cependant s'assurer que de telles issues du jeu existent, c'est-à-dire que le noyau $C(\mathcal{N}, V) \neq \emptyset$. L'objectif du prochain point est de donner une condition suffisante pour que le noyau du jeu (2.3)ne soit pas vide.

1. The core en anglais

Jeux balancés

Considérons un jeu (2.3).

Définition 2.21. On associe à chaque coalition $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$ son vecteur caractéristique $\chi_S \in \mathbb{R}^n$ défini par : $\chi_S(i) = \begin{cases} 1 & si \quad i \in S, \\ 0 & sinon. \end{cases}$

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{P}$ une famille de parties de $\mathcal{N}$. Alors :*
$\mathcal{P}$ est une partition de $\mathcal{N}$ si et seulement si $\sum_{S \in \mathcal{P}} \chi_S = \chi_{\mathcal{N}}$

L'équivalence qui est dans la proposition nous suggère une généralisation de la notion de partition.
On appelle un système de poids sur $\mathcal{P}$ une famille de nombres strictement positifs $(\delta_S)_{S \in \mathcal{P}}$.

Définition 2.22. une famille $\mathcal{P}$ de parties de $\mathcal{N}$ est dite balancée sur $\mathcal{N}$, s'il existe un système de poids $(\delta_S)_{S \in \mathcal{P}}$ tel que :

$$\sum_{S \in \mathcal{P}} \delta_S \chi_S = \chi_{\mathcal{N}}.$$

En prenant dans la définition précédente le système de poids $\delta_S = 1, \quad \forall S \in \mathcal{P}$, on obtient une partition de $\mathcal{P}$. Une famille balancée est donc bien une généralisation de la notion de partition. On va considérer à présent un concept encore plus général qui est la notion de famille π-balancée.

Définition 2.23. Une famille permissible sur $\mathcal{N}$ est une famille $(\pi_S)_{\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\forall \emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N} : \pi_S \geq 0$, $\pi_S^{\mathcal{N} \setminus S} = 0$ et $\pi_{\mathcal{N}} > 0$.

Remarque 2.6. *Rappelons que $\pi_S^{\mathcal{N} \setminus S}$ est le vecteur obtenu de π_S en considérant uniquement les composantes correspondantes aux joueurs de la coalition $\mathcal{N} \setminus \mathcal{S}$.*

Remarque 2.7. *La famille $(\chi_S)_{\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}}$ de la définition 2.21 est une famille permissible sur $\mathcal{N}$.*

Définition 2.24. Soit $(\pi_S)_{\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}}$ une famille permissible sur $\mathcal{N}$. Une famille $\mathcal{P}$ de parties de $\mathcal{N}$ est π-balancée s'il existe un système de poids $(\delta_S)_{S \in \mathcal{P}}$ tel que

$$\sum_{S \in \mathcal{P}} \delta_S \pi_S = \pi_{\mathcal{N}}.$$

Remarque 2.8. *Une famille balancée est une famille π-balancée par rapport à la famille permissible $(\pi_S)_{\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}}$ définie par $\pi_S = \chi_S, \quad \forall \emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$.*

Considérons de nouveau le jeu $(\mathcal{N}, V)$. Pour tout $S \subseteq \mathcal{N}$, définissons l'ensemble : $V_S = V(S) \times \mathbb{R}^{\mathcal{N} \setminus S}$.

Définition 2.25. Le jeu (2.3) est balancé, si

$$\bigcap_{S\in\mathcal{P}} V(S) \subseteq V(\mathcal{N}) \tag{2.12}$$

pour toute famille balancée $\mathcal{P}$ de coalitions.
Le jeu (2.3) est dit π-balancé, si (2.18) est vérifiée pour toute famille π-balancée de coalitions.

Scarf [34] a montré en 1967 que tout jeu balancé possède un noyau non vide. Le résultat suivant, du à Billera, est plus général :

Théorème 2.4. *[4] Soit une famille $(\pi_S)_{\emptyset\neq S\subseteq\mathcal{N}}$ permissible sur $\mathcal{N}$. Si le jeu (2.3) est π-balancé, alors $C(\mathcal{N},V)\neq\emptyset$.*

Le noyau d'un jeu coopératif sous forme stratégique

.

Vu que nous sommes intéressés par des jeux sous forme stratégique, on devrait donner une interprétation stratégique du concept du noyau d'un jeu coopératif sous forme coalitionelle, c'est-à-dire, exprimer ce concept à l'aide de la forme stratégique du jeu. Considérons donc le jeu coopératif sous forme stratégique (2.2) et considérons le jeu coalitionnel à gains non transférables (2.3) qui lui est associé. Tout vecteur de paiements $a\in\mathbb{R}^n$ résulte d'un profil de stratégies $x\in X_{\mathcal{N}}$. On a $a=f(x)$. Notre concept de solution sera un ensemble $E\subseteq X$ vérifiant l'équivalence :

$$x\in E \Leftrightarrow f(x)\in C(\mathcal{N},V).$$

L'ensemble E dépendra de la fonction de coalitions V. On étudiera les deux cas des fonctions V_α et V_β définies respectivement par (2.8) et (2.9).

Cas où : $V=V_\alpha$

En transposant le concept de noyau pour le jeu $(\mathcal{N},V_\alpha)$, on retombe sur le concept de α-noyau défini dans la section (2.1.3). En effet on a la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Soit $x\in X_{\mathcal{N}}$. On a :*
x est dans le α-noyau du jeu (2.2) $\Leftrightarrow f(x)\in C(\mathcal{N},V_\alpha)$.

Preuve. *Démontrer la proposition 2.3 revient à montrer :*
$x\in X_{\mathcal{N}}$ n'est pas dans le α-noyau du jeu (2.2) $\Leftrightarrow f(x)\notin C(\mathcal{N},V_\alpha)$.
$\Rightarrow$
Supposons que x n'est pas dans le α-noyau du jeu (2.2), alors, par définition 2.19, on a :

$$\exists K \subseteq \mathcal{N},\ \exists \overline{z}_K \in X_K,\ f_i(\overline{z}_K, z_{-K}) > f_i(x),\ \forall z_{-K} \in X_{-K}, \forall i \in K. \tag{2.13}$$

Comme, $\forall i \in K$*, la fonction* $f_i(\overline{z}_K, \cdot) : X_{-K} \to R$ *est continue sur le compact* X_{-K}*, alors, pour tout* $i \in K$*, il existe* $\widetilde{Z}^{(i)}_{-K} \in X_{-K}$ *tel que*

$$\inf_{z_{-K} \in X_{-K}} f_i(\overline{z}_K, z_{-K}) = f_i(\overline{z}_K, \widetilde{z}^{(i)}_{-K}). \tag{2.14}$$

Posons

$$\widetilde{u}_i = \begin{cases} f_i(\overline{z}_K, \widetilde{z}^{(i)}_{-K}), & \forall i \in K\ ; \\ 0, & \textit{sinon}. \end{cases}$$

Démontrons maintenant que

$$f(x) \notin C(\mathcal{N}, V_\alpha).$$

On a

$$f(x) \in C(\mathcal{N}, V_\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in V_\alpha(\mathcal{N}) & \textit{et} \\ f(x) & \textit{n'est dominé par aucun vecteur de } R^n. \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$f(x) \notin C(\mathcal{N}, V_\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \notin V_\alpha(\mathcal{N}) & \textit{ou} \\ f(x) & \textit{est dominé par un vecteur de } R^n. \end{cases} \tag{2.15}$$

Montrons que

$$\widetilde{u}_K = (\widetilde{u}_i)_{i \in K} \in V_\alpha(K),$$

où K *est la coalition dont l'existence est supposée dans l'équation (2.13).*

On a $\widetilde{u}_K \in R^k$ *et montrons que la coalition* K *est* α*-effective pour* $\widetilde{u}_K$*. Considérons le vecteur* $\overline{z}_K \in X_K$ *défini dans (2.13). On a*

$$f_i(\overline{z}_K, z_{-K}) \geq \inf_{z_{-K} \in X_{-K}} f_i(\overline{z}_K, z_{-K}) = \widetilde{u}_i,\ \ \forall z_{-K} \in X_{-K}, \forall i \in K, \tag{2.16}$$

ce qui signifie, par définition 2.26, que la coalition K *est* α*-effective pour le vecteur* $\widetilde{u}_K$*, et, par définition de* $V_\alpha(K)$*, on déduit que* $\widetilde{u}_K \in V_\alpha(K)$*.*

D'après (2.13) et (2.16), on déduit :

$$\widetilde{u}_i = \inf_{z_{-K} \in X_{-K}} f_i(\overline{z}_K, z_{-K}) > f_i(x),\ \ \forall i \in K. \tag{2.17}$$

Ainsi, on a trouvé une coalition K*, un vecteur* $\widetilde{u} \in R^n$ *qui domine* $f(x)$ *via la coalition* K*, ce qui signifie, par definition 2.19, le vecteur* $f(x) \notin C(\mathcal{N}, V_\alpha)$*.*

$\Leftarrow$

Supposons à présent que $f(x) \notin C(\mathcal{N}, V_\alpha)$*. D'après (2.15), on a soit* $f(x) \notin V_\alpha(\mathcal{N})$*, soit* $f(x)$ *est dominé par un vecteur de* R^n*.*

On a $x_{\mathcal{N}} \in X_{\mathcal{N}}$ *et on peut vérifier que* $f(x_{\mathcal{N}}) \in V_\alpha(\mathcal{N})$*, ce qui exclut la première éventualité. Par conséquent,* $f(x)$ *est dominé par un certain vecteur* $b \in \mathbb{R}^n$*.*

Alors $\exists K \subseteq \mathcal{N}$*,* $\exists b \in \mathbb{R}^n$ *avec* $b_K \in V_\alpha(K)$ *tel que :* $b_K > f_K(x)$*.*
Comme $b_K \in V_\alpha(K)$*, alors* $\exists z_K \in X_K$*,* $\forall z_{-K} \in X_{-K}$ *:* $f_K(z_K, z_{-K}) \geqq b_K$*. Il s'en suit que :* $f_K(z_K, z_{-K}) > f_K(x), \quad \forall\ z_{-K} \in X_{-K}$*. Cette dernière inégalité signifie que la situation* x *n'est pas dans le* α*-noyau du jeu (2.2).*

Cas où $V = V_\beta$

Pour la fonction V_β, on aura un résultat analogue :

Proposition 2.4. *Soit* $x \in X_{\mathcal{N}}$*. On a :*
x *est dans le* β*-noyau de* $J \Leftrightarrow f(x) \in C(\mathcal{N}, V_\beta)$*.*

Les deux concepts de solution : α-noyau et β-noyau ne sont donc que l'interprétation d'un même concept qui est le noyau défini pour la forme coalitionnelle du jeu, moyennant des fonctions de coalition différentes. On voit ici l'intérêt de la forme coalitionnelle pour une représentation condensée des concepts de solutions [2] Les deux propositions précédentes nous incitent à se demander si les autres concepts de solutions définis dans la section (**??**) ne sont pas une interprétation, via une fonction de coalition appropriée V du même concept de base : le noyau du jeu [3] (2.3). La fonction V sera définie moyennant une notion générale d'efficacité dont la α-efficacité et la β-efficacité ne sont que des cas particuliers. Nous allons suivre cette idée pour caractériser le S_α-noyau dans le paragraphe suivant.

La stricte α-efficacité

Soit le jeu coopératif sous forme stratégique (2.2). Définissons la notion de stricte α-efficacité.

Définition 2.26. La coalition S est strictement α-effective pour le vecteur $v \in \mathbb{R}^s$ dans le jeu (2.2), si : $\exists\ \ x_S \in X_S$ telle que : $\forall x_{\mathcal{N}\setminus S} \in X_{\mathcal{N}\setminus S}$, $f_i(x_S, x_{\mathcal{N}\setminus S}) > v_i, \quad \forall i \in S$.

Définissons à présent la fonction de coalition $V_{S,\alpha}$ par :

$$V_{S,\alpha}(S) = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^s \text{ tel que } S \text{ est strictement } \alpha - \text{effective pour } v\}, & \text{si } \emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}, \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons alors la proposition suivante :

2. D'ailleurs la démarche poursuivie par Aumann [1] pour introduire ces concepts de solution en 1961 était de définir d'abord le concept pour la forme coalitionnelle, puis de l'interpréter pour la forme stratégique.
3. l'idée est dans [1].

Proposition 2.5. *Soit $x \in X_{\mathcal{N}}$. On a :*
x est dans le $S\alpha$-noyau du jeu (2.2) $\Leftrightarrow f(x) \in C(\mathcal{N}, V_{S,\alpha})$.

La preuve de cette proposition se déduit directement de celle de la proposition 2.3, en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes. On voit donc que le noyau d'un jeu sous forme coalitionnelle est un concept fondamental, ce qui justifie l'intérêt qu'on va lui accorder dans la généralisation des concepts de solution au cas multicritère. La section suivante illustre comment on peut utiliser les résultats d'existence du noyau, énoncés pour la forme coalitionnelle du jeu, afin d'obtenir des résultats d'existence pour le α-noyau exprimés directement à l'aide de la forme stratégique du jeu.

Conditions d'existence

Rappelons le théorème suivant :

Théorème 2.5. *Si le jeu (2.3) est balancé, alors son noyau $C(\mathcal{N}, V)$ n'est pas vide.*

Le jeu (2.3) est balancé, si

$$\bigcap_{S \in \mathcal{P}} V_S \subseteq V(\mathcal{N}) \tag{2.18}$$

pour toute famille balancée $\mathcal{P}$ de coalitions.
Nous allons utiliser ce résultat pour montrer le théorème suivant :

Théorème 2.6. *Soit le jeu coopératif sous forme stratégique (2.2).*
Si :

1. *$\forall i \in \mathcal{N}$, X_i un sous-ensemble non vide, convexe et compact d'un espace vectoriel de dimension finie,*
2. *$\forall i \in \mathcal{N}$, f_i est une fonction continue et quasi-concave,*

alors le α-noyau de J est non vide.

Preuve. *Puisque les ensembles X_i de stratégies des joueurs sont compacts et les fonctions f_i continues, alors on peut définir le jeu sous forme coalitionnelle (2.3) associé au jeu (2.2) selon la proposition 2.1. D'après la proposition 2.3, montrer que le α-noyau du jeu (2.2) est non vide revient à montrer que $C(\mathcal{N}, V_\alpha) \neq \emptyset$.*
D'après le théorème 2.4 : si le jeu $(\mathcal{N}, V_\alpha)$ est balancé, alors $C(\mathcal{N}, V_\alpha) \neq \emptyset$.
Nous allons montrer que, sous les conditions 1 et 2 ci-dessus, le jeu $(\mathcal{N}, V_\alpha)$ est balancé.
Considérons une collection balancée $\mathcal{P}$ de coalitions et une famille de poids $(\delta_S)_{S \in \mathcal{P}}$ strictement positifs vérifiant :

$\sum_{S\in\mathcal{P}} \delta_S \chi_S = \chi_{\mathcal{N}}$.

Montrons que $\bigcap_{S\in\mathcal{P}} V_{\alpha,S} \subseteq V_{\alpha,\mathcal{N}}$.
Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $n = |\mathcal{N}|$, *tel que* $a \in \bigcap_{S\in\mathcal{P}} V_{\alpha,S}$.
Alors :

$$\forall S \in \mathcal{P},\ \exists \sigma_S \in X_S \text{ telle que}:\ \forall \sigma_{\mathcal{N}\setminus S} \in X_{\mathcal{N}\setminus S} : f_i(\sigma_S, \sigma_{\mathcal{N}\setminus S}) \geqq a_i, \forall i \in S. \tag{2.19}$$

σ_s *étant une stratégie de la coalition* S, *on a :* $\sigma_S \in \prod_{i\in S} X_i$. *On peut poser alors* $\sigma_S = (\sigma_{iS})_{i\in S}$.
Soit $i \in \mathcal{N}$. *Comme* $\sum_{S\in\mathcal{P}} \delta_S \chi_S = \chi_{\mathcal{N}}$, *alors* $\sum_{\substack{S\in\mathcal{P}\\ S\ni i}} \delta_S = 1$.
Posons pour le joueur j : $\sigma_j = \sum_{\substack{S\in\mathcal{P}\\ S\ni i}} \delta_S \sigma_{jS}$. *On a* $\sigma_j \in X_j$ *car* X_j *est supposé convexe.*
Posons $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathcal{N}}$. *Comme* $\sigma_j \in X_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$, *on a :* $\sigma \in X_{\mathcal{N}}$.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
f_i(\sigma) &= f_i(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)\\
&= f_i(\sum_{\substack{S\in\mathcal{P}\\ S\ni i}} \delta_S \sigma_{1S}, \sum_{\substack{S\in\mathcal{P}\\ S\ni i}} \delta_S \sigma_{2S}, ..., \sum_{\substack{S\in\mathcal{P}\\ S\ni i}} \delta_S \sigma_{nS})\\
&= f_i(\sum_{\substack{S\in\mathcal{P}\\ S\ni i}} \delta_S (\sigma_{1S}, \sigma_{2S}, ..., \sigma_{nS}))\\
&\geqq \underset{\substack{S\in\mathcal{P}\\ S\ni i}}{Min} f_i(\sigma_{1S}, \sigma_{2S}, ..., \sigma_{nS}) \quad (f_i \ \ quasi-concave)\\
&\geqq f_i(\sigma_{1S^*}, \sigma_{2S^*}, ..., \sigma_{nS^*}) \quad (On \ \ suppose \ \ que \ \ le \ \ min \ \ est \ \ atteint \ \ en \ \ S^* \in \beta, \ \ S^* \ni i)\\
&\geqq a_i(en \ \ utilisant(2.19)).
\end{aligned}$$

Il s'en suit que la grande coalition $\mathcal{N}$ *est* α*-effective pour* a. *Donc* $a \in V_{\alpha,\mathcal{N}}$ $\square$.

Le noyau de négociations

Nous présentons ici un autre concept de solution introduit par Aumann et Machler [2] en 1961 qui est le noyau de négociations. Ce concept repose sur la notion de stabilité des coalitions qui se formeront dans un jeu coopératif. Considérons un jeu coopératif à n joueurs. Un joueur i à l'intérieur d'une coalition auquel on proposera un paiement x_i tentera de convaincre les autres membres de la coalition qu'il mérite un paiement supérieur. Il va faire valoir, pour cela, les opportunités qu'il aura en s'intégrant dans d'autres coalitions. Nous allons formaliser ces notions moyennant quelques définitions.

Définition 2.27. Soit le jeu coopératif 2.3). Une structure coalitionnelle $\mathcal{R}$ est une partition de l'ensemble des joueurs $\mathcal{N}$.

Ici on suppose que les coalitions ont été formées, c'est-à-dire que les joueurs ont été répartis dans des coalitions qui constituent une partition de l'ensemble des joueurs. Un jeu avec une structure coalitionnelle $\mathcal{R}$ sera noté

$$(\mathcal{N}, V, \mathcal{R}). \tag{2.20}$$

Pour $R \in \mathcal{R}$, on représente par $V(R)$ l'ensemble des vecteurs de paiements que R peut garantir à ses membres. Si $a, b \in V(R)$ avec $b > a$, alors la coalition agira de façon à obtenir b pour ses membres. Donc, nous allons nous intéresser à l'ensemble :

$$V(R)_e = \{a \in V(R), \quad tel \quad que \quad \nexists b \in V(R) : b > a\}.$$

On définit l'ensemble

$$\mathfrak{P}(\mathcal{N}, V, \mathcal{R}) = \prod_{R \in \mathcal{R}} V(R)_e$$

des vecteurs de paiements faiblement efficaces compte-tenu de la structure coalitionnelle $\mathcal{R}$.

Soient deux joueurs k et $l \in \mathcal{N}$, $k \neq l$. On définit l'ensemble

$$\mathcal{T}_{k,l} = \{S \subseteq \mathcal{N} \setminus \{l\} \quad telle \quad que \quad k \in S\}$$

des coalitions qui contiennent k et ne contiennent pas l.

Définition 2.28. [31] Considérons le jeu (2.20) avec une structure coalitionnelle $\mathcal{R}$, un vecteur de paiements faiblement efficace $a \in \mathfrak{P}(\mathcal{N}, V, \mathcal{R})$ et deux joueurs $k, l \in R \in \mathcal{R}$, $k \neq l$. Une objection de k contre l en a est un couple (P, b) vérifiant :

1. $P \in \mathcal{T}_{k,l}$;
2. $b \in V(P)$;
3. $b_P > a_P$.

Ainsi, le joueur k possède une objection contre le joueur l en a, s'il peut trouver une coalition P le contenant et qui ne contient pas l, telle que tous ses membres pourront réaliser des gains strictement supérieurs à ceux qui leur sont impartis dans a. Le joueur l doit alors justifier sa part de gain dans le vecteur a en montrant qu'il possède une contre-objection à (P, b).

Définition 2.29. [31] Une contre-objection de l à (P, b) est un couple (Q, c) vérifiant :

1. $Q \in \mathcal{T}_{l,k}$ et $c \in V(Q)$;
2. $c_{Q \setminus P} \geqq a_{Q \setminus P}$;
3. $c_{Q \cap P} \geqq b_{Q \cap P}$.

Le joueur l doit montrer qu'il peut trouver une coalition Q le contenant et ne contenant pas k telle que tous les membres de Q auront des paiements au moins aussi importants que ceux qu'ils auront dans a, et en outre les membres de $Q \cap P$, que k tente de convaincre de former P pour avoir b, ont un paiement dans c au moins égal à celui qu'ils auraient dans b.

Définition 2.30. Une objection (P, b) en a est justifiée, s'il n'y a pas de contre-objection à (P, b).

Définition 2.31. Un vecteur $a \in \mathfrak{P}(\mathcal{N}, V, \mathcal{R})$ est stable s'il n'y a pas d'objection justifiée en a.

Le Pseudo-noyau de négociation du jeu (2.20) est l'ensemble $\mathfrak{PM}(\mathcal{N}, V, \mathcal{R})$ des éléments stables de $\mathfrak{P}(\mathcal{N}, V, \mathcal{R})$.
Les vecteurs de paiements qui ont une chance d'être une répartition finale des gains doivent être également individuellement rationnels (voir la définition 2.4). Soit $\mathfrak{PI}(\mathcal{N}, V, \mathcal{R})$ l'ensembles des vecteurs de paiements individuellement rationnels de $(\mathcal{N}, V, \mathcal{R})$. On a la définition suivante :

Définition 2.32. [31] Le noyau de négociation du jeu (2.20) est l'ensemble

$$\mathfrak{M}(\mathcal{N}, V, \mathcal{R}) = \mathfrak{PM}(\mathcal{N}, V, \mathcal{R}) \cap \mathfrak{PI}(\mathcal{N}, V, \mathcal{R}).$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux concepts de solution pour un jeu coopératif monocritère sous ses deux formes : stratégique et coalitionelle, ainsi que les conditions d'existence qui leur sont associées. Nous avons montré la relation entre le noyau d'un jeu sous forme coalitionnelle et les jeux sous forme stratégiques correspondants : le α-noyau, le β-noyau et le Sα-noyau. Nous allons nous intéresser dans les chapitres suivants aux jeux coopératifs multicritères.

3
La formation de coalitions

Introduction

Dans un jeu où les joueurs peuvent coopérer, deux questions essentielles se posent aux joueurs :

1. Quelles sont les coalitions qui vont se former ?
2. Comment les gains issus de la coopération seront-ils partagés ?

Il convient de remarquer de prime abord que les réponses aux deux questions sont intimement liées : les coalitions qui vont se former sont celles qui assurent à leurs membres les meilleurs gains espérés, et les gains issus du jeu dépendent de la structure coalitionnelle en place, c'est-à-dire des coalitions qui se seraient formées dans la phase de négociations précédant le jeu proprement dit. La plupart des travaux rencontrés dans la littérature se sont concentrés sur la réponse à la deuxième question ; quels seraient les gains des joueurs à l'issue du jeu. Les concepts de solution présentés dans les chapitres précédents tentent de répondre à cette question. Dans cette démarche, la réponse au premier problème est supposée connue. Parfois, on suppose une structure coalitionnelle déjà en place, comme une donnée exogène du modèle. Par exemple, chaque individu se trouve dans une coalition qu'il n'a pas choisie : son appartenance socioculturelle. Si on a des raisons pour croire que la coopération conduit à de meilleurs résultats pour tous les joueurs, on supposera que la grande coalition de tous les joueurs s'est formée. En résumé, les premiers travaux ont tenté de répondre à le deuxième question, en supposant une réponse donnée pour la première. Plus tard, la recherche s'est orientée vers l'explication de la formation des coalitions par des décisions rationnelles des joueurs, et non comme une donnée exogène. Des modèles ont été alors construits pour expliquer la formation de coalitions à travers l'analyse de jeux particuliers, appelés jeux de formation de coalitions. On parle alors de formation endogène de coalitions. Les travaux de Hart et Kurz, [20],[21] (en 1983 et 1984 respectivement), Bloch [6](1996), Ray and Vohra[33] (2001), Thoron [40](2003), sont des exemples des travaux qui visent à expliquer la formation des coalitions par les données endogènes du modèle. L'objet de ce chapitre est de présenter les éléments de base de la formation des coalitions et leurs conditions de stabilité, ainsi que certains modèles de jeux qui tentent de prévoir quelles sont les coalitions qui vont se former dans une situation donnée.

3.1 Conditions de stabilité des coalitions

Il y'a deux propriétés fondamentales, introduites dans [9], que doit avoir une coalition pour jouir de la stabilité :

1. stabilité intérieure : aucun joueur membre de la coalition n'a intérêt à la quitter ;
2. stabilité extérieure : aucun joueur en dehors de la coalition n'a intérêt à la rejoindre.

Pour illustrer l'utilisation de ces conditions pour prévoir les coalitions qui vont se former dans un jeu, nous allons étudier l'exemple de l'oligopole de Cournot.

3.1.1 Oligopole de Cournot.

Considérons un marché composé de trois firmes : $\{1, 2, 3\}$ produisant un même produit. Chacune des firmes doit décider de la quantité à produire. La demande inverse du marché donne le prix du produit comme fonction de la quantité totale mise sur le marché par les trois firmes. Considérons le cas d'une demande inverse donnée par :

$$P(Q) = Max(a - Q, 0) \quad Q = q_1 + q_2 + q_3, \tag{3.1}$$

où q_j est la quantité produite par la firme $j \in \{1, 2, 3\}$, $a > 0$ désigne le seuil de saturation du marché, au delà duquel le produit devient sans valeur sur le marché.

Version non coopérative du jeu

Supposons en premier lieu qu'aucune entente n'est possible entre les firmes, donc nous obtenons un jeu non coopératif :

$$\langle \mathcal{N}, \{X_j\}_{j\in\mathcal{N}}, \{f_j\}_{j\in\mathcal{N}} \rangle, \tag{3.2}$$

où :

- $\mathcal{N}$ est l'ensemble des joueurs qui sont les trois firmes. $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$;
- X_j est l'ensemble des stratégies de la firme j. $X_1 = X_2 = X_3 = [0, +\infty[$;
- f_j la fonction de gain de la firme j, représentant le bénéfice qu'elle réalisera de la vente de sa production.

Si le coût de production unitaire pour toutes les firmes est c, alors la fonction de gain de la firme j sera :

$$f_j(Q) = q_j[P(Q) - c]. \tag{3.3}$$

On supposera que $c < a$. Pour trouver un équilibre de Nash pour ce jeu, on va construire les fonctions de réaction des trois firmes. La fonction de réaction R_j de la firme j définit, pour des niveaux de production donnés des deux autres firmes, la meilleure décision de production pour la firme j. Construisons la fonction R_1 :

Soient q_2, q_3 les niveaux de production fixés par les firmes 2 et 3 respectivement.

Si $q_2 + q_3 \geqq a$:

Alors, on aura $Q = q_1 + q_2 + q_3 \geqq a$ $(q_1 \geqq 0)$.

Par suite, le prix du marché sera : $p = Max(a - Q, 0) = 0$.

Le gain de la firme 1 sera alors : $f_1(Q) = -cq_1 \leqq 0$.

La meilleure réponse de la firme 1 sera alors d'adopter un niveau de production nul : $q_1 = 0$.

Si $q_2 + q_3 < a$:

Supposons que la meilleure réponse q_1 vérifie : $q_1 + q_2 + q_3 \geqq a$, c'est-à-dire $q_1 \geqq a - q_2 - q_3 > 0$, alors le prix sera $p = Max(a - Q, 0) = 0$, et le profit de la firme 1 sera $f_1(Q) = -cq_1 \leqq 0$, et $q_1' = 0$ serait meilleur que q_1, contradiction avec l'hypothèse :q_1 meilleure réponse de 1.

Donc la meilleure réponse, si elle existe, vérifie nécessairement : $q_1 + q_2 + q_3 < a$. Le prix du marché est alors :

$p = Max(a - Q, 0) = Max(a - (q_1 + q_2 + q_3), 0) = a - (q_1 + q_2 + q_3)$.

Le profit de la firme 1 sera alors :

$$f_1(q_1) = q_1(a - (q_1 + q_2 + q_3) - c). \tag{3.4}$$

La maximisation de (3.4), par rapport à q_1, donne la meilleure réponse de la firme 1 qui est :

$$q_1 = \begin{cases} \frac{a-(q_2+q_3)-c}{2}, & si \quad a - (q_2 + q_3) - c \geqq 0; \\ \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Remarquons que la cas : $q_2 + q_3 \geqq a$, étudié en premier lieu, qui implique $q_1 = 0$ est inclus dans la seconde équation du système ci-dessus. On peut donc conclure que dans tous les cas, la fonction de réaction de la firme 1 est donnée par

$$R_1(q_2, q_3) = \begin{cases} \frac{a-(q_2+q_3)-c}{2}, & si \quad a-(q_2+q_3)-c \geqq 0; \\ \\ 0, \quad sinon. \end{cases}$$

Pour des raisons de symétrie du problème par rapport aux trois firmes, les fonctions de réaction des deux autres firmes seront données par :

$$R_2(q_1, q_3) = \begin{cases} \frac{a-(q_1+q_3)-c}{2}, & si \quad a-(q_1+q_3)-c \geqq 0; \\ \\ 0, \quad sinon. \end{cases}$$

$$R_3(q_1, q_2) = \begin{cases} \frac{a-(q_1+q_2)-c}{2}, & si \quad a-(q_1+q_2)-c \geqq 0; \\ \\ 0, \quad sinon. \end{cases}$$

Nous pouvons à présent chercher les équilibres de Nash du jeu. En effet, un équilibre de Nash de ce jeu est une situation (q_1, q_2, q_3) vérifiant :

$$\begin{cases} q_1 = R_1(q_2, q_3), \\ \\ q_2 = R_2(q_1, q_3), \\ \\ q_3 = R_3(q_1, q_2). \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à une solution unique :

$$q_1^* = q_2^* = q_3^* = \frac{a-c}{4}.$$

Les profits à l'équilibre des trois firmes seront alors :

$$f_1^* = f_2^* = f_3^* = \frac{(a-c)^2}{16}.$$

Version coopérative du jeu

Supposons à présent que les firmes peuvent coordonner leurs stratégies pour améliorer leurs profits. On s'intéresse à déterminer les coalitions (cartels) qui vont se former et l'issue du jeu en

terme de quantités produites par les firmes et les profits réalisés. Supposons que deux firmes : 1 et 2, par exemple, se regroupent pour constituer un cartel. Elles se comporteront alors comme une seule firme qui a pour objectif de maximiser $(f_1 + f_2)$ et qui contrôle la variable stratégique :(q_1, q_2). Il va en résulter un duopole de Cournot constitué du cartel $\{1, 2\}$ et de la firme 3 restée indépendante. Ces deux joueurs vont jouer un jeu non coopératif dont nous allons déterminer l'équilibre.
Les ensembles des stratégies des deux joueurs sont : $X_{1,2} = X_3 = [0, +\infty[$. Leurs fonctions de gain sont respectivement $(f_1 + f_2)$ et f_3. Moyennant une analyse similaire à celle effectuée dans la section précédente, on construit les fonctions de réaction des deux joueurs. La fonction de réaction du cartel sera :

$$R_{1,2}(q_3) = \begin{cases} \frac{a-q_3-c}{2}, & si \quad a - q_3 - c \geqq 0, \\ \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

La fonction de réaction de la firme 3 sera :

$$R_3(q_1, q_2) = \begin{cases} \frac{a-(q_1+q_2)-c}{2}, & si \quad a - (q_1 + q_2) - c \geqq 0, \\ \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Ces fonctions de réaction permettent de déterminer l'unique équilibre de Nash du jeu, qui vérifie le système :

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = R_{1,2}(q_3), \\ \\ q_3 = R_3(q_1, q_2). \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$q_1^* + q_2^* = \frac{a-c}{5}, \quad q_3^* = \frac{a-c}{5}.$$

Puisque les deux firmes du cartel jouent des rôles symétriques, il n'y a aucune raison de privilégier l'une d'elles, par un quota plus important dans la production totale du cartel. Donc, à l'équilibre, les quantités produites seront :

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{10}, \quad q_3^* = \frac{a-c}{5}$$

et les profits réalisés :

$$f_1^* = f_2^* = \frac{3(a-c)^2}{50}, \quad f_3^* = \frac{3(a-c)^2}{25}.$$

Comparons ces résultats avec ceux obtenus avec la version non coopérative du jeu :
Les gains des trois firmes étaient de $\frac{(a-c)^2}{16}$.
On a :

$$\frac{3(a-c)^2}{50} < \frac{(a-c)^2}{16} < \frac{3(a-c)^2}{25}.$$

Ces inégalités nous apprennent que les deux firmes 1 et 2 qui se sont regroupées en cartel auraient mieux fait de garder leur indépendance. Par contre la firme 3 tire profit de cette nouvelle situation.
On conclut donc que le cartel $\{1,2\}$ n'est pas intérieurement stable, car au moins un de ses membres,(les deux dans notre exemple), a intérêt à le quitter. Comme les trois firmes ont des rôles symétriques, le raisonnement qu'on a fait sur le cartel $\{1,2\}$ s'applique aussi sur les cartels $\{1,3\}$ et $\{2,3\}$.
La conclusion est qu'aucun cartel de deux firmes n'est intérieurement stable (dans cet exemple).
L'autre point mis en évidence par cet exemple est le phénomène du Free-riding (Passager clandestin). On parle de Free-riding, lorsqu'un individu tire profit de l'activité collective des autres sans y participer lui-même. Dans l'exemple ci-dessus, chacune des trois firmes aimerait voir les deux autres former un cartel, et garder sa liberté, car elle tire profit de cette situation.
Pour compléter l'étude de l'oligopole à trois firmes, on s'intéresse à présent au cartel formé par les trois firmes.
La variable stratégique que ce cartel contrôle est la quantité totale produite $Q = q_1 + q_2 + q_3$.
Son objectif est de maximiser la somme :

$$f(Q) = f_1(Q) + f_2(Q) + f_3(Q). \tag{3.5}$$

Si $Q \geqq a$, le profit joint du cartel est $f(Q) = 0$.
Si $Q < a$, l'expression du profit joint devient :

$$f(Q) = Q[a - Q - c]. \tag{3.6}$$

La maximisation de (3.6) sur $[0, a[$ donne : $Q^* = \frac{a-c}{2}$. Aucune des firmes n'étant avantagée à l'équilibre, la quantité produite par chacune sera :
$q_1^* = q_2^* = q_3^* = \frac{a-c}{6}$.
Les profits des trois firmes sont alors :
$f_1^* = f_2^* = f_3^* = \frac{(a-c)^2}{12}$.
Le cartel $\{1,2,3\}$ est intérieurement stable, car si une firme le quitte, ou même deux firmes, elles se retrouveront dans l'une des situations décrites précédemment : 3 firmes indépendantes ou bien un cartel à 2 firmes et une firme indépendante, et leurs profits s'en trouveront diminués. Ce cartel est également extérieurement stable, car il n'existe pas de firme qui puisse le rejoindre. Ceci nous

conduit à prévoir que si la communication est permise entre les firmes de notre oligopole à trois firmes, et si aucune loi n'interdit la formation de cartels, alors elles formeraient ensemble un seul cartel.

3.1.2 Existence d'un cartel stable dans un modèle de leadership de prix

Dans la section précédente, nous avons appliqué les conditions de stabilité intérieure et extérieure à un oligopole de Cournot à trois firmes. Nous considérons à présent une situation plus générale, celle de n firmes, dans le cadre d'un modèle de leadership de prix.

Le modèle

Le modèle de leadership de prix modélise une situation qu'on rencontre fréquemment sur le marché. n firmes produisant un même produit se font la concurrence sur un marché donné. Le prix est fixé par un cartel dominant, les autres firmes sont des preneuses de prix, c'est-à-dire qu'elles prennent le prix fixé par le cartel comme une donnée, et optimisent leur production par rapport à ce niveau de prix. On aura ainsi un jeu séquentiel à la Stackelberg, avec un leader, le cartel, et plusieurs suiveurs : les firmes restées en frange.
Par ailleurs, le marché est caractérisé par une fonction de demande $D(p)$ supposée positive, dérivable et vérifiant : $D'(p) < 0, \forall p$. Cette condition signifie que la demande décroît lorsque le prix augmente. D'autre part, chaque firme possède une fonction de coût identique pour toutes les firmes, qui donne le coût $C(q)$ à un niveau donné q de production. On supposera que $C(q)$ est dérivable, et le coût marginal $C'(q)$ est positif et croissant en q.
Dans le modèle de leadership de prix, k firmes, $k \leqq n$, décident de former un cartel et imposent un prix au marché. Les $(n-k)$ firmes restées à la frange optimisent leur niveau de production par rapport au prix p fixé par le cartel.
Chacune des firmes résout donc le problème :

$$\underset{q\in[0,+\infty[}{Max}\, q[p - C(q)]. \tag{3.7}$$

La solution q^* de ce problème vérifie $C'(q^*) = p$. Chaque firme de la frange produira jusqu'à ce que son coût marginal soit égal au prix p fixé par le cartel.
Le cartel, pour sa part, aura anticipé ce comportement des firmes de la frange. Il fixera le niveau de prix p de façon à maximiser son profit joint (la somme des profits des firmes du cartel). Puisqu'elles ont toutes la même fonction de coût, et qu'elles font face au même prix imposé par le cartel, toutes les firmes de la frange auront le même niveau de production résultant de la

résolution du problème (3.7). Soit $S(p)$ ce niveau.
Le cartel se comporte alors comme un monopole face à la demande résiduelle :

$$RD(k,p) = D(p) - (n-k)S(p). \tag{3.8}$$

Le problème du cartel est de maximiser son profit joint par rapport au prix p :

$$\underset{p\in[0,+\infty[}{Max} RD(k,p)[p - kC\left(\frac{RD(k,p)}{k}\right)]. \tag{3.9}$$

Pour établir le niveau du prix et les quantités produites à l'équilibre par les n firmes, il faut :

1. résoudre le problème des firmes de la frange (3.7). La solution sera fonction du prix fixé par le cartel p ;
2. injecter la solution dans le problème du cartel (3.9), pour déterminer p^*.

Cette démarche permet d'établir les profits à l'équilibre :

- $\pi_c(k)$ pour chacune des firmes de la frange concurrentielle ;
- $\pi_d(k)$ pour chacune des firmes dominantes constituant le cartel.

On peut montrer, alors, les deux propositions suivantes :

Proposition 3.1. *[9]* $\pi_d(k) < \pi_c(k), \quad \forall k > 0.$

Proposition 3.2. *[9] $\pi_d(k)$ est une fonction strictement croissante du nombre k de firmes du cartel.*

La proposition (3.1) nous apprend que le profit d'une firme de la frange est toujours supérieur à celui d'une firme du cartel. C'est le phénomène du free -riding rencontré dans la section précédente.
La proposition (3.2) nous dit que le profit d'une firme du cartel augmente avec la taille, en nombre de firmes, de celui-ci. L'émergence d'un cartel dans un tel marché est favorisée, puisque $\pi_c(0) = \pi_d(0) < \pi_d(k), \quad k \geqq 1$. La situation est un peu paradoxale, si l'idée de former un cartel fixant les prix est lancée, chacune des firmes apportera toute l'aide nécessaire pour concrétiser cette idée, sauf celle de participer au cartel.
Nous allons maintenant nous intéresser à l'existence d'un cartel stable. Un tel cartel doit satisfaire les conditions de stabilité intérieure et extérieure. Si la cartel est composé de k firmes, alors :
Si $k = 0$, le cartel est intérieurement stable, car aucune firme ne peut le quitter. Si $k \geqq 1$, la condition de stabilité intérieure s'écrit :

$$\pi_c(k-1) \leqq \pi_d(k). \tag{3.10}$$

Si $k = n$, le cartel est extérieurement stable, car aucune firme ne peut le rejoindre. Si $k \leqq n-1$, la condition de stabilité extérieure s'écrit :

$$\pi_d(k+1) \leqq \pi_c(k). \tag{3.11}$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.1. *[9] Dans l'oligopole de leadership de prix, avec un nombre fini de firmes, il existe toujours un cartel stable.*

Preuve 3.1. *La proposition (3.2) permet de dire que le cartel avec $k = 0$ n'est pas extérieurement stable, car toutes les firmes verront leurs profit augmenter si un cartel de taille $k = 1$ est formé. Le cartel de taille $k = 1$ est intérieurement stable pour la même raison. Si le cartel de taille $k = 1$ est aussi extérieurement stable, alors nous avons trouvé un cartel stable. Sinon, on considère un cartel de taille $k = 2$. Ce cartel est intérieurement stable, car si ce n'était pas le cas, le cartel de taille $k = 1$ aurait été extérieurement stable et le processus serait arrêté à $k = 1$. Si $k = 2$ est extérieurement stable, la recherche est terminée. Sinon, on passe à $k = 3$ et ainsi de suite. En répétant ce processus, deux résultats sont possibles :*

1. *la recherche s'est arrêtée à un certain $k < n$. On a donc trouvé un cartel stable de taille k ;*
2. *le processus arrive à $k = n$, alors, le cartel de taille n est intérieurement stable. De plus, comme il n'y'a aucune firme qui puisse le rejoindre, il est extérieurement stable. On a donc trouvé un cartel stable.* □

3.2 Jeux de formation de coalitions

On a vu dans la section précédente qu'on pouvait prévoir les coalitions qui se formeront dans un oligopole de Cournot à trois firmes. On a également prévu la formation d'un cartel stable dans le modèle de leadership de prix. Il faut reconnaître cependant que les situations qu'on a analysées sont très particulières : si, dans l'oligopole à 3 firmes de Cournot, deux firmes décident de former un cartel, alors la troisième firme, si elle ne rejoint pas le cartel, n'a d'autre choix que de jouer seule un jeu non coopératif à deux joueurs avec le cartel. De même, dans le modèle de leadership de prix, on a supposé que toutes les firmes de la frange jouent indépendamment les unes des autres. La réalité peut s'avérer beaucoup plus complexe : il y'a une incertitude sur le comportement des firmes qui ne participent pas au cartel : comment vont-elles s'organiser ? Une seule coalition contre le cartel ? Ou bien chaque firme jouera seule ? Ou bien une situation intermédiaire ? On a besoin de modèles qui rendent comptent des multiples interactions entre tous les joueurs, chacun choisira la coalition à laquelle il veut appartenir. C'est ce que permettent les jeux de formation de coalitions.

3.2.1 Jeu Γ

Dans les jeux de formation de coalitions, la structure coalitionnelle émergeant dans un jeu donné est vue comme un équilibre d'un jeu particulier, où les stratégies des joueurs sont les

coalitions auxquelles ils peuvent appartenir.
Considérons un jeu à n joueurs. L'ensemble de ces joueurs sera noté $\mathcal{N}$. On demande à chaque joueur d'écrire sur un bout de papier les noms des joueurs avec lesquels il veut former une coalition. On collecte tous les bouts de papiers et on les analyse. Si on trouve par exemple que le joueur A a choisi les joueurs B et C, que B ait choisi A et C, et que finalement, C ait choisi A et B, alors la coalition $\{A, B, C\}$ va se former. Pour résumer, seule les coalitions qui ont été choisies par chacun de leurs membres vont se former. Si un joueur choisit quelqu'un qui ne le choisit pas, alors il se retrouvera seul (coalition singleton). Il est clair que nous sommes entrain de définir un jeu, car les résultats de ce processus, c'est-à-dire les coalitions qui vont se former dépendent de la décision de chaque joueur. Nous définissons ainsi le jeu Γ, en donnant ses éléments :

1. l'ensemble des joueurs est $\mathcal{N}$;
2. l'ensemble des stratégies d'un joueur $j \in \mathcal{N}$ est donné par : $X_j = \{S \subseteq \mathcal{N} : j \in S\}$;
3. la fonction de gain d'un joueur modélise les préférences du joueur sur l'ensemble des structures coalitionnelles possibles.

Le troisième élément nécessite quelques clarifications. Chaque joueur doit donc disposer d'une fonction de gain qui associe à toute situation du jeu un gain donné. Une situation du jeu est un élément de $X = \underset{j\in\mathcal{N}}{X_j}$. Chaque situation du jeu engendre une partition de l'ensemble des joueurs en coalitions.
Considérons une situation du jeu $\sigma = (S_1, S_2, ..., S_n)$.
Associons à chaque joueur $j \in \mathcal{N}$, l'ensemble τ_j^σ défini par :

$$\tau_j^\sigma = \begin{cases} S_j, \quad si \quad S_k = S_j, \quad \forall k \in S_j, \\ \\ \{j\}, \quad sinon. \end{cases}$$

Posons $\mathcal{P} = \{\tau_j^\sigma, j \in \mathcal{N}\}$. On a alors :

Proposition 3.3. *$\mathcal{P} = \{\tau_j^\sigma, j \in \mathcal{N}\}$ est une partition de l'ensemble des joueurs $\mathcal{N}$.*

Preuve 3.2. *Par définition, de τ_j^σ, on a $j \in \tau_j^\sigma$. Donc $\tau_j^\sigma \neq \emptyset, \quad \forall j \in \mathcal{N}$.*
Soient deux joueurs,$i, j \in \mathcal{N}$ tels que $\tau_i^\sigma \cap \tau_j^\sigma \neq \emptyset$.
Soit $k \in \tau_i^\sigma \cap \tau_j^\sigma$, on a alors, par définition, des ensembles τ^σ :
$S_k = S_i$ et $S_k = S_j$, par suite $S_i = S_j$ et $\tau_i^\sigma = \tau_j^\sigma$. Donc deux éléments de $\mathcal{P}$ ayant une intersection non vide sont égaux, ce qui revient à dire que deux éléments différents de $\mathcal{P}$ sont disjoints.
Il est clair que $\underset{j\in\mathcal{N}}{\cup}\tau_j^\sigma \subseteq \mathcal{N}$. D'autre part, $\forall k \in \mathcal{N}, k \in \tau_k^\sigma$, par suite :
$\mathcal{N} \subseteq \underset{j\in\mathcal{N}}{\cup}\tau_j^\sigma$. $\square$.

$\mathcal{P}$ est une partition de l'ensemble des joueurs qui résulte de leurs choix en adoptant la règle suivante : les coalitions qui ont été choisies par chacun de leurs membres seront formées, et les joueurs qui ont fait de mauvais choix, en incluant dans leur liste un joueur qui ne les a pas choisis, se retrouveront isolés. Nous savons donc à présent comment un profil donné de stratégies conduit à une structure coalitionnelle (partition de l'ensemble des joueurs). Le gain d'un joueur, associé à une situation du jeu, reflétera donc l'évaluation que fait le joueur de la partition de $\mathcal{N}$, résultant de cette situation.

Comment un joueur évaluera-t-il une structure coalitionnelle ?

Hart et Kurz [20] ont utilisé une mesure, appelée valeur d'Owen, pour évaluer les structures coalitionnelles du point de vue des joueurs. Donc pour chaque partition $\mathcal{P}^\sigma$, le joueur j calcule la valeur d'Owen de $\mathcal{P}^\sigma$ selon l'appréciation du joueur j : $\varphi_j(\mathcal{P}^\sigma)$.
L'idée dans la valeur d'Owen est la suivante :
Supposons d'abord, pour simplifier, que $\mathcal{P} = \mathcal{N}$. Imaginons que les joueurs arrivent l'un après l'autre dans une salle pour constituer la coalition de tous les joueurs. Chaque joueur, en arrivant dans la salle, forme une coalition avec les joueurs qui l'y ont précédé. Chaque coalition a une valeur qui reflète sa puissance : i.e. ce qu'elle peut garantir à ses membres sans l'aide des autres joueurs. Donc si le joueur j arrive et trouve la coalition S dans la salle avec une valeur V(S), il va constituer avec S la coalition $S \cup \{j\}$ avec la valeur : $v(S \cup \{j\})$.
Le nombre $v(S \cup \{j\}) - v(S)$ mesure la contribution marginale du joueur j à la coalition S. Il serait juste de penser qu'un joueur doit recevoir, à l'issue du jeu un gain égal à sa contribution $v(S \cup \{j\}) - v(S)$. Une question se pose cependant, qui sont les joueurs qu'il a trouvés dans la salle, pour qu'on puisse déterminer sa contribution ? La solution est de supposer que les joueurs arrivent d'une manière aléatoire dans la salle et donner à chaque joueur la moyenne de ses contributions à toutes les coalitions qui le contiennent sur tous les ordres d'arrivée possibles : le gain d'un joueur sera alors :

$$\varphi_j = \sum_{S \ni j} \frac{(|S|-1)! \cdot (n-|S|)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{j\})] \tag{3.12}$$

$|S|$ désigne le cardinal de S.
Le nombre φ_j est connu sous le nom de valeur de Shapley [1]. Considérons maintenant que l'ensemble des joueurs est partitionné selon $\mathcal{P}$. On reprend le même processus d'arrivée des joueurs dans la salle, mais tous les ordres d'arrivée ne sont pas permis : il faut que ces ordres soient cohérents avec la partition $\mathcal{P}$, c'est-à-dire, si le premier joueur qui arrive appartient à un élément donné de $\mathcal{P}$, les joueurs qui arriveront après lui sont ceux qui vont compléter la constitution de cet élément de $\mathcal{P}$. On prend ensuite la valeur moyenne des contributions d'un joueur donné, sur

1. Il a été découvert par Lyod Shapley en 1953

l'ensemble de ces ordres permis. On obtient la valeur d'Owen $\varphi_j(\beta)$. Si $\mathcal{P} = \mathcal{N}$, on retombe sur la valeur de Shapley. La fonction de gain du joueur j associera à σ, le nombre $\varphi_j(\mathcal{P}^\sigma)$

3.2.2 Jeu Δ

La différence avec le jeu Γ réside dans le fait que si un joueur fait un mauvais choix des membres de sa coalition, en incluant dans sa liste des joueurs qui ne l'ont pas choisi, il ne se retrouvera pas seul, mais va plutôt former une coalition avec les membres de sa liste qui ont fait le même choix que lui. La structure coalitionnelle qui va résulter d'un profil de stratégies $\sigma = (S_1, S_2, ..., S_n)$ sera alors :
$\mathcal{P}^\sigma = \{\tau \subseteq \mathcal{N} : i, j \in \tau \Leftrightarrow S_i = S_j\}$. On vérifie facilement que $\mathcal{P}^\sigma$ constitue une partition de l'ensemble des joueurs.
Dans ce modèle, les joueurs utilisent également la valeur d'Owen pour évaluer les différentes structures coalitionnelles.

3.2.3 Applications

Ayant construit les éléments de la forme normale du jeu Γ ou Δ, il suffit de le résoudre en appliquant un des concepts de solution définis dans le chapitre précédent pour déterminer les stratégies des joueurs à l'équilibre. Si σ^* est un équilibre du jeu, on constitue la partition correspondante de l'ensemble des joueurs $\mathcal{P}^{\sigma^*}$, le résultat sera une structure coalitionnelle stable, c'est-à-dire les coalitions qui vont se former à l'équilibre.
Dans [21], Hart et Kurz utilisent les jeux Γ et Δ pour déterminer les structures coalitionnelles stables de certains jeux.

Jeux coopératifs à trois joueurs à gains transférables

Dans ce jeu $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. On dispose d'une fonction v qui associe, à chaque coalition possible, une valeur : $v : \mathcal{P}(\mathcal{N}) \to \mathbb{R}$. Par exemple, si 1,2,3 sont des firmes et qu'il existe un projet à réaliser, $v(S)$ représentera le bénéfice que tireront les membres de S s'ils s'associent pour réaliser le projet. Hart et Kurz établissent le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Soit le jeu coopératif à trois joueurs* $(\mathcal{N}, V)$*,* $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$*.*
Soit $\alpha = v(123) - v(12) - v(13) - v(23) + v(1) + v(2) + v(3)$*. On a*

1. *Si* $\alpha = 0$*, alors toutes les structures coalitionelles sont* Γ*-stables et* Δ*-stables.*
2. *Si* $\alpha > 0$*, alors* $[1/2/3]$ *est* Γ *et* Δ*-stable. et [1 2 3] est* Γ*-stable mais pas* Δ*-stable.*
3. *Si* $\alpha < 0$*, alors [1 2/3], [1 3/2], [2 3/1] sont* Γ *et* Δ*-stables.*

Le jeu de l'apex

C'est un jeu à n joueurs : $\mathcal{N} = \{1, 2, ..., n\}$ où il y a un joueur dominant (l'apex) et n petits joueurs. Une coalition est gagnante, si elle contient l'apex avec au moins un autre joueur, ou si elle contient tous les petits joueurs ensemble. On a :

$$v(S) = \begin{cases} 1, \quad si \ \ 1 \in S \ \ et \ \ S \setminus \{1\} \neq \emptyset \ \ ou \ \ S = \mathcal{N} \setminus \{1\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0, \quad sinon. \end{cases}$$

L'application des jeux Γ et Δ au jeu de l'apex donne les résultats suivants :

Théorème 3.3. *[21] Considérons le jeu de l'apex à n joueurs :*

1. *Si $n \geqq 5$, alors l'unique Γ-stable structure coalitionnelle est [1/2,3,...n]. Il n'existe pas de structure coalitionnelle Δ-stable.*
2. *Si $n = 4$, alors [1/2 3 4] est Γ, mais non Δ-stable. [1 2/3/4], [1 3/2/4], [1 4/2 3] sont Γ et Δ-stables.*

3.3 La formation de coalitions comme le résultat d'un processus de négociation

Les modèles précédents montreront la formation de coalition comme le résultat de décisions individuelles des joueurs qu'ils prennent en essayant d'anticiper les décisions des autres. Plus exactement, on parle d'une approche non coopérative de la formation de coalitions. Dans cette section, nous allons présenter la formation de coalitions comme l'issue d'un processus de négociation entre les joueurs. Pour comprendre cette approche, nous avons besoin d'introduire certains éléments de la théorie de la négociation.

3.3.1 Modèle de négociation de Nash

Considérons un jeu coopératif fini à deux joueurs :

$$J = \langle \mathcal{N}, \{X_j\}_{j \in \mathcal{N}}, \{f_j\}_{j \in \mathcal{N}} \rangle, \tag{3.13}$$

où $\mathcal{N} = \{1, 2\}$.

Posons :$|X_1| = m$, $|X_2| = n$, c.-à-d. le premier joueur possède m stratégies pures et le second n stratégies.

Définissons les ensembles des stratégies mixtes des deux joueurs respectivement :

$$\Delta_m = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \in \mathbb{R}^m : \quad \alpha_k \geqq 0, \quad \forall k = 1, \ldots, m, \qquad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1\};$$

$$\Delta_n = \{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \beta_k \geqq 0, \quad \forall k = 1, \ldots, n, \quad \sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1\}.$$

Si on envisage la coopération entre les deux joueurs, alors les possibilités d'actions qui leurs sont offertes, en incluant les stratégies mixtes, sont :

$$S = \{(s_1, s_2), s_1 \in \Delta_m \quad s_2 \in \Delta_n\} = \Delta_m \times \Delta_n,$$

et l'ensemble des paiements possibles pour les deux joueurs sera :

$$F = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad \exists s \in S : v_1 = f_1(S), \quad v_2 = f_2(s)\}. \tag{3.14}$$

On peut vérifier, sous la condition de continuité et de convexité des fonctions f_1 et f_2, que F est convexe et compact.

Le problème qui se pose aux deux joueurs est de s'entendre sur un élément de F comme issue du jeu. Chaque joueur j considère qu'il peut avoir le gain v_j^d sans la coopération de l'autre joueur. L'élément $(v_1^d, v_2^d) \in F$ est appelé point de désaccord. Résoudre un jeu de négociation à deux joueurs signifie associer à chaque région de paiements coopératifs possible F et point de désaccord $v^d = (v_1^d, v_2^d) \in F$, la solution $\phi(F, v^d) \in F$. Posons :$(u_1^*, u_2^*) = \phi(F, v^d)$. Nous énonçons sous forme d'axiomes certaines propriétés que la solution (u_1^*, u_2^*) devrait vérifier.

Axiome 1 : Efficacité au sens de Pareto :

$(u_1^*, u_2^*) \in F$ et $\nexists (v_1, v_2) \in F : \quad (v_1, v_2) \geq (u_1^*, u_2^*)$.

Axiome 2 : Rationalité individuelle :

$(u_1^*, u_2^*) \geqq (v_1^d, v_2^d)$.

Axiome 3 : Invariance par rapport aux représentations équivalentes d'utilité :

Si $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, et $G = \{(\lambda_1 v_1 + \gamma_1, \lambda_2 v_2 + \gamma_2), \quad (v_1, v_2) \in F\}$, alors :

$\phi(G, (\lambda_1 v_1^d + \gamma_1, \lambda_2 v_2^d + \gamma_2)) = (\lambda_1 u_1^* + \gamma_1, \lambda_2 u_2^* + \gamma_2)$.

Axiome 4 : Indépendance par rapport aux alternatives non optimales :

Si M est une partie convexe et compacte de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :$M \subseteq F$ et $(u_1^*, u_2^*) \in M$, alors $\phi(M, (v_1^d, v_2^d)) = (u_1^*, u_2^*)$.

Axiome 5 : Symétrie :

Si F est symétrique, i.e : $(v_1, v_2) \in F \Leftrightarrow (v_2, v_1) \in F$, et $(v_1^d = v_2^)$, alors : $u_1^* = u_2^*$.

Le résultat intéressant établi par Nash, en 1953, est qu'il existe une seule fonction ϕ vérifiant les cinq axiomes précédents. Elle est donnée par :

$$(u_1^*, u_2^*) = \underset{(v_1, v_2) \in F; (v_1, v_2) \geqq (v_1^d, v_2^d)}{ArgMax} (v_1 - v_1^d)(v_2 - v_2^d). \tag{3.15}$$

Donc la solution de négociation de Nash est le point (on montre qu'il est unique), qui maximise le produit de Nash : $(v_1 - v_1^d)(v_2 - v_2^d)$ sur l'ensemble des issues individuellement rationnelles du jeu.

Si le jeu est à n joueurs, la même démarche conduit à une forme généralisée de la solution de négociation de Nash :

$$(u_1^*, u_2^*, ..., u_n^*) = \underset{(v_1,v_2,...,v_n)\in F;(v_1,v_2,...,v_n)\geqq(v_1^d,v_2^d,...,v_n^d).}{ArgMax} (v_1 - v_1^d)(v_2 - v_2^d), ..., (v_n - v_n^d). \tag{3.16}$$

En conclusion, on a un problème de négociation si on dispose de la région des paiements possibles F et du point de désaccord $v^d \in F$, appelé également statu-quo. On peut alors proposer une issue rationnelle à la négociation moyennant la fonction ϕ définie en (3.15). Notons qu'on trouve dans la littérature d'autres solutions basées sur des axiomes différents. La solution de Kalai-Smoridinsky en est un exemple.

Nous expliquons en ce qui suit le modèle développé par Anke Gerber dans [15], qui interprète la structure coalitionnelle qui émerge dans un jeu comme solution d'un "système" de problèmes de négociation interdépendants.

Le modèle de Gerber part d'un jeu coopératif à gains non transférables $(\mathcal{N}, V)$. La fonction V associe à chaque coalition S un sous-ensemble de $\mathbb{R}^s$, (s=|S|), donnant les gains que la coalition peut garantir à chacun de ses membres si elle vient à être formée. Donc un joueur sait quel est l'ensemble de ses gains potentiels s'il participe à une coalition donnée. Pour déterminer son gain effectif, il entrera dans un processus de négociation avec les autres membres de la coalition envisagée. Si la région des paiements pour ce problème de négociations est connue (l'ensemble V(S)), il nous manque un élément essentiel pour compléter la description du problème : c'est le point de désaccord, ou statu quo. Si la négociation pour former S échoue, quels seraient le gain de chacun de ses membres ? Pour déterminer le statu quo, chaque joueur fait valoir les opportunités dont il dispose à l'extérieur de la coalition S, c'est-à-dire le meilleur gain qu'il obtiendrait en participant à une autre coalition S_1. Mais ce gain lui même est le résultat d'un problème de négociation dans la coalition S_1 dont le statu quo est déterminé par les opportunités dont dispose chaque joueur à l'extérieur de S_1, c'est-à-dire l'issue d'un autre problème de négociations. De cette façon, on obtient un système de problèmes de négociation liés par le fait que le statu quo d'un problème est la solution, moyennant la solution de négociation de Nash par exemple, d'un autre problème. La résolution de ce système de problèmes de négociation permet de déterminer les gains des joueurs dans chaque coalition potentielle, et par suite, les joueurs peuvent décider des coalitions qu'ils vont former.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les principales idées qui tentent d'expliquer la formation de coalitions à travers la théorie des jeux. Comme nous l'avons vu, les approches sont multiples et les résultats diffèrent selon l'approche adoptée, et il est difficile d'énoncer des résultats généraux. La formation de coalitions reste donc un domaine de recherche ouvert, et des réponses définitives ne sont pas encore établies.

4

Sur les jeux coopératifs multicritères

Introduction

Dans beaucoup de situations réelles les joueurs considèrent plus d'un critère dans le choix de leurs stratégies. De telles situations peuvent être modélisées en assignant des fonctions de gains vectorielles aux joueurs. Chaque composante du vecteur de paiement d'un joueur représente son gain par rapport à un critère donné. L'objet de ce chapitre est de donner une synthèse des principaux travaux effectués dans la théorie des jeux coopératifs multicritères et d'introduire, en premier lieu les définitions et concepts dont nous aurons besoin dans la suite de notre travail, puis de les appliquer pour définir un concept de solution pour un jeu coopératif multicritère et étudier ses conditions d'existence.

Les jeux multicritères ont été introduits pour la première fois par Blackwell [5] en 1956. Depuis, il y'a eu relativement peu d'articles qui se sont intéressés à la théorie des jeux multicritères. En 1959, Shapley [37] a introduit le concept d'équilibre de Pareto-Nash pour un jeu multicritère non coopératif et a étudié ses conditions d'existence. Les travaux de Contini et al [10] (1966), Zeleny [46](1975), Hannan [18](1982), Charnes et al[7] (1987), Borm et al [?] (1988), Charnes et al [8] (1990), Fahem [11] (2004) s'inscrivent dans le même contexte : exploration des concepts de solution pour un jeu multicritère non coopératif. Très peu d'auteurs se sont intéressés aux jeux coopératifs multicritères. En 1977, Burgstresser et Yu [3] ont étudié le concept de noyau d'un jeu multicritère coopératif à gains transférables. Leur démarche était de transformer le jeu multicritère en jeu monocritère moyennant le procédé de scalarisation, c'est-à-dire définir pour chaque joueur une fonction de gain scalaire qui est une combinaison linéaire des composantes de sa fonction de gain vectorielle. En 1998, Voorneveld et Van Den Nouweland [44] généralisent l'étude faite par Burgstresser et Yu [3] à un jeu coopératif multicritère où il existe deux types de critères :

1. Des critères privés qui représentent les critères individuels des joueurs ;
2. Des critères publics : si une coalition se forme, ses membres auront tous la même valeur pour ce critère.

Voorneveld et Van Den Nouweland étudient sous ces nouvelles conditions le concept de noyau multicritère introduit par Burgstresser et Yu. Son étude se fait toujours dans le cadre des gains transférables. En 2002, Fernandez, Hinojosa et Puerto [13] étudient le concept de noyau d'un jeu coopératif multicritère à gains transférables sans recourir à la scalarisation. Continuant dans le même contexte, Tanino et Tetsuzo [39] étudient le noyau d'un jeu coopératif multicritère à gains transférables, avec structure coalitionnelle prédéfinie, c'est-à-dire en imposant des contraintes sur les coalitions qui peuvent se former. Ferhat [12] généralise en 2005 le concept d'équilibre Slater-fort au cas multicritère et étudie ses conditions d'existence. Les jeux coopératifs multicritères à gains non transférables n'ont pas été suffisamment explorés. En particulier, nous n'avons rencontré aucun article traitant de la forme coalitionnelle d'un jeu coopératif multicritère. Notre principale contribution sera justement de définir la forme coalitionnelle d'un jeu multicritère à gains non transférables, et de fournir les outils nécessaires à la dérivation de cette forme coalitionnelle à partir de la forme stratégique du jeu. Nous allons ensuite exploiter la forme coalitionnelle obtenue pour résoudre le jeu sous forme stratégique de départ.

4.1 Jeux coopératifs multicritères : Forme stratégique-Forme coalitionnelle

Dans cette partie, nous allons définir la forme stratégique et la forme coalitionnelle d'un jeu coopératif multicritère et examiner la relation entre les deux formes, comme nous l'avons fait pour un jeu monocritère.

4.1.1 Jeu coopératif multicritère sous forme stratégique

La définition suivante généralise la définition (2.2) au cas multicritère :

Définition 4.1. Un jeu coopératif multicritère sous forme stratégique est un triplet

$$\langle \mathcal{N}, \{X_S\}_{\emptyset \neq S \subseteq N}, \{F_j\}_{j \in \mathcal{N}} \rangle \tag{4.1}$$

qui a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{N}$ est un ensemble fini non vide de joueurs ;
2. Pour toute coalition $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$, X_S est un ensemble non vide de stratégies de la coalition S ;
3. Si $\emptyset \neq S, T \subseteq \mathcal{N}$ avec $S \cap T = \emptyset$, alors : $X_{S \cup T} \supseteq X_S \times X_T$;
4. Pour tout $j \in \mathcal{N}, F_j : x \in X_{\mathcal{N}} \to F_j(x) = (F_{j1}(x), \ldots, F_{jr(j)}(x)) \in \mathbb{R}^{r(j)}$ est une fonction vectorielle de gain du joueur j.

Dans cette définition, chaque joueur j a $r(j)$ fonctions de gains à optimiser.

Stratégie de sécurité dans un jeu multicritère

Dans cette section, nous présentons une généralisation, introduite par Ghose et Prasad dans [16], du concept de stratégie de sécurité aux jeux multicritères. L'importance de ce concept, pour un jeu coopératif, découle du fait qu'un joueur ne participera pas à une coalition qui ne lui assure pas un paiement supérieur à celui qu'il peut obtenir, dans le pire des cas, en jouant seul. Chaque joueur s'intéressera d'abord en premier lieu à établir ce qu'il peut obtenir, dans le pire des cas, en jouant seul.

Considérons le jeu coopératif multicritère sous forme stratégique (4.1).
Posons

$$\mathfrak{F}_j(X) = \{F_j(x) = (F_{j1}(x), ..., F_{jr(j)}(x)), \ \ x \in X\}.$$

Notons qu'il faut distinguer $\mathfrak{F}_j(X)$ de l'ensemble $F_{j1}(X) \times .... \times F_{jr(j)}(X)$.
Associons à chaque joueur une fonction auxiliaire : $v_j : X_j \to \mathbb{R}^{r(j)}$ définie par :

$$v_{jk}(x_j) = \underset{y_{-j} \in X_{-j}}{Inf} \ F_{jk}(x_j, y_{-j}), \ k \in \{1, .., r(j)\}.$$

Ici on suppose que l'Inf de F_{jk} est atteint. v_{jk} représente le pire des paiements que peut avoir le joueur j sur le critère k s'il joue la stratégie x_j.
On a alors la définition suivante :

Définition 4.2. [22] $x_j^* \in X_j$ est une stratégie de sécurité Pareto optimale pour le joueur j, si :

$$\forall x_j \in X_j, \quad v_j(x_j) \geqq v_j(x_j^*) \Rightarrow v_j(x_j) = v_j(x_j^*).$$

Le théorème et le corollaire suivants donnent une caractérisation des stratégies de sécurité Pareto optimales :

Théorème 4.1. *[17] Soit $\alpha_k > 0$, $k \in \{1,..,r(j)\}$ et $x_j^* \in X_{\{j\}}$. $j \in \mathcal{N}$.*
Si :

$$\sum_{k=1}^{r(j)} \alpha_k v_{jk}(x_j^*) \geqq \sum_{k=1}^{r(j)} \alpha_k v_{jk}(x_j), \quad \forall x_j \in X_{\{j\}}, \tag{4.2}$$

alors x_j^* est une stratégie de sécurité Pareto optimale pour le joueur j

On a le corollaire suivant :

Corollaire 4.1. *[17] Soit $\alpha_k > 0$, $k \in \{1,..,r(j)\}$ et $x_j^* \in X_{\{j\}}$, $j \in \mathcal{N}$.*
Si :

$$\underset{y_{-j}^1,\dots,y_{-j}^{r(j)} \in X_{-j}}{Sup} \sum_{k=1}^{r(j)} \alpha_k F_{jk}(x_j^*, y_{-j}^k) \geqq \underset{y_{-j}^1,\dots,y_{-j}^{r(j)} \in X_{-j}}{Sup} \sum_{k=1}^{r(j)} \alpha_k F_{jk}(x_j, y_{-j}^k), \quad \forall x_j \in X_j, \tag{4.3}$$

alors x_j^* est une stratégie de sécurité Pareto optimale pour le joueur j.

Comparaison de matrices

Nous allons dans cette section généraliser les notions de préférence entre vecteurs au cas matriciel.
Soient A et B deux matrices dans l'espace $\mathbb{R}^{m\times n}$ des matrices à m lignes et n colonnes. Posons $A = (a_{ij})_{m\times n}$ et $B = (b_{ij})_{m\times n}$.

Définition 4.3. On dira que A est faiblement préférée à B, et on notera $A \geqq B$, si :

$$a_{ij} \geqq b_{ij}, \quad \forall i \in \{1,..,m\}, \quad \forall j \in \{1,..,n\}.$$

Définition 4.4. On dira que A est préférée à B, et on notera $A \geq B$, si :

$$A \geqq B \quad \text{et} \quad A \neq B.$$

Définition 4.5. On dira que A est strictement préférée à B, et on notera $A > B$, si :

$$a_{ij} > b_{ij}, \quad \forall i \in \{1,..,m\}, \quad \forall j \in \{1,..,n\}.$$

Nous allons introduire la notion suivante de dominance entre matrices qui va nous servir dans la suite de notre travail. Le vecteur A_j désignera la j-ème colonne de A.

Définition 4.6. On dira que A domine B par colonnes, et on notera $A \geq_c B$, si $A_j \geq B_j$, $\forall j \in \{1,...,n\}$.

Proposition 4.1. *Soient A et B deux matrices de $\mathbb{R}^{m\times n}$.*

$$A \geq_c B \Rightarrow A \geq B.$$

Preuve 4.1. *Soient A et B deux matrices de $\mathbb{R}^{m\times n}$. Supposons que $A \geq_c B$.*
On a alors :

$$A_j \geq B_j, \quad \forall j \in \{1, ..., n\}. \tag{4.4}$$

On a :

$$\begin{aligned}(4.4) \quad &\Rightarrow \quad (A_j \geqq B_j \quad et A_j \neq B_j), \quad \forall j \in \{1, .., n\} \\ &\Rightarrow \quad (A \geqq B \quad et \quad A \neq B) \\ &\Rightarrow \quad A \geq B.\end{aligned}$$

4.1.2 Jeu coopératif multicritère sous forme coalitionnelle

La définition suivante généralise la définition (2.2) d'un jeu coopératif monocritère sous forme coalitionnelle au cas multicritère.

Définition 4.7. Un jeu coalitionnel multicritère à gains non transférables est un couple

$$(\mathcal{N}, V_m), \tag{4.5}$$

où $\mathcal{N}$ est un ensemble fini non vide des joueurs et V_m une fonction qui associe à tout $S \subseteq \mathcal{N}$ un sous-ensemble $V_m(S)$ de $\mathbb{R}^{p\times s}$, telle que :

$$V_m(S) \neq \emptyset, \quad si \quad S \neq \emptyset \quad et \quad V_m(\emptyset) = \emptyset; \tag{4.6}$$

$$la \quad fonction \quad V_m(S) \quad est \quad comprehensive; \tag{4.7}$$

$$V_m(S) \quad \text{est fermé}, \quad \forall S \subseteq \mathcal{N}; \tag{4.8}$$

$$\{B_S \in V_m(S) : A_S \ngeq B_S\} \quad \text{est borné}, \quad \forall A_S \in \mathbb{R}^{p\times s}. \tag{4.9}$$

Remarque 4.1. *Ici on suppose que tous les joueurs ont le même nombre p de critères. Ceci ne constitue nullement une restriction, car on peut ajouter à chaque joueur des critères fictifs qui prennent toujours la valeur 0 afin de ramener son nombre de critères à p.*

Remarque 4.2. *Ici on comprendra par $V_m(S)$ compréhensive, la propriété suivante :*

$$\forall S \subseteq \mathcal{N}, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{p\times s}, \quad (A \in V_m(S) \quad et \quad A \geqq B) \Rightarrow B \in V_m(S).$$

La condition (4.9) signifie qu'aucun membre de la coalition S ne peut augmenter infiniment son gain sur un critère donné, même en diminuant son gain sur d'autres critères, sans détériorer le gain d'au moins un autre membre de S sur un critère au moins.

4.1.3 Relation entre la forme stratégique et la forme coalitionnelle d'un jeu coopératif multicritère

Notions d'efficacité

Comme nous l'avons vu pour un jeu monocritère, le passage entre la forme stratégique et la forme coalitionnelle du jeu se fait moyennant une notion d'efficacité. Nous généralisons ici les notions de α-efficacité et β-efficacité au cas multicritère.

Considérons un jeu coopératif multicritère sous forme stratégique

$$J_m = \langle \mathcal{N}, \{X_S\}_{\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}}, \{F_i\}_{i \in \mathcal{N}} \rangle. \tag{4.10}$$

Soit $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$ une coalition avec $|S| = s$ membres.

Définition 4.8. La coalition S est α-effective pour la matrice $A \in \mathbb{R}^{p \times s}$, si : $\exists \;\; x_S \in X_S$ telle que : $\forall x_{-S} \in X_{-S}$, $F_j(x_S, x_{-S}) \geqq A_j, \;\; \forall j \in S$,

où, rappelons le A_j désigne la j-ème colonne de la matrice A.

Une coalition est α-effective pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{p \times s}$, si elle peut garantir à chacun de ses membres un paiement au moins aussi bon que celui qui lui est imparti dans A, sur chacun de ses critères.

Définition 4.9. La coalition S est β-effective pour la matrice $A \in \mathbb{R}^{p \times s}$, si :$\forall x_{-S} \in X_{-S}$, $\exists \;\; x_S \in X_S$ telle que : $F_j(x_S, x_{-S}) \geqq A_j, \;\; \forall j \in S$.

Une coalition S est β-effective pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{p \times s}$, si la contre-coalition $\mathcal{N} \setminus S$ ne peut pas l'empêcher de réaliser pour chacun de ses membres un paiement au moins aussi bon que celui qui lui est imparti dans A, sur chacun de ses critères.

Définissons les deux fonctions de coalitions V_α et V_β par :
$V_{m\alpha}(S) = \{A_S \in \mathbb{R}^{p \times s} \;\; tel \;\; que \;\; S \;\; est \;\; \alpha - effective \;\; pour \;\; A_S\}$, si $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$ et $V_{m\alpha}(\emptyset) = \emptyset$,
$V_{m\beta}(S) = \{A_S \in \mathbb{R}^{p \times s} \;\; tel \;\; que \;\; S \;\; est \;\; \beta - effective \;\; pour \;\; A_S\}$, si $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$ et $V_{m\beta}(\emptyset) = \emptyset$,
où $A_S = (A_j)_{j \in S}$.

Aux deux fonctions de coalitions, on associera deux jeux coopératifs multicritères sans gains transférables :

$$(\mathcal{N}, V_{m\alpha}) \tag{4.11}$$

$$(\mathcal{N}, V_{m\beta}) \tag{4.12}$$

La proposition suivante nous montre que les deux fonctions $V_{m\alpha}$ et $V_{m\beta}$ sont des fonctions de coalitions au sens de la définition (4.7).

Proposition 4.2. *Supposons que dans le jeu coopératif multicritère sous forme stratégique (4.10), X_S est un espace métrique compact pour toute coalition $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$ et que F_j est une fonction continue pour tout $j \in \mathcal{N}$. Alors :*

1. $V_{m\alpha}(S) \neq \emptyset, \quad \forall \emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$;
2. $V_{m\alpha}$ *est comprehensive et* $V_{m\alpha}(S)$ *est un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{R}^{p\times s}$ *pour tout* $S \subseteq \mathcal{N}$;
3. $\forall S \subseteq \mathcal{N}, \quad \exists B_S \in \mathbb{R}^{p\times s}$ *telle que* $: \forall A_S \in V_{m\alpha}(S), \quad B_S \geqq A_S$.
4. $V_{m\beta}(S) \neq \emptyset, \quad \forall \emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$;
5. $V_{m\beta}$ *est compréhensive et* $V_{m\beta}(S)$ *est un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{R}^{p\times s}$ *pour tout* $S \subseteq \mathcal{N}$;
6. $\forall S \subseteq \mathcal{N}, \quad \exists B_S \in \mathbb{R}^{p\times s}$ *telle que* $: \forall A_S \in V_{m\beta}(S), \quad B_S \geqq A_S$.

Pour démontrer cette proposition, on s'est inspiré de la preuve d'une proposition analogue pour le cas monocritère donnée dans [31].

Preuve. *Nous allons nous intéresser d'abord à la fonction $V_{m\alpha}$. Soit une coalition $S \subseteq \mathcal{N}$, $S \neq \emptyset$. Supposons que $S = \mathcal{N}$. Soit un élément quelconque $x \in X_{\mathcal{N}}$. Le gain du joueur j est alors le vecteur $F_j(x)$. Soit A la matrice constituée par les vecteurs-colonne F_j, $j = 1, ..., n$. La matrice A est un élément de $V_{m\alpha}(\mathcal{N})$, car la coalition $\mathcal{N}$ est α-effective pour la matrice $A = (F_j(x))_{j\in\mathcal{N}}$ au sens de la définition 4.8 (la contre-coalition de (N) est l'ensemble vide, donc elle ne peut pas empêcher $\mathcal{N}$ de réaliser la matrice des paiements A, en adoptant la stratégie $x \in X_{\mathcal{N}}$).*
Supposons maintenant que $\emptyset \neq S \neq \mathcal{N}$ et considérons une stratégie $x_S \in X_S$. Posons pour chaque joueur $j \in S$, et pour chaque critère $i \in \{1, ..., p\}$:
$A_{ij} = \underset{x_{-S}\in X_{-S}}{Inf} \; F_{ij}(x_S, x_{-S})$. A_{ij} est bien défini car les fonctions F_{ij} sont continues et les ensembles de stratégies de toutes les coalitions sont compacts. Alors le joueur j peut se garantir le gain A_{ij} sur le critère i quoique fasse la coalition $-S$. Par suite, la matrice, $A_S = (A_{ij})_{p\times s}$ est un élément de $V_{m\alpha}(S)$. On a donc $V_{m\alpha}(S) \neq \emptyset, \quad \forall \emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$.
Montrons à présent que $V_{m\alpha}$ est compréhensive.
Soit $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$. Considérons deux matrices $B_S, C_S \in \mathbb{R}^{p\times s}$. Supposons que $B \in V_{m\alpha}(S)$ et que $B_S \geqq C_S$.
Comme $B_S \in V_{m\alpha}(S)$, alors :

$$\exists x_S \in X_S, \quad telleque \quad \forall x_{-S} \in X_{-S}, \quad F_j(x_S, x_{-S}) \geqq B_j, \quad \forall j \in S. \tag{4.13}$$

Comme $B_S \geqq C_S$, alors : $B_j \geqq C_j, \quad \forall j \in S$. De (4.13), on déduit

$$\exists x_S \in X_S, \quad \forall x_{-S} \in X_{-S}, \quad F_j(x_S, x_{-S}) \geqq C_j, \quad \forall j \in S, \tag{4.14}$$

ce qui signifie que $C_S \in V_{m\alpha}(S)$.
Montrons maintenant que $V_{m\alpha}(S)$ est fermé. Pour cela, nous allons montrer que toute suite

convergente d'éléments de $V_{m\alpha}(S)$*, converge vers un élément de* $V_{m\alpha}(S)$*.*
Considérons la suite $(M^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $V_{m\alpha}(S)$*.*
A chaque matrice $M^{(k)}$*, correspond une stratégie* $x_S^{(k)} \in X_S$ *telle que :*

$$\forall x_{-S} \in X_{-S}, \quad F_j(x_S^{(k)}, x_{-S}) \geqq M_j^{(k)}, \quad \forall j \in S, \tag{4.15}$$

où $M_j^{(k)}$ *désigne la colonne* j *de la matrice* $M^{(k)}$*.*
Supposons à présent la suite $(M^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers un élément* $M = (M_{ij}) \in \mathbb{R}^{p\times s}$*. (Ici, la convergence est comprise au sens suivant :* $\lim_{k\to\infty} M_{ij}^{(k)} = M_{ij}, \quad \forall i \in \{1,...,p\}, \forall j \in S$*).*
Montrons que

$$M \in V_{m\alpha}(S).$$

Comme X_S *est compact, on peut extraire de la suite d'éléments* $\{x_S^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *de* X_S *une sous-suite convergente. Sans perte de généralité, on peut considérer que la suite* $\{x_S^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers un élément* x_S^* *de* X_S*.*
Comme la relation

$$\forall x_{-S} \in X_{-S}, \quad F_{ji}(x_S^{(k)}, x_{-S}) \geqq M_{ji}^{(k)}, \quad \forall i \in \{1,...,p\}, \quad \forall j \in S$$

est vérifiée pour tout entier k*, alors, après passage à la limite, tout en tenant compte de la continuité des fonctions* F_j*, on déduit :*

$$\forall x_{-S} \in X_{-S}, \quad F_j(x_S^*, x_{-S}) = \lim_{k\to\infty} F_{ji}(x_S^{(k)}, x_{-S}) \geqq \lim_{k\to\infty} M_{ji}^{k} = M_{ji}, \quad \forall i \in \{1,...,p\}, \quad \forall j \in S. \tag{4.16}$$

La relation (4.16) signifie que S *est* α*-effective pour la matrice* M*. Donc* $M \in V_{m\alpha}(S)$*, ce qui est le résultat recherché.*
Montrons à présent la troisième propriété de $V_{m\alpha}$*, à savoir :*

$$\forall S \subseteq \mathcal{N}, \quad \exists B_S \in \mathbb{R}^{p\times s} \ \text{ telle que } \ : \forall A_S \in V_{m\alpha}(S), \quad B_S \geqq A_S. \tag{4.17}$$

La matrice B_S *sera construite de la façon suivante :* a_{ij} *sera le gain maximum que le joueur* j *pourra se garantir sur le critère* i *indépendamment des actions de la contre-coalition* $\mathcal{N} \setminus S$*. Posons donc :*

$$B_{ij} = \underset{x_S\in X_S}{Sup} \quad \underset{x_{-S}\in X_{-S}}{Inf} \ F_{ij}(x_S, x_{-S}), \ \ \forall i \in \{1,...,p\}, \ \forall j \in S.$$

L'existence des éléments B_{ij} *définissant la matrice* B_S *est assurée par la continuité des* F_{ij} *et la compacité des ensembles des stratégies. Soit* $C_S \in V_{m\alpha}(S)$*, alors, par définition,* S *est* α*-effective pour* C_S*. D'autre part, par définition 4.8, on a*

$$\exists \ \ \overline{x}_S \in X_S \ \text{ telle que } \ \forall x_{-S} \in X_{-S}, \quad F_{ij}(\overline{x}_S, x_{-S}) \geqq C_{ij}, \forall i \in \{1,...,p\}, \quad \forall j \in S.$$

D'où

$$B_{ij} = \underset{x_S \in X_S}{Sup} \ \underset{x_{-S} \in X_{-S}}{Inf} \ F_{ij}(x_S, x_{-S}) \geqq \underset{x_{-S} \in X_{-S}}{Inf} \ F_{ij}(\overline{x}_S, x_{-S}) \geqq C_{ij}, \ \ \forall i \in \{1, ..., p\}, \ \forall j \in S.$$

Les propriétés de la fonction $V_{m\beta}$ s'obtiennent en faisant un raisonnement analogue.

4.2 Noyau d'un jeu coopératif multicritère

.

4.2.1 Dominance via une coalition

Considérons un jeu multicritère sous forme coalitionnelle (4.5), A, B deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^{p \times n}$ et une coalition $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$.

Définition 4.10. On dira que B domine A via S au sens de Pareto, et on notera $B \succ_S A$ si $B_S \in V(S)$ et $B_S \geq_c A_S$.
On dira que B domine A via S au sens de Slater, Si $B_S \in V(S)$ et $B_S > A_S$.
Si B domine A via S, on notera $B \succ_S A$ et, en fonction du contexte, on comprendra s'il s'agit d'une dominance au sens de Pareto ou bien au sens de Slater.
S'il existe une coalition S telle que $B \succ_S A$, on dira simplement que B domine A, et on notera $B \succ A$.

Remarque 4.3. *Dans la définition (4.10), l'expression B domine A via S au sens de Pareto, peut suggérer au lecteur qu'on doit avoir : $B_S \geq A_S$, car l'usage est de lier la notion de Pareto optimalité à la relation de préférence $\geq$. Mais le concept de solution que va engendrer une telle définition ne reflétera pas le comportement réel des coalitions dans un jeu : en effet une matrice de paiements B sera plus intéressante que A pour une coalition S, si elle donne plus à <u>chacun</u> des membres de S, c'est-à-dire si $B_S \geq_c A_S$. Nous avons gardé l'expression B domine A via S au sens de Pareto, car on fait toujours référence à la relation de préférence $\geq$ mais entre les paires de colonnes (A_j, B_j). Nous garderons donc à l'esprit que, bien que nous utilisions l'expression domine au sens de Pareto, il ne s'agit pas de la relation de préférence entre matrices ($\geq$) de la définition (4.4), mais de la relation de dominance par colonnes ($\geq_c$) de la définition (4.6).*

Nous pouvons à présent définir le noyau $C(\mathcal{N}, V_m)$ d'un jeu coopératif multicritère (4.5).

Définition 4.11. Le noyau $C(\mathcal{N}, V_m)$ d'un jeu multicritère sous forme coalitionnellle (4.5) est l'ensemble :

$$C(\mathcal{N}, V_m) = \{A \in V_m(\mathcal{N}), \ \ \forall B \in \mathbb{R}^{p \times n} : B \not\succ A\}. \tag{4.18}$$

Lorsque la dominance considérée via une coalition dans la définition 4.11 est une dominance au sens de Pareto, $C(\mathcal{N}, V_m)$ sera appelé le **noyau efficace** du jeu (4.5) et sera noté $C_P(\mathcal{N}, V_m)$
.
Lorsque la dominance considérée via une coalition dans la définition 4.11 est une dominance au sens de Slater, $C(\mathcal{N}, V_m)$ sera appelé **noyau faiblement efficace** du jeu (4.5) et sera noté $C_S(\mathcal{N}, V_m)$. Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.3. *On a*

$$C_P(\mathcal{N}, V_m) \subseteq C_S(\mathcal{N}, V_m).$$

Preuve 4.2. *Nous devons montrer que si $A \in V_m(\mathcal{N})$, alors :*

$$A \in C_P(\mathcal{N}, V_m) \Rightarrow A \in C_S(\mathcal{N}, V_m).$$

Raisonnons par la contre-opposé. Considérons un élément $A \in V_m(\mathcal{N})$ et supposons que $A \notin C_S(\mathcal{N}, V_m)$.
On a alors :

$$\exists B \in \mathbb{R}^{p\times n} \quad \exists S \subseteq \mathcal{N} \quad tel \quad que : \quad B_S \in V_m(S) \quad et \quad B_S > A_S. \tag{4.19}$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} B_S > A_S \quad &\Rightarrow \quad B_{ij} > A_{ij}, \quad \forall i \in \{1, .., p\}, \quad \forall j \in S \\ &\Rightarrow \quad B_j > A_j, \quad \forall j \in S. \\ &\Rightarrow \quad B_j \geq A_j, \quad \forall j \in S \\ &\Rightarrow \quad B_S \geq_c A_S. \end{aligned}$$

Ainsi, (4.19) entraîne :

$$\exists B \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad \exists S \subseteq \mathcal{N} \quad tel \quad que : \quad B_S \in V(S) \quad et \quad B_S \geq_c A_S, \tag{4.20}$$

ce qui signifie que $A \notin C_P(\mathcal{N}, V_m)$.

4.3 Existence du noyau efficace d'un jeu coopératif multicritère

Les éléments du noyau représentent des issues stables pour le jeu, car aucune coalition n'a intérêt à se former pour bloquer la réalisation de ces éléments. La question qui se pose est sous quelles conditions de tels éléments existent ? On considérera successivement le deux variantes du noyau définies dans le chapitre précédent, à savoir le noyau efficace et le noyau faiblement efficace. Les conditions d'existence que nous allons montrer dans ce chapitre sont inspirés des résultats analogues connus pour les jeux coopératifs monocritères, dont on peut citer :

1. Le théorème de Scarf (1967) pour les jeux balancés
2. Le théorème de Sharkey (1981) pour les jeux cardinaux convexes ;

Notre approche sera de réduire l'étude du jeu multicritère (4.5) à celle d'un jeu monocritère moyennant des fonctions d'utilité. Dans cette approche, on suppose que chaque joueur possède une fonction d'utilité qui résume ses préférences sur l'ensemble des issues possibles du jeu.

Définition 4.12. Une fonction d'utilité d'un joueur est une fonction $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ qui représente les préférences du joueur sur l'ensemble des valeurs de son critère vectoriel.

Définition 4.13. Soient $a, b \in E \subseteq \mathbb{R}^p$ et $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité. Alors :

1. Si $a \geq b \Rightarrow u(a) \geqq u(b)$, alors u est dite croissante par rapport à $\geq$ sur E.
2. Si $a \geq b \Rightarrow u(a) > u(b)$, alors u est dite strictement croissante par rapport à $\geq$ sur E.
3. Si $a > b \Rightarrow u(a) \geqq u(b)$, alors u est dite croissante par rapport à $>$ sur E.
4. Si $x > y \Rightarrow u(a) > u(b)$, alors u est dite strictement croissante par rapport à $>$ sur E.

Nous allons, dans ce qui suit, utiliser les fonctions d'utilité pour transformer un jeu multicritère (4.5) en un jeu monocritère du type (2.3). La proposition suivante nous donne des conditions sous lesquelles on peut réaliser une telle transformation.

Proposition 4.4. *Considérons le jeu multicritère sous forme coalitionnelle (4.5). Associons à chaque joueur $j \in \mathcal{N}$ une fonction d'utilité u_j. Considérons la fonction $\widetilde{V}$ associant, à toute coalition $S \subseteq \mathcal{N}$, l'ensemble $\widetilde{V}(S)$ défini par :*

$$\widetilde{V}(S) = \{a \in \mathbb{R}^s \ \ tel \ \ que \ \ \exists A \in V_m(S) : a_j = u_j(A_j), \quad \forall j \in S\}.$$

Si on a :

1. *u_j est continue et strictement croissante par rapport à $\geq$, $\forall j \in \mathcal{N}$.*
2. *$\forall j \in \mathcal{N}$, $\exists k \in \{1, ..., p\}$ tel que $\forall t_{-k} \in \mathbb{R}^{p-1}$, la fonction :*
   $f_{jk} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $t_k \mapsto f_{jk}(t_k) = u_j(t_k, t_{-k})$
   vérifie :

$$\begin{aligned} \underset{s \to -\infty}{Lim} f_{jk}(s) &= -\infty, & (4.21)\\ \underset{s \to +\infty}{Lim} f_{jk}(s) &= +\infty, & (4.22) \end{aligned}$$

alors le jeu $(\mathcal{N}, \widetilde{V})$ est un jeu monocritère sous forme coalitionnelle.

La condition 2 de la proposition (4.4) signifie que chacune des fonctions d'utilité u_j des joueurs, qui sont des fonctions scalaires à plusieurs variables $t = (t_1, ..., t_p) \in \mathbb{R}^p$, dispose d'une composante t_k qui lui permet, en fixant le reste des composantes t_{-k}, de rendre $u_j(t_k, t_{-k})$ aussi petit (respectivement aussi grand) que l'on veut en diminuant (resp. en augmentant) la valeur de t_k.

Lemme 4.1. *Sous les conditions 1 et 2 de la proposition (4.4), l'image de $\mathbb{R}^p$ par u_j, $j \in \mathcal{N}$, est $\mathbb{R}$ tout entier.*

Preuve du Lemme 4.1. *Rappelons le résultat suivant d'analyse, appelé théorème des valeurs intermédiaires :*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Supposons que $f(a) < f(b)$. On a alors :
$\forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists x \in [a, b] \quad tel \quad que : \quad y = f(x).$
Soit $j \in \mathcal{N}$, $u_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.
On veut montrer que l'image de $\mathbb{R}^p$ par u_j est $\mathbb{R}$ tout entier, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}^p \quad tel \quad que \quad a = u_j(A).$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A un élément quelconque de $\mathbb{R}^p$.
D'après la condition 2 de la proposition (4.4), on peut faire tendre $u_j(A)$ vers $-\infty$, en faisant tendre l'une des composantes de A vers $-\infty$. S'il s'agit de la composante k, on peut donc trouver une valeur $A'_k \in \mathbb{R}$ telle que $u_j(A'_k, A_{-k}) < a$. De même, puisque on peut faire tendre $u_j(A)$ vers $+\infty$ en augmentant infiniment la valeur de A_k, alors :

$$\exists A''_k \in \mathbb{R} \quad tel\ que \quad u_j(A''_k, A_{-k}) > a.$$

Par la suite, on a : $a \in [u_j(A'_k, A_{-k}), u_j(A''_k, A_{-k})]$.
La fonction à une variable réelle $u_j(., A_{-k})$ est continue sur $\mathbb{R}$, du fait de la continuité de u_j sur $\mathbb{R}^p$.
Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure alors à l'existence de

$$c \in [Min(A'_k, A''_K), Max(A'_k, A''_K)],$$

tel que : $u_j(c, A_{-k}) = a$. Il suffit de poser alors $A = (c, A_{-k})$. $\square$.

Nous allons à présent démontrer la proposition (4.4).

Preuve. *Il faut s'assurer ici que sous les conditions de continuité et de croissance stricte par rapport à $\geq$ des fonctions d'utilité des joueurs, la fonction $\widetilde{V}$ satisfait les conditions requises pour* *une fonction de coalitions dans la définition (2.3), à savoir :*

$$\widetilde{V}(S) \neq \emptyset, \quad si \quad S \neq \emptyset \quad et \quad \widetilde{V}(\emptyset) = \emptyset; \tag{4.23}$$

$$la \quad fonction \quad \widetilde{V}(S) \quad est \quad comprehensive; \tag{4.24}$$

$$\widetilde{V}(S) \quad est\ fermé; \tag{4.25}$$

$$\widetilde{V}(S) \cap (a_S + \mathbb{R}^s_+) \quad est\ borné, \quad \forall a_S \in \mathbb{R}^s. \tag{4.26}$$

Nous avons

$$\widetilde{V}(S) = \{a \in \mathbb{R}^s \quad tel \quad que \quad \exists A \in V_m(S) : \quad a_j = u_j(A_j), \quad \forall j \in S\}.$$

Comme (4.5) est un jeu multicritère sous forme coalitionnelle, alors la fonction V_m vérifie :

$$V_m(S) \neq \emptyset, \quad si \quad S \neq \emptyset \quad et \quad V_m(\emptyset) = \emptyset; \tag{4.27}$$

$$la \quad fonction \quad V_m(S) \quad est \quad comprehensive; \tag{4.28}$$

$$V_m(S) \quad est\ fermé; \tag{4.29}$$

$$\{B_S \in V_m(S) : A_S \ngeqq B_S\} \quad est\ borné, \quad \forall A_S \in \mathbb{R}^{p \times s}. \tag{4.30}$$

On a, par définition de $\widetilde{V}$,

$$\widetilde{V}(S) = \emptyset \Leftrightarrow V_m(S) = \emptyset.$$

Comme $V_m(S) \neq \emptyset$ si $S_m \neq \emptyset$ et $V_m(\emptyset) = \emptyset$, il s'en suit que : $\widetilde{V}(S) \neq \emptyset$ si $S \neq \emptyset$ et $\widetilde{V}(\emptyset) = \emptyset$. La première propriété que doit vérifier $\widetilde{V}$ est donc établie.

Montrons à présent que $\widetilde{V}$ est compréhensive, c'est-à-dire :

$$\forall S \subseteq \mathcal{N} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^s, \quad (a \in \widetilde{V}(S) \quad et \quad a \geqq b) \quad \Rightarrow \quad b \in \widetilde{V}(S). \tag{4.31}$$

Nous savons que V_m est compréhensive, c'est-à-dire :

$$\forall S \subseteq \mathcal{N}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{p \times s}, \quad (A \in V_m(S) \quad et \quad A \geqq B) \quad \Rightarrow \quad B \in V_m(S). \tag{4.32}$$

Soit une coalition S et $a, b \in \mathbb{R}^s$. Supposons que $a \in \widetilde{V}(S)$ et $a \geqq b$.
Comme $a \in \widetilde{V}(S)$, alors, par définition, $\exists A \in V_m(S) : a_j = u_j(A_j), \quad \forall j \in S$.
Considérons un indice $j \in S$. Comme $a \geqq b$, alors $a_j \geqq b_j$.
On a $a_j = u_j(A_j) = u_j(A_{1j}, A_{2j}, ..., A_{pj})$. Par hypothèse, il existe une composante $k \in \{1, ..., p\}$ telle que $\forall t_{-k} \in \mathbb{R}^{p-1}$, la fonction :

$$f_{jk}(.) : \quad t \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad f_{jk}(t) = u_j(t, t_{-k}) \in \mathbb{R}$$

vérifie

$$\lim_{t \to -\infty} f_{jk}(t) = -\infty \tag{4.33}$$

Posons $A_{(-k)j} = (A_{1j}, A_{2j}, ...A_{k-1,j}, A_{k+1,j}, ..., A_{pj})$. *On a :*

$$f_{jk}(A_{kj}) = u_j(A_j) = u_j(A_{kj}, A_{(-k)j}) = a_j. \tag{4.34}$$

La fonction f_{jk} *est continue, car* u_j *est continue. Par suite, comme* $a_j \geqq b_j$ *et compte tenu des relations (4.33), et (4.34), le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que :*

$$\exists B_{kj} \in]-\infty, A_{kj}], \quad tel \quad que \quad f_{jk}(B_{kj}) = b_j. \tag{4.35}$$

Par suite

$$\exists B_j \in \mathbb{R}^p, B_j = (A_{1j}, A_{2j}, ..., A_{k-1,j}, B_{k,j}, A_{k+1,j}, ..., A_{p,j}) \quad tel \quad que \quad u_j(B_j) = b_j. \tag{4.36}$$

Comme $A_{kj} \geqq B_{kj}$, *alors on a :* $A_j \geqq B_j$.
Comme j *a été pris quelconque dans* S, *alors l'existence de* B_j *a été établie pour tout* $j \in S$.
Considérons alors la matrice $B \in \mathbb{R}^{p\times s}$ *construite à partir des colonnes* $B_j, \quad j \in S$.
On a $A \geqq B$, *car* $A_j \geqq B_j, \quad \forall j \in S$.
Par suite, comme V_m *est compréhensive et* $A \in V_m(S)$, *alors :*

$$B \in V_m(S). \tag{4.37}$$

Par ailleurs, par construction de la matrice B, *on a :*

$$b_j = u_j(B_j), \quad \forall j \in S. \tag{4.38}$$

Les relations (4.37) et (4.38) entraînent $b \in \widetilde{V}(S)$. *Ceci signifie que* $\widetilde{V}$ *est compréhensive.*

Nous allons maintenant démontrer que $\widetilde{V}(S)$ *est fermé pour tout* $S \subseteq \mathcal{N}$.
Soit $S \subseteq \mathcal{N}$. *On a :*

$$\widetilde{V}(S) = u(V_m(S)) = \{u(A) = (u_1(A_1), \dots, u_p(A_p)), \quad A \in V_m(S)\}.$$

Comme chacune de ses composantes $u_j(.)$ *de la fonction est une fonction continue, la fonction vectorielle* $u(.) = (u_1(.), \dots, u_p(.))$ *est continue. D'autre part,* $V_m(S)$ *étant fermé pour tout* $S \subset \mathcal{N}$, *alors* $u(V_m(S))$ *est fermé, comme image d'un ensemble fermé par une application continue.*

Il reste à établir la dernière condition que doit vérifier $\widetilde{V}$, *à savoir :*

$$\widetilde{V}(S) \cap (a_S + \mathbb{R}^s_+) \quad est \ borné, \quad \forall a_S \in \mathbb{R}^s. \tag{4.39}$$

Montrer (4.39) revient à montrer que, pour $a_S \in \mathbb{R}^s$ *fixé, l'ensemble*

$$E = \{b_S \in \widetilde{V}(S), \quad tel\ que\ b_S \geqq a_S\}$$

est borné.

Démontrons que $\exists \widetilde{m}_S \in \mathbb{R}^s$ *tel que* $\widetilde{m}_S \geqq b_S, \quad \forall b_S \in E$.

Fixons $a_S \in \mathbb{R}^s$. *Nous avons par hypothèse*

$$\{B_S \in V_m(S) : A_S \ngeq B_S\} \text{ est borné}, \quad \forall A_S \in \mathbb{R}^{p\times s}. \tag{4.40}$$

Choisissons $A_S \in \mathbb{R}^{p\times s}$ *de façon à avoir :* $a_j = u_j(A_j), \quad \forall j \in S$. *On peut toujours faire ce choix, car l'image de* $\mathbb{R}^p$ *par* u_j *est* $\mathbb{R}$ *tout entier, d'après le lemme 4.1. En vertu de (4.40), si on note par*

$$G = \{B_S \in V_m(S), \quad \text{tel que } A_S \ngeq B_S\},$$

alors :

$$\exists M_S \in \mathbb{R}^{p\times s} \quad \text{tel que} \quad M_S \geqq B_S, \quad \forall B_S \in G. \tag{4.41}$$

Définissons les composantes du vecteur $\widetilde{m}_S \in \mathbb{R}^s$ *par :*

$$\widetilde{m}_j = u_j(M_j), \quad \forall j \in S. \tag{4.42}$$

Soit $b_S \in E$, *c'est-à-dire* $b_S \in \widetilde{V}(S)$ *et* $b_S \geqq a_S$.

Comme $b_S \in \widetilde{V}(S)$, *alors* $\exists B_S \in V_m(S)$ *tel que :* $b_j = u_j(B_j), \quad \forall j \in S$. *Ainsi,*

$$u_j(B_j) = b_j \geqq a_j = u_j(A_j), \quad \forall j \in S. \tag{4.43}$$

D'autre part, on a

$$A_S \ngeq B_S.$$

En effet, si on suppose le contraire, alors il existerait un $k \in S$ *tel que* $A_k \geq B_k$. *Comme la fonction* u_k *est strictement croissante par rapport à* $\geq$, *alors*

$$a_k = u_k(A_k) > u_k(B_k) = b_k,$$

qui est en contradiction avec (4.43). Ainsi, on a $B_S \in V_m(S)$ *et* $A_s \ngeq B_S$. *Par définition de* G, $B_S \in G$. *De (4.41), on a*

$$B_j \leqq M_j, \quad \forall j \in S.$$

et tenant compte que les fonctions u_j *sont croissantes par rapport à* $\geq$, *on déduit*

$$b_j = u_j(B_j) \leqq u_j(M_j) = \widetilde{m}_j,, \quad \forall j \in S,$$

ce qui démontre que E *est borné.* $\square$

Dans la suite de travail, lorsqu'on parlera de fonctions d'utilité, on supposera que les conditions de la proposition 4.4 sont vérifiées.

Proposition 4.5. *Soit $F_j(X) \subseteq \mathbb{R}^p$ l'ensemble des valeurs du critère vectoriel du joueur j dans le jeu (4.10). Si u_j est strictement croissante par rapport à $\geq$ sur $F_j(X)$, $\forall j \in \mathcal{N}$, alors :*

$$C(\mathcal{N}, \widetilde{V}) \neq \emptyset \Rightarrow C_P(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset.$$

Preuve. *Supposons que $C(\mathcal{N}, \widetilde{V}) \neq \emptyset$. Alors $\exists a \in \widetilde{V}(\mathcal{N})$ tel que a n'est dominé par aucun vecteur $b \in \mathbb{R}^n$.*

Par définition de $\widetilde{V}$, on a :

$$a \in \widetilde{V}(\mathcal{N}) \Rightarrow \exists A \in V_m(\mathcal{N}) \quad \textit{tel que} \quad a_j = u_j(A_j), \quad \forall j \in \mathcal{N}.$$

Nous allons montrer que $A \in C_P(\mathcal{N}, V_m)$.
Raisonnons par l'absurde : supposons que $A \notin C_P(\mathcal{N}, V_m)$. Alors $\exists B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et une coalition S tels que $B_S \in V_m(S)$ et $B_S \geq_c A_S$.
Soit le vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ défini par :

$$b_j = \begin{cases} u_j(A_j), & \textit{si} \;\; j \in S \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Alors $b_S \in \widetilde{V}(S)$(par définition de $\widetilde{V}$).
D'autre part, comme u_j est strictement croissante par rapport à $\geq$, $\forall j \in \mathcal{N}$, alors :
$(B_j \geq A_j, \quad \forall j \in S) \Rightarrow (u_j(B_j) > u_j(A_j), \quad \forall j \in S)$
$\Rightarrow \;\; b_j > a_j, \quad \forall j \in S$, *ce qui contredit l'hypothèse $a \in C(\mathcal{N}, \widetilde{V})$.* □

Remarque 4.4. *Le jeu $(\mathcal{N}, \widetilde{V})$ est un jeu coopératif monocritère. Le théorème 2.4 donne une condition suffisante pour avoir $C(\mathcal{N}, \widetilde{V}) \neq \emptyset$.*

Corollaire 4.2. *Soit $F_j(X) \subseteq \mathbb{R}^p$ l'ensemble des valeurs du critère vectoriel du joueur j dans le jeu (4.10). Si u_j est strictement croissante par rapport à $\geq$ sur $F_j(X)$, $\forall i \in \mathcal{N}$, alors :*

$$C(\mathcal{N}, \widetilde{V}) \neq \emptyset \Rightarrow C_S(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset.$$

Preuve. *Supposons que u_j est strictement croissante par rapport à $\geq$ sur $F_j(X)$, $\forall j \in \mathcal{N}$, alors, d'après la proposition 4.5*

$$C(\mathcal{N}, \widetilde{V}) \neq \emptyset \Rightarrow C_P(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset.$$

Comme $C_P(\mathcal{N}, V_m) \subseteq C_S(\mathcal{N}, V_m)$, alors on obtient :

$$C_P(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset \Rightarrow C_S(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset,$$

ou encore

$$C(\mathcal{N}, \widetilde{V}) \neq \emptyset \Rightarrow C_S(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset. \quad \square$$

Nous allons à présent nous intéresser à un cas particulier pour les fonctions d'utilité des joueurs, celui où les joueurs peuvent assigner des poids à leurs critères. Ces poids représentent l'importance relative de ces critères.
Posons $u_j(X_j) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} X_{ij} \quad \forall i \in \mathcal{N}$. On a alors :

Proposition 4.6. *Si* $\lambda_{ij} > 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall j \in \{1,..,p\}$, *alors :*
Les fonctions $u_j(a) = u_j(a_1,\ldots,a_p) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij}$ *sont strictement croissantes par rapport à* $\geq$ *sur* $\mathbb{R}^p$

Preuve. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}^p$, $a \geq b$.
On a alors

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,..,p\} & a_i \geqq b_i \\ \exists k \in \{1,..,p\} & : a_k > b_k \end{cases}$$

Comme $\lambda_{ij} > 0 \ \ \forall i \in \mathcal{N}$, *on aura :*

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,..,p\} & \lambda_{ij} a_i \geqq \lambda_{ij} b_i \\ \exists k \in \{1,..,p\} & : \lambda_{kj} a_k > \lambda_{kj} b_k \end{cases}$$

En sommant les inégalités ci-dessus membre à membre, on aura :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} a_i > \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} b_i.$$

D'où : $u_j(a) > u_j(b)$. $\square$

Remarque 4.5. *Les fonctions* $u_j, \ \ j \in \mathcal{N}$ *sont continues (fonctions linéaires). On peut également faire tendre* $u_j(a)$ *vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *en agissant sur une composante quelconque de* a*. Donc si* $\lambda_{ij} > 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall j \in \{1,..,p\}$, *toutes les conditions de la proposition 4.4 sont satisfaites et on peut procéder à la réduction du jeu multicritère* $(\mathcal{N}, V_m)$ *au jeu monocritère* $(\mathcal{N}, \widetilde{V})$*. Ce procédé est connu sous le nom de scalarisation.*

Ayant montré dans la section précédente que la scalarisation conduit à un jeu coopératif monocritère bien défini, nous allons exploiter ce procédé pour obtenir des généralisations, au cas multicritère, des principaux résultats d'existence pour le noyau d'un jeu coopératif monocritère.

4.3.1 Existence du noyau efficace d'un jeu multicritère cardinal balancé

Considérons un jeu coopératif monocritère (2.3). Associons à chaque coalition $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{N}$ l'ensemble $V_0(S) \subseteq \mathbb{R}^n$ défini par :

$$V_0(S) = \begin{cases} V(S) \times \{0^{\mathcal{N}\setminus\mathcal{S}}\}, & \text{si } S \neq \emptyset, \\ \{0\}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\{0\}$ est l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles. Nous pouvons à présent énoncer la définition suivante :

Définition 4.14. [31] Le jeu (2.3) est dit cardinal balancé, si pour toute famille balancée [1] β de coalitions avec le système de poids $(\delta_S)_{S\in\beta}$, on a :

$$\sum_{S\in\beta} \delta_S V_0(S) \subseteq V(\mathcal{N}). \tag{4.44}$$

On a alors le résultat d'existence suivant pour le noyau d'un jeu coopératif monocritère à gains non transférables :

Théorème 4.2. *[31] Si un jeu coopératif coalitionnel (2.3)est cardinal balancé, alors son noyau* $C(\mathcal{N}, V) \neq \emptyset$.

Nous allons montrer dans cette section qu'on peut énoncer un résultat analogue pour les jeux coopératifs multicritères.

Jeu multicritère cardinal balancé

Considérons un jeu coopératif multicritère avec coalitions (4.5). Définissons pour la fonction V_{mo} par :

$$V_{mo}(S) = \begin{cases} V_m(S) \times \{0^{\mathcal{N}\setminus\mathcal{S}}\}, & \text{si } S \neq \emptyset, \\ \{0\}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\{0\}$ est l'ensemble constitué de l'unique élément $0 \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Définition 4.15. Le jeu (4.5) est dit cardinal balancé, si pour toute famille balancée β de coalitions avec le système de poids $(\delta_S)_{S\in\beta}$, on a :

$$\sum_{S\in\beta} \delta_S V_{m0}(S) \subseteq V_m(\mathcal{N}). \tag{4.45}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de cette section.

Théorème 4.3. *Si le jeu coopératif multicritère (4.5) est cardinal balancé, alors son noyau efficace n'est pas vide, c.-à-d.* $C_P(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset$.

1. Voir la définition (2.22)

Preuve du Théorème. *Supposons que le jeu (4.5) est cardinal balancé. Soient les scalaires* $\lambda_{ij} > 0, \quad i \in \{1,..,p\}, \quad j \in \mathcal{N}$.
Définissons le jeu scalarisé

$$(\mathcal{N}, \widetilde{V}), \tag{4.46}$$

où

$$\widetilde{V}(S) = \{a \in \mathbb{R}^s \quad tel\ que \quad \exists A \in V_m(S) : a_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} A_{ij}, \quad \forall j \in S\}.$$

Montrons que le jeu $(\mathcal{N}, \widetilde{V})$ *est balancé. Soit* β *une collection balancée quelconque de coalitions et* $(\delta_S)_{S \in \beta}$ *un système de poids associé à* β*. Si on démontre que :*

$$\bigcap_{S \in \beta} \widetilde{V}(S) \subseteq \widetilde{V}(\mathcal{N}), \tag{4.47}$$

alors, on conclurait, d'après la définition 2.25 que le jeu (4.46) est balancé.

Si $\bigcap_{S \in \beta} \widetilde{V}(S) = \emptyset$*, alors l'inclusion (4.47) est vérifiée. Supposons que* $\bigcap_{S \in \beta} \widetilde{V}(S) \neq \emptyset$ *et considérons un élément quelconque* $a \in \bigcap_{S \in \beta} \widetilde{V}(S)$.
Alors, par définition de $\widetilde{V}(S)$*, on a* $a_S \in \widetilde{V}(S)$, $\forall S \in \beta$*, ce qui se traduit par :*

$$\forall S \in \beta, \quad \exists A_S \in V_m(S) \quad tel \quad que \quad a_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} A_{ij}, \quad \forall j \in S.$$

Définissons l'élément $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ *par :*

$$B_{ij} = \sum_{\substack{S \in \beta \\ S \ni j}} \delta_S A_{ij}.$$

Par construction, on a $B \in \sum_{S \in \beta} \delta_S V_0(S)$*. D'autre part, le jeu (4.5) étant cardinal balancé, on déduit* $B \in V(\mathcal{N})$*. Définissons les composantes du vecteur* $b \in \mathbb{R}^n$ *par :*

$$b_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} B_{ij} \forall j \in \mathcal{N}.$$

Par définition du jeu (4.46), sachant que $B \in V(\mathcal{N})$*, on aura :*

$$b \in \widetilde{V}(\mathcal{N}). \tag{4.48}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
b_j &= \sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}(\sum_{\substack{S\in\beta\\ j\in S}}\delta_S A_{ij}) == \sum_{i=1}^{p}\sum_{\substack{S\in\beta\\ j\in S}}\delta_S\lambda_{ij}A_{ij}\\
&= \sum_{\substack{S\in\beta\\ j\in S}}\sum_{i=1}^{p}\delta_S\lambda_{ij}A_{ij} = \sum_{\substack{S\in\beta\\ j\in S}}\delta_S(\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}A_{ij})\\
&= \sum_{\substack{S\in\beta\\ j\in S}}\delta_S b_j = (\sum_{\substack{S\in\beta\\ j\in S}}\delta_S)b_j\\
&= b_j \qquad (\sum_{\substack{S\in\beta\\ j\in S}}\delta_S = 1, \quad \forall j\in S).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$b = a. \tag{4.49}$$

Par suite, (4.48) et (4.49) entraînent $a \in \widetilde{V}(\mathcal{N})$, ce qui signifie que le jeu (4.46) est balancé. Avec le théorème de Scarf 2.4, on peut conclure que : $C(\mathcal{N}, \widetilde{V}) \neq \emptyset$. On a alors, d'après la proposition (4.5), $C_P(\mathcal{N}, V) \neq \emptyset$.□

4.3.2 Existence du noyau efficace d'un jeu multicritère cardinal convexe

Définition 4.16. Un jeu coopératif (monocritère) à gains non transférables (2.3) est dit cardinal convexe, si

$$V_0(S) + V_0(T) \subseteq V_0(S\cap T) + V_0(S\cup T), \qquad \forall S, T \subseteq \mathcal{N}.$$

On a alors le résultat suivant de Sharkey (1981) :

Théorème 4.4. *[38] Si dans un jeu coopératif monocritère cardinal convexe (2.3), $V(\mathcal{N})$ est convexe, alors $C(\mathcal{N}, V) \neq \emptyset$.*

Définition 4.17. Un jeu coopératif (multicritère) à gains non transférables (4.5) est dit cardinal convexe, si

$$V_{m0}(S) + V_{m0}(T) \subseteq V_{m0}(S\cap T) + V_{m0}(S\cup T), \qquad \forall S, T \subseteq \mathcal{N}.$$

On généralise le théorème de Sharkey au cas d'un jeu multicritère.

Théorème 4.5. *Si dans un jeu coopératif multicritère cardinal convexe (4.5), $V_m(\mathcal{N})$ est convexe, alors $C_P(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset$.*

Preuve du Théorème. *Considérons le jeu coopératif multicritère cardinal convexe (4.5) et définissons le jeu coopératif monocritère associé (4.46). Nous allons montrer que le jeu (4.46)est cardinal convexe, c'est-à-dire :*

$$\widetilde{V}_0(S)+\widetilde{V}_0(T)\subseteq \widetilde{V}_0(S\cap T)+\widetilde{V}_0(S\cup T),\qquad \forall S,T\subseteq \mathcal{N}.$$

Soit $a\in\mathbb{R}^n$ *et* $S,T\subseteq\mathcal{N}$. *Supposons que* $a\in\widetilde{V}_0(S)+\widetilde{V}_0(T)$. *Alors,* $\exists b\in\widetilde{V}_0(S)$ *et* $\exists c\in\widetilde{V}_0(T)$ *tels que :* $a=b+c$.

Comme $b\in\widetilde{V}_0(S)$, *alors* $\exists B\in V_{m0}(S)$ *tel que* $b_j=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}B_{ij},\quad \forall j\in\mathcal{N}$.

De même :

$$\exists C\in V_{m0}(T),\quad \textit{tel que}\ \ c_j=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}C_{ij},\quad \forall j\in\mathcal{N}.$$

En posant $A=B+C$, *on aura* $A\in V_{m0}(S)+V_{m0}(T)$.

Comme le jeu (4.5) est cardinal convexe, alors $A\in V_{m0}(S\cap T)+V_{m0}(S\cup T)$. *Par conséquent, A peut s'écrire sous la forme :*

$$A=R+W\quad \textit{avec}\ \ R\in V_{m0}(S\cap T),\ \ W\in V_0(S\cup T).$$

Définissons deux vecteurs r et w de $\mathbb{R}^n$ *par :*

$$r_j=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}R_{ij},\quad \forall j\in\mathcal{N};$$

$$w_j=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}W_{ij},\quad \forall j\in\mathcal{N}.$$

Par définition de $\widetilde{V}$, *on a :*

$$r\in\widetilde{V}_0(S\cap T)\quad \textit{et}\ \ w\in\widetilde{V}_0(S\cup T).$$

Ainsi,

$$r+w\in\widetilde{V}_0(S\cap T)+\widetilde{V}_0(S\cup T). \tag{4.50}$$

D'autre part, on a :

$$a=r+w. \tag{4.51}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} A=B+C\ &\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}B_{ij}+\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}C_{ij} &(4.52)\\ &\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}A_{ij}=b_j+c_j &(4.53)\\ &\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}A_{ij}=a_j. &(4.54)\end{aligned}$$

De même, on aura :

$$\begin{aligned} A = R + W \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} R_{ij} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} W_{ij}, \quad \forall j \in \mathcal{N} && (4.55) \\ &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} A_{ij} = r_j + w_j, \quad \forall j \in \mathcal{N}. && (4.56) \end{aligned}$$

Il s'en suit que : $a_j = r_j + w_j, \quad \forall j \in \mathcal{N}$, *i.e :* $a = r + w$.

De (4.50) et (4.51), on déduit $a \in \widetilde{V}_0(S \cap T) + \widetilde{V}_0(S \cup T)$, *ce qui signifie que le jeu (4.5) est cardinal convexe.*

La deuxième partie de la preuve consiste à montrer que la convexité de $V_m(\mathcal{N})$ *entraîne la convexité de* $\widetilde{V}(\mathcal{N})$. *Soient* $b, c \in \widetilde{V}(\mathcal{N})$ *et* $\theta \in [0, 1]$. *Comme* $b \in \widetilde{V}(\mathcal{N})$, *alors* $\exists B \in V_m(\mathcal{N})$ *tel que :*

$$b_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} B_{ij}, \quad \forall j \in \mathcal{N}.$$

De même, comme $c \in \widetilde{V}(\mathcal{N})$, *alors* $\exists C \in V(\mathcal{N})$ *tel que :*

$$c_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} C_{ij}, \quad \forall j \in \mathcal{N}.$$

Par hypothèse, $V_m(\mathcal{N})$ *est convexe, d'où* $\theta B + (1 - \theta) C = D \in V_m(\mathcal{N})$.
Définissons le vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ *par :*

$$d_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} D_{ij}, \quad \forall j \in \mathcal{N}.$$

Par construction de d, *on a* $d \in \widetilde{V}(\mathcal{N})$. *D'autre part, on a* $d = \theta b + (1 - \theta) c$. *En effet, pour* $j \in \mathcal{N}$, *on a :*

$$\begin{aligned} d_j &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} D_{ij} == \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} [\theta B_{ij} + (1 - \theta) C_{ij}] \\ &= \theta \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} B_{ij} + (1 - \theta) \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} C_{ij} = \theta b_j + (1 - \theta) c_j. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\widetilde{V}(\mathcal{N})$ *convexe.*

En conclusion, nous avons montré que si (4.5) est cardinal convexe et $V_m(\mathcal{N})$ *convexe, alors on aura le jeu (4.46) est cardinal convexe et* $\widetilde{V}(\mathcal{N})$ *est convexe. Le théorème 4.4 permet alors de conclure que* $C(\mathcal{N}, \widetilde{V}) \neq \emptyset$. *La proposition (4.5) permet alors de conclure que* $C_P(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset$. $\square$

4.4 Existence du noyau faiblement efficace d'un jeu coopératif multicritère

Rappelons tout d'abord que le noyau faiblement efficace d'un jeu multicritère contient son noyau efficace. Il s'ensuit que l'existence d'issues dans le noyau efficace du jeu conduit à l'existence des mêmes issues dans le noyau faiblement efficace. Ceci signifie que les résultats d'existence que nous avons montrés pour le noyau efficace demeurent valables pour le noyau faiblement efficace. C'est dans l'espoir d'avoir des conditions d'existence plus faibles que nous développons cette section.

Considérons donc le jeu coopératif multicritère (4.5) et définissons la suite des jeux monocritères

$$(\mathcal{N}, V^1), (\mathcal{N}, V^2), \ldots, (\mathcal{N}, V^p), \tag{4.57}$$

où nous associons à chaque k-ème critère un jeu $(\mathcal{N}, V^k)$. La fonction V^k, $k \in \{1, 2, ..., p\}$ associe à toute coalition S, des vecteurs de $\mathbb{R}^s$ constituant la k-ème ligne d'un élément de $V_m(S)$. En résumé, si la fonction V_m donne les paiements garantis sur l'ensemble des critères pour les membres d'une coalition S, la fonction V^k, reprend les données de V_m, mais pour le critère k uniquement. Autrement dit, soit une coalition $S \subseteq \mathcal{N}$ et un élément $A \in V_m(S) \subseteq \mathbb{R}^{p \times s}$, on notera par $P_k(A)$ la k-ème projection de A sur l'espace $\mathbb{R}^s$. Ainsi, si on note par a_k la k-ème ligne de la matrice A, alors $P_k(A) = a_k \in \mathbb{R}^s$.

Proposition 4.7. *Si dans le jeu coopératif multicritère (4.5), il existe un $k \in \{1, 2, ..., p\}$ tel que $C(\mathcal{N}, V^k) \neq \emptyset$, alors le noyau faiblement efficace $C_S(\mathcal{N}, V_m)$ du jeu multicritère (4.5) n'est pas vide.*

L'idée de cette proposition est simple, si la coalition qui dévie peut améliorer strictement chacun des critères de ses membres, dans le jeu multicritère, alors elle améliore strictement chacun des critères, considérés séparément dans les jeux composantes (4.57). Nous allons néanmoins en donner une preuve formelle.

Preuve. *Montrer la proposition précédente revient à montrer :*

$$C_S(\mathcal{N}, V_m) = \emptyset \Rightarrow \forall k \in \{1, 2, ..., p\}, \quad C(N, V^k) = \emptyset. \tag{4.58}$$

Supposons que $C_S(\mathcal{N}, V_m) = \emptyset$.

Alors, si A est un élément quelconque de $V_m(\mathcal{N})$, alors on peut trouver $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et une coalition S tels que : $B_S > A_S$.

Fixons un critère quelconque $k \in \{1, 2, ..., p\}$ et soit μ un élément de $V^k(\mathcal{N})$, alors μ est la k-ème ligne d'un élément $A \in V_m(\mathcal{N})$ (par définition des jeux (4.57)). Comme $C_S(\mathcal{N}, V_m) = \emptyset$, *alors il existe une coalition $S \subseteq \mathcal{N}$ et une matrice $B_S \in \mathbb{R}^{p\times s}$ tels que $B_S > A_S$. Ainsi, on a trouvé une coalition $S \subseteq \mathcal{N}$, un vecteur b_k, qui est la k-ème de la matrice B_S tels que $b_k > \mu$, ce qui signifie que $\mu \notin C(\mathcal{N}, V^k)$. Comme μ est pris quelconque, alors $C(\mathcal{N}, V^k) = \emptyset$.*

IL suffit donc qu'un des jeux composantes $(\mathcal{N}, V^k)$ (monocritère) ait un noyau non vide pour avoir $C_S(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset$. Comme un jeu balancé (monocritère) possède un noyau non vide, il suffit qu'un des jeux composantes $(\mathcal{N}, V^k)$ soit balancé.

On dira que le jeu coopératif multicritère (4.5) est balancé par rapport au critère k, s'il existe un $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que le jeu composante $(\mathcal{N}, V^k)$ est balancé. Ceci justifie le résultat suivant :

Théorème 4.6. *Si le jeu coopératif multicritère (4.5) est balancé par rapport à un de ses critères, alors $C_S(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset$.*

Remarquons que ce résultat est plus général que le théorème 4.7 ci-après, qui constitue une translation directe du théorème de Scarf au cas multicritère.

Considérons le jeu coopératif multicritère (4.5). Posons pour $V_m^S = V_m(S) \times \mathbb{R}^{p\times(n-s)}$, c'est-à-dire qu'on obtient un élément de V_m^S à partir d'un élément de $V_m(S)$ en complétant les colonnes correspondantes aux joueurs n'appartenant pas à S par des réels quelconques. On définit alors un jeu balancé multicritère par :

Définition 4.18. Le jeu coopératif multicritère (4.5) est balancé, si

$$\bigcap_{S\in\beta} V_m^S \subseteq V_m(\mathcal{N}) \tag{4.59}$$

pour toute famille balancée β de coalitions.

Théorème 4.7. *Si le jeu multicritère (4.5) est balancé, alors $C_S(\mathcal{N}, V_m) \neq \emptyset$.*

En effet, si un jeu multicritère est balancé, au sens de la définition (4.18), alors il sera balancé par rapport à chacun de ses critères, alors que que le théorème 4.6 exige que le jeu soit balancé par rapport à un critère seulement.

Pour établir ce résultat, montrons le lemme suivant :

Lemme 4.2. *Soit un jeu coopératif multicritère $(\mathcal{N}, V_m)$. Si $(\mathcal{N}, V_m)$ est balancé, alors $(\mathcal{N}, V_m)$ est balancé par rapport à chacun de ses critères.*

Preuve du Lemme 4.2. *Considérons le jeu coopératif multicritère $(\mathcal{N}, V_m)$. Supposons que $(\mathcal{N}, V_m)$ est balancé.*

Considérons un critère quelconque $k \in \{1, 2, ..., p\}$, et montrons que le jeu $(\mathcal{N}, V^k)$ est balancé. Soit β une famille balancée de coalitions. Nous devons montrer que :

$$\bigcap_{S \in \beta} V^{k,S} \subseteq V^k(\mathcal{N}) \tag{4.60}$$

(Notation : si la fonction de coalition est $V = V^k$, alors V^S sera noté $V^{k,S}$).
Si $a \in \bigcap_{S \in \beta} V^{k,S}$, on aura :

$$a \in V^{k,S} \quad \forall S \in \beta. \tag{4.61}$$

Par suite :

$$a^S \in V^k(S) \quad \forall S \in \beta. \tag{4.62}$$

Construisons la matrice $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ de la manière suivante :

- $A_{kj} = a_j \quad \forall j \in \{1, .., n\}$
- $A_{ij} = \eta \ \forall i \in \{1, .., p\}, i \neq k, \quad \forall j \in \{1, .., n\}$.

$\eta \in \mathbb{R}$ est une constante. Donc la k^{ieme} ligne de A est le vecteur a. Si la constante η est choisie suffisamment petite, on aura $A^S \in V(S) \forall S \in \beta$.
En effet, si on fixe $S \in \beta$, alors, en vertu de (4.62), et de la définition de $V^k(S)$, on peut trouver un elément B^S dans $V(S)$ tel que a^S est la k^{ieme} ligne de B^S.
Si on choisit $\eta = \eta_S$ avec $\eta_S < \underset{i,j}{Inf} \ \ B^S_{ij}$ alors on aura :$B^S \geqq A^S$.
Par suite, comme l'ensemble $V(S)$ est compréhensif, on aura $A^S \in V(S)$.
En posant $\eta = \underset{S \in \beta}{Inf} \ \ \eta_S$, on aura :
$A^S \in V(S) \quad \forall S \in \beta$.
On aura alors $A \in V^S_m \quad \forall S \in \beta$, c'est à dire :
$A \in \bigcap_{S \in \beta} V^S_m$.
Le jeu $(\mathcal{N}, V_m)$ étant balancé, nous avons :

$$\bigcap_{S \in \beta} V^S_m \subseteq V_m(\mathcal{N}) \tag{4.63}$$

Par suite, $A \in V_m(\mathcal{N})$.
Mais la k^{ieme} ligne de A n'est autre que a. Donc, par définition de $V^k(\mathcal{N})$, on aura $a \in V^k(\mathcal{N})$.
La dernière inclusion signifie que $(\mathcal{N}, V^k)$ est balancé.

Le théorème (4.7) découle du théorème (4.6) et du lemme (4.2).

4.5 Interprétation stratégique du noyau d'un jeu multicritère

Considérons le jeu coopératif multicritère sous forme normale (4.1) et le jeu coopératif multicritère sous forme coalitionnelle (4.11). Définissons la fonction $F : X_{\mathcal{N}} \to \mathbb{R}^{p\times n}$ par $F(x) = (F_1(x), .., F_n(x))$, $\forall x \in X_{\mathcal{N}}$. On définit le α-noyau du jeu (4.1) par :

Définition 4.19. Le α-noyau de (4.1) est l'ensemble

$$E_m = \{x \in X_{\mathcal{N}}, \text{ tel que } F(x) \in C(\mathcal{N}, V_{m\alpha})\}.$$

Il découle de la définition précédente et de la définition de la α-efficacité pour un jeu multicritère, que selon la notion de dominance via une coalition utilisée dans la définition de $C(\mathcal{N}, V_\alpha)$, dominance au sens de Pareto ou au sens de Slater, deux variantes d'un concept de solution que nous appellerons respectivement le α-noyau efficace, et le α-noyau faiblement efficace du jeu (4.1).

Définition 4.20. Le α-noyau efficace du jeu (4.1) est l'ensemble des issues $\overline{x} \in X_{\mathcal{N}}$ telles que : pour toute coalition $K \subseteq \mathcal{N}$, $\forall x_K \in X_K, \exists y_{-K} \in X_{-K}$ tel que le système :

$$F_j(x_K, y_{-K}) \geq F_j(\overline{x}), \quad j \in K$$

soit incompatible.

Définition 4.21. Le α-noyau faiblement efficace du jeu (4.1) est l'ensemble des issues $\overline{x} \in X_{\mathcal{N}}$ telles que :
pour toute coalition $K \subseteq \mathcal{N}$, $\forall x_K \in X_K, \exists y_{-K} \in X_{-K}$ tel que le système :

$$\forall j \in K : F_j(x_K, y_{-K}) > F_j(\overline{x}), \quad j \in K$$

est incompatible.

En utilisant la fonction de coalition $V_{m\beta}$ définie pour un jeu multicritère (4.1), on obtient la généralisation suivante du β-noyau

Définition 4.22. Le β-noyau efficace du jeu (4.1) est l'ensemble des issues $\overline{x} \in X_{\mathcal{N}}$ vérifiant : $\forall K \subsetneq \mathcal{N}$, $\exists y_{-K} \in X_{-K}$ tel que $\nexists x_K \in X_K$ qui vérifie le système :

$$\begin{cases} \forall i \in K : F_i(x_K, y_{-k}) \geqq F_i(\overline{x}) \\ \\ \exists j \in K : F_j(x_K, y_{-K}) \geq F_j(\overline{x}) \end{cases}$$

Définition 4.23. Le β-noyau faiblement efficace du jeu (4.1) est l'ensemble des issues $\overline{x} \in X_{\mathcal{N}}$ vérifiant :

$\forall K \subsetneq \mathcal{N}, \quad \exists y_{-K} \in X_{-K}$ tel que $\nexists x_K \in X_K$ qui vérifie le système :

$$\forall j \in K : F_j(x_K, y_{-k}) > F_j(\overline{x}).$$

4.5.1 Conditions d'existence du α-noyau d'un jeu coopératif multicritère sous forme stratégique

:

Existence du α-noyau efficace

Dans notre recherche de conditions d'existence pour les variantes de α-noyau, efficace et faiblement efficace, d'un jeu multicritère sous forme stratégique

$$\langle \mathcal{N}, \{X_j\}_{j\in\mathcal{N}}, \{F_j\}_{j\in\mathcal{N}} \rangle, \tag{4.64}$$

nous allons exploiter le résultat d'existence connu pour le α-noyau d'un jeu monocritère sous forme stratégique (2.1). On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.8. *[35] Supposons que dans le jeu (2.1), on a :*

1. *$\forall j \in \mathcal{N}$, X_j un sous-ensemble non vide, convexe et compact d'un espace vectoriel de dimension finie ;*
2. *$\forall j \in \mathcal{N}$, f_j est une fonction continue et quasi-concave.*

Alors, le α-noyau du jeu (2.1) n'est pas vide.

Nous allons maintenant nous intéresser aux questions d'existence du α-noyau efficace d'un jeu coopératif multicritère. Nous allons exploiter le procédé classique de scalarisation.

Associons au joueur j les réels strictement positifs $\lambda_{jk}, \quad k = 1, ..., r(j)$ et définissons la fonction de gains $f_j : X \to \mathbb{R}$, par :

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^{r(j)} \lambda_{jk} F_{jk}(x). \tag{4.65}$$

Considérons le jeu coopératif (monocritère) :

$$\langle \mathcal{N}, \{X_j\}_{j\in\mathcal{N}}, \{f_j\}_{j\in\mathcal{N}} \rangle. \tag{4.66}$$

Proposition 4.8. *Le α-noyau du jeu (4.66) est un sous-ensemble du α-noyau efficace du jeu multicritère (4.64).*

Preuve. *Raisonnons par la contre-opposée : supposons que $\overline{x} \in X$ ne soit pas dans le α-noyau du jeu multicritère (4.64). Par définition, il existe une coalition K de joueurs qui peut améliorer (au sens de la relation de préférence) les gains de tous ses membres, quelle que soit la réaction de la contre-coalition. Autrement dit*
$\exists K \subseteq \mathcal{N}, \quad \exists x_K \in X_K, \forall y_{-K} \in X_{-K}$:

$$F_j(x_K, y_{-k}) \geq F_j(\overline{x}), \quad \forall j \in K. \tag{4.67}$$

De (4.65) et (4.67), on déduit :
$\exists K \subseteq \mathcal{N}, \quad \exists x_K \in X_K, \forall y_{-K} \in X_{-K}$:

$$\forall j \in K : f_j(x_K, y_{-k}) > f_j(\overline{x}) \tag{4.68}$$

ce qui signifie que $\overline{x}$ n'est pas dans le α-noyau du jeu (4.66). $\square$.

Corollaire 4.3. *Si le α-noyau du jeu (4.66) n'est pas vide, alors le α-noyau efficace du jeu multicritère (4.64) n'est pas vide.*

Le théorème 4.8 nous donne des conditions suffisantes pour que le α-noyau du jeu (4.66) ne soit pas vide. La question est : sous quelles conditions sur les fonctions F_j, les fonctions f_j seraient-elles quasi-concaves ? On sait que, si les fonctions $F_{jk}(x)$, alors $f_j(x) = \sum_{k=1}^{r(j)} \lambda_{jk} F_{jk}(x)$, définie dans (4.65), sera concave. Ceci nous permet de formuler le résultat suivant :

Théorème 4.9. *Supposons que dans le jeu (4.64), on a :*

1. *$\forall j \in \mathcal{N}$, X_j un sous ensemble non vide, convexe et compact d'un espace vectoriel de dimension finie,*
2. *$\forall j \in \mathcal{N}$, $\forall k = 1..r(j)$, F_{jk} continue et concave,*

alors le α-noyau du jeu (4.64) n'est pas vide.

Ce théorème impose des conditions trop fortes sur les fonctions F_{jk}. En effet, seule la quasi-concavité, et non la concavité, est nécessaire dans le cas monocritère. Malheureusement, on peut voir rapidement que la scalarisation ne conserve pas la quasi-concavité.

Existence du α-noyau faiblement efficace

Pour le α-noyau faiblement efficace, un raisonnement identique à celui de la section (4.4) permet de conclure que si le α-noyau d'un des jeux composantes obtenu en considérant un seul critère pour chaque joueur est non vide, alors il en est de même pour le noyau faiblement efficace du jeu multicritère. Cette remarque, et compte tenu du théorème (4.8), permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 4.10. *Si dans le multicritère (4.64), on a :*

1. *$\forall j \in \mathcal{N}$, X_j un sous-ensemble non vide, convexe et compact d'un espace vectoriel de dimension finie,*
2. *Chaque joueur j possède au moins un critère k, pour lequel : F_{jk} est continue et quasi-concave.*

Alors le α-noyau faiblement efficace du jeu (4.64) est non vide

4.5.2 α-noyau équitable

Dans un jeu monocritère, si un joueur envisage d'améliorer sa situation, en entrant dans une coalition par exemple, cette amélioration se traduit mathématiquement d'une manière unique : augmenter la valeur de sa fonction de gains. Dans un jeu multicritère, par contre, le mot "améliorer" peut revêtir plusieurs significations. On comprend que la généralisation d'un concept de solution monocritère au cas multicritère dépendra de la signification que les joueurs donnent au terme "améliorer". Considérons la situation où le comportement des joueurs est inspiré du principe de justice de Rawls : donner plus aux plus pauvres. C'est-à-dire qu'un joueur est intéressé avant tout par l'amélioration de la plus mauvaise valeur sur l'ensemble de ses critères. L'adoption de cette hypothèse lors de la généralisation du α-noyau va donner un concept que nous appellerons le noyau équitable. Le mot "équitable" se comprend, si on interprète chaque joueur comme une organisation contenant plusieurs membres, alors le comportement, décrit ci-dessus, consiste à minimiser le mécontentement du membre le plus lésé de l'organisation.

Définition 4.24. On appelle noyau équitable du jeu (4.64), l'ensemble des issues $\overline{x} \in X$ vérifiant :
pour toute coalition $K \subseteq \mathcal{N}$, $\forall x_K \in X_K, \exists y_{-K} \in X_{-K}$ telle que le système suivant :

$$\underset{i=1,\ldots,r(j)}{Min} F_{jk}(x_K, y_{-K}) > \underset{i=1,\ldots,r(j)}{Min} F_{jk}(\overline{x}), \quad j \in K$$

n'est pas vérifié.

Cette notion a été introduite en guise de perspective de recherche que ce soit ses propriétés ou ses conditions d'existence.

conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la notion de jeu coopératif multicritère sous forme coalitionnelle, et défini un concept de solution à partir de cette forme : le noyau $C(\mathcal{N}, V_m)$. Nous avons distingué deux variantes, selon le concept d'optimalité utilisé : le noyau faiblement efficace et le noyau efficace et nous avons établi des résultats d'existence pour ces deux variantes qui sont la généralisation de résultats analogues connus pour le cas monocritère. Nous nous sommes ensuite intéressés à des jeux multicritères donnés directement sous forme stratégique. Nous avons défini pour cette forme les concepts de α-noyau faiblement efficace et faiblement efficace du jeu et établit certaines conditions d'existence. Nous avons également introduit la notion de α-noyau équitable.

Conclusion Générale

L'objet de notre travail était de répondre aux deux préoccupations suivantes :

1. Faire une synthèse sur les travaux réalisé autour de la question de formation de coalitions et explorer leurs conditions de stabilité.
2. Faire une synthèse sur les concepts de solutions définis pour les jeux coopératifs monocritères avec coalitions et gains non transférables et examiner la possibilité de leur extension au cas multicritère.

Ce mémoire a été rédigé dans l'objectif de répondre à ces deux préoccupations. Ainsi, le chapitre 2 a présenté les principaux concepts de solution pour un jeu coopératif monocritère donné sous forme stratégique ou coalitionnelle. Le chapitre 3 est une synthèse des principaux modèles de formation de coalitions dans un un jeu, rencontrés dans la littérature. Le chapitre 4 constitue l'essentiel de notre contribution qu'on peut résumer par :

1. Introduction d'un formalisme de la forme coalitionnelle d'un jeu coopératif multicritère à gains non transférables et généralisation des notions d'efficacité α et β qui permettent de construire cette forme coalitionnelle à partir de la forme stratégique du jeu.
2. Introduction des concepts de noyau efficace et faiblement efficace d'un jeu coopératif multicritère sous forme coalitionelle et étude de leurs conditions d'existence.
3. Introduction des concepts de α-noyau efficace et faiblement efficace et α-noyau équitable pour un jeu coopératif multicritère sous forme stratégique et établissement de certains résultats d'existence pour ces concept

Les résultats d'existence énoncés pour les concepts de solutions définis pour la forme stratégique du jeu multicritère sont parfois faibles, dans le sens qu'ils imposent des conditions trop fortes sur la structure du jeu ; c'est le cas notamment du α-noyau efficace d'un jeu multicritère où notre résultat exige la concavité de toutes les fonctions de gain. Nos perspectives sont donc :

1. Raffiner les résultats d'existence du α-noyau efficace.
2. Trouver des conditions d'existence pour le α-noyau équitable.

Bibliographie

[1] AUMANN, R. J. The core of a cooperative game without side payments. *Transactions of the American Mathematical Society Vol.98*, N° 3 (March 1961), 539–552.

[2] AUMANN, R. J., AND MASCHLER, M. The bargaining set for cooperative games. *Econometric Research Program Research Memorandum*, N°34 (November 1964).

[3] BERGSTRESSER, K., AND YU, P. L. Domination strucures and multicriteria problems in n-person games. *Theory and decision Vol.8* (1977), 5–48.

[4] BILLERA, L. J. Some theorems on the core of an n-person game without side payments. *SIAM Journal on applied mathematics Vol.18* (1970), 567–579.

[5] BLACKWELL, O. An analog of the minimax theorem for vector payoff. *Pacific Journal of Mathematics Vol.6* (1956), 1–8.

[6] BLOCH, F. Sequential formation of coalitions with fixed payoff division and externalities. *Games and Economic Behavior*, 14 (1996), 90–123.

[7] CHARNES, A., COOPER, W., HUANG, Z., AND WEI, Q. L. Multi-payoff constrained n-person games over cones. Tech. rep., Center for Cybernetic Studies. University of Texax at Austin., 1987.

[8] CHARNES, A., HUANG, Z., ROUSSEAU, J., AND WEI, Q. L. Corn extremal solutions of multipayoff games with cross contrained strategy set. *Optimization Vol.21*, 1 (1990), 51–69.

[9] CLAUDE D'ASPERMONT ET AL. On the stability of collusive price leadership. *Canadian journal of economics*, 1 (1983), 18–25.

[10] CONTINI, M. B., OLIVETTI, I. C., AND MILANO, C. S. A decision model under uncertainty with multiple payoffs. *Game theory* (1966), 50–63.

[11] FAHEM, K. Etude de concepts de solutions dans un jeu multicritère. Mémoire de magistère, Université Mouloud Maameri Tizi-Ouzou, 2004.

[12] FERHAT, A. Sur les jeux non-antagonistes multicritères. Mémoire de magistère, Université A. MIRA de Béjaia, 2005.

[13] FERNANDEZ, F., HINOJOSA, M., AND PUERTO, J. Core solutions in vector-valued games. *Journal of optimization theory and applications Vol.112*, 2 (2002), 331–360.

[14] GEOFFRION, A. Proper efficiency and the theory of vector maximisation. *Journal of Mathemetical Analysis and Applivations 22* (1968), 618–630.

[15] GERBER, A. Coalition formation in general ntu games. *Review of Economic Design 5* (2000), 149–175.

[16] GHOSE, D., AND PRASAD, U. R. Solution concepts in two-person multicriteria games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2 (1989), 1–23.

[17] GOFFIN, J., AND HAURIE, A. Necessary conditions and sufficient conditions for pareto optimality in multicriterion perturbed system. *Proc. 5th IFIP Conference on optimization* (1973), 184–193.

[18] HANNAN, E. On "games with multiple payoffs". *International Journal of Game Theory Vol. 11*, 1 (1982), 13–15.

[19] HARSANYI, J. Games with incomplete information played by bayesian players part.I : The basic model, part.II : Bayesian equilibrium points, part.III : The basic probability distribution of the game. *Management Science 14-15* (1967-1968).

[20] HART, S., AND KURZ, M. Endogenous formation of coalitions. *Econometrica*, 53 (1983), 1047–1064.

[21] HART, S., AND KURZ, M. Stable coalition structures. *Econometrica*, 53 (1984), 1047–1064.

[22] HAURIE, A. On pareto optimal decision for a coalition of subset of players. *IEEE Trans AC-18* (1973), 144–148.

[23] KHIMOUM, N. Résolution numérique d'un jeu bi-matriciel multicritère. Mémoire de magistère, Université A. MIRA de Béjaia, 2006.

[24] MARMOL, A., MONROY, L., AND RUBIALES, V. An equitable solution for multicriteria bargaining games. *European Journal of Operational Research 177* (2007), 1523–1534.

[25] MATTHIAS, E. *Multicriteria Optimization*, springer ed. 2005.

[26] MOULIN, H. *Théorie des jeux pour l'économie et la politique*, hermann ed. 1981.

[27] NASH, J. F. The bargaining problem. *Econometrica 18* (1950), 155 –162.

[28] NASH, J. F. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences 36* (1950), 48–49.

[29] NASH, J. F. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics 54* (1951), 286–295.

[30] NASH, J. F. Two-person cooperative games. *Econometrica 21* (1953), 128 –140.

[31] PELEG, B., AND SUDHÖLTER, P. *Introduction To the Theory of Cooperative Games*, springer ed. 2007.

[32] RADJEF, M. S. *Cours en post-graduation sur la théorie des jeux et l'optimisation multicritère.* Université de A.Mira de Béjaia, 2009.

[33] RAY, D., AND VOHRA, R. Coalitionnal power and public goods. *Journal of Political Economy*, 109 (2001), 1355–1384.

[34] SCARF, H. E. The core of an n-person game. *Econometrica Vol.35*, 1 (January 1967), 50–69.

[35] SCARF, H. E. On the existence of a cooperative solution for a general class of n-person games. *Journal of Econmic Theory Vol.3*, 2 (June 1971), 169–181.

[36] SHAPLEY, L. S. Stochastic games. *Proceedings of the National Academy of Sciences Vol.39* (1953), 1095–1100.

[37] SHAPLEY, L. S. Equilibrium points in games with vector payoff. *Naval Research Logistics Quarterly Vol.6* (1959), 57–61.

[38] SHARKEY, W., W. Convex games without side payments. *International Journal of Game Theory 10* (1981), 101–106.

[39] TANINO, T. Multiobjective cooperative games with restictions on coalitions. Tech. rep., Kyoto university, 2007.

[40] THORON, S. Négociations multilatérales entre entreprises hétérogènes : la loi du plus fort ou l'union fait la force. Tech. Rep. 18-2005, GREQAM, Avril 2003.

[41] VAISBORD, I. M., AND ZHUKOVSKII V. I. Introduction into many player differential games. *Sovetsco Radio. Moscow* (1980).

[42] VON NEUMANN, J., AND MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press (2 ed, 1947 ; 3 ed, 1953) USA, 1944.

[43] VOORNEVELD, M. Potential games and interactive decisions with multiple criteria. Phd thesis, Tilburg University, 1999.

[44] VOORNEVELD, M., AND VAN DEN NOUWELAND, A. Cooperative multicriteria games with public and private criteria ; an investigation of core cooncepts. Tech. rep., Tilburg University, 1998.

[45] YI, S. S. Stable coalition structures with externalities. *Games and Economic Behavior 20* (1997), 201–237.

[46] ZELENY, M. Games with multiple payoffs. *International Journal of Game Theory Vol. 4*, 4 (1975), 179–191.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié les jeux stratégiques multicritères avec coalitions et gains non transférables.
Notre démarche était de présenter d'abord l'état de l'art de la théorie des jeux coopératifs monocritères, puis essayer de généraliser les notions de cette théorie au cas où les joueurs possèdent des fonctions de gain vectorielles. Les notions de noyau efficace et faiblement efficace ont été introduites comme concepts de solution pour un jeu coopératif multicritère et certains résultats d'existence, inspirés par des résultats analogues connus pour le cas monocritère, ont été établis.

Mots clés : Jeux coopératifs multicritères, Coalitions, α-noyau, Optimisation multicritère, Efficacité.

Abstract

In this thesis, we have studied multicriteria cooperative games in strategic form. We have started by the study of the single criterion case. We turned our attention then to the multicriteria case, that is cooperative games where players have vectorial payoffs. We have introduced the concepts of efficient core and weakly efficient core, as solution concepts for multicriteria cooperative games, and proved some existence results inspired by well-known results in single criterion games.

Key words : Multicriteria cooperative games, Coalitions , α-core, Multicriteria optimization, Efficiency.