

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. MIRA de Bejaia
Faculté de la Technologie
Département de Génie Civil

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de Magister en Génie Civil

Option : Matériaux et Structures

Présenté par : Mr BOUROUBA Abdelhalim

Thème :

Traitement des conditions aux limites de troncatures des milieux non bornés en dynamique des structures

Soutenu le 17 décembre 2008 devant le jury composé de :

Mr DAHMANI	Abdelnasser	Professeur	Univ. de Bejaia	Président
Mr TAHAKOURT	Abdelkader	Maître de conférences	Univ. de Bejaia	Rapporteur
Mr CHELOUAH	Nasser	Maître de conférences	Univ. de Bejaia	Examineur
Mr KADRI	Mohamed	Maître de conférences	Univ. de Boumerdes	Examineur
Mr SEGHIR	Abdelghani	Maître assistant A	Univ. de Bejaia	Invité

A mon père et ma mère qui m'ont tout donné

A mes très chères frères et sœurs bien aimés

A ma cousine préférée Saloua que je trouve toujours à mes côtés

A tous mes proches et amis

et ...

Remerciements

Je tiens à remercier Mr. TAHAKOURT Abdelkader qui a dirigé mon Mémoire de Magister et qui m'a témoigné de sa confiance et de son aide scientifique.

Je remercie Mr. SEGHIR Abdelghani pour son aide infaillible et son dévouement le plus total.

Mes plus vifs remerciements vont également à Mr. DAHMANI Abdelnasser, Mr. KADRI Mohamed et Mr. CHELOUAH Nasser pour avoir accepté de juger mon travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Je dois un grand merci à tous mes amis pour leur soutien amical et avec qui j'ai passé d'agréables moments.

Je remercie de tout mon cœur mes parents, qui ont su me donner sans cesse leurs soutiens et leur amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études.

Résumé

L'objectif de ce travail est la prise en compte des conditions aux limites de troncatures de deux types de milieux non bornés de nature différente. Le premier est celui d'un fluide souvent rencontré dans l'investigation des effets d'interactions fluide-structure, et le second, est celui du sol de fondation qui présente le support des structures et des ouvrages de génie civil. La géométrie non bornée de ces deux milieux a mené à la subdivision du domaine d'étude en deux régions ; le champ proche discrétisé par éléments finis et le champ lointain représenté soit, par une frontière radiative appropriée, ou par des éléments infinis. Dans les modèles développés, le comportement du fluide est décrit par le champ de pressions hydrodynamiques et les sollicitations considérées sont dues à des accélérations harmoniques et des accélérations sismiques, exercées directement sur le milieu par un écran rigide. Dans le cas du sol, la formulation est basée sur le champ des déplacements et le milieu est considéré comme étant un plan semi-infini, soumis à des chargements de formes différentes à sa surface libre. A cet effet, des programmes de calculs ont été élaborés pour les différents modes de traitement de la limite de troncature pour chacun des deux cas. Les résultats obtenus sont présentés et commentés, accompagnés d'études comparatives entre les différentes approches.

Mots Clés : Milieu non borné, Limite de troncature, Eléments finis, Frontière absorbante, Eléments infinis.

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre 1	
Frontières absorbantes.....	3
1.1 Introduction	3
1.2 Milieu fluide.....	5
1.2.1 Cas d'un fluide compressible.....	5
1.2.2 Cas d'un fluide incompressible	8
1.3 Milieu sol.....	9
1.3.1 Traitement par des forces d'amortissement [13,30].....	9
1.3.2 Traitement par des forces de raideur [7]	12
1.4 Conclusion.....	23
Chapitre 2	
Eléments infinis	24
2.1 Introduction	24
2.2 Approche directe.....	25
2.2.1 Choix des fonctions de décroissance	27
2.2.2 Intégration des fonctions de forme d'éléments infinis [5]	29
2.3 Approche inverse.....	32
2.3.1 Transformation de Zienkiewicz	33
2.3.2 Autres choix des fonctions de transformations géométriques.....	37
2.4 Algorithmes de calcul des matrices élémentaires	41
2.5 Conclusion.....	42
Chapitre 3	
Modélisation et discrétisation par éléments finis	43
3.1 Introduction	43
3.2 Mise en équation du domaine fluide.....	43
3.3 Mise en équation du domaine sol.....	48
3.4 Discrétisation du domaine fluide par éléments finis	52
3.5 Discrétisation du domaine sol par éléments finis	55
3.6 Conclusion.....	57
Chapitre 4	
Applications au cas d'un milieu fluide	58
4.1 Introduction	58

4.2	Analyse des vibrations libres	59
4.3	Analyse de la réponse hydrodynamique.....	65
4.3.1	Cas d'un fluide incompressible	66
4.3.2	Cas d'un fluide compressible.....	70
4.4	Conclusion.....	77
 Chapitre 5		
	Applications au cas d'un milieu sol	78
5.1	Introduction	78
5.2	Présentation du modèle	78
5.3	Validation des programmes développés	79
5.3.1	Réponse sous un chargement statique.....	79
5.3.2	Réponse sous un chargement dynamique.....	83
5.4	Applications	85
5.5	Conclusion.....	89
 Conclusion générale		
	Bibliographie	93
	Annexe A : Intégration numérique	96
	Annexe B : Méthodes de résolution	98

Liste des tableaux

Tableau 1.1 :	Conditions de radiations pour les différents types de problèmes.....	4
Tableau 4.1 :	Périodes propres (sec) du domaine fluide pour différentes répartitions et différents types d'éléments.....	60
Tableau 4.2 :	Périodes propres (sec) obtenues par le modèle de couplage éléments finis-éléments infinis construits selon l'approche inverse pour différents nombres de nœuds par élément.....	61
Tableau 4.3 :	Périodes propres (sec) obtenues par le modèle d'éléments finis-éléments infinis construits selon l'approche directe pour les différentes valeurs du paramètre de décroissance L	62
Tableau 4.4 :	Périodes propres (sec) obtenues par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature, en fonction de la position de la limite de troncature L_t	63
Tableau 4.5 :	Comparaison entre les pressions maximales obtenues par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature.....	73
Tableau 5.1(a) :	Tassements sur l'axe de symétrie du problème ($x = 0$) et comparaison entre la solution analytique de Boussinesq et les programmes de calcul développés	81
Tableau 5.1(b) :	Tassements à la surface libre du sol ($z = 0$) et comparaison entre la solution analytique de Boussinesq et les programmes de calcul développés...	81
Tableau 5.2(a) :	Comparaison entre le logiciel SAP et le programme d'éléments finis EF(enc)	82
Tableau 5.2(b) :	Comparaison entre la solution analytique de Flamant et les programmes de calculs développés EF(enc) et EFI.....	83
Tableau 5.3 :	Comparaison entre le programme d'éléments finis EF(enc) et le logiciel SAP	84
Tableau A.1 :	Abscisses et poids d'intégration numérique de Gauss-Legendre.....	95
Tableau A.2 :	Abscisses et poids d'intégration numérique de Gauss-Laguerre.....	99

Liste des figures

Figure 1.1 :	Domaine fluide non borné.....	5
Figure 1.2 :	Subdivision du Domaine fluide en sous domaines Ω et Ω_∞ sur une limite artificielle Γ_∞	6
Figure 1.3 :	Problème en deux dimensions d'un domaine fluide non borné.....	7
Figure 1.4 :	Forces agissant sur un cube élémentaire.....	10
Figure 1.5 :	Problème d'un plan semi infini.....	12
Figure 2.1 :	Approche directe - élément infini dans la direction horizontale.....	25
Figure 2.2 :	Transformation de Zienkiewicz d'un élément infini unidimensionnel.....	33
Figure 2.3 :	Transformation de Abdel-fettah d'un élément infini unidimensionnel.....	37
Figure 3.1 :	Domaine fluide non borné et son contour.....	44
Figure 3.2 :	Equilibre d'un volume élémentaire.....	48
Figure 3.3 :	Problème d'un plan semi infini.....	51
Figure 4.1 :	Maillage du domaine fluide.....	58
Figure 4.2 :	Périodes propres (sec) obtenues par les différents modes de traitement des condition à la limite de troncature, en fonction de la position de la limite de troncature L_t	63
Figure 4.3 :	Périodes propres (sec) en fonction de la célérité c du milieu.....	64
Figure 4.4 :	Coefficient de pression C_p en fonction du positionnement de la limite de troncature L_t	67
Figure 4.5 :	Comparaison entre la solution analytique de Westergaard et les solutions obtenues par EF($P = 0$) et EF(lib) pour $L_t = 2H$	67
Figure 4.6 :	Coefficient de pression C_p en fonction du positionnement de la limite de troncature L_t	68
Figure 4.7 :	Comparaison entre la solution analytique de Westergaard et les différents modes de prise en compte des effets radiatifs.....	69

Figure 4.8 :	Accélération sismique du séisme de l'impérial Valley d'El-Centro.....	70
Figure 4.9 :	Comparaison entre la solution analytique et les solutions obtenues par les différents modes de traitement de la limite de troncature de la position L_t	71
Figure 4.10 :	Comparaison entre l'histoire du coefficient de pressions C_p obtenue par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature et la solution analytique.....	72
Figure 4.11 :	Comparaison entre la solution analytique et les solutions obtenues par les différents modes de traitements des conditions à la limite de troncature pour une position de $L_t = 3H$	74
Figure 4.12 :	Comparaison entre la solution analytique et les solutions obtenues par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature sous l'effet d'une pulsation d'excitation $\omega = 0.5\omega_0$	75
Figure 4.13 :	Comparaison entre la solution analytique et les solutions obtenues par les différents modes de traitement de la limite de troncature, sous l'effet d'une pulsation d'excitation $\omega = 1.5\omega_0$	76
Figure 4.14 :	Eléments infinis selon l'approche directe et la solution analytique, pour une position de la limite de troncature $L_t = H$ et de pulsation d'excitation $\omega = 1.5\omega_0$	77
Figure 5.1 :	Géométrie et type de maillage utilisé.....	79
Figure 5.2 :	Géométrie et chargement dans les cas des problèmes classiques de Boussinesq et de Flamant.....	80
Figure 5.3 :	Comparaison entre la solution analytique de Boussinesq et les tassements obtenus par les programmes de calcul développés.....	80
Figure 5.4 :	Tassements dans le cas du problème de Flamant.....	82
Figure 5.5 :	Géométrie et chargement.....	83
Figure 5.6 :	Déplacement vertical du point d'application de la charge.....	84
Figure 5.7 :	Forme géométrique du plan semi-infini et chargement.....	85
Figure 5.8 :	Chargement de forme triangulaire.....	85
Figure 5.9 :	Déplacements verticaux engendrés par un chargement de forme triangulaire..	86
Figure 5.10 :	Convergence des solutions de chaque mode de traitement de la limite de troncature	87
Figure 5.11 :	Impulsion de forme triangulaire.....	87
Figure 5.12 :	Déplacements verticaux engendrés par une impulsion de forme triangulaire...	88
Figure 5.13 :	Chargement de forme sinusoïdal.....	89
Figure 5.14 :	Déplacements verticaux repérés sur le nœud B engendrés par des charges sinusoïdales de pulsations différentes.....	89
Figure B.1 :	Hypothèse de l'accélération moyenne constante.....	97

Notations

p	: Pression
P	: Vecteur de pressions (colonne)
u	: Déplacement
U	: Vecteur de déplacements (colonne)
n	: Vecteur normal
Ω	: Domaine
Γ	: Contour (frontière)
N	: Fonctions de forme des éléments finis (vecteur ligne)
V	: Fonctions de forme des éléments infinis (vecteur ligne)
k	: Module de compressibilité
L_t	: Position de limite de troncature
R	: Rayon de troncature
ρ	: Masse volumique
c	: Célérité des ondes dans le milieu fluide
V_p	: Vitesse de propagation d'ondes de compression dans le milieu
V_s	: Vitesse de propagation d'ondes de cisaillement dans le milieu
σ	: Tenseur de contraintes en vecteur colonne
ε	: Tenseur de déformations en vecteur colonne
F	: Vecteur de chargement
ω	: Pulsation
T	: Période
∂	: Opérateur de dérivée partielle
δ	: Fonction de Dirac
∇	: Opérateur nabla
Δ	: Opérateur Laplace
f	: Fonction de décroissance d'un élément infini
E	: Module d'Young
ν	: Coefficient de Poisson
G	: Module de cisaillement

Introduction générale

Dans la discrétisation par éléments finis des problèmes rencontrés dans le domaine de génie civil, on est souvent amené à traiter des milieux non bornés notamment dans les cas d'interaction fluide-structure ou d'interaction sol-structure. La difficulté majeure rencontrée dans la résolution de ce genre de problèmes réside dans le traitement des conditions aux limites de troncatures qui doivent tenir compte des effets de dissipation et de radiation d'énergie, et d'empêcher toutes réflexions parasites pouvant compromettre gravement la précision du résultat recherché. En général, le domaine doit être tronqué à une distance assez loin, pour aboutir à des résultats suffisamment acceptables. Cependant, cette technique est très coûteuse et conduit à des tailles de maillage importantes ce qui rend les calculs de plus en plus lourds notamment lorsqu'on veut considérer le comportement non linéaire du milieu.

Par ailleurs, plusieurs techniques et approches ont été développées et proposées dans le but d'améliorer les modèles d'éléments finis traitant ce genre de problèmes. Parmi ces approches, on distingue :

- La technique de couplage éléments finis-éléments infini : Le principe de la méthode est de représenter le champ lointain par des éléments infinis favorisant une décroissance artificielle du champ de variables par des fonctions d'interpolations décroissantes dans le cas de l'approche directe, et par des transformations géométriques ascendantes dans le cas de l'approche inverse [1,5,9,22,24-27,33].
- La technique de couplage éléments finis-éléments de frontières : cette technique semble attractive, car elle peut prendre en compte le caractère ouvert du domaine d'étude et que la condition de radiation est déjà automatiquement vérifiée dans la solution fondamentale [6,10,19,28].
- Imposer des frontières absorbantes appropriées sur la limite de troncature de telle sorte à annuler l'énergie sortant du domaine d'étude et d'empêcher toutes réflexions parasites pouvant perturber la solution recherchée [7,13-15,18-20,23,28,30].

- Ajouter une couche absorbante dans laquelle un amortissement assez important sera introduit et de façon régulière, pour que les ondes puissent entrer dans cette couche sans être réfléchies et que toutes les énergies soient absorbées avant d'arriver à la frontière [2–4,11,16].
- Utiliser des procédures purement numériques telles que celles proposées par Wolf et Song [10,31,32].

L'objectif de ce travail est la prise en compte des conditions aux limites de troncatures de deux types de milieux non bornés de nature différente. Le premier est celui d'un fluide souvent rencontré dans l'investigation des effets d'interactions fluide–structure, et le second, est celui du sol de fondation qui présente le support des structures et des ouvrages de génie civil.

La géométrie non bornée de ces deux milieux a mené à la subdivision du domaine d'étude en deux régions ; le champ proche discrétisé par éléments finis et le champ lointain représenté soit, par une frontière radiative appropriée, ou par des éléments infinis. Dans les modèles développés, le comportement du fluide est décrit par le champ de pressions hydrodynamiques et les sollicitations considérées sont dues à des accélérations harmoniques et des accélérations sismiques, exercées directement sur le milieu par un écran rigide. Dans le cas du sol, la formulation est basée sur le champ des déplacements et le milieu est considéré comme étant un plan semi–infini, soumis à des chargements de formes différentes à sa surface libre. A cet effet, des programmes de calculs ont été élaborés pour les différents modes de traitement de la limite de troncature pour chacun des deux cas. Les résultats obtenus seront présentés et commentés, accompagnés d'études comparatives entre les différentes approches.

Ce manuscrit est organisé en cinq chapitres, on trouve dans le premier un exposé sur les frontières absorbantes, ainsi que leurs mises en équations dans les deux types de milieux considérés. Le deuxième est consacré à la présentation des éléments infinis ainsi, que les différentes approches qui existent pour leurs constructions. Dans le chapitre trois, on passe à la modélisation mathématique et à la discrétisation par éléments finis des milieux fluide et sol. Les chapitres quatre et cinq comportent la partie pratique de notre travail, les résultats obtenus sont présentés et commentés ainsi que la comparaison entre les différents modes de traitement des limites de troncatures. Finalement, une conclusion générale clôture le manuscrit.

Chapitre 1

Frontières absorbantes

1.1 Introduction

La discrétisation par éléments finis des domaines non bornés induit des difficultés dans le traitement des conditions aux limites de troncatures et particulièrement, lorsqu'il s'agit du phénomène de propagation d'ondes [20]. La technique classique pour traiter ce genre de problèmes est de discrétiser une grande partie du domaine, ce qui rend le coût des calculs prohibitifs. En plus, lorsque l'onde heurtant une surface libre ou bien une surface dont les degrés de liberté sont bloqués, cette dernière sera totalement réfléchie, ce qui provoque des erreurs de calculs. Donc, il est nécessaire d'introduire d'une manière artificielle des frontières absorbantes convenables sur la limite de troncature, de façon à rétablir les conditions à l'infini. Ces frontières permettent d'absorber l'énergie des ondes sortant du domaine d'étude et d'annuler toute réflexion parasite induise par la troncature du domaine [19]. Néanmoins, le choix de ces frontières absorbantes est délicat, car il dépend des propriétés du milieu et aussi des caractéristiques de la sollicitation [19, 20].

La première écriture de la condition de radiation revient à Sommerfeld en 1949 [10]. Cette condition est présentée sous forme d'une limite qui tend vers zéro, quand la distance entre la source et le point considéré tend vers l'infini. L'expression de cette condition dans le domaine des temps s'écrit par [5,10,18,32,35] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.1)$$

où u présente le champ de variables, c la vitesse de propagation d'ondes dans le milieu, r la distance entre la source et le point considéré, $n = 1, 2$ ou 3 suivant la dimension du problème qui est $1D$, $2D$ ou $3D$. Dans le domaine des fréquences, l'expression (1.1) devient :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{i\omega}{c} u \right) = 0 \quad (1.2)$$

Une autre version des conditions de radiations ressemble beaucoup à celle de Sommerfeld est développée par Bayliss et ses collaborateurs. Les conditions consistent à présenter l'onde voyageant vers l'infini par une série infinie. Chaque terme de la série se réduit à la valeur nulle par un opérateur imposé sur la frontière de troncature. Les différents opérateurs qui ont été développés pour chaque type de problème sont présentés dans le tableau suivant [5,35] :

Tableau 1.1 : conditions de radiations pour les différents types de problèmes.

Conditions de radiations pour des problèmes quelconques			
	Problème 1D	Problème 2D	Problème 3D
Calcul dans le domaine des temps	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$	$B_m u = 0, m \rightarrow \infty$ $B_m = \prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2j-3/2}{r} \right)$	$B_m u = 0, m \rightarrow \infty$ $B_m = \prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2j-1}{r} \right)$
Calcul dans le domaine des fréquences	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\omega}{c} u = 0$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{i\omega}{c} u \right) = 0$ ou $B_m u = 0, m \rightarrow \infty$ $B_m = \prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i\omega}{c} + \frac{2j-3/2}{r} \right)$	$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{i\omega}{c} u \right) = 0$ ou $B_m u = 0, m \rightarrow \infty$ $B_m = \prod_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i\omega}{c} + \frac{2j-1}{r} \right)$
Conditions de radiations pour des problèmes symétriques			
	Problème 1D	Problème 2D (axisymétrique)	Problème 3D (sphérique)
Calcul dans le domaine des temps	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{2r} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$
Calcul dans le domaine des fréquences	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\omega}{c} u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{2r} + \frac{i\omega}{c} \right) u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) u = 0$

Dans ce chapitre, nous allons considérer deux types de milieux non bornés de natures différentes. Le premier est un fluide souvent rencontré dans l'investigation des effets d'interaction fluide–structure et le second, est un solide qui présente le sol support des structures et des ouvrages. Ainsi, nous allons présenter quelques frontières radiatives qui peuvent être introduites afin de traiter les conditions aux limites de troncature.

1.2 Milieu fluide

Considérons un domaine fluide non borné représenté sur la figure 1.1 suivante, dont une partie est étendue à l'infini. Au premier temps, le fluide est supposé comme étant compressible, et puis cette hypothèse est relâchée et remplacée par un fluide incompressible.

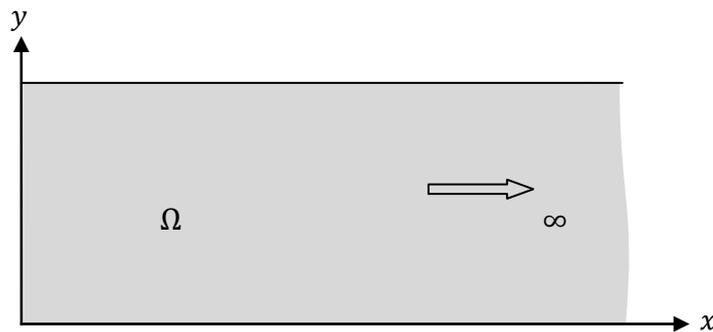


Figure 1.1 : Domaine fluide non borné.

1.2.1 Cas d'un fluide compressible

L'équation d'onde régissant le comportement des pressions hydrodynamiques dans un domaine fluide supposé compressible et qui subit des mouvements de petites amplitudes est donnée par :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3)$$

Elle s'exprime dans le domaine des fréquences par :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (1.4)$$

Le domaine fluide considéré est supposé retenu d'un côté par une structure et s'étend de l'autre côté à l'infini. Cette situation se présente dans les cas des barrages, des ports ...etc. Il est donc indispensable de tronquer ce domaine à une certaine limite fictive Γ_∞

délimitant deux sous domaines. Le premier est Ω définissant le champ proche qui sera discrétisé par éléments finis et le second, Ω_∞ représentant le champ lointain qui sera remplacé artificiellement par une frontière radiative imposée sur la limite de troncature Γ_∞ .

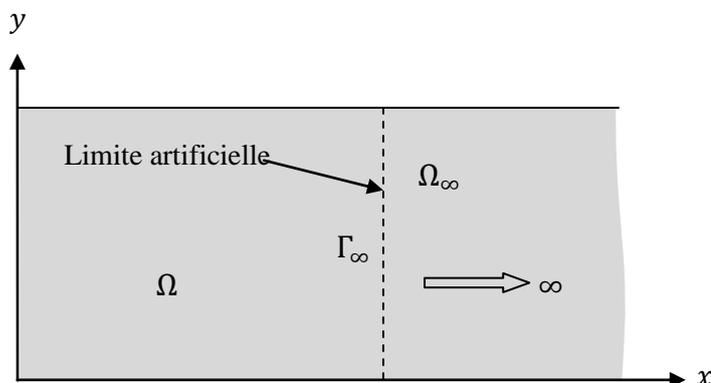


Figure 1.2 : Subdivision du Domaine fluide en sous domaines Ω et Ω_∞ sur une limite artificielle Γ_∞ .

Donc, la limite artificielle Γ_∞ délimite un domaine physiquement non borné. L'effet dynamique réel dans le milieu fluide est la propagation d'ondes de pressions voyageant de Ω vers Ω_∞ et évidemment à l'infini. La supposition d'une frontière libre ou une condition de pression nulle imposée sur cette limite, engendre des réflexions d'ondes indésirables qui perturbent la solution recherchée. Alors, une condition prenant en compte ces réflexions est indispensable. La solution générale de l'équation (1.3) qui a été présentée pour la première fois par Alembert est [5,20,34] :

$$p = p_1(x - ct) + p_2(x + ct) \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) présente la superposition de deux ondes, l'une incidente voyageant dans la direction positive notée p_1 et l'autre réfléchie voyageant dans la direction négative notée p_2 . L'objectif à réaliser est de supprimer la contribution de l'onde réfléchie, c'est-à-dire à satisfaire les relations suivantes :

$$p_2(x + ct) = 0 \quad (1.6)$$

$$p = p_1(x - ct) \quad (1.7)$$

La dérivation de (1.7) par rapport au temps et par rapport à la normale n nous donne le système suivant :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -cp_1' \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = p_1' \quad (1.9)$$

La substitution de l'équation (1.9) dans (1.8) nous permet d'avoir :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.10)$$

Cette equation s'écrit dans le domaine des fréquences par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{i\omega}{c} p \quad (1.11)$$

L'expression (1.10) est appelée la condition de Sommerfeld, elle est présentée pour la première fois par Zienkiewicz et Newton en 1969 pour les limites de radiation. Elle a une analogie avec un élément absorbant de coefficient $1/c$, imposé sur la limite de troncature comme le montre la figure suivante [22,34]:

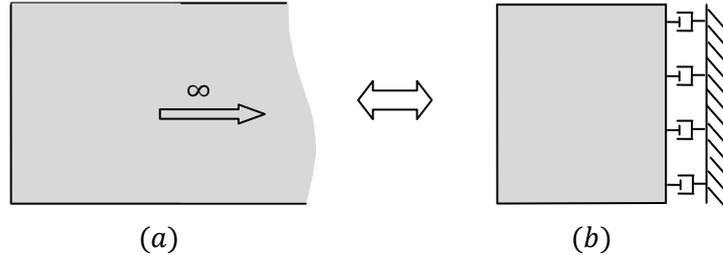


Figure 1.3 : Problème en deux dimensions d'un domaine fluide non borné.

a : Domaine infini ;

b : Domaine fini avec une frontière absorbante.

Dans le but d'améliorer les modèles d'éléments finis fluides, Sharan [23] a proposé une condition de radiation qui peut être introduite sur la frontière artificielle Γ_∞ . Cette condition est donnée par un paramètre ζ fonction de la hauteur du domaine fluide H , de la pulsation d'excitation ω et de la vitesse de propagation d'onde c :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\zeta p \quad (1.12)$$

Dans lequel :

$$\zeta = \frac{1}{H} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega H}{c}\right)^2} \quad (1.13)$$

Si on observe bien l'expression (1.13), on remarque que lorsque le premier terme de la racine carré est négligé, l'expression (1.12) devient identique à la condition de Sommerfeld (1.11). Nous allons voir dans la section suivante, que ce terme là qui donne la particularité à la condition de Sharan pour sa mise en œuvre même dans le cas d'un fluide supposé incompressible, contrairement à la condition de Sommerfeld qui se réduit à la valeur nulle.

1.2.2 Cas d'un fluide incompressible

Dans le cas de l'hypothèse d'un fluide incompressible, l'expression (1.3) se réduit à l'équation de Laplace suivante :

$$\Delta p = 0 \quad (1.14)$$

Sur la frontière artificielle Γ_∞ , la condition de Sommerfeld (1.10) et (1.11) se réduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1.15)$$

ce qui veut dire que, la limite de troncature est supposée libre sans condition. Elle doit être donc positionnée à une distance assez loin pour obtenir une convergence pour les modèles d'éléments finis [14]. Par contre, la condition de Sharan d'expression (1.12) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\pi}{2H} p \quad (1.16)$$

Par ailleurs, Damodar Maity [14] a proposé une condition de radiation inspirée de la solution analytique de Westergaard [29]. La solution générale de l'équation (1.14) qui satisfait la condition de radiation et les conditions sur le contour du domaine et pour n'importe quel point du milieu est donnée par [14]:

$$p = 2\ddot{u}_n \rho H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} e^{(-\lambda_n \frac{x}{H})} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \quad (1.17)$$

Où \ddot{u}_n désigne les accélérations d'excitations imposées sur le bord gauche du domaine, et

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (1.18)$$

La dérivation de l'expression (1.17) par rapport à x , nous donne :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2\ddot{u}_n \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} e^{(-\lambda_n \frac{x}{H})} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right) \quad (1.19)$$

et la division de (1.19) sur (1.17) nous permet d'avoir :

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{p} = -\frac{\zeta}{H} \quad (1.20)$$

Avec :

$$\zeta = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} e^{(-\lambda_n \frac{x}{H})} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\lambda_n)^2} e^{(-\lambda_n \frac{x}{H})} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right)} \quad (1.21)$$

Après réarrangement des termes, on aura la condition de radiation de Damodar Maity à introduire sur la limite de troncature et qui s'exprime par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\zeta}{H} p \quad (1.22)$$

1.3 Milieu sol

Dans notre cas, le milieu sol est supposé comme étant un solide infini, homogène à comportement élastique linéaire sous l'hypothèse des petites déformations. Le domaine solide doit être tronqué où des conditions aux limites appropriées sont introduites. Dans cette section, nous allons présenter deux types de conditions qui peuvent être utilisées. Le premier concerne le traitement de la limite de troncature par des forces d'amortissements, et le second par des forces de raideurs.

1.3.1 Traitement par des forces d'amortissement [13,30]

Afin de déterminer la frontière radiative à imposer sur la limite de troncature, on considère une onde plane se propageant dans la direction x . La somme des forces agissant sur un cube élémentaire en équilibre (figure 1.4) dans le sens x , nous permet d'avoir :

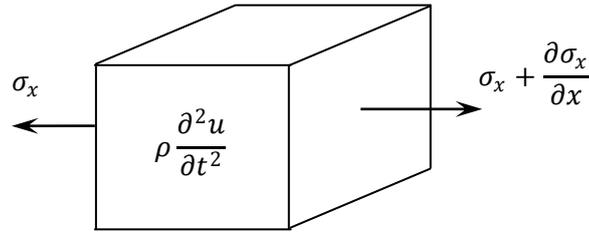


Figure 1.4 : Forces agissant sur un cube élémentaire.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (1.23)$$

où ρ et u sont respectivement la masse volumique et les déplacements. σ_x représente la contrainte axiale dans le sens x qui s'exprime par :

$$\sigma_x = k \varepsilon_x = k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.24)$$

En substituant l'expression (1.24) dans (1.23), on aura l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.25)$$

où V_p désigne la célérité des ondes de compression dans le matériau, qui est :

$$V_p = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (1.26)$$

k représente le module de compressibilité du matériau qui est fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$k = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (1.27)$$

La solution de l'équation (1.25) pour une onde harmonique de pulsation ω en termes de déplacements est de la forme suivante [13,30]:

$$u(x, t) = U \left[\sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{V_p} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{V_p} \right) \right] \quad (1.28)$$

La vitesse d'un point matériel du milieu de propagation est la dérivée du déplacement par rapport au temps, soit :

$$\dot{u}(x, t) = U\omega \left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{V_p}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{V_p}\right) \right] \quad (1.29)$$

La déformation ε est la dérivée du déplacement par rapport à la coordonnée x , qui s'exprime par :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\frac{\dot{u}(x, t)}{V_p} \quad (1.30)$$

En remplaçant l'expression (1.30) dans (1.24) et en tenant compte de (1.26), on aura la contrainte axiale qui est :

$$\sigma(x, t) = -\rho V_p \dot{u}(x, t) \quad (1.31)$$

La relation (1.31) est la condition à imposer sur la limite de troncature et qui satisfait la radiation des ondes de compression. Cette condition est identique à une force de dissipation de constante d'amortissement $c_p = \rho V_p$ par unité de surface de la limite de troncature [13,30].

De la même manière on obtient une expression équivalente pour les ondes de cisaillement se propageant parallèlement à la limite de troncature considérée. La constante d'amortissement dans ce cas est donnée par [13,30]:

$$c_s = \rho V_s \quad (1.32)$$

où V_s désigne la vitesse de propagation d'onde de cisaillement qui s'exprime par :

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1.33)$$

Avec G le module de cisaillement du matériau tel que :

$$G = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)}} \quad (1.34)$$

La figure suivante montre un problème d'un plan semi-infini qui est traité par des éléments absorbants.

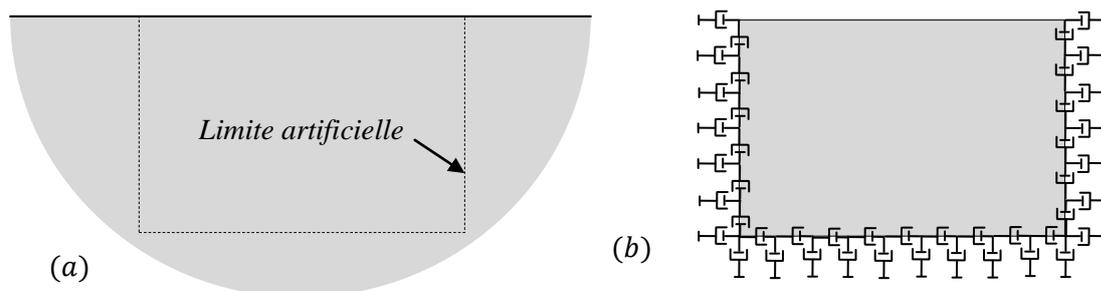


Figure 1.5 : Problème d'un plan semi infini.

(a) : Plan semi infini ;

(b) : Plan fini avec des éléments absorbants.

1.3.2 Traitement par des forces de raideur [7]

Jusqu'à présent, nous avons vu que les relations développées pour traiter la limite de troncature consiste en forces d'amortissement par unité de cette frontière. Par ailleurs, il est possible d'améliorer ces conditions en introduisant des ressorts en conjonction avec ces amortisseurs à la limite de troncature. Les caractéristiques de ces ressorts dépendent essentiellement des propriétés mécaniques du matériau et de la géométrie du domaine. Afin de déterminer ces caractéristiques pour un espace semi-infini, il est nécessaire de considérer un domaine fini, de géométrie bien définie. Dans cette section, nous allons considérer trois espaces de géométries différentes, à savoir l'espace hémisphérique, cylindrique et parallélépipédique rectangulaire.

1.3.2.1 Domaine hémisphérique

Considérons un espace hémisphérique rapporté à un système de coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ y = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ z = r \sin(\varphi) \end{cases} ; r \in [0, R] ; \theta \in [0, 2\pi] ; \varphi \in [0, \pi] \quad (1.35)$$

Les contraintes analytiques dans un milieu semi-infini en coordonnées sphériques sont données en fonction des déplacements par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r, \theta, \varphi) = -k_{rr} u_r(r, \theta, \varphi) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta, \varphi) = -k_{r\theta} u_\theta(r, \theta, \varphi) \\ \sigma_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) = -k_{r\varphi} u_\varphi(r, \theta, \varphi) \end{cases} \quad (1.36)$$

où k_{rr} , $k_{r\theta}$ et $k_{r\varphi}$ représentent les constantes de raideur par unité de surface. D'après le système (1.36) :

$$\begin{cases} k_{rr} = -\frac{\sigma_{rr}}{u_r} \\ k_{r\theta} = -\frac{\sigma_{r\theta}}{u_r} \\ k_{r\varphi} = -\frac{\sigma_{r\varphi}}{u_\varphi} \end{cases} \quad (1.37)$$

Pour déterminer la constante k_{rr} , on considère la solution analytique de Cerruti (1882) d'une force concentrée P_x appliquée à l'origine dans le sens x . La contrainte σ_{rr} et le déplacement u_r provoqués par cette force sont donnés par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\frac{P_x}{\pi r^2} \left[(2-\nu) - \frac{(1-2\nu)}{1+\sin(\varphi)} \right] \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ u_r = \frac{P_x}{2\pi Gr} \left[2(1-\nu) - \frac{(1-2\nu)}{1+\sin(\varphi)} \right] \cos(\varphi) \cos(\theta) \end{cases} \quad (1.38)$$

où G et ν sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau. En tenant compte de (1.37), le système (1.38) nous permet d'avoir :

$$k_{rr} = \frac{2G(1+\nu)}{r} \left[\frac{1 + \frac{2-\nu}{1+\nu} \sin(\varphi)}{1 + 2(1-\nu)\sin(\varphi)} \right] \quad (1.39)$$

On remarque dans l'expression de k_{rr} que l'angle φ intervient, or dans la pratique il est préférable de trouver une constante qui ne dépend que des propriétés mécaniques du milieu et du rayon r . Pour cela, on cherche les contraintes et les déplacements équivalents pour un rayon r et de l'angle φ qui varie de 0 à π . En se servant de l'axe de symétrie, les contraintes et les déplacements équivalents sont donnés par [7] :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{rr} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{rr} d\varphi = -\frac{2P_x}{(\pi r)^2} [(2-\nu) - (1-2\nu)\ln 2] \cos(\theta) \\ \bar{u}_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_r d\varphi = \frac{P_x}{\pi^2 Gr} [2(1-\nu) - (1-2\nu)\ln 2] \cos(\theta) \end{cases} \quad (1.40)$$

Ce qui donne la constante équivalente \bar{k}_{rr} par :

$$\bar{k}_{rr} = \frac{2G}{r} \left[\frac{(2-\nu) - (1-2\nu)\ln 2}{2(1-\nu) - (1-2\nu)\ln 2} \right] \quad (1.41)$$

Et qui peut être approximée par :

$$\bar{k}_{rr} = \frac{2G}{r} \left(\frac{13 + 4\nu}{13 - 6\nu} \right) \quad (1.42)$$

La relation (1.42) est la constante de raideur dans la direction radiale, elle dépend uniquement des propriétés mécaniques du matériau et du rayon r . Pour définir la valeur de cette constante à la limite de troncature, il suffit juste de poser $r = R$.

Dans le cas où la constante \bar{k}_{rr} est déduite de la solution analytique de Boussinesq pour une charge concentrée appliquée à l'origine, perpendiculairement à la surface libre, son expression est de la forme :

$$\bar{k}_{rr} = \frac{2G}{r} \left[\frac{(2 - \nu) - \frac{\pi}{4}(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu) - \frac{\pi}{4}(1 - 2\nu)} \right] \quad (1.43)$$

De la même manière, on cherche à déterminer la constante $k_{r\theta}$. La contrainte $\sigma_{r\theta}$ et le déplacement u_θ donnés par Cerruti sont :

$$\begin{cases} \sigma_{r\theta} = \frac{P_x}{2\pi r^2} \left[\frac{(1 - 2\nu)\cos^2(\varphi)}{(1 + \sin(\varphi))^2} \right] \sin(\theta) \\ u_\theta = -\frac{P_x}{4\pi Gr} \left[1 + \frac{(1 - 2\nu)}{1 + \sin(\varphi)} \right] \sin(\theta) \end{cases} \quad (1.44)$$

Ce qui donne :

$$k_{r\theta} = \frac{G}{r} \left[\frac{2(1 - 2\nu)(1 - \sin(\varphi))}{2(1 - \nu) + \sin(\varphi)} \right] \quad (1.45)$$

qui est fonction de l'angle φ . Pour éliminer cette dépendance, la contrainte et le déplacement équivalents sont donnés par :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{r\theta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{r\theta} d\varphi = \frac{P_x}{4\pi r^2} [0.546(1 - 2\nu)] \\ \bar{u}_\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_\theta d\varphi = -\frac{P_x}{4\pi Gr} [1 + 0.637(1 - 2\nu)] \end{cases} \quad (1.46)$$

et la constante de raideur approximée est :

$$\bar{k}_{r\theta} = \frac{3G}{r} \left(\frac{1-2\nu}{9-7\nu} \right) \quad (1.47)$$

Afin de déterminer la constante $k_{r\varphi}$, nous allons considérer la solution analytique de Boussinesq (1885) pour une charge concentrée P_z appliquée à l'origine dans le sens z . La contrainte $\sigma_{r\varphi}$ et le déplacement u_φ dans ce cas sont donnés par :

$$\begin{cases} \sigma_{r\varphi} = -\frac{P_z}{2\pi r^2} \left[\frac{(1-2\nu)\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{1+\sin(\varphi)} \right] \\ u_\varphi = \frac{P_z}{4\pi Gr} \left[\frac{(3-4\nu)\sin(\varphi) + 2(1-\nu)}{1+\sin(\varphi)} \right] \cos(\varphi) \end{cases} \quad (1.48)$$

et la constante $k_{r\varphi}$ par :

$$k_{r\varphi} = \frac{2G}{r} \left(\frac{1-2\nu}{5-6\nu} \right) \left[\frac{\sin(\varphi)}{1 - \left(\frac{3-4\nu}{5-6\nu} \right) (1-\sin(\varphi))} \right] \quad (1.49)$$

De la même manière, on trouve la contrainte et le déplacement équivalents :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{r\varphi} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{r\varphi} d\varphi = -\frac{P_z}{(\pi r)^2} (1-2\nu)(1-\ln 2) \\ \bar{u}_\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_\varphi d\varphi = \frac{P_z}{2\pi^2 Gr} [(3-4\nu) - (1-2\nu)\ln 2] \end{cases} \quad (1.50)$$

ce qui donne la constante équivalente par :

$$\bar{k}_{r\varphi} = \frac{2G}{r} \left[\frac{(1-2\nu)(1-\ln 2)}{(3-4\nu) - (1-2\nu)\ln 2} \right] \quad (1.51)$$

qui peut être approximée par :

$$\bar{k}_{r\varphi} = \frac{4G}{r} \left(\frac{1-2\nu}{15-17\nu} \right) \quad (1.52)$$

Pour trouver les expressions des constantes de raideur k_{rr} , $k_{r\theta}$ et $k_{r\varphi}$ à introduire sur la frontière de troncature d'un espace hémisphérique de rayon R , il suffit juste de poser $r = R$. Ces expressions sont données par :

$$k_{rr} = \frac{2G}{R} \left(\frac{13+4\nu}{13-6\nu} \right) ; k_{r\theta} = \frac{3G}{R} \left(\frac{1-2\nu}{9-7\nu} \right) ; k_{r\varphi} = \frac{4G}{R} \left(\frac{1-2\nu}{15-17\nu} \right) \quad (1.53)$$

1.3.2.2 Domaine cylindrique

Dans cette section, nous allons déterminer les forces de raideur à introduire sur la limite de troncature d'un espace semi-infini, qui est considéré comme étant un espace fini à géométrie cylindrique, de profondeur $z = h$ et du rayon $r = a$. Les coordonnées cylindriques sont définies par :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} ; r \in [0, R] ; z \in [0, h] ; \theta \in [0, 2\pi] \quad (1.54)$$

Les solutions analytiques de Cerruti en coordonnées cylindriques pour une charge ponctuelle P_x appliquée à l'origine dans le sens x d'un espace semi-infini sont données pour les déplacements par [7] :

$$\begin{cases} u_r = \frac{P_x}{4\pi GR} \left[1 + \frac{r^2}{R^2} + (1 - 2\nu) \left(\frac{R}{R+z} - \frac{r^2}{(R+z)^2} \right) \right] \cos(\theta) \\ u_\theta = -\frac{P_x}{4\pi GR} \left[1 + \frac{(1 - 2\nu)R}{R+z} \right] \sin(\theta) \end{cases} \quad (1.55)$$

et pour les contraintes par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = -\frac{P_x}{2\pi R^2} \left[\frac{3r^2}{R^2} - \frac{(1 - 2\nu)R^2}{(R+z)^2} \right] \frac{r}{R} \cos(\theta) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{P_x}{2\pi R^2} \left[\frac{(1 - 2\nu)}{(R+z)^2} \right] r R^2 \sin(\theta) \\ \sigma_{zr} = -\frac{P_x}{2\pi R^2} \left(\frac{3r^2 z}{R^3} \right) \cos(\theta) \\ \sigma_{z\theta} = 0 \end{cases} \quad (1.56)$$

Les solutions analytiques de Boussinesq pour une charge concentrée P_z appliquée à l'origine dans le sens z sont données par :

$$\begin{cases} u_z = \frac{P_z}{4\pi G} \left[\frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1 - \nu)}{R} \right] \\ \sigma_{rz} = -\frac{3P_z}{2\pi} \frac{r z^2}{R^5} \\ \sigma_{zz} = -\frac{3P_z}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} \end{cases} \quad (1.57)$$

Avec G le module du cisaillement, ν coefficient de Poisson et $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Dans notre cas, les frontières en question sont la surface transversale sur laquelle $z = h$ et la surface

latérale où $r = a$. Par commodité, nous allons traiter ces frontières séparément.

- **Frontière transversale**

Les contraintes agissant sur la base du cylindre ($z = h$) sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{zr}(r, \theta, h) = -k_{zr}u_r(r, \theta, h) \\ \sigma_{z\theta}(r, \theta, h) = -k_{z\theta}u_\theta(r, \theta, h) \\ \sigma_{zz}(r, \theta, h) = -k_{zz}u_z(r, \theta, h) \end{cases} \quad (1.58)$$

Les constantes de raideur par unité de surface résultantes dans ce cas sont :

$$\begin{cases} k_{zr} = -\frac{\sigma_{zr}}{u_r} \\ k_{z\theta} = -\frac{\sigma_{z\theta}}{u_\theta} \\ k_{zz} = -\frac{\sigma_{zz}}{u_z} \end{cases} \quad (1.59)$$

A l'aide des solutions de Cerruti (1.55), (1.56) et Boussinesq (1.57), on obtient :

$$\begin{cases} k_{zr} = \frac{G}{R} \frac{6 \frac{r^2 h}{R^3}}{1 + \frac{r^2}{R^2} + (1 - 2\nu) \left(\frac{R}{R+h} - \frac{r^2}{(R+h)^2} \right)} \\ k_{z\theta} = 0 \\ k_{zz} = \frac{G}{h} \frac{6 \left(\frac{h}{R} \right)^4}{\left(\frac{h}{R} \right)^2 + 2(1 - \nu)} \end{cases} \quad (1.60)$$

Avec $z = h$ et $R = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Afin d'obtenir des constantes de raideur indépendamment de la variable r sur la base du cylindre, il est préférable d'écrire k_{zr} , $k_{z\theta}$ et k_{zz} sous les formes équivalentes :

$$\begin{cases} \bar{k}_{zr} = -\frac{G \int_0^a \sigma_{zr} \frac{r}{G} dr}{h \int_0^a u_r \frac{r}{h} dr} = \frac{G}{h} \beta_{zr} \\ \bar{k}_{z\theta} = -\frac{G \int_0^a \sigma_{z\theta} \frac{r}{G} dr}{h \int_0^a u_\theta \frac{r}{h} dr} = \frac{G}{h} \beta_{z\theta} \\ \bar{k}_{zz} = -\frac{G \int_0^a \sigma_{zz} \frac{r}{G} dr}{h \int_0^a u_z \frac{r}{h} dr} = \frac{G}{h} \beta_{zz} \end{cases} \quad (1.61)$$

Maintenant, le problème revient à chercher les expressions des paramètres β_{zr} , $\beta_{z\theta}$ et β_{zz} , qui sont données à l'aide des solutions analytiques (1.55), (1.56) et (1.57) par :

$$\begin{cases} \beta_{zr} = \frac{6 \int_0^a r^3 h R^{-5} dr}{\int_0^a \left[1 + \frac{r^2}{R^2} + (1 - 2\nu) \left(\frac{R}{R+h} - \frac{r^2}{(R+h)^2} \right) \right] \frac{r}{hR} dr} \\ \beta_{z\theta} = 0 \\ \beta_{zz} = \frac{6h^4 \int_0^a r R^{-5} dr}{\int_0^a \left[\left(\frac{h}{R} \right)^2 + 2(1 - \nu) \right] \frac{r}{R} dr} \end{cases} \quad (1.62)$$

- **Frontière latérale**

Sur la frontière latérale ($r = a$, $0 < z < h$, $0 < \theta < 2\pi$), les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(a, \theta, z) = -k_{rr} u_r(a, \theta, z) \\ \sigma_{r\theta}(a, \theta, z) = -k_{r\theta} u_\theta(a, \theta, z) \\ \sigma_{rz}(a, \theta, z) = -k_{rz} u_z(a, \theta, z) \end{cases} \quad (1.63)$$

d'où il vient :

$$\begin{cases} k_{rr} = -\frac{\sigma_{rr}}{u_r} \\ k_{r\theta} = -\frac{\sigma_{r\theta}}{u_\theta} \\ k_{rz} = -\frac{\sigma_{rz}}{u_z} \end{cases} \quad (1.64)$$

En remplaçant les contraintes et les déplacements par leurs expressions, on obtient :

$$\begin{cases} k_{rr} = \frac{2G}{R} \frac{\left[\frac{3a^2}{R^2} - (1 - 2\nu) \frac{R^2}{(R+z)^2} \right] \frac{a}{R}}{1 + \frac{a^2}{R^2} + (1 - 2\nu) \left(\frac{R}{R+z} - \frac{a^2}{(R+z)^2} \right)} \\ k_{r\theta} = \frac{2(1 - 2\nu)Ga}{(R+z)^2 \left[1 + \frac{(1 - 2\nu)R}{R+z} \right]} \\ k_{rz} = \frac{6G}{a} \frac{\left(\frac{z}{R} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^2}{\left[\left(\frac{z}{R} \right)^2 + 2(1 - \nu) \right]} \end{cases} \quad (1.65)$$

avec $r = a$ et $R = \sqrt{z^2 + a^2}$. Sur cette frontière, il est préférable d'obtenir des constantes

de raideur indépendamment de la variable z . Pour cela, on écrit :

$$\begin{cases} \bar{k}_{rr} = -\frac{G \int_0^h \sigma_{rr} \frac{a}{G} dz}{a \int_0^h u_r dz} = \frac{G}{a} \beta_{rr} \\ \bar{k}_{r\theta} = -\frac{G \int_0^h \sigma_{r\theta} \frac{a}{G} dz}{a \int_0^h u_\theta dz} = \frac{G}{a} \beta_{r\theta} \\ \bar{k}_{rz} = -\frac{G \int_0^h \sigma_{rz} \frac{a}{G} dz}{a \int_0^h u_z dz} = \frac{G}{a} \beta_{rz} \end{cases} \quad (1.66)$$

D'où il vient :

$$\begin{cases} \beta_{rr} = \frac{2 \int_0^h \left[\frac{3a^2}{R^2} - (1-2\nu) \frac{R^2}{(R+z)^2} \right] \frac{a^2}{R^3} dz}{\int_0^h \left[1 + \frac{a^2}{R^2} + (1-2\nu) \left(\frac{R}{R+z} - \frac{a^2}{(R+z)^2} \right) \right] \frac{dz}{R}} \\ \beta_{r\theta} = \frac{2(1-2\nu) \int_0^h \frac{a^2}{R(R+z)^2} dz}{\int_0^h \left[1 + \frac{R(1-2\nu)}{R+z} \right] \frac{dz}{R}} \\ \beta_{rz} = \frac{6a^2 \int_0^h \frac{z^2}{R^5} dz}{\int_0^h \left[\left(\frac{z}{R} \right)^2 + 2(1-\nu) \right] \frac{dz}{R}} \end{cases} \quad (1.67)$$

1.3.2.3 Domaine parallélépipédique rectangulaire

Considérons un domaine à géométrie parallélépipédique rectangulaire, de dimension $2a_x \times 2a_y \times a_z$, dans lequel $x \in [-a_x, a_x]$, $y \in [-a_y, a_y]$ et $z \in [0, a_z]$. Les contraintes agissant sur les plans $x = a_x$, $y = a_y$ et $z = a_z$ sont données respectivement par :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -k_{xx} u_x \\ \sigma_{xy} = -k_{xy} u_y \\ \sigma_{xz} = -k_{xz} u_z \end{cases} ; \begin{cases} \sigma_{yx} = -k_{yx} u_x \\ \sigma_{yy} = -k_{yy} u_y \\ \sigma_{yz} = -k_{yz} u_z \end{cases} ; \begin{cases} \sigma_{zx} = -k_{zx} u_x \\ \sigma_{zy} = -k_{zy} u_y \\ \sigma_{zz} = -k_{zz} u_z \end{cases} \quad (1.68)$$

D'où, il vient :

$$\begin{cases} k_{xx} = -\frac{\sigma_{xx}}{u_x} \\ k_{xy} = -\frac{\sigma_{xy}}{u_y} \\ k_{xz} = -\frac{\sigma_{xz}}{u_z} \end{cases} ; \begin{cases} k_{yx} = -\frac{\sigma_{yx}}{u_x} \\ k_{yy} = -\frac{\sigma_{yy}}{u_y} \\ k_{yz} = -\frac{\sigma_{yz}}{u_z} \end{cases} ; \begin{cases} k_{zx} = -\frac{\sigma_{zx}}{u_x} \\ k_{zy} = -\frac{\sigma_{zy}}{u_y} \\ k_{zz} = -\frac{\sigma_{zz}}{u_z} \end{cases} \quad (1.69)$$

ou sous forme indicielle suivante :

$$k_{ij} = -\frac{\sigma_{ij}}{u_j} \quad (1.70)$$

i désigne ici l'indice du plan et j la direction considérée. Les constantes équivalentes à définir sur chaque plan s'obtiennent par :

$$\bar{k}_{ij} = -\frac{\int_{\Gamma_i} \sigma_{ij} d\Gamma}{\int_{\Gamma_i} u_j d\Gamma} \quad (1.71)$$

Avec Γ_i le plan considéré, tel que :

$$\Gamma_x = \begin{cases} x = a_x \\ y \in [-a_y, a_y] \\ z \in [0, a_z] \end{cases} ; \quad \Gamma_y = \begin{cases} x \in [-a_x, a_x] \\ y = a_y \\ z \in [0, a_z] \end{cases} ; \quad \Gamma_z = \begin{cases} x \in [-a_x, a_x] \\ y \in [-a_y, a_y] \\ z = a_z \end{cases} \quad (1.72)$$

Avant de calculer les constantes de raideur à introduire sur chaque plan, on doit d'abord déterminer les contraintes agissant dans chaque sens. Au premier lieu, nous allons chercher les contraintes qui contribuent dans les sens x et y . Pour cela, on considère les solutions analytiques de Cerruti pour une charge concentrée P_x , appliquée à l'origine dans le sens x d'un espace semi-infini. Ces solutions sont données en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\frac{P_x x}{2\pi R^3} \left[\frac{3x^2}{R^2} - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(x^2 + z^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) \right] \\ \sigma_{yx} = -\frac{P_x y}{2\pi R^3} \left[\frac{3x^2}{R^2} - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(y^2 + z^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) \right] \\ \sigma_{zx} = -\frac{P_x z}{2\pi R^3} \frac{3x^2}{R^2} \end{cases} \quad (1.73)$$

pour les contraintes, et pour les déplacements par :

$$u_x = \frac{P_x}{4\pi R G} \left[1 + \frac{x^2}{R^2} + \frac{(1-2\nu)}{(R+z)} \left(R - \frac{x^2}{R+z} \right) \right] \quad (1.74)$$

Avec G et ν sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du sol, et $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ désigne la distance entre l'origine et le point considéré. D'après la relation (1.71) et en tenant toujours compte de (1.73) et (1.74), les constantes de raideur équivalentes dans le sens x qui correspondent aux plans $x = a_x$, $y = a_y$ et $z = a_z$

sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_{xx} = -\frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \sigma_{xx} dz dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} u_x dz dy} = \frac{G}{a_x} \beta_{xx} \\ \bar{k}_{yx} = -\frac{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \sigma_{yx} dz dx}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} u_x dz dx} = \frac{G}{a_y} \beta_{yx} \\ \bar{k}_{zx} = -\frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \sigma_{zx} dx dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} u_x dx dy} = \frac{G}{a_z} \beta_{zx} \end{array} \right. \quad (1.75)$$

avec maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{xx} = 2a_x^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left[3 \left(\frac{a_x}{R} \right)^2 - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(a_x^2 + z^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) \right] R^{-3} dz dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{a_x}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+z)} \left(R - \frac{a_x^2}{R+z} \right) \right] R^{-1} dz dy} \\ \beta_{yx} = 2a_y^2 \frac{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[3 \left(\frac{x}{R} \right)^2 - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(a_y^2 + z^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) \right] R^{-3} dz dx}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+z)} \left(R - \frac{x^2}{R+z} \right) \right] R^{-1} dz dx} \\ \beta_{zx} = 2a_z^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \left[3 \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right] R^{-3} dx dy}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{x}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+a_z)} \left(R - \frac{x^2}{R+a_z} \right) \right] R^{-1} dx dy} \end{array} \right. \quad (1.76)$$

Pour obtenir les constantes de raideur dans le sens y , on suit les mêmes étapes que précédemment, mais pour une charge concentrée P_y appliquée dans la direction y , d'où on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{xy} = 2a_x^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left[3 \left(\frac{y}{R} \right)^2 - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(a_x^2 + z^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) \right] R^{-3} dz dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{y}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+z)} \left(R - \frac{y^2}{R+z} \right) \right] R^{-1} dz dy} \\ \beta_{yy} = 2a_y^2 \frac{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[3 \left(\frac{a_y}{R} \right)^2 - \frac{(1-2\nu)}{(R+z)^2} \left(a_y^2 + z^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) \right] R^{-3} dz dx}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{a_y}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+z)} \left(R - \frac{a_y^2}{R+z} \right) \right] R^{-1} dz dx} \\ \beta_{zy} = 2a_z^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \left[3 \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right] R^{-3} dx dy}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[1 + \left(\frac{y}{R} \right)^2 + \frac{(1-2\nu)}{(R+a_z)} \left(R - \frac{y^2}{R+a_z} \right) \right] R^{-1} dx dy} \end{array} \right. \quad (1.77)$$

Maintenant, nous allons chercher les constantes de raideur correspondant à la direction

z. Dans ce cas, on considère les solutions analytiques de Boussinesq obtenues pour un espace semi-infini, soumis à une charge concentrée P_z , appliquée à l'origine dans le sens z. Les contraintes en coordonnées cartésiennes sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = -\frac{3P_z xz^2}{2\pi R^5} \\ \sigma_{yz} = -\frac{3P_z yz^2}{2\pi R^5} \\ \sigma_{zz} = -\frac{3P_z z^3}{2\pi R^5} \end{cases} \quad (1.78)$$

et les déplacements par :

$$u_z = \frac{P_z}{4\pi RG} \left[\frac{z^2}{R^2} + 2(1-\nu) \right] \quad (1.79)$$

La substitution de (1.78) et (1.79) dans (1.71), nous donne les constantes équivalentes dans le sens z, qui correspondent aux plans $x = a_x$, $y = a_y$ et $z = a_z$:

$$\begin{cases} \bar{k}_{xz} = -\frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \sigma_{xz} dz dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} u_z dz dy} = \frac{G}{a_x} \beta_{xz} \\ \bar{k}_{yz} = -\frac{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \sigma_{yz} dz dx}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} u_z dz dx} = \frac{G}{a_y} \beta_{yz} \\ \bar{k}_{zz} = -\frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \sigma_{zz} dx dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} u_z dx dy} = \frac{G}{a_z} \beta_{zz} \end{cases} \quad (1.80)$$

$$\begin{cases} \beta_{xz} = 6a_x^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left(\frac{z}{R}\right)^2 R^{-3} dz dy}{\int_{-a_y}^{a_y} \int_0^{a_z} \left[\left(\frac{z}{R}\right)^2 + 2(1-\nu)\right] R^{-1} dz dy} \\ \beta_{yz} = 6a_y^2 \frac{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left(\frac{z}{R}\right)^2 R^{-3} dz dx}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[\left(\frac{z}{R}\right)^2 + 2(1-\nu)\right] R^{-1} dz dx} \\ \beta_{zz} = 6a_z^2 \frac{\int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_x}^{a_x} \left(\frac{a_z}{R}\right)^2 R^{-3} dx dy}{\int_{-a_x}^{a_x} \int_0^{a_z} \left[\left(\frac{a_z}{R}\right)^2 + 2(1-\nu)\right] R^{-1} dx dy} \end{cases} \quad (1.81)$$

Comme toutes les constantes de raideur sont définies, il nous reste qu'à rassembler les expressions correspondant à chaque plan, donc :

$$\begin{cases} \bar{k}_{xx} = \frac{G}{a_x} \beta_{xx} \\ \bar{k}_{xy} = \frac{G}{a_x} \beta_{xy} \\ \bar{k}_{xz} = \frac{G}{a_x} \beta_{xz} \end{cases} \quad (1.82)$$

pour le plan $x = a_x$, et :

$$\begin{cases} \bar{k}_{yx} = \frac{G}{a_y} \beta_{yx} \\ \bar{k}_{yy} = \frac{G}{a_y} \beta_{yy} \\ \bar{k}_{yz} = \frac{G}{a_y} \beta_{yz} \end{cases} \quad (1.83)$$

pour le plan $y = a_y$, et finalement

$$\begin{cases} \bar{k}_{zx} = \frac{G}{a_z} \beta_{zx} \\ \bar{k}_{zy} = \frac{G}{a_z} \beta_{zy} \\ \bar{k}_{zz} = \frac{G}{a_z} \beta_{zz} \end{cases} \quad (1.84)$$

pour le plan $z = a_z$. Les β_{ij} sont données par les expressions (1.76), (1.77) et (1.81). Les constantes de raideur concernant les plans $x = -a_x$ et $y = -a_y$ sont respectivement les mêmes que celles des plans $x = a_x$ et $y = a_y$, mais avec un signe opposé.

Il est à noter que les forces de raideur qu'on a vu, ont été développées dans le but d'améliorer les conditions aux limites de troncatures, et leur mise en œuvre doit être effectuée en conjonction avec les forces d'amortissement.

1.4 Conclusion

Dans le cas d'un fluide supposé incompressible, la condition de Sommerfeld se réduit à la valeur nulle, ce qui conduit à une limite de troncature supposée libre sans conditions, contrairement à la condition de Sharan qui tient toujours compte des effets radiatifs. Dans le cas du sol, les effets radiatifs peuvent être considérés par des forces d'amortissement, et il est possible d'améliorer ces conditions en introduisant des forces de raideur.

Chapitre 2

Eléments infinis

2.1 Introduction

Parmi les méthodes numériques les plus répandues aujourd'hui pour résoudre les problèmes de l'ingénierie, on trouve la méthode des éléments finis qui présente une grande flexibilité et permet en outre la prise en compte de la complexité géométrique et de la variation des propriétés du phénomène à étudier. Le succès de cette méthode, et la nécessité de traiter des domaines non bornés, ont conduits au développement de nouveaux éléments à base des éléments finis appelés "éléments infinis" [12,15,28]. En effet, le traitement des conditions aux limites de troncature par des éléments infinis permet d'une part, de modéliser économiquement des domaines non bornés et d'autre part, d'éviter l'insertion d'une condition radiative ou d'éléments absorbants au niveau de cette limite.

Les premiers éléments infinis apparus ont été produits par Ungless et Anderson en 1973, et sont appelés "éléments finis infinis" [5,22]. Ce travail fut l'objet d'une thèse qui n'a été publiée qu'en 1977. Ainsi, le premier travail publié sur les éléments infinis est l'article de Zienkiewicz et Bettess, paru en 1975 [5]. L'idée introduite dans l'élément d'Ungless et Anderson était l'utilisation d'une fonction de forme, qui varie comme $1/(1+r)$ dans la direction radiale r . Ceci est suffisamment simple pour manier la plus part des opérations analytiquement. L'élément était tridimensionnel à base triangulaire, définie dans le plan local xy et s'étend à partir de cette base à l'infini dans la direction z . Les matrices élémentaires étaient calculées en utilisant l'intégration analytique dans le plan xy et l'intégration numérique par la règle des trapèzes dans la direction z après une transformation géométrique.

Une autre origine de la formulation des éléments infinis, totalement différente est décrite par Bettess. Le domaine de l'élément est étendu à l'infini en utilisant n'importe quel élément fini comme base. Les fonctions de forme sont ensuite multipliées par des

fonctions de décroissance appropriées au problème traité. Une décroissance de type exponentielle a été d'abord utilisée et les matrices élémentaires obtenues comprenaient des termes d'intégrales de polynômes multipliés par e^{-r} et simplement évaluées analytiquement.

Ces deux origines de formulation des éléments infinis ont constitué les deux lignes principales du développement de nouveaux types d'éléments. Ce qui a conduit à la classification des éléments infinis en deux approches [1,5,9,12,22,26,27] : l'approche directe par fonctions de forme décroissantes et l'approche inverse (indirecte) par des fonctions de transformations géométriques.

L'objectif visé dans ce chapitre est de présenter la théorie des éléments infinis concernant les deux approches, et de montrer la facilité de les introduire dans un programme de calcul en éléments finis par quelques simples modifications.

2.2 Approche directe

Dans l'approche directe, la technique pour établir un élément infini à base d'un élément fini, est l'extension du domaine de définition des coordonnées naturelles et des coordonnées de référence en dehors de l'élément fini jusqu'à l'infini dans la direction considérée. La figure 2.1 ci-après montre un exemple d'élément infini obtenu à partir d'élément fini quadrilatéral linéaire.

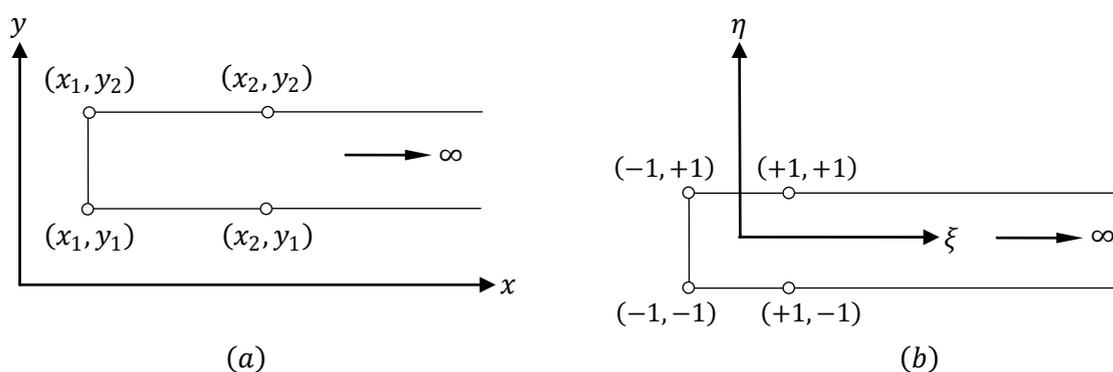


Figure 2.1 : Approche directe - élément infini dans la direction horizontale.

(a) élément réel.

(b) élément de référence.

Avec cette définition d'élément infini, les mêmes fonctions de transformations géométriques sont gardées comme dans le cas d'élément fini. Le seul changement est dans l'utilisation des fonctions de décroissance en conjonction avec les fonctions de forme

ordinaires de l'élément pour construire les fonctions de forme infinies, ainsi que le domaine d'intégration qui s'allonge à l'infini dans la direction considérée.

Chaque fonction d'interpolation V_i associée au nœud i d'un élément infini, s'obtient par la multiplication de la fonction de forme N_i de l'élément fini de base, par une fonction f_i décroissante d'une façon asymptotique vers zéro à l'infini. Les nouvelles fonctions d'interpolations V_i s'écrivent :

$$V_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \cdot f_i(\xi, \eta) \quad (2.1)$$

Chacune des fonctions de décroissance choisies f_i doit être égale à l'unité au nœud i auquel elle est liée, aucune autre condition n'est imposée sur les valeurs qu'elle doit prendre aux autres nœuds.

La somme des fonctions de forme infinies V_i devient différente de l'unité. En effet, il peut être montré par un simple calcul que la somme est un polynôme en ξ , ou en η selon la direction considérée infinie, d'ordre au moins égal à celui de l'élément. Les expressions correspondantes à chaque type d'élément sont données par les relations suivantes [22] :

Elément linéaire :

$$\begin{array}{c}
 V_1 = N_1 f_1 \qquad \qquad \qquad V_2 = N_2 f_2 \qquad \qquad \qquad \xrightarrow{\xi} \infty \\
 \circ \text{-----} \circ \\
 -1 \qquad \qquad \qquad +1
 \end{array}$$

$$\sum V_i = \frac{1}{2}(f_2 - f_1)\xi + \frac{1}{2}(f_2 + f_1) \quad (2.2)$$

Elément quadratique :

$$\begin{array}{c}
 V_1 = N_1 f_1 \qquad V_2 = N_2 f_2 \qquad V_3 = N_3 f_3 \qquad \qquad \qquad \xrightarrow{\xi} \infty \\
 \circ \text{-----} \circ \text{-----} \circ \\
 -1 \qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad +1
 \end{array}$$

$$\sum V_i = \frac{1}{2}(f_1 - 2f_2 + f_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(f_3 - f_1)\xi + f_2 \quad (2.3)$$

Ces expressions permettent de suggérer le type de fonctions de décroissance à utiliser pour que les polynômes correspondant tendent vers zéro quand ξ tend vers l'infini. Elles sont valides aussi pour le cas de deux dimensions avec une seule direction infinie.

Quelque soit l'ordre de l'élément, lorsque ξ prend la valeur au nœud i ($\xi = \xi_i$), la somme se réduit à la seule fonction f_i définie en ce même nœud et donc à l'unité, puisque par définition $f_i(\xi_i) = 1$; alors :

$$\sum V_i(\xi = \xi_i) = f_i(\xi = \xi_i) = 1 \quad (2.4)$$

Si les fonctions f_i sont correctement définies, lorsque ξ augmente de +1 à l'infini, la somme décroît d'une manière asymptotique vers zéro. Ce type de variation permet de représenter à la fois les valeurs de champ constant, à l'intérieur du domaine fini, et les valeurs nulles, par l'hypothèse, à l'infini. Des paramètres sont souvent introduits afin de contrôler la décroissance.

2.2.1 Choix des fonctions de décroissance

Il est presque inévitable de s'en passer du théorème de Green aussi bien dans la formulation variationnelle que dans l'utilisation des résidus pondérés pour traiter un problème donné, ce qui pose des restrictions sur le choix des fonctions de forme pour une analyse par la méthode des éléments finis [5,22]. De plus, si le domaine d'intégration est non borné, d'autres contraintes supplémentaires doivent être respectées par les fonctions de forme complètes à construire pour un élément infini. Toutefois, il est possible de synthétiser plusieurs fonctions décroissantes ; deux types sont considérés dans cette section.

2.2.1.1 Fonctions de décroissance du type exponentielle

La fonction de décroissance exponentielle e^{-x} possède l'avantage de dominer le comportement de n'importe quel polynôme quand x devient grand ; ce qui assure la convergence des fonctions de forme complètes vers zéro à l'infini. Plus précisément, pour chaque nœud i dans l'élément de référence, ces fonctions ont pour expression :

$$f_i(\xi, \eta) = e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad (2.5)$$

L'expression (2.5) correspond à une décroissance seulement dans la direction ξ . L'introduction de ξ_i assure que les fonctions de forme complètes gardent la valeur unité aux nœuds ($F_i = 1$). Pour une décroissance dans les deux directions ξ et η , l'expression de f_i devient :

$$f_i(\xi, \eta) = e^{\frac{(\xi_i - \xi + \eta_i - \eta)}{L}} \quad (2.6)$$

Le paramètre L est une longueur déterminant la sévérité de décroissance. Il est possible de le fixer à l'unité et de contrôler la sévérité par la distance entre les nœuds de l'élément réel, dans le maillage du problème physique à étudier. La plus part des auteurs préfèrent varier L . Dans le cas où la tendance de la solution théorique du problème posé

est connue à priori en champ lointain, la valeur du paramètre L pourrait être estimée, mais généralement il est déterminé par une étude paramétrique.

Enfin, les expressions des fonctions de forme complètes d'un élément infini dans la direction ξ peuvent être écrites :

$$V_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad (2.7)$$

et leurs dérivées :

$$\frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{N_i}{L} \right] e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} ; \quad \frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{N_i}{\partial \eta} e^{\frac{(\xi_i - \xi)}{L}} \quad (2.8)$$

2.2.1.2 Fonctions de décroissance du type puissance

Dans le cas de problèmes présentant un comportement du type l/r , où l est une longueur constante spécifique au problème et r est un rayon assez grand pour être infini, il est naturel de chercher un élément infini dont le comportement est essentiellement dominé par la même forme de comportement. Ceci peut être réalisé par l'utilisation des fonctions décroissantes du type puissance, qui assurent une tendance en $1/r$ quand ξ tend vers l'infini. Pour une décroissance seulement dans la direction ξ , ces fonctions ont pour expression :

$$f_i(\xi, \eta) = \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad (2.9)$$

Avec ξ_0 est un point origine quelconque appelé pôle. Ce point doit être en dehors de l'élément ; dans la face opposée à celle s'étendant à l'infini. Si la décroissance est dans la direction positive de ξ , alors ξ_0 doit être inférieur à -1 , sinon il doit être supérieur à 1 pour éviter des singularités à l'intérieur de l'élément [5,22].

Le paramètre de sévérité n , contrôlant la décroissance en puissance, doit être supérieur au plus grand ordre des polynômes en ξ , intervenant dans les fonctions de forme standard N . Ceci permet d'assurer quand ξ augmente, les fonctions de forme complètes V_i tendent vers $1/\xi$, qui est le comportement attendu du problème posé. Il n'existe aucune règle à suivre pour déterminer n , encore, seule l'expérimentation permet de porter un jugement. Cependant, il est clair que si n est trop petit, alors d'une part, les conditions d'application de l'identité de Green pourraient être violées, et d'autre part les fonctions de forme complètes V_i deviennent ascendantes. S'il est trop grand, d'importantes propriétés physiques du problème peuvent être mal représentées et même omises [5].

La décroissance peut être généralisée pour les deux directions :

$$f_i(\xi, \eta) = \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \left[\frac{\eta_i - \eta_0}{\eta - \eta_0} \right]^m \quad (2.10)$$

Les paramètres n et m ne sont pas nécessairement des entiers et peuvent être égaux, ce qui est généralement supposé pour simplifier l'étude paramétrique [22].

Les expressions des fonctions de forme complètes pour un élément infini dans la direction ξ sont :

$$V_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad (2.11)$$

Et leurs dérivées :

$$\frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{n N_i}{\xi - \xi_0} \right] \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad ; \quad \frac{\partial V_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left[\frac{\xi_i - \xi_0}{\xi - \xi_0} \right]^n \quad (2.12)$$

2.2.2 Intégration des fonctions de forme d'éléments infinis [5]

Il est possible d'intégrer analytiquement les matrices élémentaires, pouvant être obtenues pour les éléments infinis. Ceci a été fait par quelques auteurs lors du développement des premiers éléments infinis. Cependant, la méthode d'intégration numérique est aussi disponible pour l'intervalle $[0, \infty[$ et elle est d'application aussi simple que celle utilisée pour les éléments finis. Ainsi, l'intégration numérique est préférée pour sa généralité par rapport à l'intégration analytique.

2.2.2.1 Intégration numérique des formes de décroissance exponentielles

La formule standard d'intégration numérique de Gauss-Laguerre permet d'évaluer les intégrales de la forme :

$$I = \int_0^{\infty} p(x) e^{-x} dx \quad (2.13)$$

L'intégration numérique est exacte si la fonction $p(x)$ est un polynôme et un nombre approprié des points d'intégration est utilisé. Il est clair que cette formule d'intégration convient parfaitement à la décroissance du type exponentiel. Les termes d'intégrales intervenant dans les fonctions de forme complètes ou leurs dérivées sont de la forme

suivante :

$$I = \int_{-1}^{\infty} p(\xi) e^{\frac{-\xi}{L}} d\xi \quad (2.14)$$

Maintenant, le domaine d'intégration s'étale de -1 à l'infini et p est un polynôme en ξ correspondant aux fonctions de forme ou leurs dérivées. Les matrices élémentaires à évaluer font intervenir des multiplications de ces termes, et les intégrales finales prennent la forme :

$$I = \int_{-1}^{\infty} q(\xi) e^{\frac{-2\xi}{L}} d\xi \quad (2.15)$$

$q(\xi)$ est un autre polynôme résultant des produits intervenant dans les expressions des matrices élémentaires. La formule d'intégration de Gauss-Laguerre peut être adaptée pour évaluer ce genre d'intégrale par un simple changement de variable. Une nouvelle variable s peut être définie de telle sorte que quand $\xi = -1$, $s = 0$ et quand $\xi = \infty$, $s = \infty$.

$$s = \frac{2}{L}(\xi + 1) \quad ; \quad \xi = \frac{L}{2}s - 1 \quad (2.16)$$

Et pour les dérivées :

$$ds = \frac{2}{L}d\xi \quad ; \quad d\xi = \frac{L}{2}ds \quad (2.17)$$

Ainsi, l'intégrale (2.15) devient :

$$\int_{-1}^{\infty} q(\xi) e^{\frac{-2\xi}{L}} d\xi = \int_0^{\infty} q\left(\frac{L}{2}s - 1\right) \frac{L}{2} e^{\frac{2}{L}e^{-s}} ds = \frac{L}{2} e^{\frac{2}{L}} \int_0^{\infty} p(s) e^{-s} ds \quad (2.18)$$

Pour utiliser l'intégration de Gauss-Laguerre, les abscisses et poids (s, w_0) doivent être modifiés de la façon suivante :

$$\xi = \frac{L}{2}s - 1 \quad ; \quad w = w_0 \frac{L}{2} e^{\frac{2}{L}} \quad (2.19)$$

Ainsi, ξ et w sont les nouvelles valeurs des abscisses et des poids à remplacer dans la somme, permettant de calculer les matrices élémentaires. Si la décroissance est dans la direction négative, les expressions correspondantes deviennent :

$$\int_{-\infty}^1 q(\xi) e^{\frac{2\xi}{L}} d\xi = \int_0^{\infty} q\left(1 - \frac{L}{2}s\right) \frac{L}{2} e^{\frac{2}{L}e^{-s}} ds = \frac{L}{2} e^{\frac{2}{L}} \int_0^{\infty} p(s) e^{-s} ds \quad (2.20)$$

avec un changement de variable :

$$s = \frac{2}{L}(1 - \xi) \quad ; \quad \xi = 1 - \frac{L}{2}s \quad (2.21)$$

Des tableaux d'abscisses et poids pour les différents ordre d'intégration sont donnés en annexe A.

2.2.2.2 Intégration numérique des formes de décroissance en puissance

Il est possible d'utiliser l'intégration numérique de Gausse-Laguerre pour des fonctions de décroissance en puissance qui ne contiennent pas un terme exponentiel, simplement en les multipliant par e^{-x} :

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx = \int_0^{\infty} [f(x) e^x] e^{-x} dx \quad (2.22)$$

cela peut fonctionner seulement dans le cas où la fonction se comporte raisonnablement bien quand x tend vers l'infini.

Cependant, une autre possibilité d'intégration peut être admise. La technique consiste à transformer le domaine d'intégration infini en un domaine fini, puis utiliser l'intégration numérique de Gauss-Legendre qui est applicable dans le domaine $[-1, +1]$. Pour les éléments infinis construits à base d'éléments de référence finis, le domaine d'intégration est $[-1, +\infty[$ ou bien $]-\infty, +1]$ selon la direction de décroissance considérée. Une telle transformation peut être réalisée par le changement de variables suivant :

$$\xi = \frac{2s}{1-s} \quad ; \quad d\xi = \frac{2}{(1-s)^2} ds \quad (2.23)$$

pour une décroissance dans la direction positive, et

$$\xi = \frac{2s}{1+s} \quad ; \quad d\xi = \frac{2}{(1+s)^2} ds \quad (2.24)$$

pour une décroissance dans la direction négative.

Avec ce changement de variables, l'intégration numérique de Gauss-Legendre peut être

effectuée pour évaluer les expressions des matrices élémentaires d'un élément infini. Pour une décroissance dans la direction positive, la forme correspondante est :

$$\int_{-1}^{+\infty} f(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2s}{1-s}\right) \frac{2}{(1-s)^2} ds \quad (2.25)$$

Pour une décroissance dans la direction négative :

$$\int_{-\infty}^{+1} f(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{2s}{1+s}\right) \frac{2}{(1+s)^2} ds \quad (2.26)$$

Dans ce cas aussi, les abscisses et les poids (s, w_0) tabulés pour l'intégration par la méthode de Gauss-Legendre doivent être modifiés. Pour une direction infinie positive :

$$\xi = \frac{2s}{1-s} \quad ; \quad w = w_0 \frac{2}{(1-s)^2} \quad (2.27)$$

Pour une direction infinie négative :

$$\xi = \frac{2s}{1+s} \quad ; \quad w = w_0 \frac{2}{(1+s)^2} \quad (2.28)$$

2.3 Approche inverse

Contrairement à l'approche directe, dans cette approche le domaine de définition de l'élément de référence, ainsi que les fonctions d'interpolation sont gardés et retenus comme définis pour un élément fini standard. Cependant, les fonctions de transformation géométrique sont construites ascendantes avec une singularité aux nœuds limites de l'élément de référence, de telle sorte à projeter les nœuds physique de l'élément naturel correspondant à l'infini.

Afin de réaliser une telle transformation géométrique, il convient d'abord de considérer la projection sur le domaine de référence $[-1, +1]$ d'un élément infini unidimensionnel défini par deux nœuds. Les fonctions de transformations géométriques pour les éléments de plus haut ordre et les éléments bi-et tridimensionnels sont élaborées sur la base de cette projection. Deux transformations sont considérées dans cette section, la première est celle proposée par Zienkiewicz [5] et la seconde par Abdel-Fattah [1].

2.3.1 Transformation de Zienkiewicz

L'idée de base introduite dans la transformation de Zienkiewicz, est de considérer un élément linéique représenté sur la figure 2.2, s'étendant du point x_1 à travers x_2 en x_3 qui se trouve à l'infini avec l'utilisation d'une transformation convenable qui peut s'écrire sous :

$$x = \frac{-\xi}{1-\xi}x_0 + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right)x_2 \quad (2.29)$$

L'expression (2.29) permet d'avoir :

$$\begin{cases} x = \infty & \text{pour } \xi = +1 \\ x = x_2 & \text{pour } \xi = 0 \\ x = \frac{1}{2}(x_0 + x_2) = x_1 & \text{pour } \xi = -1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Le point x_1 est l'abscisse du milieu entre x_0 et x_2 , ce qui implique que la moitié interne de l'élément infini est de même étendu que celle du domaine fini, à partir du point x_0 qui est le pôle du problème.

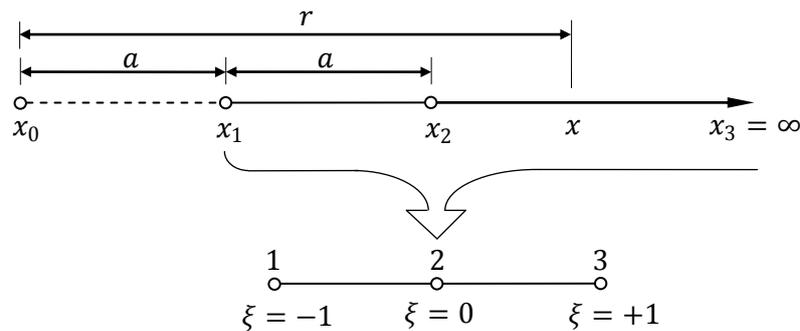


Figure 2.2 : Transformation de Zienkiewicz d'un élément infini unidimensionnel.

Cette transformation peut aussi s'écrire directement en fonction des seules coordonnées de l'élément infini en éliminant x_0 de l'équation (2.29) :

$$x = M_1(\xi) x_1 + M_2(\xi) x_2 \quad (2.31)$$

avec :

$$M_1(\xi) = \frac{-2\xi}{1-\xi} \quad ; \quad M_2 = \frac{1+\xi}{1-\xi} \quad (2.32)$$

Ce qui définit les fonctions de transformation géométrique de l'élément. Une caractéristique importante de ces fonctions est qu'elles conduisent à une transformation indépendante de l'origine du système des coordonnées car :

$$M_1(\xi) + M_2(\xi) = 1 \quad (2.33)$$

En effet, un décalage de l'origine de Δx conduit aux nouvelles coordonnées :

$$x + \Delta x = (x_1 + \Delta x)M_1(\xi) + (x_2 + \Delta x)M_2(\xi) \quad (2.34)$$

qui peuvent être écrites :

$$x + \Delta x = [M_1(\xi)x_1 + M_2(\xi)x_2] + \Delta x[M_1(\xi) + M_2(\xi)] \quad (2.35)$$

qui n'est vrai que dans le seul cas où la propriété (2.33) est vérifiée. Ce qui montre que :

$$M_1(\xi + \Delta\xi) + M_2(\xi + \Delta\xi) = M_1(\xi) + M_2(\xi) \quad (2.36)$$

Une transformation géométrique entre le domaine fini et le domaine infini étant parfaitement établie. La prochaine étape consiste à voir en quelle forme le polynôme dans le domaine fini ξ est transformé en domaine infini x .

Soit u un polynôme typique en éléments finis, représentant l'approximation nodale de la variable de champs dans le domaine fini ξ et qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$u = \sum N_i u_i = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \dots \quad (2.37)$$

Avec α_i les combinaisons linéaires des valeurs nodales u_i . L'expression de ξ obtenue à partir de la transformation (2.29) s'écrit :

$$\xi = \frac{x - x_2}{x - x_0} = 1 - \frac{x_2 - x_0}{r} = 1 - \frac{2a}{r} \quad (2.38)$$

où $r = x - x_0$ la distance radiale mesurée à partir du pôle x_0 , qui représente le centre à partir duquel la perturbation prend naissance. La substitution de (2.38) dans (2.37) conduit au développement suivant :

$$u = \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \frac{\beta_3}{r^3} + \dots \quad (2.39)$$

Les β_i sont des coefficients déterminés à partir des α_i et a . Particulièrement, si le

polynôme requis doit tendre vers zéro à l'infini, alors $\beta_0 = 0$.

L'expression (2.39) est solution de plusieurs problèmes extérieurs et présente l'avantage de modéliser le comportement du champ lointain, en utilisant directement les polynômes ordinaires d'éléments finis, avec l'intégration numérique standard de Gauss-Legendre [5,22]. Le seul changement requis pour modifier un programme d'éléments finis dans le but d'intégrer des éléments infinis, consiste en un nouveau calcul de la matrice Jacobienne avec les dérivées des fonctions de transformation M_i au lieu de celles des fonctions de forme N_i .

2.3.1.1 Généralisation de la transformation de Zienkiewicz

La généralisation de la transformation de Zienkiewicz au cas d'éléments unidimensionnels linéaires ou de plus haut ordre est simple et pratique, et conduit aussi à la génération des fonctions de transformation de n'importe quel élément.

Considérons les deux premières fonctions de forme de l'élément unidimensionnel quadratique de la figure (2.2) relatives aux nœuds $\xi = -1$ et $\xi = 0$ et qui s'écrivent par :

$$N_1 = \frac{-\xi(1-\xi)}{2} \quad ; \quad N_2 = (1+\xi)(1-\xi) \quad (2.40)$$

La comparaison entre les expressions (2.40) et les fonctions de transformations géométriques M_1 et M_2 de (2.32), permet de remarquer que la seule différence réside dans le dernier terme qui est inversé. Ce qui montre immédiatement la possibilité de générer des fonctions de transformation géométrique pour des éléments infinis de n'importe quel ordre désiré. L'expression générale de ces fonctions s'écrit par [22] :

$$M_i = \frac{1-\xi_i}{1-\xi} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad ; \quad i = 1, n-1 \quad (2.40)$$

avec n est le nombre de nœuds y compris celui qui est à l'infini correspondant à $\xi = +1$.

Il est à noter que l'expression (2.40) peut s'écrire sous la forme :

$$M_i = N_i \bar{f}_i \quad (2.41)$$

qui est le produit des fonctions de forme standards N_i par des fonctions croissantes \bar{f}_i présentant une singularité au nœud infini, et par conséquent d'identifier la

transformation géométrique des éléments infinis comme approche analogue à l'approche directe utilisant des fonctions de décroissance.

Avec les \bar{f}_i :

$$\bar{f}_i = \left(\frac{1 - \xi_i}{1 - \xi} \right)^2 \quad (2.42)$$

sont des fonctions croissantes puisque l'intervalle sur lequel elles sont définies est restreint à celui de l'élément fini $[-1, +1]$.

Dans le cas où la direction infinie est négative, les expressions (2.40) et (2.42) deviennent respectivement:

$$M_i = \frac{1 + \xi_i}{1 + \xi} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad ; \quad i = 1, n - 1 \quad (2.43)$$

$$\bar{f}_i = \left(\frac{1 + \xi_i}{1 + \xi} \right)^2 \quad (2.44)$$

et permettent d'avoir :

$$\begin{cases} x = \infty & \text{pour } \xi = -1 \\ x = x_2 & \text{pour } \xi = 0 \\ x = \frac{1}{2}(x_0 + x_2) = x_1 & \text{pour } \xi = +1 \end{cases} \quad (2.45)$$

Les fonctions de transformations géométriques des éléments infinis à deux ou trois dimensions avec une direction infinie, peuvent être générées par l'expression (2.41) en utilisant directement les fonctions ascendantes (2.42) ou (2.44) selon la direction infinie considérée. Pour un élément s'étendant à l'infini dans les deux directions, les fonctions croissantes appropriées se généralisent par :

$$\bar{f}_i = \left(\frac{1 - \xi_i}{1 - \xi} \right)^2 \left(\frac{1 - \eta_i}{1 - \eta} \right)^2 \quad (2.46)$$

Evidemment dans cette expression, les directions infinies sont supposées positives. Cette technique est très pratique et fortement recommandée si les fonctions de forme de l'élément fini de base sont connues. Dans le cas contraire, les fonctions de transformation peuvent être obtenues à partir du cas unidimensionnel. Pour plus de détail sur la

construction des fonctions de transformations géométriques dans les cas bi-et tridimensionnel, nous demandons aux lecteurs de se référer à [5,22].

Finalement, il est nécessaire de noter que lors de la représentation d'un domaine physique non borné par un maillage d'éléments finis et d'éléments infinis, il faut veiller à ce que la relation entre les coordonnées de référence ξ et celles de l'élément réel infini x vérifie l'équation (2.38) pour que le développement (2.39) soit obtenu. A cet effet, les coordonnées naturelles x_i des n nœuds disposés dans la direction s'étendant à l'infini doivent être calculées par l'expression [22] :

$$x_i = \frac{(n-1)x_{n-1} + (n+1-2i)x_0}{2(n-i)} \quad (2.47)$$

2.3.2 Autres choix des fonctions de transformations géométriques

Il existe une large gamme de problèmes physiques, notamment en géomécanique qui présente un comportement différent de celui de la transformation de Zienkiewicz. Nous n'avons pas la prétention de présenter tous les comportements à l'infini, seul la transformation proposée par Abdel-Fattah [1] sera exposée.

Considérons l'élément unidimensionnel de la figure 2.3 qui forme la base pour les éléments bi et tridimensionnels. Encore une fois, l'élément s'étend du nœud 1 qui se trouve sur l'interface éléments finis-éléments infinis en passant par le nœud 2, puis le nœud 3 qui se trouve à l'infini. Le système des coordonnées globales $x \in [x_0, \infty[$ est transformé en élément parent défini par le système de coordonnées locales $\xi \in [-1, +1]$. Comme montré sur la figure suivante, le terme x_0 représente le pôle qui est la coordonnée globale de l'origine de la perturbation.

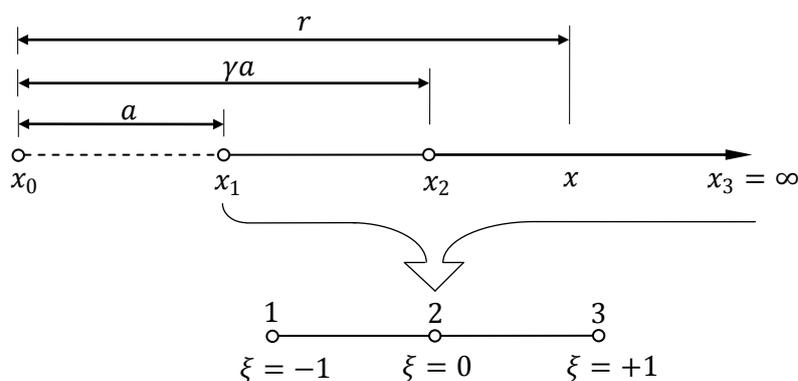


Figure 2.3 : Transformation de Abdel-Fattah d'un élément infini unidimensionnel.

La position du pôle est déterminée en accord avec le paramètre γ , qui est donné par la relation :

$$\gamma = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \quad (2.48)$$

L'expression (2.31) est réécrite ici pour transformer le système global au système local :

$$x = M_1(\xi) x_1 + M_2(\xi) x_2 \quad (2.49)$$

Pour inclure le paramètre de décroissance dans la transformation géométrique, $M_i(\xi)$ doit être écrite sous la forme :

$$M_1(\xi) = A_0 + A_1 r(\xi) \quad ; \quad M_2(\xi) = B_0 + B_1 r(\xi) \quad (2.50)$$

Où $r(\xi)$ est la fonction de variation, en accord avec la tendance du champ de variables à l'infini. Les constantes A_0 , A_1 , B_0 et B_1 sont déterminées en satisfaisant les conditions de base suivantes :

$$\begin{cases} M_i(\xi_j) = 1 & \text{pour } i = j \\ M_i(\xi_j) = 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (2.51)$$

Les expressions (2.50) et (2.51) permettent de donner :

$$\begin{cases} A_0 = \frac{-r(\xi_2)}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \\ A_1 = \frac{1}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} B_0 = \frac{r(\xi_1)}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \\ B_1 = \frac{-1}{r(\xi_1) - r(\xi_2)} \end{cases} \quad (2.52)$$

Le champ de variables u peut être interpolé, en utilisant les fonctions de forme standard, qui sont, pour l'élément de la figure (2.3) :

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (2.53)$$

Avec :

$$N_1 = -\frac{1}{2} \xi(1 - \xi) \quad ; \quad N_2 = 1 - \xi^2 \quad ; \quad N_3 = \frac{1}{2} \xi(1 + \xi) \quad (2.54)$$

Le terme $r(\xi)$ dans les expressions (2.52) est déterminé en accord avec la forme de décroissance voulue à l'infini. Trois types de décroissances sont considérés.

2.3.2.1 Transformation géométrique à décroissance en puissance

Une décroissance en puissance du champ de variables est choisie pour des problèmes présentant un comportement de type $(1/r^n)$. Les variables nodales de la figure 2.3 pour ce type de décroissance peuvent être écrites :

$$u_1 = \left(\frac{r(\xi)}{a}\right)^n u \quad ; \quad u_2 = \left(\frac{r(\xi)}{\gamma a}\right)^n u \quad (2.55)$$

En résolvant les expressions (2.52) à (2.55) pour $r(\xi)$ avec $u_3 = 0$, on obtient :

$$r(\xi) = \frac{2^{\frac{1}{n}} \gamma a}{[\xi^2(\gamma^n - 2) - \xi\gamma^n + 2]^{\frac{1}{n}}} \quad (2.56)$$

2.3.2.2 Transformation géométrique à décroissance exponentielle

La même chose comme dans le cas de décroissance en puissance, le seul changement est dans le type de comportement qui est sous forme $(1/e^{nr})$. Cette fois-ci, les variables nodales s'expriment par :

$$u_1 = \frac{e^{nr(\xi)}}{e^{na}} u \quad ; \quad u_2 = \frac{e^{nr(\xi)}}{e^{n\gamma a}} u \quad (2.57)$$

Tenant compte des expressions (2.52), (2.53), (2.54) et (2.57) qui nous permettent d'avoir :

$$r(\xi) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{2e^{na} e^{n\gamma a}}{k_1(\xi)} \right) \quad (2.58)$$

Avec :

$$k_1(\xi) = 2e^{na} (1 - \xi^2) - e^{n\gamma a} \xi (1 - \xi) \quad (2.59)$$

2.3.2.3 Transformation géométrique à décroissance logarithmique

Pour une décroissance logarithmique $[1/\ln(r)]^n$ du champ de variables, les variables nodales s'écrivent par :

$$u_1 = \left[\frac{\ln(r(\xi))}{\ln(a)} \right]^n u \quad ; \quad u_2 = \left[\frac{\ln(r(\xi))}{\ln(\gamma a)} \right]^n u \quad (2.60)$$

Dans cette transformation, le terme $r(\xi)$ est exprimé par :

$$r(\xi) = \exp \left\{ \frac{2^{\frac{1}{n}} \ln(a) \ln(\gamma a)}{[k_2(\xi)]^{\frac{1}{n}}} \right\} \quad (2.61)$$

Avec maintenant :

$$k_2(\xi) = 2(1 - \xi^2)(\ln(a))^n - \xi(1 - \xi)(\ln(\gamma a))^n \quad (2.62)$$

2.3.2.4 Positionnement du pôle

Comme nous l'avons déjà indiqué, pour l'approche inverse, le Jacobien se calcule grâce aux fonctions de transformation géométrique et non pas par les fonctions de forme comme le cas des éléments finis. A cet effet, le positionnement du pôle doit se faire en conséquence.

En effet, le déterminant du Jacobien des différentes transformations géométrique n'est positif que pour les valeurs du paramètre γ suivantes :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \gamma \leq (4)^{\frac{1}{n}} \quad (2.63)$$

pour une transformation géométrique à décroissance en puissance,

$$\ln \left(\frac{4e^{na}}{3na} \right) \leq \gamma \leq \ln \left(\frac{4e^{na}}{na} \right) \quad (2.64)$$

pour une transformation géométrique à décroissance exponentielle, et finalement

$$\frac{1}{a} e^{\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \ln(a) \right]} \leq \gamma \leq \frac{1}{a} e^{\left[(4)^{\frac{1}{n}} \ln(a) \right]} \quad (2.65)$$

pour une transformation géométrique à décroissance logarithmique.

Quant à la transformation de Zienkiewicz, la seule condition qui s'impose, est que le pôle se trouve en dehors de l'élément infini.

L'extension de la transformation géométrique de Abdel-Fattah aux cas bi et tridimensionnels est simple, et nous demandons à ceux qui sont intéressés de se référer à la référence [1] où la procédure est clairement expliquée pour les éléments du type

Serendip comme de Lagrange.

2.4 Algorithmes de calcul des matrices élémentaires

Dans le cas de l'approche directe, les modifications nécessaires pour insérer des éléments infinis dans un code de calcul en éléments finis, consistent essentiellement à l'intégration numérique et à l'évaluation des nouvelles fonctions de forme et de leurs dérivées. Les points et les poids d'intégration numérique sont calculés selon la méthode de Gauss-Laguerre puis modifiés pour l'intervalle $[-1, \infty[$.

L'algorithme permettant de construire les matrices élémentaires des éléments infinis ne diffère pas trop de celui des matrices élémentaires d'éléments finis. La même boucle sur les points de Gauss-Legendre est appliquée pour les points de Gauss-Laguerre et l'appel aux fonctions de forme à l'intérieur s'applique aux fonctions de formes décroissantes infinies. La matrice Jacobienne originale ainsi que le maillage d'éléments finis initial restent inchangés. La structure de l'algorithme est :

```

Début de la routine
  Initialisation
  Début de boucle sur les points de Gauss-Laguerre
    Appel des fonctions de forme infinies
    Appel des fonctions de forme finies
    Appel du Jacobien
    Calcul de la somme appropriée
  Fin de boucle sur les points de Gauss-Laguerre
  Retour
Fin de la routine

```

Dans le cas de l'approche inverse, les mêmes expressions des matrices élémentaires sont gardées et assemblées, ainsi le même algorithme de calcul pour les éléments finis est utilisé. Le seul changement requis pour rendre l'élément infini, réside dans la nouvelle expression de la matrice Jacobienne exprimée par :

$$J = \begin{bmatrix} M_{,\xi} \\ M_{,\eta} \end{bmatrix} [X \quad Y] \quad (2.66)$$

Avec X et Y sont les coordonnées nodales de l'élément infini construit. Ce qui impose l'insertion d'un appel aux fonctions de transformation géométrique. L'algorithme est :

```

Début de la routine
  Initialisation
  Début de boucle sur les points de Gauss-Legendre
    Appel des fonctions de forme finies
    Appel des fonctions de transformation géométrique
    Appel du Jacobien
    Calcul de la somme appropriée

```

Fin de boucle sur les points de Gauss-Legendre
Retour
Fin de la routine

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les deux approches de construction des éléments infinis. On a vu dans l'approche directe, par des fonctions décroissantes, qu'elle nous permet de contrôler la vitesse de décroissance, par les paramètres de sévérité. Par contre, dans l'approche inverse, par des fonctions de transformations géométriques, cette possibilité ne s'offre pas. Il est nécessaire de noter, qu'il existe une autre gamme d'éléments, appelés éléments infinis périodiques. La particularité de ces éléments par rapport à d'autres, est dans les fonctions de formes, qui contiennent des termes représentant la propagation des ondes vers l'infini [5,18,19]. Par ailleurs, l'utilisation de ces éléments engendre des difficultés dans l'intégration numérique, qui exige des techniques très élaborées [5].

Chapitre 3

Modélisation et discrétisation par éléments finis

3.1 Introduction

Pour analyser un problème d'ingénierie, on est souvent amené à développer des modèles mathématiques pouvant décrire d'une manière aussi fiable le problème en question. Le développement de ces modèles s'appuie sur des postulats de base et des hypothèses simplificatrices, pour aboutir à des équations gouvernantes qui sont souvent des équations différentielles, auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites. Pour la résolution de ces équations, la méthode des éléments finis se présente comme l'outil le plus efficace actuellement utilisé, parfois indispensable pour modéliser certains comportements. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme de calcul, permettant de résoudre avec peu de modifications plusieurs types de problèmes.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord mettre en équations les problèmes mathématiques concernant les domaines fluides et les domaines sols. Ensuite, nous allons présenter les différentes démarches à suivre pour la discrétisation spatiale par éléments finis de ces deux types de milieux. Le problème sera traité en deux dimensions ; le milieu fluide est supposé sans écoulement, non visqueux, qui subit des mouvements de petites amplitudes. Pour le domaine sol, on se restreindra au cas d'un solide élastique dans l'hypothèse des petites déformations.

3.2 Mise en équations du domaine fluide

La figure 3.1 représente un réservoir de hauteur H et de longueur assez grande pour être supposée infinie. Dans le cas où le fluide de ce réservoir est supposé linéairement compressible, non visqueux et subit des mouvements de petites amplitudes, l'équation de Naviers–Stokes qui exprime l'équilibre dynamique des fluides en mouvement se réduit à l'expression (3.1) suivante :

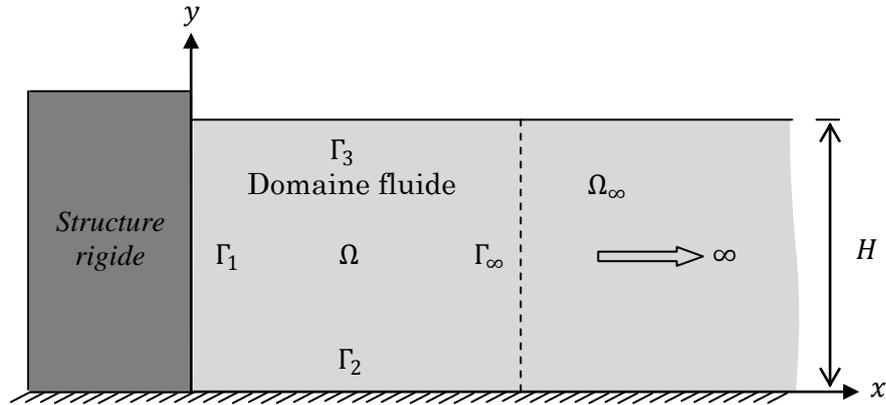


Figure 3.1 : Domaine fluide non borné et son contour.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla p \quad (3.1)$$

Où v et ρ sont respectivement la vitesse et la masse volumique du fluide, p la pression hydrodynamique et ∇ l'opérateur nabla.

Pour une description complète, l'équation de conservation de la masse ainsi que l'équation d'état doivent être associées à l'équation de mouvement précédente [3,14]. Elles s'écrivent respectivement par :

$$\rho \nabla^T v = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.3)$$

avec k le module de compressibilité du fluide.

La substitution de l'expression (3.3) dans (3.2), nous donne :

$$\rho \nabla^T v = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.4)$$

D'où :

$$c = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (3.5)$$

qui présente la vitesse de propagation d'ondes dans le milieu fluide, qui est approximative à 1440 m/s pour l'eau.

La dérivation de (3.4) par rapport au temps et la multiplication de (3.1) par ∇^T permettent d'avoir le système d'équations suivant :

$$\rho \nabla^T \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

$$\rho \nabla^T \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = \nabla^T \nabla p \quad (3.7)$$

La substitution de l'expression (3.7) dans (3.6), nous conduit à l'équation d'ondes régissant le comportement des pressions hydrodynamiques dans le fluide :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (3.8)$$

et qui s'exprime dans le domaine des fréquences par :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (3.9)$$

Afin de bien poser le problème mathématique, on doit ajouter les conditions nécessaires aux limites. La frontière Γ_1 présente l'interface entre le fluide du réservoir et la structure rigide. Alors, la condition nécessaire sur cette frontière est :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \ddot{u}_n \quad (3.10)$$

Avec \ddot{u}_n la projection des accélérations sismiques sur la normale n de l'interface fluide-structure. Si cette interface est verticale, l'équation (3.10) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \ddot{u}_g \quad (3.11)$$

Où \ddot{u}_g désigne les accélérations sismiques à la base de la structure. Sur la frontière Γ_2 , les accélérations sismiques \ddot{u}_g et le fond du réservoir sont supposés horizontaux. Alors, la condition à imposer est donnée par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

Sur la surface libre Γ_3 , la condition la plus simple est de considérer une pression atmosphérique et de négliger les ondes de surfaces :

$$p = 0 \quad (3.13)$$

La frontière Γ_∞ désigne la limite artificielle sur laquelle le domaine fluide est tronqué. Alors, elle délimite un domaine physiquement non borné, où une condition radiative convenable doit être introduite. Nous avons vu dans le chapitre 1 que la condition de Sommerfeld sur cette limite est donnée par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.14)$$

Si c'est la condition de Sharan qui est imposée, alors :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\zeta p \quad (3.15)$$

Avec :

$$\zeta = \frac{1}{H} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\omega H}{c}\right)^2} \quad (3.16)$$

Comme toutes les conditions aux limites sont définies, alors, le problème mathématique classique revient à résoudre le système suivant pour l'inconnu p :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 & |\Omega \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \ddot{u}_g & |\Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & |\Gamma_2 \\ p = 0 & |\Gamma_3 \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} & |\Gamma_\infty \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Si le fluide du réservoir est considéré comme étant incompressible, l'expression (3.8) se réduit à :

$$\Delta p = 0 \quad (3.18)$$

et les conditions sur les frontières Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 restent les mêmes dans le cas d'un fluide

compressible. Par contre sur la frontière Γ_∞ , la condition est donnée par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\zeta p \quad (3.19)$$

D'où, ζ est donnée pour la condition de Sharan par :

$$\zeta = \frac{\pi}{2H} \quad (3.20)$$

et pour la condition de Maity par :

$$\zeta = \frac{1}{H} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} e^{(-\lambda_n \frac{x}{H})} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\lambda_n)^2} e^{(-\lambda_n \frac{x}{H})} \cos\left(\lambda_n \frac{y}{H}\right)} \quad (3.21)$$

Avec :

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (3.22)$$

Donc, le système à résoudre dans le cas d'un fluide incompressible est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p = 0 & |\Omega \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \ddot{u}_g & |\Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & |\Gamma_2 \\ p = 0 & |\Gamma_3 \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -\zeta p & |\Gamma_\infty \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Dans le cas de l'hypothèse d'un fluide compressible, le problème variationnel associé au système (3.17) s'obtient en adoptant la formulation de type Galerkin et prenant comme fonction poids $w = \delta p$. La forme variationnelle forte s'écrit :

$$\int_{\Omega} w \Delta p \, d\Omega - \int_{\Omega} w \frac{1}{c^2} \ddot{p} \, d\Omega = 0 \quad (3.24)$$

Afin de tenir compte des conditions aux limites, on applique la seconde formule de Green, qui nous permet d'avoir la forme faible suivante :

$$-\int_{\Omega} \nabla w \nabla p \, d\Omega - \int_{\Omega} w \frac{1}{c^2} \ddot{p} \, d\Omega + \int_{\Gamma} w \frac{\partial p}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad (3.25)$$

Avec Ω le domaine du fluide et Γ son contour.

En remplaçant l'intégrale sur le contour Γ par les différentes conditions qui correspondent à chaque frontière du domaine, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla p \, d\Omega + \int_{\Omega} w \frac{1}{c^2} \ddot{p} \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} w \rho \ddot{u}_g \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} w \frac{1}{c} \dot{p} \, d\Gamma = 0 \quad (3.26)$$

qui est l'expression finale de la forme variationnelle du système (3.17).

3.3 Mise en équations du domaine sol

Afin de mettre en équations le problème, il est nécessaire de considérer un volume élémentaire du milieu noté Ω en équilibre dont le contour est Γ (figure 3.2). L'égalité des forces agissant sur ce volume élémentaire s'écrit :

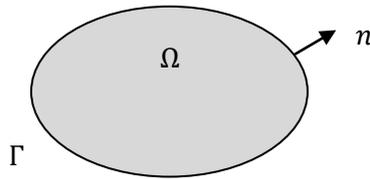


Figure 3.2 : Equilibre d'un volume élémentaire.

$$\int_{\Omega} (f + f_I) \, d\Omega + \int_{\Gamma} T \, d\Gamma = 0 \quad (3.27)$$

Où f présente les forces de volume et f_I les forces d'inertie qui s'expriment en fonction de la masse volumique ρ du milieu et de son accélération \ddot{u}_i par la relation suivante :

$$f_I = -\rho \ddot{u}_i \quad (3.28)$$

et T le vecteur des contraintes qui s'exprime en fonction du tenseur des contraintes σ et de la normale n au contour Γ par :

$$T = \sigma_{ij} n_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.29)$$

Portant (3.28) et (3.29) dans (3.27), il vient :

$$\int_{\Omega} (f_i - \rho \ddot{u}_i) d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j d\Gamma = 0 \quad (3.30)$$

A l'aide du théorème de la divergence, la deuxième intégrale de l'expression (3.30) devient :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} d\Omega \quad (3.31)$$

En substituant (3.31) dans (3.30), on aura :

$$\int_{\Omega} (f_i + \sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i) d\Omega = 0 \quad (3.32)$$

Ce qui nous donne l'équation d'équilibre suivante :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.33)$$

qui est donnée sous forme matricielle par :

$$\nabla \sigma + f = \rho \ddot{u} \quad (3.34)$$

La loi de comportement de l'élasticité linéaire isotrope en petites déformations permet d'écrire les contraintes en fonction des déformations par la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.35)$$

Où D_{ijkl} désigne le tenseur d'élasticité qui est d'ordre quatre. Les expressions des déformations en fonction des déplacements u sont données par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.36)$$

Vu la symétrie des tenseurs et dans le but d'alléger les écritures, la notation vectorielle est souvent adoptée. Alors, le tenseur des contraintes en élasticité plane s'écrit par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

et le tenseur des déformations par :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_x \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

Et le vecteur des déplacements par :

$$u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

La relation déformations–déplacements devient alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Qui peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\varepsilon = Su \quad (3.41)$$

Et la relation contraintes–déformations devient :

$$\sigma = D\varepsilon = DSu \quad (3.42)$$

Avec :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Les expressions des constantes d_1 et d_2 dans le cas d'un problème en contraintes planes sont données par :

$$d_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \quad ; \quad d_2 = \nu d_1 \quad (3.44)$$

Et dans le cas d'un problème en déformations planes par :

$$d_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad d_2 = \frac{\nu d_1}{(1-\nu)} \quad (3.45)$$

L'expression de la constante d_3 est donnée dans les deux cas par :

$$d_3 = \frac{1}{2}(d_1 - d_2) \quad (3.46)$$

Les paramètres E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Le problème variationnel associé à l'équation d'équilibre (3.33) s'obtient en adoptant la formulation de type Galerkin pour une fonction poids δu . La forme forte s'écrit :

$$\int_{\Omega} \delta u \nabla \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \delta u f d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{u} d\Omega = 0 \quad (3.47)$$

A l'aide du théorème de divergence, il est facile de démontrer que le premier terme de l'expression (3.47) peut s'écrire :

$$\int_{\Omega} \delta u \nabla \sigma d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u \sigma n d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega \quad (3.48)$$

En substituant (3.48) dans (3.47), on obtient la forme faible suivante :

$$- \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u \sigma n d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u f d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{u} d\Omega = 0 \quad (3.49)$$

L'équation (3.49) est l'expression des travaux virtuels des corps homogènes et isotropes, ayant un comportement bidimensionnel élastique linéaire. Si on tient compte de ces considérations pour un milieu sol dont le plan semi-infini de la figure 3.3, alors, ce dernier peut être traité en déformation planes.

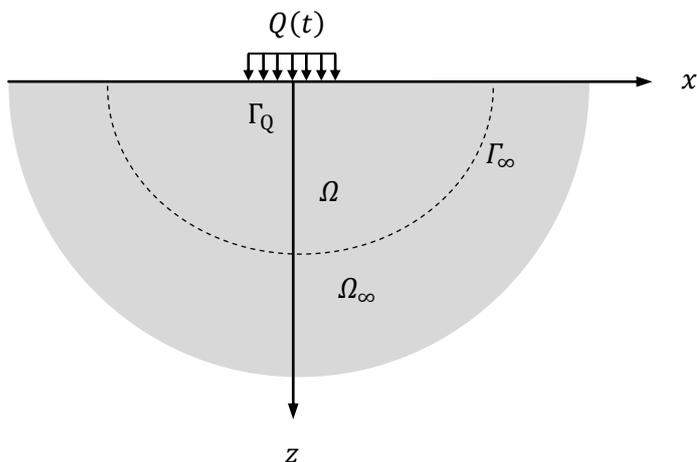


Figure 3.3 : Problème d'un plan semi-infini.

On a vu dans le chapitre 1 que les conditions appropriées à introduire sur la limite de troncature Γ_∞ , sont des forces de dissipation, de constantes d'amortissement :

$$c_p = \rho V_p \quad (3.50)$$

pour la radiation des ondes de compression propageant parallèlement à la normale n de la limite de troncature, et :

$$c_s = \rho V_s \quad (3.51)$$

pour la radiation des ondes de cisaillement propageant parallèlement à la tangente t de la limite de troncature. Avec V_p et V_s sont respectivement les vitesses de propagation des ondes de compression et de cisaillement dans le matériau. Alors, l'équilibre des contraintes sur la limite de troncature Γ_∞ s'exprime par :

$$\sigma n = -c_p \dot{u}_n - c_s \dot{u}_t \quad (3.52)$$

où \dot{u}_n et \dot{u}_t désignent respectivement les projections des vitesses des particules solides sur la normale n et la tangente t à la limite de troncature Γ_∞ .

Sur la surface Γ_Q où s'effectue un chargement $Q(t)$ dans le sens z , la condition est donnée par :

$$\sigma n = Q_z \quad (3.53)$$

Substituant les expressions (3.41), (3.42), (3.52) et (3.53) dans (3.49), et en négligeant les forces de volumes f , on obtient l'expression finale de la forme variationnelle :

$$\int_{\Omega} \delta(Su)^T DSu d\Omega + \int_{\Gamma_\infty} \delta u c_p \dot{u}_n d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} \delta u c_s \dot{u}_t d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{u} d\Omega = \int_{\Gamma_Q} \delta u Q_z d\Gamma \quad (3.54)$$

3.4 Discrétisation du domaine fluide par éléments finis

Pour la discrétisation spatiale par éléments finis du domaine fluide, l'interpolation nodale du champ de pressions est approximée par :

$$p = NP \quad (3.55)$$

où N vecteur ligne contenant les fonctions d'interpolation (fonctions de forme), et P vecteur colonne contenant les valeurs de pressions aux nœuds. En ce qui concerne

l'opérateur de perturbations, l'opérateur de dérivation spatiale et les deux en même temps, sont approximés respectivement par :

$$w = \delta P^T N^T ; \nabla p = dNP ; \nabla w = \delta P^T dN^T \quad (3.56)$$

La substitution de (3.55) et (3.56) dans la forme variationnelle de l'expression (3.26), nous permet d'avoir :

$$\int_{\Omega} N^T \frac{1}{c^2} N \dot{P} d\Omega + \int_{\Gamma_{\infty}} N^T \frac{1}{c} N \dot{P} d\Gamma + \int_{\Omega} dN^T dN P d\Omega = - \int_{\Gamma_1} \rho \ddot{u}_g N^T d\Gamma \quad (3.57)$$

Ou sous forme matricielle :

$$[M]\{\ddot{P}\} + [C]\{\dot{P}\} + [K]\{P\} = \{F\} \quad (3.58)$$

Avec :

$$[M] = \int_{\Omega} N^T \frac{1}{c^2} N d\Omega \quad (3.59a)$$

$$[K] = \int_{\Omega} dN^T dN d\Omega \quad (3.59b)$$

$$[C] = \int_{\Gamma_4} N^T \frac{1}{c} N d\Gamma \quad (3.59c)$$

$$\{F\} = -\rho \ddot{u}_g \int_{\Gamma_1} \rho N^T d\Gamma \quad (3.59d)$$

Dans lesquels, M , C et K représentent respectivement les matrices assemblées masse, amortissement et rigidité du fluide et qui quantifient l'énergie cinétique, l'énergie dissipée et l'énergie potentielle.

L'expression (3.59c) est le résultat de discrétisation de la condition de Sommerfeld à la limite de troncature, et présente le seul effet de radiation et de dissipation d'énergie dans le fluide. Si c'est la condition de Sharan qui est introduite, alors la matrice d'amortissement devient :

$$[C] = \zeta \int_{\Gamma_{\infty}} N^T N d\Gamma \quad (3.60)$$

Avec ζ donné par l'équation (3.16). Dans le cas où la technique de couplage éléments finis-éléments infinis est adoptée, alors, le terme correspondant à la limite de troncature

Γ_∞ va disparaître et sera remplacé par les deux matrices masse et rigidité du domaine infini du fluide. Les matrices totales masse et rigidité du système seront définies par :

$$[M_t] = [M] + [M_\infty] \quad (3.61)$$

$$[K_t] = [K] + [K_\infty] \quad (3.62)$$

avec :

$$[M_\infty] = \int_{\Omega_\infty} V^T \frac{1}{c^2} V d\Omega \quad (3.63)$$

$$[K_\infty] = \int_{\Omega_\infty} dV^T dV d\Omega \quad (3.64)$$

Où V et dV sont respectivement les fonctions de forme des éléments infinis et leurs dérivées. Le système à résoudre dans ce cas est :

$$[M_t]\{\ddot{P}\} + [K_t]\{P\} = \{F\} \quad (3.65)$$

Il est à noter que les systèmes (3.58) et (3.65) sont définis dans le domaine des temps, et leurs transformations au domaine des fréquences deviennent respectivement :

$$[-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]]\{\hat{P}\} = \{F\} \quad (3.66)$$

$$[-\omega^2[M_t] + [K_t]]\{\hat{P}\} = \{F\} \quad (3.67)$$

Avec \hat{P} la pression hydrodynamique dans l'espace de Fourier.

Dans le cas d'hypothèse d'un fluide incompressible, le problème à résoudre se réduit au système suivant :

$$[K_t]\{P\} = \{F\} \quad (3.68)$$

La matrice K_t est la même que celle exprimée dans l'expression (3.64) dans le cas où les éléments infinis sont utilisés. Par contre, lorsque la condition de Sharan ou la condition de Damodar Maity est adoptée, la matrice K_t s'écrit :

$$[K_t] = [K] + [K_{\Gamma_\infty}] \quad (3.69)$$

avec :

$$[K_{\Gamma_\infty}] = \zeta \int_{\Gamma_\infty} dN^T dN d\Gamma \quad (3.70)$$

L'expression de ζ est donnée par (3.20) pour la condition de Sharan et par (3.21) pour la condition de Maity.

3.5 Discrétisation du domaine sol par éléments finis

Afin de discrétiser le domaine sol par éléments finis, le champs des déplacements u est approximé par :

$$u = NU \quad (3.71)$$

et l'opérateur de perturbations par :

$$\delta u = \delta U^T N^T \quad (3.72)$$

La substitution de (3.71) et (3.72) dans (3.54), nous donne :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} B^T D B d\Omega \right) U + \left(c_p \int_{\Gamma_\infty} N^T n N d\Gamma + c_s \int_{\Gamma_\infty} N^T t N d\Gamma \right) \dot{U} \\ & + \left(\rho \int_{\Omega} N^T N d\Omega \right) \ddot{U} = \int_{\Gamma_q} N^T Q_z d\Gamma \end{aligned} \quad (3.73)$$

Ou sous la forme matricielle suivante :

$$[K]\{U\} + [C_\infty]\{\dot{U}\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F\} \quad (3.74)$$

Dans lesquels, M , C_∞ et K représentent respectivement les matrices masse, amortissement et rigidité. Les expressions de ces matrices ainsi que le vecteur de chargement s'obtiennent par analogie entre la relation (3.73) et (3.74). Donc, l'expression de la matrice rigidité est donnée par :

$$[K] = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N^T}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial z} & \frac{\partial N^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial z} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.75)$$

et la matrice masse est :

$$[M] = \rho \int_{\Omega} N^T N d\Omega = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N^T N & 0 \\ 0 & N^T N \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.76)$$

Cette expression telle qu'elle est obtenue en (3.76) est appelée masse cohérente ou répartie. Cependant, elle peut être exprimée sous forme concentrée ou diagonale [14,3] par :

$$[M] = \rho \int_{\Omega} N I d\Omega = \rho \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.77)$$

Pour la matrice d'amortissement, son expression est donnée par :

$$[C_{\infty}] = [C_P] + [C_S] \quad (3.78)$$

Avec :

$$\begin{aligned} [C_P] &= \int_{\Gamma_{\infty}} N^T c_P n N d\Gamma = \int_{\Gamma_{\infty}} c_P \begin{bmatrix} N^T N & 0 \\ 0 & N^T N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{bmatrix} d\Gamma \\ [C_S] &= \int_{\Gamma_{\infty}} N^T c_S t N d\Gamma = \int_{\Gamma_{\infty}} c_S \begin{bmatrix} N^T N & 0 \\ 0 & N^T N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.79)$$

L'amortissement de la relation (3.78) est le résultat de discrétisation de la condition de radiation à la limite de troncature, qui est connu sous le nom d'amortissement géométrique ou radiatif [19,20]. Par ailleurs, on peut aussi tenir compte de l'amortissement visqueux du milieu, en appliquant le concept d'amortissement de Rayleigh qui est exprimé sous forme d'une combinaison linéaire de la matrice masse M et de la matrice de rigidité K [8]:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3.80)$$

α et β sont des coefficients satisfaisant la condition d'orthogonalité de C dans la base modale. Ils peuvent être déterminés à partir de l'analyse modale du système, en prenant la pulsation propre ω_1 du premier mode et une pulsation ω_n du mode supérieur [8] :

$$\alpha = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_n} \omega_1 \omega_n \quad ; \quad \beta = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_n} \quad (3.81)$$

Avec ξ le taux d'amortissement critique.

Donc, l'amortissement total du système est :

$$[C_t] = [C_\infty] + [C] \quad (3.82)$$

En ce qui concerne le vecteur de chargement F , il s'obtient par :

$$\{F\} = \int_{\Gamma_Q} N^T Q_z d\Gamma = \int_{\Gamma_Q} Q \begin{bmatrix} N^T & 0 \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (3.83)$$

Il est à noter que lorsque la configuration géométrique non bornée du plan semi-infini est considérée par l'utilisation des éléments infinis, l'amortissement géométrique C_∞ disparaît de la formulation. Dans ce cas, la radiation s'effectue par des matrices masse et rigidité obtenues par des éléments infinis et qui s'expriment par :

$$[K_\infty] = \int_{\Omega_\infty} B^T D B d\Omega = \int_{\Omega_\infty} \begin{bmatrix} \frac{\partial V^T}{\partial x} & 0 & \frac{\partial V^T}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial V^T}{\partial z} & \frac{\partial V^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial z} & \frac{\partial V}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.84)$$

pour la matrice de rigidité, et :

$$[M_\infty] = \rho \int_{\Omega_\infty} V^T V d\Omega = \rho \int_{\Omega_\infty} \begin{bmatrix} V^T V & 0 \\ 0 & V^T V \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.85)$$

pour la matrice masse.

Dans ce cas, les matrices masse et rigidité totales du système sont respectivement :

$$[M_t] = [M] + [M_\infty] \quad ; \quad [K_t] = [K] + [K_\infty] \quad (3.86)$$

3.6 Conclusion

La discrétisation d'une frontière radiative par éléments finis conduit à une matrice d'amortissement qui n'intervient pas dans l'analyse des vibrations libres. Par contre, lorsque le traitement de la limite de troncature est effectué par l'utilisation des éléments infinis, la radiation est considérée par les matrices infinies masse et rigidité, et qui permettent d'intervenir dans le problème des valeurs et vecteurs propres.

Chapitre 4

Applications au cas d'un milieu fluide

4.1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitres 1 et 2 qu'un domaine non borné dont une partie d'énergie est absorbée par les effets de radiation, peut être subdivisé en deux régions, un domaine fini modélisé par des éléments finis et un domaine infini représenté soit par une frontière absorbante, ou par un couplage avec des éléments infinis. A cet effet, afin de voir l'apport de ces deux approches, on se propose d'étudier un réservoir de hauteur $H = 100m$ et de longueur suffisamment grande pour être supposée infinie, qui est tronqué à une distance L_t de l'interface fluide-structure. Les sollicitations considérées sont des excitations harmoniques et des accélérations sismiques, exercées directement sur le fluide par le monolithe de la structure qui est supposée infiniment rigide. Le comportement du fluide est décrit par le champ de pressions hydrodynamiques, et les caractéristiques mécaniques telles que la masse volumique et la vitesse de propagation d'ondes sont respectivement fixées à 1000 kg/m^3 et 1440 m/s .

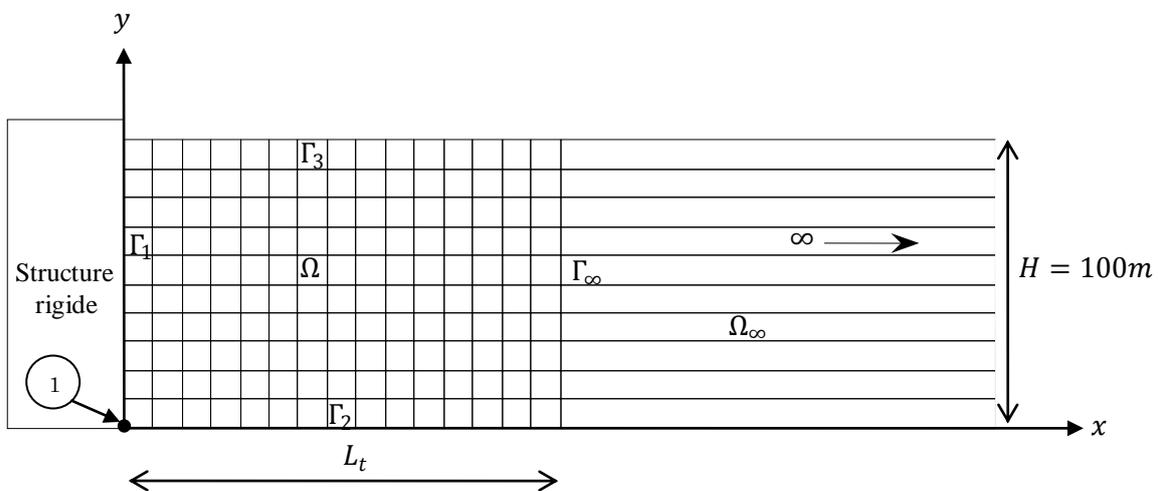


Figure 4.1 : Maillage du domaine fluide.

L'étude sera subdivisée en deux parties. Les vibrations libres du fluide seront d'abord analysées pour les différents modes de traitement de la limite de troncature. Ensuite, les pressions hydrodynamiques produites par les différentes excitations seront calculées. L'influence de certains paramètres tel que la fréquence d'excitation, la position de la limite de troncature et la compressibilité du fluide sera examinée.

4.2 Analyse des vibrations libres

Les vibrations libres d'un système à plusieurs degrés de liberté est solution des équations (3.58) et (3.65) développées pour un domaine fluide et dans lesquelles les termes d'amortissement et de sollicitations extérieures n'interviennent pas. Alors, le problème revient à résoudre le système suivant :

$$[M]\{\ddot{P}\} + [K]\{P\} = 0 \quad (4.1)$$

La solution particulière du système (4.1) est de la forme :

$$P = \Phi e^{i\omega t} \quad (4.2)$$

En reportant (4.2) dans (4.1), il vient :

$$[[K] - \omega^2[M]]\{\Phi\} = 0 \quad (4.3)$$

Le système (4.3) représente un problème aux valeurs et vecteurs propres. Ainsi, à chaque valeur de la pulsation ω_i est associée un vecteur ou mode propre Φ_i , qui définissent le comportement en vibrations libres du fluide. Cependant, les résultats seront exprimés et discutés en termes de périodes propres correspondantes :

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad (4.4)$$

Le but visé dans cette section est l'analyse des vibrations libres du domaine fluide, pour les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature, ainsi que l'apport des effets radiatifs et l'influence de la position de la limite de troncature sur les périodes propres. Par ailleurs, nous avons vu dans le chapitre 3 que la discrétisation par éléments finis d'une frontière absorbante imposée sur la limite de troncature, d'un domaine fluide supposé compressible, conduit à la matrice d'amortissement du système qui malheureusement n'intervient pas dans le problème des valeurs et vecteurs propres, contrairement à la technique de couplage éléments finis-éléments infinis qui permet d'inclure les effets radiatifs dans le problème des vibrations libres.

Dans le premier temps, il convient tout d'abord de déterminer l'influence de la discrétisation où une étude du maillage optimum est effectuée sur le modèle d'éléments finis, avec une limite de troncature supposée libre sans conditions. La position de la limite de troncature est fixée dans ce cas à une distance égale six fois la hauteur ($L_t = 6H$) et le domaine fluide est réparti à N_x éléments dans le sens horizontal x et à N_y éléments dans le sens vertical y . Les éléments utilisés pour la discrétisation du domaine sont du type quadrilatéraux à quatre nœuds (Q_4), puis à huit nœuds (Q_8). Les valeurs des cinq premières périodes propres obtenues pour les différentes répartitions, ainsi que les différents éléments sont reportées dans le tableau 4.1 suivant :

Tableau 4.1 : Périodes propres (sec) du domaine fluide pour différentes répartitions et différents types d'éléments.

		N_x	5	10	20	30	50	70	100
		N_y	3	5	10	15	20	30	40
Eléments Q_4	Modes								
	1		0.2746	0.2766	0.2775	0.2777	0.2777	0.2777	0.2778
	2		0.2604	0.2624	0.2633	0.2634	0.2635	0.2635	0.2635
	3		0.2247	0.2293	0.2307	0.2309	0.2310	0.2311	0.2311
	4		0.1820	0.1924	0.1954	0.1960	0.1962	0.1963	0.1964
	5		0.1466	0.1596	0.1649	0.1659	0.1664	0.1665	0.1667
Eléments Q_8	Modes								
	1		0.2778	0.2778	0.2778	0.2778	0.2778	0.2778	0.2778
	2		0.2634	0.2635	0.2635	0.2635	0.2635	0.2635	0.2635
	3		0.2310	0.2311	0.2311	0.2311	0.2311	0.2311	0.2311
	4		0.1956	0.1964	0.1964	0.1964	0.1964	0.1964	0.1964
	5		0.1643	0.1665	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667

A partir de ce tableau, on note que le raffinement du maillage obtenu par des éléments Q_8 n'influe pas sur la période fondamentale, qui est légèrement sensible au raffinement du maillage obtenu par des éléments Q_4 . La sensibilité au raffinement est d'autant plus notable lorsqu'on considère les périodes des modes supérieurs. On note aussi que les cinq premières périodes obtenues par un maillage avec des éléments Q_8 , se stabilisent plus rapidement que celles obtenues par un maillage avec des éléments Q_4 . En effet, un maillage constitué de $N_x = 20$ et de $N_y = 10$ éléments Q_8 est largement suffisant pour la discrétisation du domaine fluide, contrairement aux éléments Q_4 qui nécessitent un nombre d'éléments $N_x = 100$ et $N_y = 40$. Cette grande différence entre le nombre d'éléments revient essentiellement aux degrés des polynômes d'interpolation utilisés et le nombre de nœuds dans chaque élément. D'où, les éléments Q_8 présentent une variation quadratique, par contre la variation des éléments Q_4 est linéaire.

Maintenant, nous allons voir l'influence du degré des polynômes d'interpolations et des transformations géométriques, des éléments infinis construits selon l'approche inverse,

sur les périodes propres. Dans ce cas, la limite de troncature où s'effectue le couplage entre les éléments finis et les éléments infinis est fixée à une distance $L_t = H$ de l'origine. Les éléments infinis utilisés pour la discrétisation du domaine infini sont quadrilatéraux, et le nombre de nœuds par élément est choisi comme suit : premièrement les éléments Q_4 à quatre nœuds dont la variation est linéaire dans les deux sens, et puis les éléments Q_6 à six nœuds dont la variation est linéaire dans le sens y et quadratique dans le sens x qui est supposé infini, ensuite les éléments Q_8 où la variation est quadratique dans les deux sens. Le tableau 4.2 suivant présente les cinq premières périodes obtenues pour les différents nombres de nœuds par élément.

Tableau 4.2 : Périodes propres (sec) obtenues par le modèle de couplage éléments finis–éléments infinis construits selon l'approche inverse pour différents nombres de nœuds par élément.

Modes	Eléments Q_4	Eléments Q_6	Eléments Q_8
1	0.9931	0.2777	0.2778
2	0.3779	0.2562	0.2629
3	0.2689	0.1558	0.1762
4	0.2289	0.0925	0.1023
5	0.1638	0.0916	0.0926

Les résultats montrent que les périodes propres obtenues par un maillage avec des éléments Q_8 , sont très proches à celles obtenues par un maillage avec des éléments Q_6 . Par contre, les périodes propres obtenues par un maillage avec des éléments Q_4 sont très élevées. Cela est dû au degré des polynômes d'interpolations et des transformations géométriques utilisés pour chaque élément. Comme nous l'avons vu précédemment, les éléments Q_4 présentent une variation linéaire dans les deux sens, contrairement aux éléments Q_8 et Q_6 , qui ont une variation quadratique dans le sens x qui est supposé infini, et cela confirme que la sensibilité au degré des transformations géométriques est plus prononcée dans la direction qui est supposée infinie. En conclusion, les éléments infinis construits selon l'approche inverse doivent présenter au minimum une variation quadratique dans le sens supposé infini afin d'obtenir une bonne approximation. De ce fait, les éléments Q_8 seront utilisés dans ce qui suit.

Afin de voir l'influence du paramètre de décroissance L , utilisé dans les fonctions d'interpolation décroissantes des éléments infinis selon l'approche directe, sur les périodes propres, la position de la limite de troncature où s'effectue le couplage entre les éléments finis et les éléments infinis est fixée à une distance proche de l'origine qui est $L_t = H$, et puis, à une distance assez loin qui est $L_t = 6H$. Les éléments choisis pour la discrétisation du domaine sont quadrilatéraux à quatre nœuds (Q_4). Les cinq premières périodes propres calculées pour les différentes valeurs du paramètre de décroissance L

sont présentées dans le tableau 4.3 suivant :

Tableau 4.3 : Périodes propres (sec) obtenues par le modèle d'éléments finis-éléments infinis construits selon l'approche directe pour les différentes valeurs du paramètre de décroissance L .

	L	1	5	10	50	100	500	800
$L_t = H$	Modes							
	1	0.2631	0.2765	0.2774	0.2777	0.2777	0.2777	0.2777
	2	0.1831	0.2568	0.2700	0.2772	0.2776	0.2777	0.2777
	3	0.1110	0.1581	0.1729	0.1905	0.1933	0.1957	0.1960
	4	0.0918	0.0923	0.0924	0.0925	0.0925	0.0925	0.0925
	5	0.0864	0.0915	0.0921	0.0924	0.0924	0.0924	0.0924
$L_t = 6H$	Modes							
	1	0.2773	0.2777	0.2777	0.2777	0.2777	0.2777	0.2777
	2	0.2728	0.2771	0.2775	0.2777	0.2777	0.2777	0.2777
	3	0.2594	0.2700	0.2718	0.2735	0.2737	0.2739	0.2739
	4	0.2343	0.2450	0.2466	0.2480	0.2482	0.2483	0.2484
	5	0.2034	0.2111	0.2122	0.2130	0.2132	0.2132	0.2133

La première remarque tirée dans ce tableau est que les périodes propres varient très peu pour des valeurs grandes du paramètre de décroissance L . Par contre, pour des petites valeurs de L , la variation est plus accentuée. On note aussi que l'influence du paramètre de décroissance L sur les périodes propres est de plus en plus faible pour des positions de la limite de troncature plus éloignées de l'origine. Cette influence est notable lorsque la troncature du domaine est effectuée proche de l'origine. Dans ce qui suit, la valeur du paramètre L sera prise égale à l'unité.

Maintenant, nous allons voir l'effet du positionnement de la limite de troncature sur les périodes propres, obtenues par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature. Le premier modèle numérique considéré, est celui d'éléments finis avec les deux hypothèses à la limite de troncature, à savoir l'hypothèse d'une limite supposée libre sans condition $EF(lib)$ et l'hypothèse d'une pression nulle imposée $EF(P=0)$. Le second modèle est celui du couplage entre les éléments finis et les éléments infinis construits selon les deux approches, tel que l'approche directe $EFI(dir)$ et l'approche inverse $EFI(inv)$. Les éléments finis et les éléments infinis utilisés pour la discrétisation du domaine fluide sont quadrilatéraux à huit nœuds (Q_8) et d'une taille approximativement de $(10 \times 10) m^2$, ce qui donne un nombre d'éléments croissant en fonction de la position de la limite de troncature L_t . La figure 4.2 montre la variation des cinq premières périodes propres, obtenues par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature, en fonction du rapport entre la position de la limite de troncature L_t et de la hauteur du réservoir H . Pour plus de clarté, les valeurs numériques des cinq premières périodes correspondant à $L_t = H, 3H, 6H$ et $10H$ sont reportées sur le tableau 4.4.

Tableau 4.4 : Périodes propres (sec) obtenues par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature, en fonction de la position de la limite de troncature L_t

		Modes	$L_t = H$	$L_t = 3H$	$L_t = 6H$	$L_t = 10H$
Modèle d'éléments finis	Pression non nulle	1	0.2778	0.2778	0.2778	0.2778
		2	0.1242	0.2311	0.2635	0.2724
		3	0.0926	0.1667	0.2311	0.2579
		4	0.0770	0.1242	0.1964	0.2382
		5	0.0674	0.0975	0.1667	0.2169
	Pression nulle	1	0.1964	0.2635	0.2740	0.2764
		2	0.0878	0.1964	0.2485	0.2661
		3	0.0878	0.1429	0.2134	0.2485
		4	0.0655	0.1094	0.1808	0.2276
		5	0.0545	0.0920	0.1541	0.2065
Modèle de couplage éléments finis-éléments	Approche directe	1	0.2693	0.2768	0.2775	0.2777
		2	0.2150	0.2680	0.2752	0.2768
		3	0.1482	0.2456	0.2685	0.2743
		4	0.0968	0.2068	0.2534	0.2682
		5	0.0922	0.1630	0.2286	0.2566
	Approche inverse	1	0.2778	0.2778	0.2778	0.2778
		2	0.2629	0.2760	0.2773	0.2776
		3	0.1762	0.2573	0.2722	0.2757
		4	0.1023	0.2125	0.2560	0.2693
		5	0.0926	0.1642	0.2294	0.2570

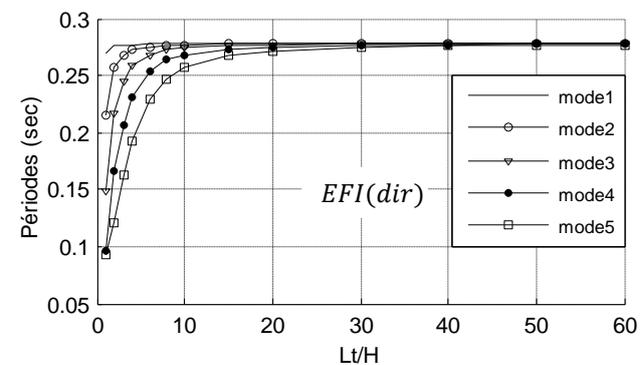
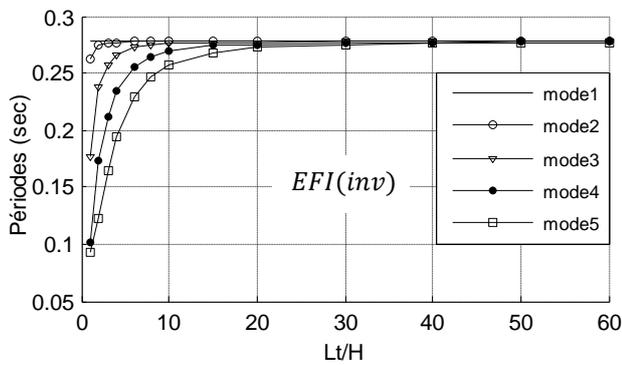
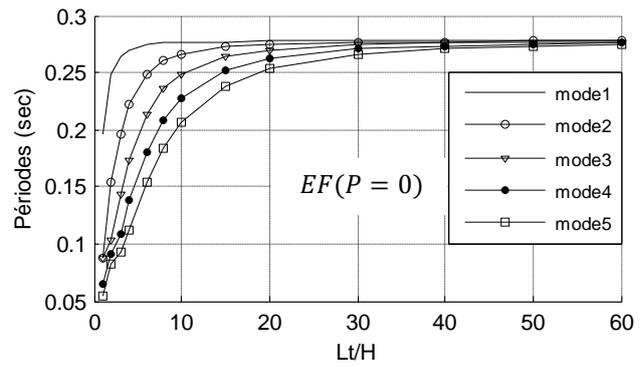
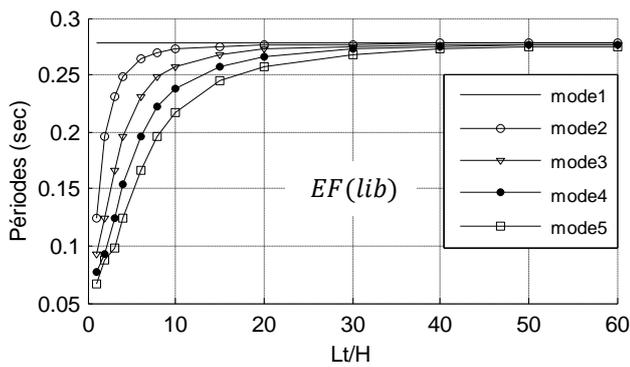


Figure 4.2 : Périodes propres (sec), obtenues par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature, en fonction de la position de la limite de troncature L_t .

On remarque que les périodes fondamentales obtenues par $EF(lib)$, $EFI(inv)$ et $EF(dir)$ sont presque insensibles aux différentes positions de L_t . Par contre, celles obtenues par $EF(P = 0)$ sont fortement sensibles pour des positions de L_t proches de l'origine et qui deviennent sans influence, à partir des positions supérieures à $6H$. D'autre part, la sensibilité à la position L_t , pour tous les modèles utilisés, est notable lorsqu'on considère les périodes des modes supérieurs et cela pour des positions de la limite de troncature proches de l'origine. On note aussi sur la figure 4.2, que pour des positions de L_t assez éloignées de l'origine, toutes les périodes considérées coïncident avec la période fondamentale, qui égale à la période analytique $T = 4H/c$ définie pour un réservoir dont une partie est étendue à l'infini [3,5], et qu'elle a comme valeur $T = 0.2778$ secondes dans le cas où $H = 100$ m et $c = 1440$ m/sec.

Dans le but de déterminer l'influence de la célérité c , des ondes dans le milieu fluide, sur les périodes propres, on a positionné la limite de troncature à une distance égale trois fois la hauteur ($L_t = 3H$), et on a fait varier les valeurs de la célérité c dans l'ordre croissant. La figure 4.3 montre la variation des trois premières périodes propres, obtenues par les mêmes modèles numériques utilisés précédemment, en fonction de c/c_0 , dont lequel c_0 est pris égale à 1440 m/sec.

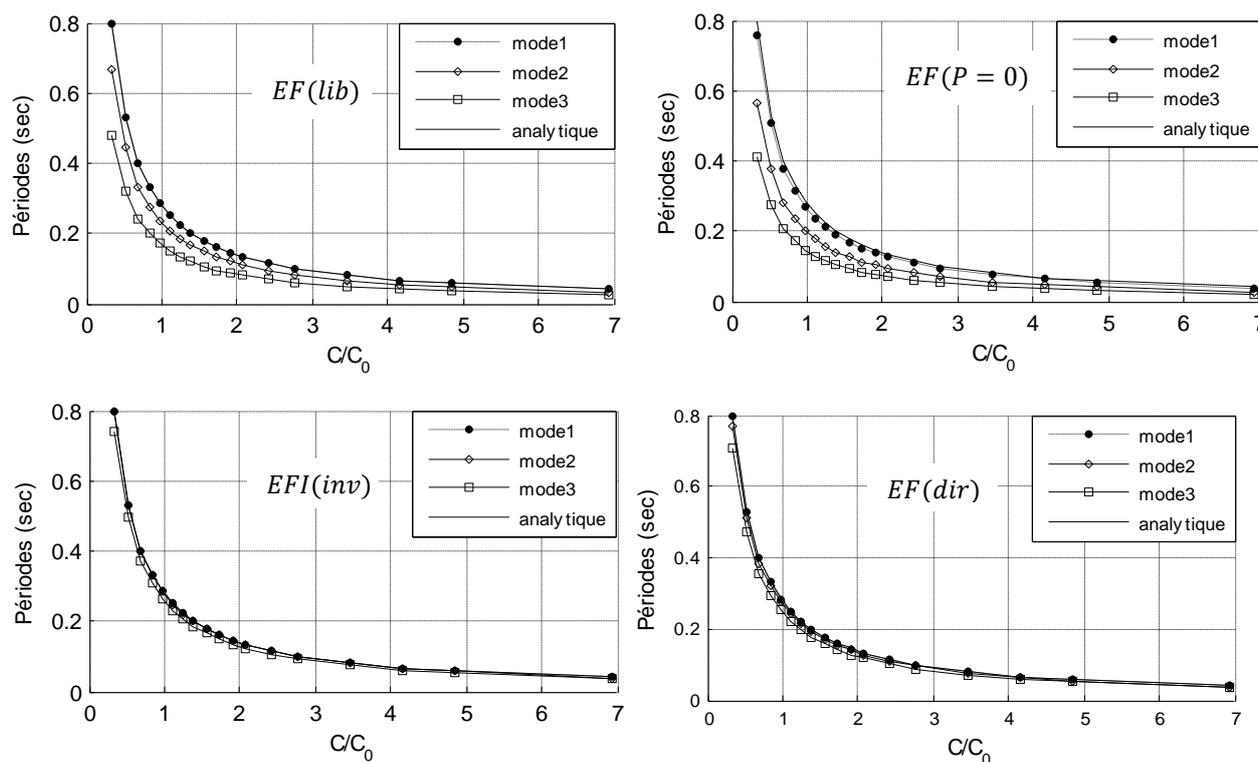


Figure 4.3 : Périodes propres (sec) en fonction de la célérité c du milieu.

Les résultats montrent bien que les trois périodes propres considérées décroissent d'une façon asymptotique en fonction de la célérité c , et cela revient à l'hypothèse de la compressibilité du fluide. En effet, plus la célérité c augmente plus le fluide devient moins compressible. Il est à noter aussi, que les périodes fondamentales obtenues par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature se confondent avec la période analytique qui est donnée par $T = 4H/c$. Un écart peut être observé entre les trois périodes propres considérées, obtenues par le modèle d'éléments finis avec les deux hypothèses à la limite de troncature $EF(lib)$ et $EF(P = 0)$, cet écart diminue progressivement en fonction de c . Les deux approches de construction des éléments infinis $EFI(inv)$ et $EFI(dir)$, conduisent à des résultats pratiquement identiques.

4.3 Analyse de la réponse hydrodynamique

Dans la section précédente, nous avons vu l'effet du positionnement de la limite de troncature et l'apport de la technique de couplage éléments finis–éléments infinis sur les vibrations libres d'un milieu fluide, et nous avons vu aussi que les frontières radiatives considérées dans cette étude, n'interviennent pas dans l'analyse des périodes et des modes propres. Dans cette section, nous allons procéder à l'analyse de la réponse hydrodynamique, sous l'effet des sollicitations sismiques et des sollicitations harmoniques. Les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature seront considérés. L'influence de la fréquence d'excitation, de la position de la limite de troncature et de la compressibilité du fluide sera examinée.

Dans le cas de l'hypothèse d'un fluide supposé incompressible, le calcul de la réponse hydrodynamique est simple, il suffit juste de résoudre le système (3.68) du chapitre 3 par l'une des méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques, que se soit de nature itérative ou directe. Par contre, dans le cas d'un fluide supposé compressible, le problème revient à résoudre un système d'équations différentielles du second ordre, de même forme que celle définie par l'équation (3.58), dans le cas de l'introduction d'une frontière radiative, ou (3.65) dans le cas de la technique de couplage éléments finis–éléments infinis, ce qui nous emmène à adopter une méthode de résolution adéquate à ce genre de problèmes. En pratique, deux méthodes peuvent être utilisées, la première est la méthode d'intégration directe pas à pas et la seconde est la méthode de superposition modale. Le choix de telles méthodes à appliquer est dicté par des critères purement numériques. Dans le cas du modèle de couplage éléments finis–éléments infinis, ou le modèle d'éléments finis avec les deux hypothèses de pression nulle ou non nulle sur la limite de troncature, la méthode de superposition modale est recommandée, car elle permet des gains de temps de calcul. Cependant, pour des systèmes à comportement non

Linéaire, ou des systèmes présentant un amortissement non proportionnel comme dans le cas de l'application d'une frontière radiative, la méthode d'intégration directe pas à pas est indispensable.

4.3.1 Cas d'un fluide incompressible

Dans cette section, le fluide est supposé incompressible et les sollicitations considérées sont des déplacements harmoniques d'amplitude égale à l'unité exercés directement sur le fluide par une structure rigide. Pour montrer l'effet du positionnement de la limite de troncature L_t , ainsi que l'effet de la fréquence d'excitation sur la réponse hydrodynamique, une série d'expériences numériques a été effectuée. Les résultats obtenus sont exprimés par le coefficient de pression hydrodynamique $C_p = P/\rho gH$ et qui seront commentés et comparés à la solution analytique de Westergaard [29]. Dans l'expression de C_p , les paramètres ρ , g et H désignent respectivement la masse volumique du fluide, l'accélération de la gravité et la hauteur du réservoir, P représente l'amplitude des pressions hydrodynamiques.

Dans le premier temps, le modèle d'éléments finis avec les deux hypothèses à la limite de troncature $EF(lib)$ et $EF(P = 0)$ est retenu et les différentes pulsations d'excitation considérées sont données respectivement par $\omega = 10, 20, 40$ et 60 rd/sec . La figure 4.4 illustre la variation du coefficient des pressions maximales C_p , enregistré au nœud 1 montré sur la figure 4.1, en fonction du positionnement de la limite de troncature L_t .

Pour les différentes pulsations d'excitations considérées, on constate sur la figure 4.4 une grande différence entre la solution analytique de Westergaard et les deux solutions obtenues par $EF(lib)$ et $EF(P = 0)$, pour des positions de L_t proches de l'origine. Cette différence diminue progressivement lorsque le positionnement de L_t s'éloigne de plus en plus de l'origine jusqu'à une position de $L_t = 2H$, où on remarque une concordance entre les trois solutions. Cela montre que dans le cas d'un fluide incompressible, l'adoption d'une limite de troncature avec hypothèse de pression nulle imposée, ou avec l'hypothèse d'une limite sans conditions, exige la troncature du domaine à une distance égale au moins deux fois la hauteur ($L_t \geq 2H$). Afin de confirmer ces remarques, on a fixé la position de la limite de troncature à $L_t = 2H$, et on a tracé sur la figure 4.5(a) la variation du coefficient des pressions C_p , enregistré sur le même point d'observation utilisé précédemment, en fonction de la pulsation d'excitation ω et sur la figure 4.5(b), on a tracé la distribution des coefficients de pressions sur l'interface fluide-structure pour les pulsations $\omega = 20, 40$ et 60 rd/sec .

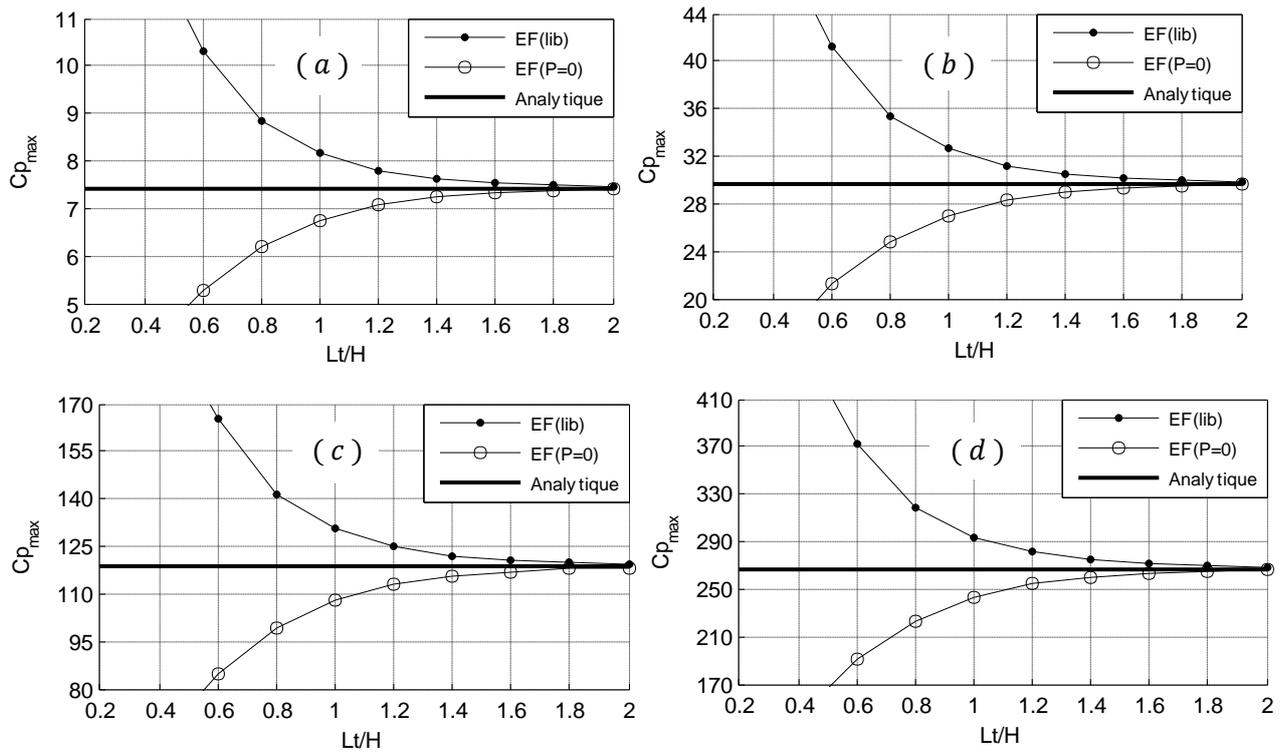


Figure 4.4: Coefficient de pression C_p en fonction du positionnement de la limite de troncature L_t .

(a) : $\omega = 10 \text{ rd/sec}$; (b) : $\omega = 20 \text{ rd/sec}$;
 (c) : $\omega = 40 \text{ rd/sec}$; (d) : $\omega = 60 \text{ rd/sec}$.

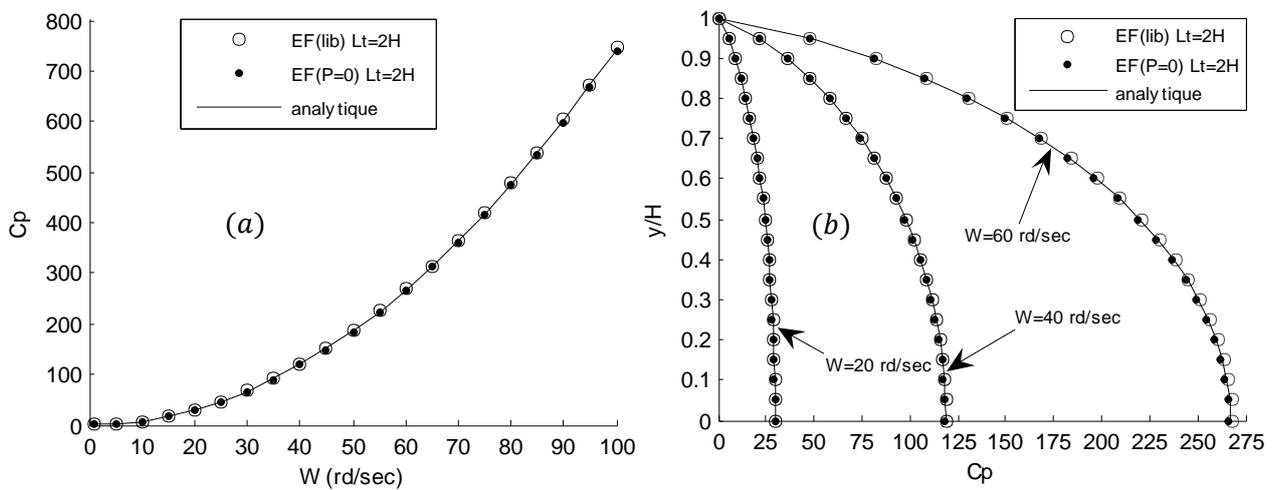


Figure 4.5: Comparaison entre la solution analytique de Westergaard et les solutions obtenues par EF($P = 0$) et EF(lib) pour $L_t = 2H$.

(a) : Coefficient de pression hydrodynamique C_p en fonction de la pulsation d'excitation ω ;
 (b) : Distribution du coefficient de pression hydrodynamique C_p sur l'interface fluide-structure .

Les figures 4.5(a) et 4.5(b) montrent clairement la concordance entre la solution analytique de Westergaard et les deux solutions de $EF(lib)$ et $EF(P = 0)$, obtenues pour $L_t = 2H$, et cela confirme les constats précédents. En outre, on remarque sur la figure 4.5(a) une forte dépendance entre le coefficient de pressions hydrodynamiques C_p et la pulsation d'excitation ω et qui représente une variation hyperbolique.

Maintenant, on va refaire les mêmes applications précédentes pour une limite de troncature traitée soit, par la technique de couplage éléments finis–éléments infinis en utilisant les deux approches $EFI(dir)$ et $EFI(inv)$, soit par une frontière radiative convenable qui peut, être la condition de Sharan ou de Maity Damodar. La figure 4.6 montre la variation du coefficient de pressions hydrodynamiques maximales C_p , enregistré sur le même point d'observation utilisé précédemment, en fonction du positionnement de la limite de troncature L_t .

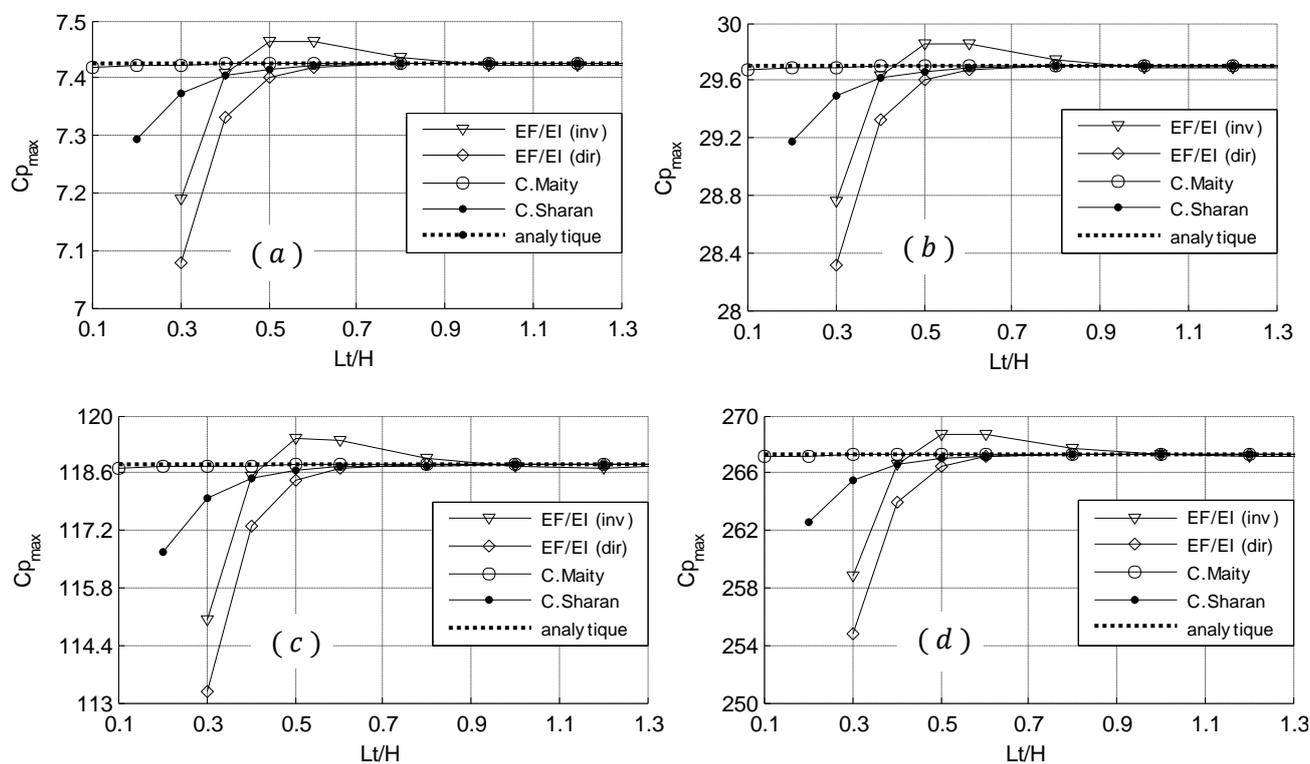


Figure 4.6: Coefficient de pression C_p en fonction du positionnement de la limite de troncature L_t .

(a) : $\omega = 10 \text{ rd/sec}$; (b) : $\omega = 20 \text{ rd/sec}$;
(c) : $\omega = 40 \text{ rd/sec}$; (d) : $\omega = 60 \text{ rd/sec}$.

Après la prise en compte des effets radiatifs, on voit clairement que la convergence des résultats à la solution analytique de Westergaard s'obtient pour des positions de L_t plus proches de l'origine, comparativement à l'hypothèse d'une limite de troncature supposée

libre sans condition $EF(lib)$, ou l'hypothèse d'une pression nulle imposée $EF(P = 0)$, qui exigent des positions de $L_t \geq 2H$. En effet, l'utilisation des éléments infinis construits selon l'approche inverse $EFI(inv)$, la convergence de la solution ne peut être observée qu'à partir de $L_t \geq 0.9H$. Cependant, la condition de Sharan et les éléments infinis construits selon l'approche direct $EFI(dir)$ fournissent des résultats qui se stabilisent pour des positions de $L_t \geq 0.6H$. En outre, on remarque que la solution obtenue par la condition de Maity est nettement stabilisée pour toutes les positions de L_t . Par ailleurs, l'apport des différents modes de prise en compte des effets radiatifs est encore plus visible sur la figure 4.7(a), qui montre la variation du coefficient de pressions C_p en fonction de la pulsation d'excitation ω , et sur la figure 4.7(b) qui illustre la distribution des coefficients de pressions hydrodynamiques sur l'interface fluide–structure.

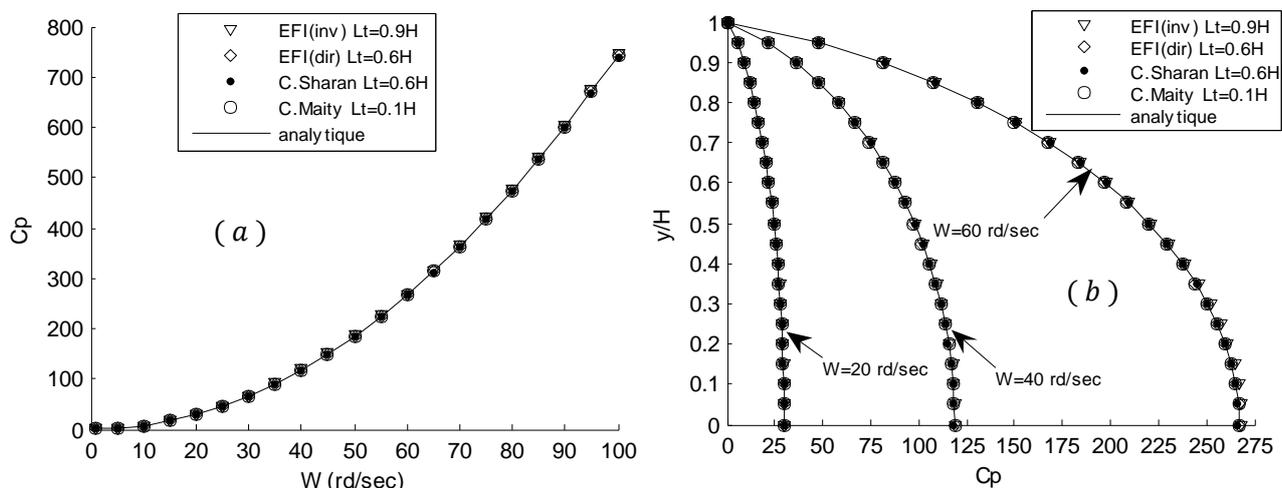


Figure 4.7: Comparaison entre la solution analytique de Westergaard et les différents modes de prise en compte des effets radiatifs.

a : Coefficient de pression hydrodynamique C_p en fonction de la pulsation d'excitation ω .

b : Distribution du coefficient de pression hydrodynamique C_p sur l'interface fluide–structure.

En conclusion, dans le cas d'un domaine fluide non borné supposé incompressible, la considération d'une limite de troncature sans conditions, ou d'une pression nulle imposée, exige la troncature du domaine à une distance égale au moins deux fois la hauteur, afin d'obtenir la convergence de la solution recherchée. Par contre, lorsque la limite de troncature subit un traitement par une frontière radiative, ou par des éléments infini, on obtient des résultats satisfaisant pour des tailles de maillage très réduites, ce qui rend les calculs plus maniables et permet des gains importants en terme économique. A titre de comparaison entre les différents modes de prise en compte des

effets radiatifs, les éléments infinis construits selon l'approche inverse apportent moins à la solution que d'autres modes. Par ailleurs, parmi les différents modes de traitement considérés, on constate que la condition de Maity semble la plus efficace et la plus rentable de son apport important à la solution même pour des positions de la limite de troncature très proches de l'origine ($L_t = 0.1H$).

4.3.2 Cas d'un fluide compressible

Afin d'analyser la réponse hydrodynamique pour les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature d'un domaine fluide supposé compressible, on a considéré deux types de sollicitations. Le premier type consiste à des accélérations sismiques qui permettent d'envisager l'histoire de la réponse au cours du temps. Le second type est des accélérations harmoniques qui montrent l'influence de la fréquence d'excitation sur la réponse. Les résultats obtenus seront commentés et comparés à des solutions analytiques disponibles dans les littératures.

4.3.2.1 Excitations sismiques

Dans cette section, l'excitation considérée est les accélérations sismiques du séisme de l'impérial Valley du 18 mai 1940, enregistré à la station d'El-Centro. Les dix premières secondes de l'enregistrement sont reportées sur la figure 4.8 suivante :

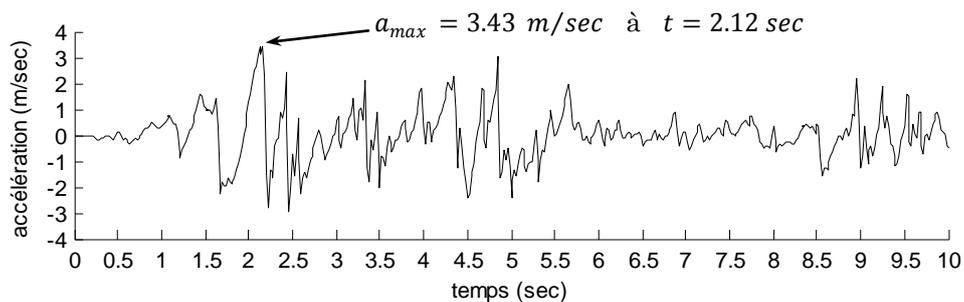


Figure 4.8 : Accélération sismique du séisme de l'impérial Valley d'El-Centro.

Afin d'apprécier le comportement de la réponse hydrodynamique des différents traitements de la limite de troncature, en fonction de la taille du domaine fluide et de déterminer le mode de convergence des résultats, on trace la variation du coefficient de pressions hydrodynamiques maximales en valeurs absolues, produit par le signal sismique de la figure 4.8, enregistré au nœud 1, en fonction du positionnement de la limite de troncature L_t . Les résultats obtenus par les différents modes de traitement à savoir les deux hypothèses de pression nulle ou non nulle, l'utilisation des éléments infinis ou la frontière radiative de Sommerfeld, sont comparés à la solution analytique

qui est disponible dans la référence [17].

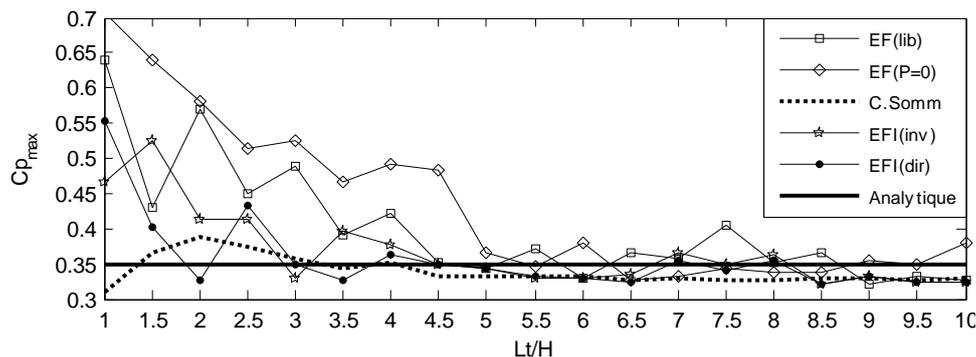


Figure 4.9 : Comparaison entre la solution analytique et les solutions obtenues par les différents modes de traitement de la limite de troncature de la position L_t .

La figure 4.9 montre que l'utilisation des éléments infinis construits selon l'approche directe $EFI(dir)$, conduit à des résultats oscillants autour de la solution analytique en fonction du positionnement de la limite de troncature. Les oscillations commencent à partir de $L_t = 1.5H$ et deviennent de plus en plus faibles lorsque la distance de L_t augmente. Les mêmes remarques peuvent être observées pour les résultats obtenus par l'utilisation des éléments infinis construits selon l'approche inverse $EFI(inv)$, mais les oscillations commencent à partir de $L_t = 3H$. En ce qui concerne les solutions obtenues par la condition de Sommerfeld $C.Somm$ on constate qu'elles sont nettement confondues à la solution analytique pour des positions de L_t variant de 3 à $4H$, qui semblent des positions idéales pour la limite de troncature, et puis diminuent avant qu'elles se stabilisent à partir de $L_t > 4.5H$. Pour les deux hypothèses de pression nulle ou non nulle à la limite de troncature, les oscillations autour de la solution analytique ne peuvent être observées qu'à partir d'une distance $L_t = 4.5H$ pour $EF(lib)$ et $L_t = 5.5H$ pour $EF(P=0)$. Afin de confirmer ces constats, la figure 4.10 illustre l'histoire du coefficient de pressions hydrodynamiques obtenu par les différents modes de traitement de la limite de troncature, qui est positionnée à une distance de L_t qui semble idéale pour chaque mode de traitement, et sur le tableau 4.5 sont reportées les valeurs des pics les plus élevés en valeurs absolues et aux instants correspondants, ainsi que l'erreur relative par rapport à la solution analytique. D'où, on constate que toutes les valeurs absolues des pics les plus élevés obtenus par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature sont très proches de celui de la solution analytique. En outre, les erreurs relatives engendrées par chaque mode de traitement sont très faibles, telle que la plus grande valeur qu'on peut observer est de l'ordre de 6.56 %. D'autre part, si on compare la vitesse de convergence, on constate que les éléments infinis construits selon l'approche

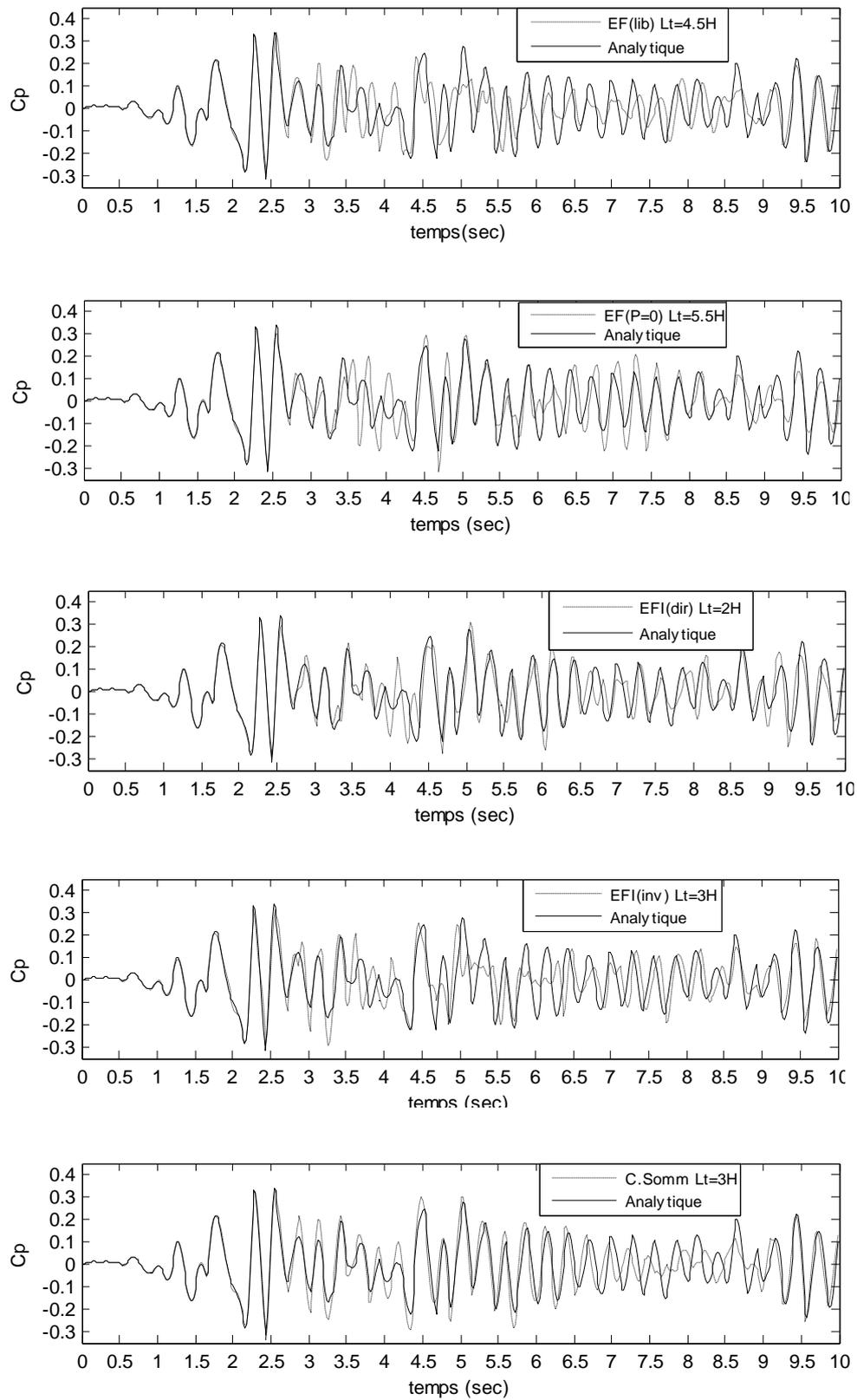


Figure 4.10 : Comparaison entre l'histoire du coefficient de pressions C_p obtenue par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature et la solution analytique.

Tableau 4.5 : Comparaison entre les pressions maximales obtenues par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature.

	Position de L_t	Instant (sec)	$C_{p_{max}}$	Erreur (%)
Analytique	–	2.54	0.335	–
$EF(lib)$	$4.5H$	2.58	0.340	1.48
$EF(P = 0)$	$5.5H$	2.28	0.323	3.88
$EFI(dir)$	$2H$	2.28	0.313	6.56
$EFI(inv)$	$3H$	2.28	0.319	4.77
$C.Somm$	$3H$	2.44	-0.342	1.50

directe $EFI(dir)$ fournissent des résultats convergant plus rapidement que d'autres modes de traitement, telle que la position de $L_t = 2H$ est largement suffisante pour représenter le domaine fluide. En ce qui concerne la condition de Sommerfeld $C.Somm$ et les éléments infinis construits selon l'approche inverse $EFI(inv)$, la position de $L_t = 3H$ semble idéale pour obtenir des résultats satisfaisants. Par contre, les hypothèses de pression nulle $EF(P = 0)$ ou non nulle $EF(lib)$ exigent un positionnement de L_t à une distance assez loin.

Il est nécessaire de noter que les remarques précédentes restent particulières et propres à l'accélération sismique utilisée, la généralisation à tous les signaux sismiques n'est pas tout à fait évidente.

4.3.2.2 Excitations harmoniques

Pour montrer l'effet de la fréquence d'excitation sur la réponse hydrodynamique, pour les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature, on va considérer un signal harmonique d'amplitude égale à l'unité et de pulsation ω exercé directement sur l'interface fluide–structure. La limite de troncature dans ce cas est fixée à une position de $L_t = 3H$. Les résultats obtenus sont commentés et comparés à une solution analytique disponible dans la référence [28] définie dans le domaine des fréquences pour un milieu fluide non borné supposé compressible. La figure 4.11 illustre la variation des coefficients de pressions maximales C_p , enregistré au nœud 1 de la figure 4.1, en fonction de ω/ω_0 dans laquelle $\omega_0 = \pi c/2H$ est la pulsation analytique fondamentale propre au système.

La première remarque qu'on prélève de la figure 4.11 est que pour des pulsations d'excitations inférieures à la pulsation analytique fondamentale propre au système ($\omega < \omega_0$), tous les modes de traitement de la limite de troncature fournissent des

résultats semblables à la solution analytique. Pour la condition de Sharan et la condition de Sommerfeld, la convergence à la solution analytique continue même pour des pulsations d'excitations supérieures ($\omega > \omega_0$). Par contre, les autres modes de traitement conduisent pratiquement à des résultats identiques où on constate des résonances dans tous les modes de vibrations considérés, et qui nous donnent des valeurs de C_p très grandes, qui tendent vers l'infini pour des pulsations d'excitations égales aux pulsations propres. Ces résultats semblent logiques, car les expressions développées pour ces modes de traitement ne contiennent aucun terme d'amortissement, contrairement aux conditions de Sharan et de Sommerfeld qui représentent la matrice d'amortissement du système.

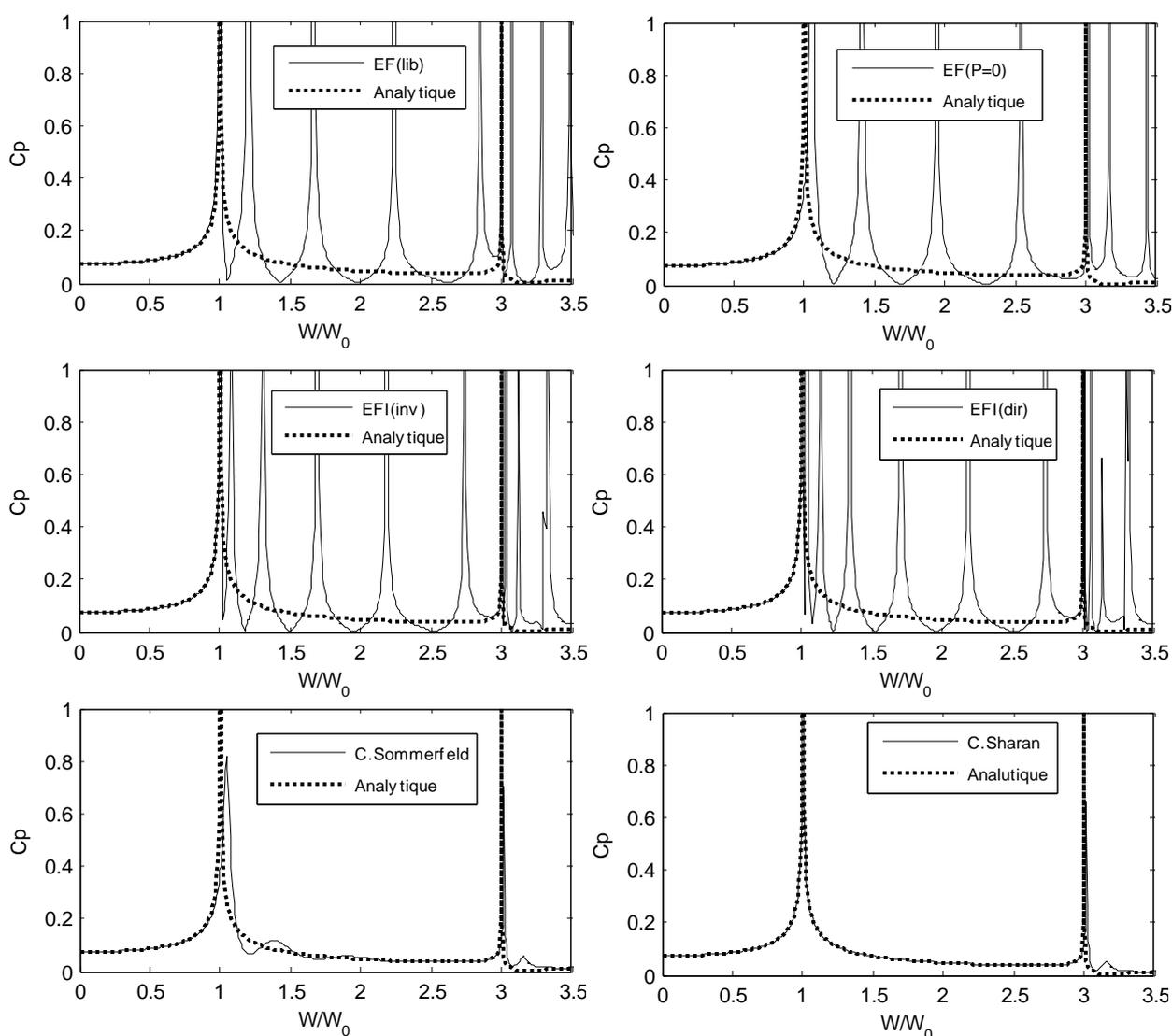


Figure 4.11 : Comparaison entre la solution analytique et les solutions obtenues par les différents modes de traitements des conditions à la limite de troncature pour une position de $L_t = 3H$.

Afin de mieux apprécier l'influence de la pulsation d'excitation ω et de la position de la limite de troncature L_t , on va considérer d'abord une pulsation d'excitation $\omega = 0.5\omega_0$. la figure 4.12(a) montre la variation du coefficient de pressions maximales, repéré sur le même point d'observation utilisé précédemment, en fonction du positionnement de la limite de troncature L_t , et la figure 4.12(b) illustre la distribution de C_p sur l'interface fluide-structure pour des positions de L_t qui semblent idéales pour chaque mode de traitement.

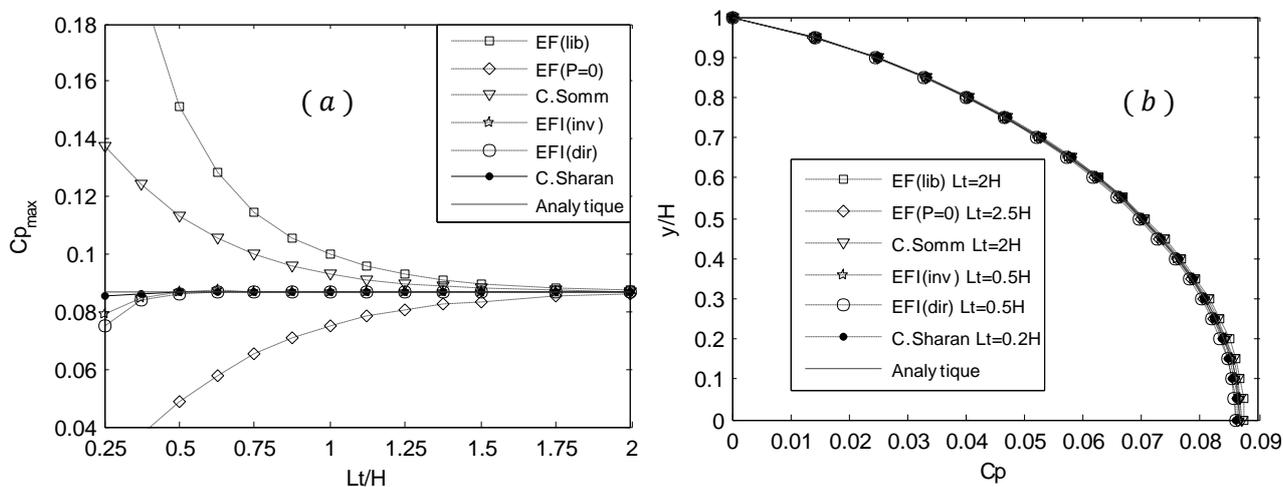


Figure 4.12 : Comparaison entre la solution analytique et les solutions obtenues par les différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature sous l'effet d'une pulsation d'excitation $\omega = 0.5\omega_0$.

- (a) : Variation de $C_{p_{max}}$ en fonction de positionnement de la limite de troncature L_t ;
 (b) : Distribution de C_p sur l'interface fluide-structure.

Les résultats obtenus montrent que le traitement de la limite de troncature par la condition de Sharan ou, par des éléments infinis, apporte énormément à la solution recherchée. En effet, on voit clairement sur la figure 4.12 qu'une position de $L_t = 0.2H$ pour la condition de Sharan ou $L_t = 0.5H$ pour des éléments infinis est largement suffisante pour représenter le domaine infini du fluide. Par contre, l'adoption de la condition de Sommerfeld ou les deux hypothèses de pression nulle ou non nulle à la limite de troncature, la convergence des résultats à la solution analytique ne peut être observée qu'à partir de $L_t \geq 2H$.

Il est important de souligner que les remarques qu'on vient d'aboutir restent uniquement valables pour des pulsations d'excitations inférieures à la pulsation fondamentale propre au système. Pour la généralisation au cas des pulsations d'excitations supérieures à la pulsation fondamentale, on se limitera à une pulsation d'excitation $\omega = 1.5\omega_0$, pour laquelle on a tracé sur la figure 4.13, les distributions des coefficients de pressions

hydrodynamiques sur l'interface fluide–structure, obtenus pour les différentes positions de la limite de troncature L_t .

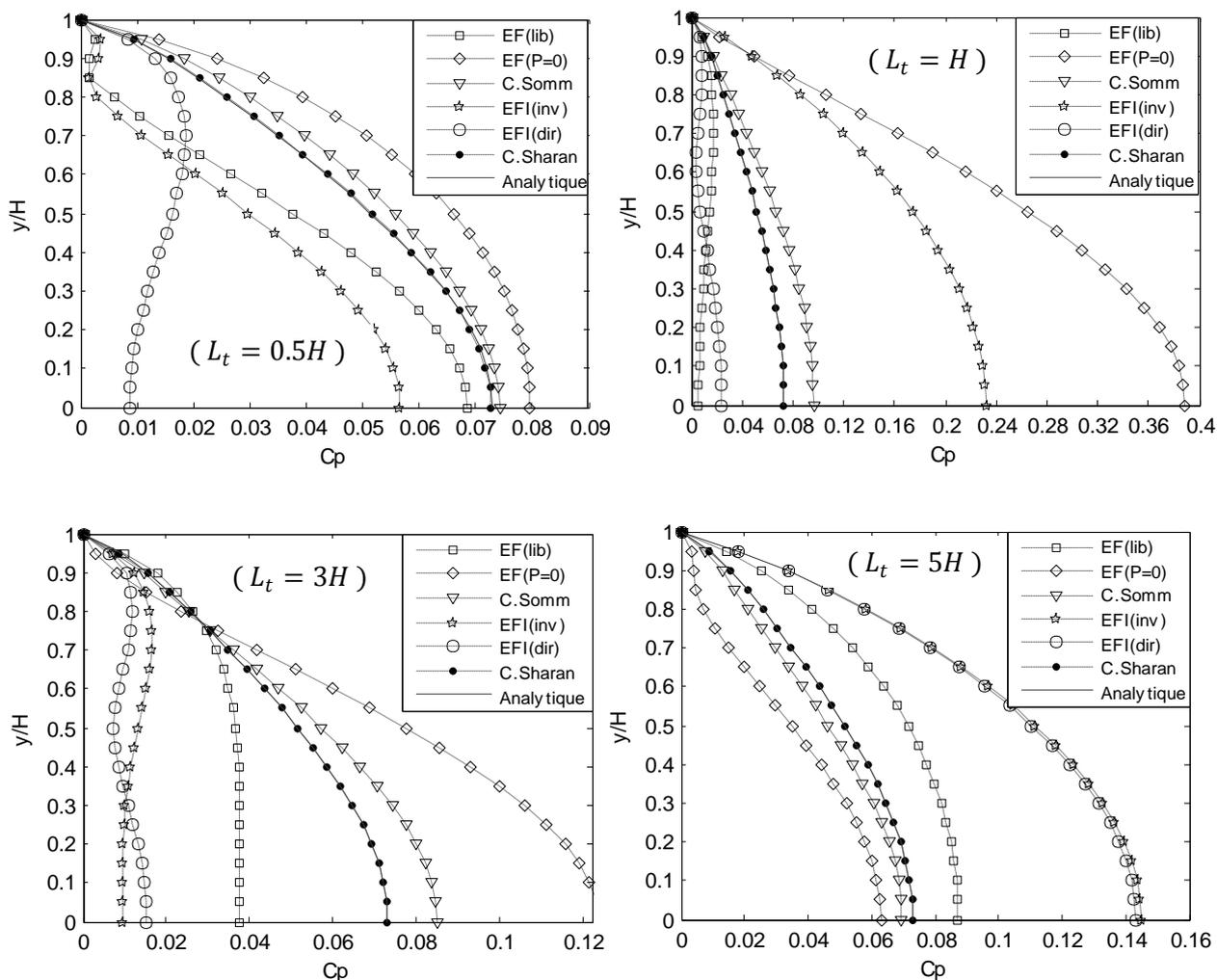


Figure 4.13 : Comparaison entre la solution analytique et les solution obtenues par les différents modes de traitement de la limite de troncature sous l'effet d'une pulsation d'excitation $\omega = 1.5\omega_0$.

On constate sur la figure 4.13 que les solutions obtenues par l'adoption de la condition de Sharan à la limite de troncature sont nettement confondues à la solution analytique pour toutes les positions de L_t considérées. Cela confirme encore une fois l'efficacité qu'elle présente cette condition dans la prise en compte des effets radiatifs des domaines fluides non bornés. En ce qui concerne l'insertion de la condition de Sommerfeld, des translations faibles des résultats au voisinage de la solution analytique peuvent être observées pour les différentes positions de L_t considérées, mais sans atteindre la convergence totale de la solution. Cependant, l'utilisation des éléments infinis ou les hypothèses de pression nulle ou non nulle à la limite de troncature, le comportement de la pression hydrodynamique est très complexe, car l'amplitude de cette dernière est

fortement sensible à la fréquence d'excitation, et à la position de la limite de troncature qui influe elle-même sur les fréquences propres du système. Comme nous l'avons vu dans la section 4.2, l'analyse des vibrations libres a montré que plus la limite de troncature s'éloigne de l'origine, plus la remontée des modes supérieurs est considérable, et cela influe énormément sur la réponse hydrodynamique obtenue par ces modes de traitement qui conduisent à des amplitudes très élevées pour des pulsations d'excitations proches des pulsations propres.

Par ailleurs, les éléments infinis construits selon l'approche directe *EFI(dir)* permettent d'améliorer la solution recherchée par un choix judicieux de la valeur du paramètre de décroissance L qui doit être déduit par une étude paramétrique. Pour une position de la limite de troncature $L_t = H$ et de pulsation d'excitation $\omega = 1.5\omega_0$, on observe sur la figure 4.14 que la solution obtenue par une valeur $L = 7$ est très proche à la solution analytique, contrairement à d'autres valeurs qui fournissent des résultats différents.

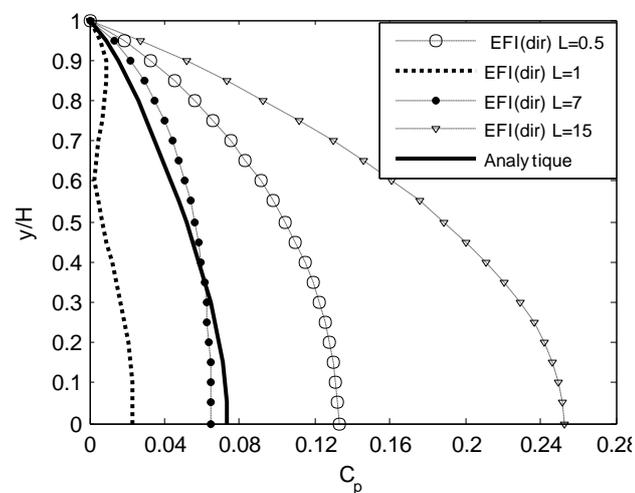


Figure 4.14 : *Éléments infinis selon l'approche directe et la solution analytique, pour une position de la limite de troncature $L_t = H$ et de pulsation d'excitation $\omega = 1.5\omega_0$.*

4.4 Conclusion

Lorsqu'on traite un milieu fluide non borné, l'influence de certains paramètres notamment la fréquence d'excitation, la position de la limite de troncature et la compressibilité du fluide doit être examinée. La négligence de l'un de ces derniers peut compromettre gravement la compréhension du phénomène étudié.

Chapitre 5

Applications au cas d'un milieu sol

5.1 Introduction

Le cas d'application le plus évident pour étudier la réponse d'un milieu sol non borné est celui du sol support des structures et des ouvrages. Ce milieu est soumis à des différentes sollicitations, qui peuvent être de nature sismique ou quelconques. Ces sollicitations ont en commun une source d'énergie située à la surface, ou en profondeur, dans le milieu qui induit des transports d'énergie vers l'infini, sans aucune réflexion parasite. L'objet du présent chapitre est d'étudier l'effet de la troncature du domaine et l'influence des différents modes de traitement des conditions à la limite de troncature, sur la réponse d'un milieu sol semi-infini, supposé élastique homogène, dans l'hypothèse des petites déformations.

Dans un premier temps, les programmes de calcul développés sont d'abord validés et comparés aux solutions analytiques de Boussinesq et de Flamant, dans le cas d'un chargement statique, et aux résultats du logiciel SAP [21], dans le cas d'un chargement dynamique. Ensuite, de différentes applications numériques ont été effectuées dans le but de montrer l'apport des éléments infinis et des frontières radiatives sur la réponse d'un plan semi-infini, soumis à des chargements de formes différentes.

5.2 Présentation du modèle

Dans cette étude, la forme géométrique du sol, ainsi que le type de maillage utilisés sont montrés sur la figure 5.1. Les éléments finis et infinis choisis pour la discrétisation du domaine sont de type quadrilatéral à quatre nœuds ($Q4$). Le sol est considéré comme étant un milieu élastique, homogène et semi infini, tronqué à une distance R prise à partir de l'origine et qui a fait l'objet d'une étude de convergence. Les conditions aux limites d'encastrement sont appliquées au niveau de la limite de troncature pour le modèle d'éléments finis classique $EF(enc)$. Par contre, ces conditions sont relâchées et

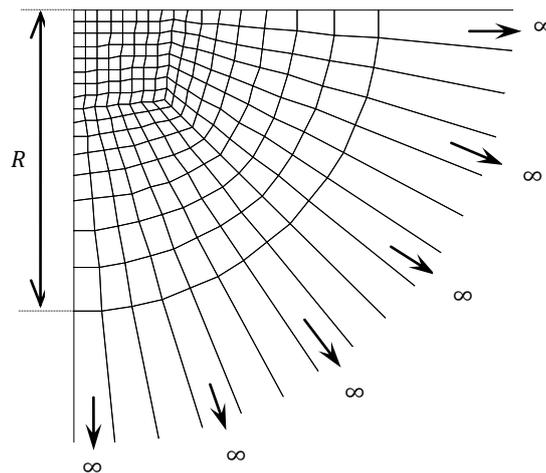


Figure 5.1 : Géométrie et type de maillage utilisé.

remplacées par une condition absorbante convenable dans le cas du modèle d'éléments finis avec frontière radiative $EF(FR)$, ou par des éléments infinis dans le cas du modèle de couplage éléments finis–éléments infinis EFI . De plus, les nœuds situés sur l'axe de symétrie du problème sont bloqués dans la direction horizontale pour les trois modèles considérés. Les propriétés mécaniques du sol tel que le module de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique sont respectivement fixés à $E = 10 \text{ MPa}$, $\nu = 0.33$ et $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$.

Il est important de souligner que le choix de cette forme de maillage radiale permet d'une part, de réduire la taille du domaine à l'aide de l'axe de symétrie du problème, et d'autre part, d'éviter le traitement des trois cas d'infinités dans les deux directions horizontale ou verticale ou les deux en même temps, lors du couplage avec les éléments infinis.

5.3 Validation des programmes développés

5.3.1 Réponse sous un chargement statique

Dans l'esprit de validation des programmes de calcul développés, nous avons considéré deux modes de traitement de la limite de troncature, à savoir l'utilisation des éléments infinis et l'encastrement des nœuds de frontière. Les résultats obtenus sont commentés et comparés aux solutions analytiques des problèmes classiques de Boussinesq et de Flamant. Le système de révolution dans le cas du problème de Boussinesq nous a mené à effectuer une analyse avec un modèle d'éléments finis axisymétriques, alors que le problème de Flamant est traité en déformations planes. Dans ce cas, le rayon de

troncature du domaine est pris égale à $R = 5 \text{ m}$ et le chargement considéré est une force verticale ponctuelle $P = 100 \text{ KN}$, appliquée à l'origine (voir figure 5.2).

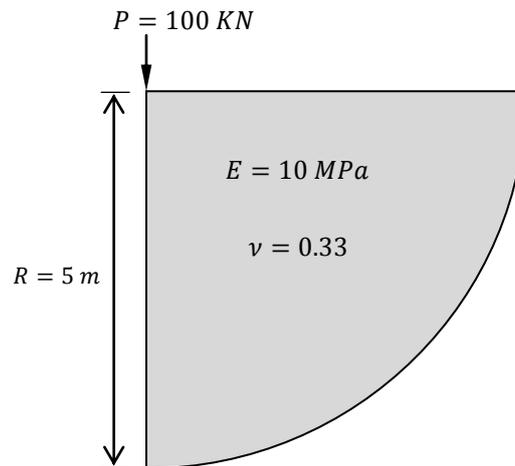


Figure 5.2 : Géométrie et chargement dans les cas des problèmes classiques de Boussinesq et de Flamant.

5.3.1.1 Cas du problème de Boussinesq

Afin de comparer entre la solution analytique de Boussinesq et les résultats obtenus par les programmes de calcul développés, nous avons tracé sur la figure 5.3 (a) les tassements repérés sur l'axe de symétrie du problème ($x = 0$), en fonction de la profondeur z , et sur la figure 5.3 (b) ceux repérés à la surface libre du sol ($z = 0$), en fonction de la distance x à partir de l'origine. De plus, Les valeurs numériques des tassements, ainsi que les erreurs relatives par rapport à la solution analytique de Boussinesq sont reportées sur les tableaux 5.1 (a) et 5.1 (b).

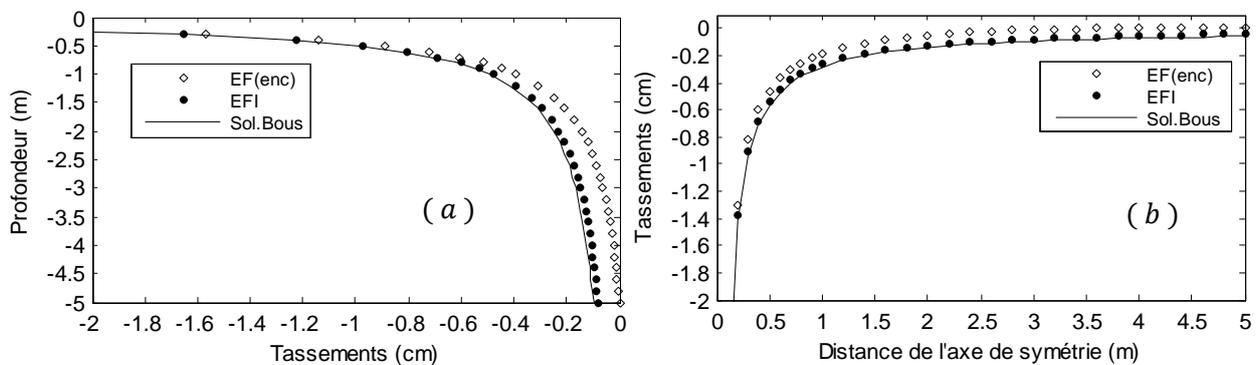


Figure 5.3 : Comparaison entre la solution analytique de Boussinesq et les tassements obtenus par les programmes de calcul développés.

(a) : Tassements sur l'axe de symétrie du problème ($x = 0$) ;

(b) : Tassements à la surface libre du sol ($z = 0$).

Tableau 5.1(a) : Tassements sur l'axe de symétrie du problème ($x = 0$) et comparaison entre la solution analytique de Boussinesq et les programmes de calcul développés.

Profondeur (m)	Solution de boussinesq (cm)	EF (enc)		EFI	
		Tassement (cm)	Erreur relative %	Tassement (cm)	Erreur relative %
0	—	-13.09	—	-13.17	—
-0.5	-0.99	-0.90	9.1	-0.98	1.01
-1	-0.49	-0.40	18.36	-0.48	2.04
-2	-0.24	-0.15	37.5	-0.23	4.16
-3	-0.16	-0.07	56.25	-0.15	6.25
-4	-0.12	-0.03	75	-0.11	8.33
-5	-0.09	0	100	-0.08	11.11

Tableau 5.1(b) : Tassements à la surface libre du sol ($z = 0$) et comparaison entre la solution analytique de Boussinesq et les programmes de calcul développés.

Distance par rapport à l'axe de symétrie (m)	Solution de Boussinesq (cm)	EF (enc)		EFI	
		Tassement (cm)	Erreur relative %	Tassement (cm)	Erreur relative %
0	—	-13.08	—	-13.17	—
0.5	-0.56	-0.46	17.8	-0.54	3.57
1	-0.28	-0.18	35.7	-0.26	7.14
2	-0.14	-0.049	65	-0.12	14.28
3	-0.09	-0.01	88.8	-0.08	11.11
4	-0.07	-0.0001	99.8	-0.055	21.42
5	-0.05	0	100	-0.042	16

Les résultats montrent que le programme de couplage d'éléments finis–éléments infinis *EFI* fournit des résultats pratiquement similaires à la solution analytique de Boussinesq, et cela revient à la considération du champ lointain du milieu par l'utilisation des éléments infinis, qui améliorent considérablement la solution recherchée. Concernant le programme de calcul d'éléments finis avec l'encastrement de la limite de troncature *EF(enc)*, un petit écart apparaît entre les solutions au voisinage du point d'application de la charge. Cet écart s'étale progressivement lorsqu'on s'éloigne de l'origine, où l'erreur relative peut atteindre jusqu'à 75 à 100 % loin de la zone chargée, et cela est dû à la troncature du domaine infini qui induit des erreurs dans les calculs.

Néanmoins, un éloignement de la limite de troncature à une distance assez grande de l'origine d'application de la charge, permet de réduire l'écart entre la solution analytique et la solution d'éléments finis *EF(enc)*.

Par ailleurs, on voit que la solution analytique de Boussinesq fournit des valeurs qui tendent à l'infini au niveau de l'axe de symétrie du problème. Malheureusement, ces valeurs ne peuvent être représentées sur les figures.

5.3.1.2 Cas du problème de Flamant

Dans ce cas, les mêmes applications effectuées précédemment ont été reproduites ici. De plus, un modèle numérique avec le logiciel SAP [21] a été réalisé et qui servira comme un autre élément de comparaison. La figure 5.4(a) illustre les tassements repérés au niveau de la surface libre du sol ($z = 0$), en fonction de la distance x par rapport à l'origine. Théoriquement, la solution analytique de Flamant fournit des valeurs de tassements qui tendent vers l'infini, au niveau de l'axe de symétrie du problème ($x = 0$) et qui ne peuvent être représentées sur la figure, pour cela, que les résultats obtenus par le logiciel SAP et les programmes de calcul développés sont montrés sur la figure 5.4(b), en fonction de la profondeur z . Toujours dans l'esprit de validation, la comparaison entre le logiciel SAP et le programme d'éléments finis *EF(enc)* est montrée sur le tableau 5.2(a). Les valeurs numériques des tassements ainsi, que les erreurs relatives par rapport à la solution analytique de Flamant sont illustrées sur le tableau 5. (b).

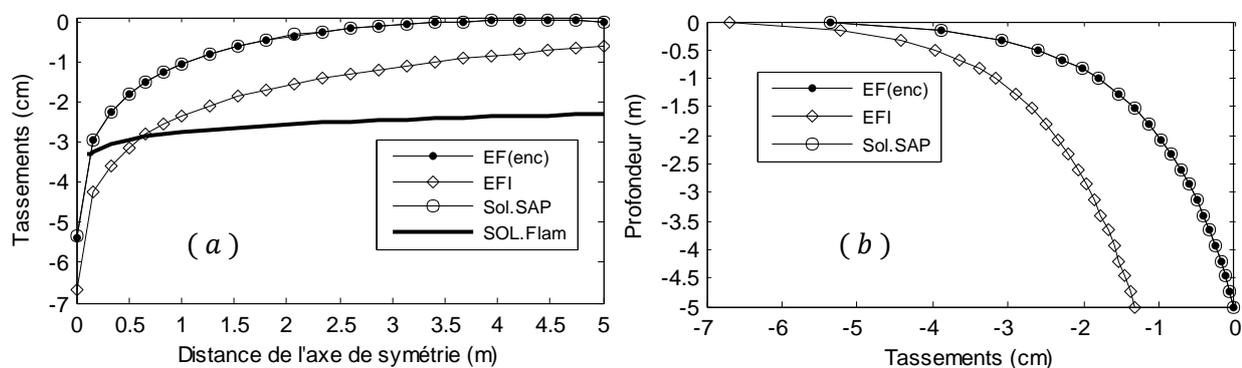


Figure 5.4 : Tassements dans le cas du problème de Flamant.

- (a) : Tassements sur la surface libre du sol ($z = 0$).
- (b) : Tassements sur l'axe de symétrie du problème ($x = 0$) ;

Tableau 5.2(a) : Comparaison entre le logiciel SAP et le programme d'éléments finis *EF(enc)*.

Tassements sur l'axe de symétrie ($x = 0$)				Tassements à la surface libre du sol ($z = 0$)			
Profondeur (m)	<i>EF(enc)</i> (cm)	SAP (cm)	Ecart relatif (%)	Distance (m)	<i>EF(enc)</i> (cm)	SAP (cm)	Ecart relatif (%)
0	-5.365	-5.360	0.09	0	-5.365	-5.360	0.1
-0.5	-2.617	-2.612	0.20	0.5	-1.813	-1.810	0.2
-1	-1.816	-1.811	0.27	1	-1.056	-1.050	0.6
-2	-0.979	-0.974	0.55	2	-0.349	-0.346	1.04
-3	-0.504	-0.500	0.92	3	-0.064	-0.063	2.68
-4	-0.253	-0.249	1.68	4	0.008	0.009	3.33
-5	0	0	0	5	0	0	0

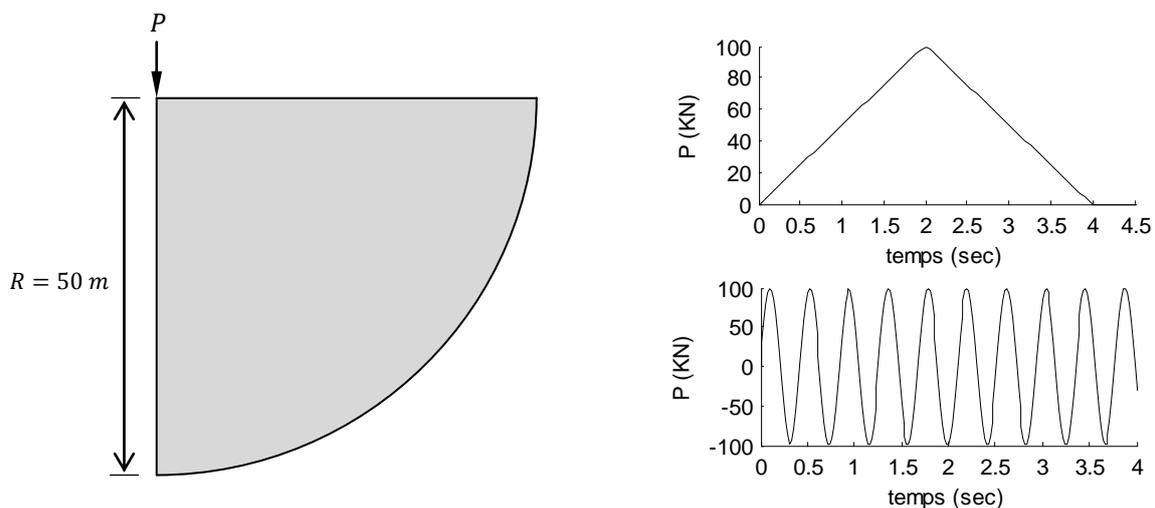
Tableau 5.2(b) : Comparaison entre la solution analytique de Flamant et les programmes de calculs développés *EF(enc)* et *EFI*.

Distance par rapport à l'axe de symétrie (m)	Solution de Flamant (cm)	<i>EF(enc)</i>		<i>EFI</i>	
		Tassement (cm)	Erreur relative %	Tassement (cm)	Erreur relative %
0	—	-5.365	—	-6.695	—
0.5	-2.951	-1.813	38.54	-3.136	6.25
1	-2.759	-1.056	61.70	-2.356	14.61
2	-2.559	-0.349	86.33	-1.549	39.43
3	-2.444	-0.064	97.35	-1.099	55
4	-2.381	0.008	100.36	-0.862	63.78
5	-2.314	0	100	-0.616	73.35

Les mêmes remarques et observations prélevées précédemment peuvent aussi être tirées de la solution de ce problème. On voit sur la figure 5.4(b) et le tableau 5.2(a) que le logiciel SAP et le programme de calcul d'éléments finis *EF(enc)* fournissent des résultats pratiquement identiques, et l'écart maximal qui peut être observé ne dépasse pas 3.33%. Ceci confirme la validité de notre présent programme d'éléments finis *EF(enc)*. En outre, même si dans ce cas, l'utilisation des éléments infinis ne fournit pas des résultats d'une aussi grande qualité que ceux du problème de Boussinesq, leurs apports à l'amélioration de la solution restent visiblement substantiels. En effet, on voit à partir du tableau 5.2(b) que l'erreur est aussi considérablement réduite. Elle passe de 40 % à 6 % au voisinage et de 73 % à 50 % loin de la zone d'application de la charge.

5.3.2 Réponse sous un chargement dynamique

Cette application a pour objectif de valider le programme d'éléments finis classique *EF(enc)*, dans le cas d'un chargement dynamique. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux obtenus par le logiciel SAP [21].

**Figure 5.5 :** Géométrie et chargement.

Le chargement considéré est une force ponctuelle P de forme triangulaire et puis de forme sinusoïdale de pulsation 15 rd/sec , appliquée directement à la surface libre d'un plan semi-infini, qui est tronqué à une distance $R = 50 \text{ m}$ du point d'application de la charge. Les caractéristiques mécaniques du sol sont les mêmes que celles utilisées précédemment, et l'amortissement du milieu est négligé dans ce cas. La taille des éléments finis est fixée approximativement à 1 m au voisinage de la zone chargée et à 5 m dans le champ lointain, ce qui donne un nombre total de 276 éléments Q_4 , 309 nœuds et 628 degrés de liberté. Les déplacements verticaux enregistrés au point d'application de la charge, en fonction du temps sont tracés sur la figure 5.6. Les pics les plus élevés ainsi que les instants correspondants sont reportés sur le tableau 5.3.

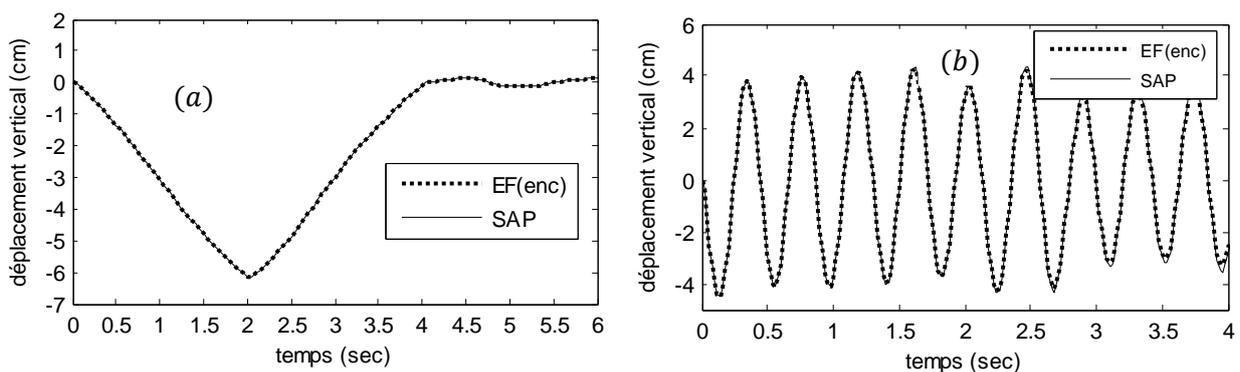


Figure 5.6 : Déplacement vertical du point d'application de la charge.

- (a) : Pour une charge P de forme triangulaire ;
 (b) : Pour une charge P de forme sinusoïdale.

Tableau 5.3 : Comparaison entre le programme d'éléments finis $EF(enc)$ et le logiciel SAP

Forme de la charge	Programme $EF(enc)$		Logiciel SAP		Ecart relatif (%)
	Déplacement (cm)	Instant (sec)	Déplacement (cm)	Instant (sec)	
triangulaire	6.16	2	6.15	2	0.16
sinusoïdale	4.47	0.14	4.48	0.14	0.22

Les figures 5.6(a) et 5.6(b) montrent bien la concordance entre le modèle d'éléments finis $EF(enc)$ et le modèle du logiciel SAP qui présentent pratiquement les mêmes courbes. On remarque aussi sur le tableau 5.3 qu'on retrouve sensiblement les mêmes pics qui se produisent aux mêmes instants pour les deux modèles, et l'écart relatif qu'on peut prélever ne dépasse pas 0.16 % pour une charge triangulaire et 0.22 % pour une charge sinusoïdale. Alors, à partir de ces constats, la validité du programme d'éléments finis $EF(enc)$ dans le cas d'un chargement dynamique est confirmée.

5.4 Applications

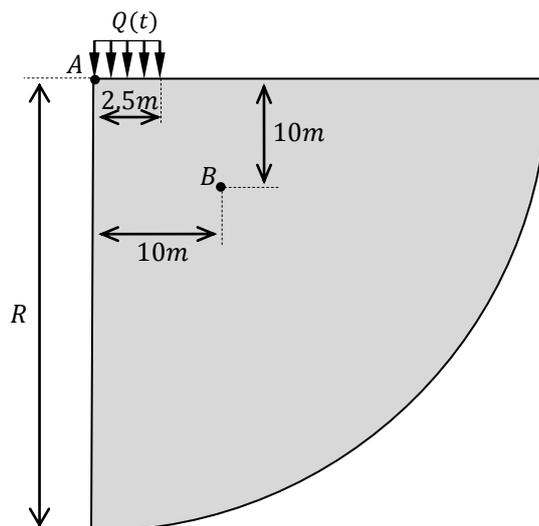


Figure 5.7 : *Forme géométrique du plan semi-infini et chargement.*

Dans cette étude, le milieu sol est considéré comme étant un plan semi-infini, tronqué à une distance R prise à partir de l'origine. Cette distance a fait l'objet d'une étude de convergence des solutions, obtenues par chaque mode de traitement de la limite de troncature, à savoir l'encastrement des nœuds de frontière $EF(enc)$, l'insertion d'une frontière radiative $EF(FR)$ et l'utilisation des éléments infinis EFI . La taille des éléments est fixée approximativement à 0.5 m au voisinage de la zone chargée et qui augmente progressivement lorsqu'on s'éloigne de cette zone, ce qui donne un nombre d'éléments croissant en fonction du rayon R . La sollicitation considérée est une charge $Q(t)$ uniformément répartie sur une largeur de 2.5 m de la surface libre du plan semi-infini. La réponse est déterminée par la méthode d'intégration directe pas à pas, et le coefficient d'amortissement critique utilisé est de 10% . Les points d'observation considérés sont les nœuds A et B qui sont montrés sur la figure 5.7.

Premièrement, on a considéré une charge $Q(t)$ de forme triangulaire (figure 5.8) et on a positionné la limite de troncature à une distance $R = 100\text{ m}$ de l'origine. L'histoire des

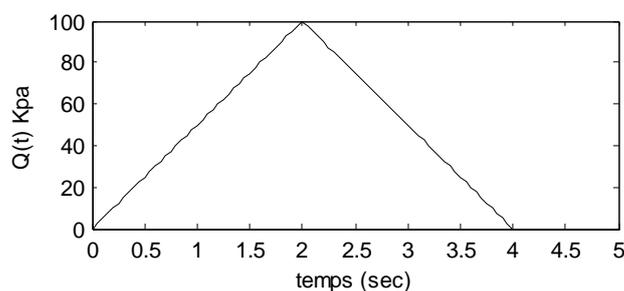


Figure 5.8 : *Chargement de forme triangulaire.*

déplacements verticaux engendrés par l'application de cette charge, repérés aux points d'observation A et B , est illustrée sur la figure 5.9.

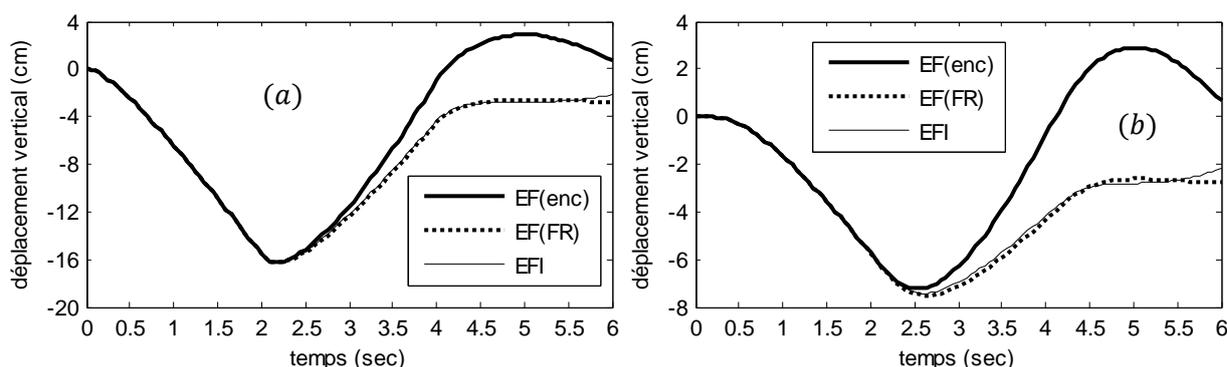


Figure 5.9 : Déplacements verticaux engendrés par un chargement de forme triangulaire.

(a) : Déplacements verticaux repérés au point d'observation A ;

(b) : Déplacements verticaux repérés au point d'observation B .

Les résultats montrent bien la coïncidence entre les courbes obtenues par le modèle de couplage éléments finis–éléments infinis EFI et le modèle d'éléments finis avec une frontière radiative $EF(FR)$. Cela revient à la considération des effets radiatifs dans chaque modèle. Par contre, pour le modèle d'éléments finis classique $EF(enc)$, on constate une séparation et un soulèvement de la solution par rapport aux deux autres solutions après un instant de l'application de la charge. Cela probablement peut être expliqué par la réflexion d'énergie, qui est engendrée par l'encastrement de la limite de troncature. On constate aussi que les pics maximums des déplacements, repérés sur le point A , se produisent au même instant que celui du chargement $Q(t)$ qui est $t = 2 \text{ sec}$. Par contre, ceux repérés sur le point B se produisent après une différence de temps Δt , qui correspond à la durée du transport d'énergie de la source à ce point d'observation.

Dans le but de montrer l'influence du positionnement de la limite de troncature R sur la convergence de la solution obtenue pour chaque mode de traitement de la limite de troncature, on a considéré le même chargement de la figure 5.8 utilisé précédemment. Initialement, on a positionné la limite de troncature à une distance $R_0 = 20 \text{ m}$ à partir de l'origine, et puis, on a fait varier cette distance par ordre croissant jusqu'à $R = 10R_0$. Les pics les plus élevés des déplacements verticaux V_{max} , enregistrés sur les points d'observation A et B , obtenus pour chaque position de la limite de troncature R , sont prélevés et tracés sur la figure 5.10, en fonction de R/R_0 .

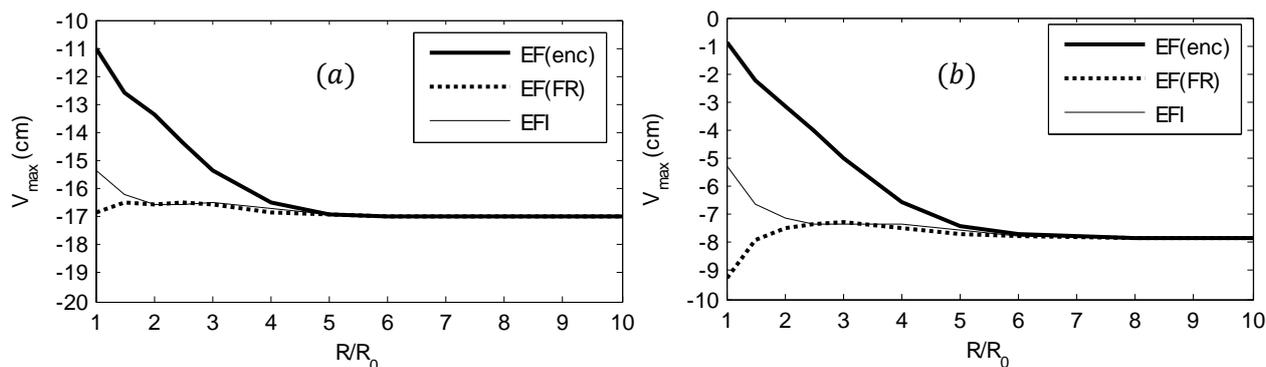


Figure 5.10 : Convergence des solutions de chaque mode de traitement de la limite de troncature.

(a) : Sur le point d'observation A ;

(b) : Sur le point d'observation B.

On note sur les figures que les résultats obtenus par le modèle de couplage éléments finis–éléments infinis EFI et le modèle d'éléments finis avec frontière radiative $EF(FR)$ se stabilisent à partir d'une position de la limite de troncature $R = 2R_0$ pour le point A et $R = 2.5R_0$ pour le point B, où on constate un accord entre les solutions de ces deux modèles. Par contre, pour la solution obtenue par le modèle d'éléments finis classique $EF(enc)$, la convergence ne peut être observée qu'à partir d'une position $R = 4.5R_0$ sur le point A et $R = 5R_0$ sur le point B. Ces résultats montrent bien la performance des éléments infinis et des frontières absorbantes dans le traitement des conditions aux limites de troncature, et montrent aussi l'apport considérable à la solution recherchée qui peut être amené par ces deux modes de traitement. Contrairement à l'encastrement des nœuds de frontière qui exige le positionnement de la limite de troncature à des distances très éloignées, afin d'aboutir à des résultats acceptables.

Considérons maintenant un chargement $Q(t)$ de courte durée, qui est une impulsion de forme triangulaire (figure 5.11), appliquée brutalement à la surface libre du plan semi–infini. Dans ce cas, la limite de troncature est positionnée à une distance $R = 50\text{ m}$

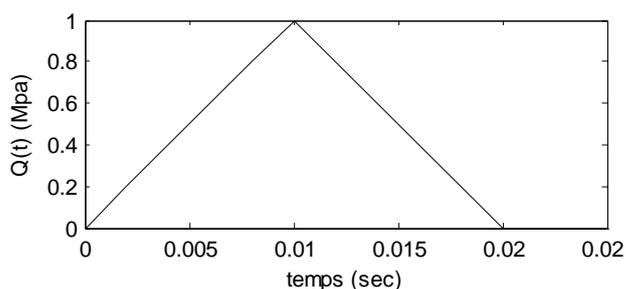


Figure 5.11 : Impulsion de forme triangulaire.

à partir de l'origine. L'histoire des déplacements verticaux repérés sur les points *A* et *B* produits par l'application de cette impulsion est montrée sur la figure 5.12 suivante :

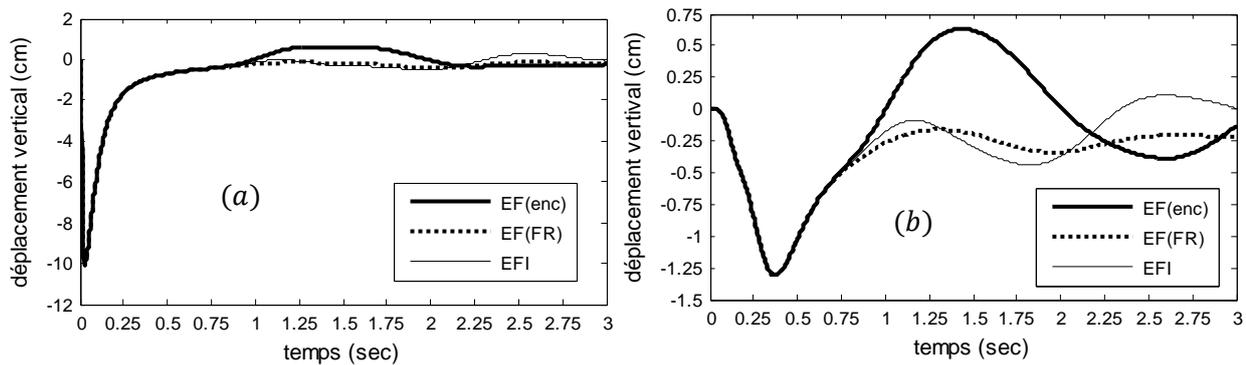


Figure 5.12 : Déplacements verticaux engendrés par une impulsion de forme triangulaire.

(a) : Déplacements verticaux repérés sur le point d'observation *A* ;

(b) : Déplacements verticaux repérés sur le point d'observation *B*.

Dans les premiers temps de l'application de la charge, on observe un accord entre les courbes des déplacements pour tous les modes de traitements de la limite de troncature considérés, d'où on constate les mêmes valeurs des pics et qui se produisent aux mêmes instants sur chaque point d'observation considéré. Cela peut être expliqué par la courte durée de la charge brutale qui ne procure pas le temps nécessaire aux modes de traitement, qui tiennent compte des effets radiatifs, de se réagir. Par ailleurs, la différence entre les différents modes de traitement de la limite de troncature, ne peut être observée qu'après la cessation du chargement où on remarque des fortes oscillations de la solution d'éléments finis classique $EF(enc)$, qui est engendrée par la réflexion d'énergie produite par l'encastrement des nœuds de frontière. De mêmes oscillations peuvent être aussi observées pour les solutions du modèle d'éléments finis avec frontière radiative $EF(FR)$ et le modèle de couplage éléments finis–infinis EFI , mais qui restent toujours faibles. On note aussi que la différence entre les différents modèles utilisés est notable sur le point d'observation *B* et non pas sur le point *A* qui se situe dans la surface chargée.

Dans ce qui suit, nous allons voir l'influence de la pulsation d'excitation sur la réponse des différents modèles utilisés. Pour cela, on a positionné la limite de troncature à $R = 50\text{ m}$ et on a considéré deux charges sinusoïdales de même amplitude, qui est de 100 Kpa et de pulsations différentes (figure 5.13) l'une est de 5 rd/sec et l'autre est de 15 rd/sec . Les courbes des déplacements verticaux repérés sur le point *B*, en fonction du temps, pour chaque chargement, sont illustrées sur les figures 5.14.

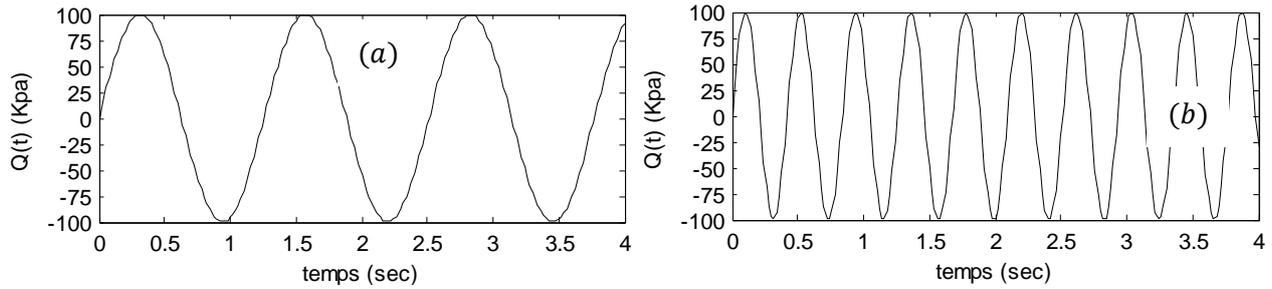


Figure 5.13 : Chargement de forme sinusoidale.

(a) : Avec une pulsation de 5 rd/sec ; (b) : Avec une pulsation de 15 rd/sec.

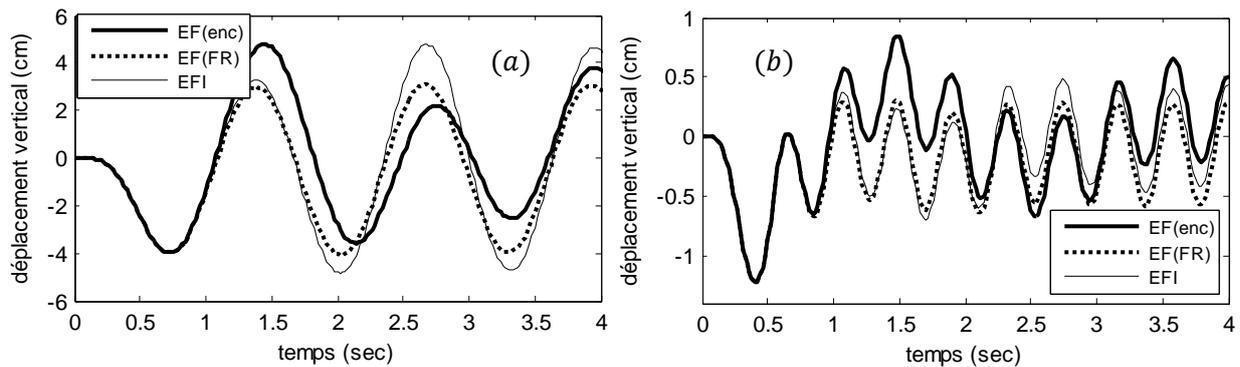


Figure 5.14 : Déplacements verticaux repérés sur le nœud B engendrés par des charges sinusoidales de pulsations différentes.

(a) : Pour une pulsation d'excitation égale à 5 rd/sec ;

(b) : Pour une pulsation d'excitation égale à 15 rd/sec.

On note immédiatement sur ces deux figures que malgré les deux chargements considérés présentent une même amplitude or que les déplacements résultants sont très différents, d'où on observe que les pics obtenus par un chargement de pulsation 5 rd/sec sont très importants par rapport à ceux obtenus par un chargement de pulsation 15 rd/sec. Ce qui signifie que dans le cas d'un chargement vibratoire, la solution dépend essentiellement de la fréquence d'excitation et non pas de l'amplitude. On note aussi que pour une même pulsation d'excitation, les différents modèles utilisés ne fournissent pas les mêmes allures de déplacements. Cela peut être expliqué par la différence entre les pulsations propres obtenues par chaque modèle, en outre, plus la pulsation d'excitation est proche de la pulsation propre, plus la solution est importante.

5.5 Conclusion

Le traitement de la limite de troncature par des éléments infinis, ou par des frontières radiatives, améliore énormément la solution recherchée. Mais, dans le cas d'un

chargement de courte durée, l'apport de ces deux modes de traitement à la solution recherchée ne peut être observé qu'après la cessation de la charge.

Conclusion générale

Ce travail fait l'objet d'un mémoire de Magister dont le thème est le traitement des conditions aux limites de troncatures des milieux non bornés en dynamique des structures. Deux milieux de nature différente sont traités dans le cadre de ce mémoire, à savoir les fluides et les sols. La géométrie non bornée de ces deux milieux est prise en compte par des frontières radiatives imposées sur la limite de troncature ou par l'utilisation des éléments infinis. A cet effet, des programmes de calculs ont été réalisés et développés pour le calcul des pressions hydrodynamiques dans le fluide et de la réponse en déplacements dans le sol. Les conclusions les plus importantes qui peuvent être tirées de ce travail sont :

- La discrétisation d'une frontière absorbante à la limite de troncature conduit à une matrice d'amortissement non proportionnelle qui exige la résolution dans le domaine temporel par la méthode d'intégration directe pas à pas. Par contre, les éléments infinis fournissent des matrices orthogonales dont le système peut être résolu par la méthode de superpositions modales.
- Le traitement de la limite de troncature par des éléments infinis permet d'inclure les effets radiatifs dans le problème des valeurs et vecteurs propres, contrairement aux frontières absorbantes qui n'interviennent pas dans l'analyse des vibrations libres.
- L'influence de la troncature d'un domaine fluide sur la réponse hydrodynamique est plus prononcée dans le cas de l'hypothèse d'un fluide compressible que dans le cas d'un fluide supposé incompressible.
- L'apport des éléments infinis à la solution hydrodynamique est visible dans le cas de l'hypothèse d'un fluide incompressible ou dans le cas des pulsations d'excitations inférieures à la pulsation fondamentale. Dans le cas contraire, une faible quantité d'amortissement critique doit être introduite pour améliorer la solution recherchée.
- Dans le cas d'un plan sol semi-infini, l'apport des éléments infinis ne peut être observé que pour des chargements statiques ou des chargements non vibratoires.

- L'utilisation des éléments infinis peut en fonction du contenu fréquentiel de l'excitation, d'amplifier la réponse hydrodynamique ou la réponse en déplacements au lieu de les atténuer.
- Dans le cas d'un chargement de courte durée, tous les modes de traitement de la limite de troncature conduisent à la même solution au moment de l'application de la charge, et la différence ne peut être observée qu'après cessation de chargement. Ce qui signifie qu'un chargement brutal ne procure pas le temps nécessaire aux différents modes de se réagir.
- L'implémentation des éléments infinis ou d'une frontière radiative dans un programme de calcul par éléments finis permet, d'une part d'accélérer la convergence de la solution recherchée et d'autre part, de positionner la limite de troncature à une distance beaucoup plus proche. Ce qui permet des gains importants en termes de temps de calcul et de précision des résultats.

Les perspectives de ce travail sont ainsi les suivantes :

- Le traitement des conditions aux limites de troncatures par des éléments infinis périodiques qui contiennent dans leurs fonctions de formes des termes représentant la propagation d'ondes vers l'infinis.
- L'utilisation de la technique de couplage éléments finis-éléments de frontières qui tient en compte automatiquement du caractère ouvert du domaine non borné par la solution fondamentale.

Bibliographie

- [1] Abdel-Fattah, T.T., Hodhod, H.A. & Akl, A.Y. « *A novel formulation of infinite elements for static analysis* », *Computers & structures* 77 (2000) 371-379.
- [2] Basu, U. & Chopra, A.K. « *Perfectly matched layers for elastic waves and applications to earthquake analysis of dams* », 16th ASCE Engineering mechanics conference, Washington, July 2003.
- [3] Basu, U. & Chopra, A.K. « *Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains : theory and finite-element implementation* », *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 192 (11-12) (2003) 1337-1375.
- [4] Basu, U. & Chopra, A.K. « *Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains* », *International journal for numerical methods in engineering*, 2004, 59(8) :1039-1074.
- [5] Bettess, P. « *Infinite Elements* », Penshaw Press, 1992.
- [6] Cetin, M & Mengi, Y. « *Transmitting boundary conditions suitable for analysis off dam-reservoir interaction and wave load problems* », *Applied Mathematical Modelling*, 27(2003) 451-470.
- [7] Enrique Luco, J. « *Approximate external boundaries for truncated models of unbounded media* », *Proceedings third UJNR workshop on soil-structur interaction*, march 2004, California, USA.
- [8] Filiatrault, A. « *Eléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures* », Edition de l'école polytechnique de Montréal, 1996.
- [9] Karpurapu, G.R & Bathurst, R.J. « *Comparatve analysis of some geomechanics problems using finite and infinite element meyhods* », *Computers and Geotechnics* 5, (1988), 269-284.
- [10] Khani, M.H.B.M. « *Dynamic soil-structure interaction analysis using the scaled boundary finite-element methode* », *Phd thesis*, The University of New South Wales Sydney, Australia, 2007.
- [11] Komatitsch, D. & Tromp, J. « *A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order sismic wave equation* », *Geophysical journal international*, (2003) 154, 146-153.
- [12] Liu, G.R. & Quek, S.S. « *The finite element method : A Practical course* », Butterworth-Heinemann, First edition, 2003.
- [13] Livaoglu, R. & Dogangun, A. « *Effet of foundation embedment on seismic behavior of elevated tanks considering fluid-structur-soil interaction* », *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(2007) 855-863.
- [14] Maity, D. « *Anovel far-boundary condition for the finite element analysis of infinite reservoir* », *Applied Mathematics and Computation*, 170 (2005), 1314-1328.

- [15] Mesquita, E. & Pavanello, R. « *Numerical methods for the dynamics of unbounded domains* », *Comp. Appl. Math*, Vol. 24, N. 1, 1-26, 2005.
- [16] Michou, F.E. & Koumoussis, V.K. « *Absorbing boundary conditions and perfect matched layer models for plane soil-structure interaction problems* », 5th GRAM international congress on computational mechanics, Limassol, 29 June-1 July, 2005.
- [17] Mike R. Ross, « *Coupling and Simulation of Acoustic Fluid-Structure Interaction Systems Using Localized, Lagrange Multipliers* », Phd thesis, University of Colorado, 2006.
- [18] Nguyen, V.H. « *Comportement dynamique de structures non linéaires soumises à des charges mobiles* », Thèse de doctorale, Ecole Nationale des pont et chaussées, France, 2002.
- [19] Nguyen, K.V. « *Etude des effets de site dus aux conditions topographiques et géotechniques par une méthode hybride éléments finis/éléments frontières* », Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 2005.
- [20] Pecker, A. « *Dynamique des structures et des ouvrages* », Site Internet : http://www.enpc.fr/formation/ecole_virt/coursPecker.
- [21] SAP2000 10.0.1, « *Structural analysis program* », Computers and structures, INC, 2005.
- [22] Seghir, A. « *Investigation des effets d'interaction sismique fluide-structure par couplage éléments finis-infinis* », Thèse de magister, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1999.
- [23] Sharan, S.K. « *A non reflecting boundary in fluid-structure interaction* », *Computer & Structure*, vol 26, N° 5, pp : 841-846, 1987.
- [24] Sitharam, T.G. & Vijay Kumar, I.V. « *Non-linear analysis of geomechanical problems using coupled finite and infinite elements* », *Geotechnical and Geological engineering*, 16, 129-149, 1998.
- [25] Tiliouine, B. & Seghir, A. « *A numerical model for time domain analysis of dams including fluid-structure interaction* », CST 98 International Conference, Edinburg, Scotland, 18th – 20th August, 1998.
- [26] Viladkar, M.N., Godbole, P.N. & Noorzaeei, J. « *Some new three-dimensional infinite elements* », *Computers & structures*, vol. 34, N. 3, pp. 455-467, 1990.
- [27] Viladkar, M.N., Noorzaeei, J. & Godbole, P.N. « *Behaviour of infinite elements in an elasto-plastic domain* », *Computers & structures*, vol. 51, N. 4, pp. 337-342, 1994.
- [28] Weber, B. « *Rational transmitting boundaries for time-domain analysis of dam-reservoir interaction* », D thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, 1994. Diss. 10673.
- [29] Westergaard, H.M. « *Water pressures on dams during earthquakes* », ASCE, Novembre 1931, 1303-1318.
- [30] Wilson, E. « *Three dimensional static and dynamic analysis of structures ; A physical approach with emphasis on earthquake engineering* », Computer and Structures, Inc, 2001.
- [31] Wolf, J.P. « *The scaled boundary finite element method* », John Wiley & Sons, Chichester, England, 2003.
- [32] Wolf, J.P. & Song, C. « *Finite-element modelling of unbounded media* », John Wiley & Sons, Chichester, England, 1996.

- [33] Yun, C.B., Kim, D.K. & Kim, J.M. « *Analytical frequency-dependent infinite elements for soil-structure interaction analysis in two-dimensional medium* », *Engineering Structures* 22 (2000) 258-271.
- [34] Zienkiewicz, O.M. & Taylor, R.L. « *The finite element method, volume 1 :The Basis* », Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.
- [35] Zienkiewicz, O.M. & Taylor, R.L. « *The finite element method, volume 3 :Fluid dynamics* », Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.

Annexe A : Intégration numérique

A.1 Intégration de Gauss–Legendre

La formule de Gauss–Legendre est donnée par :

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n w_i f(a_i) \quad (\text{A.1})$$

Les abscisses et les poids d'intégration numérique de Gauss–Legendre sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau A.1 : Abscisses et poids d'intégration numérique de Gauss-Legendre.

Nombre i	Abscisse $\pm a_i$	Poids w_i
Ordre $n = 1$		
1	0.0000000000000000	2.0000000000000000
Ordre $n = 2$		
1	0.577350269189627	1.0000000000000000
Ordre $n = 3$		
1	0.0000000000000000	0.8888888888888889
2	0.774596669241483	0.5555555555555555
Ordre $n = 4$		
1	0.339981043584856	0.652145154862546
2	0.861136311594053	0.347854845137454

A.1 Intégration de Gauss–Laguerre

La formule de Gauss–Laguerre est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx \cong \sum_{i=1}^n w_i f(a_i) \quad (\text{A.2})$$

Les abscisses et les poids d'intégration numérique Gauss–Laguerre sont donnés dans le tableau A.2 :

Tableau A.2 : Abscisses et poids d'intégration numérique de Gauss-Laguerre.

Nombre i	Abscisse $\pm a_i$	Poids w_i
Ordre $n = 1$		
1	0.100000000000000 E+01	0.100000000000000 E+01
Ordre $n = 2$		
1	0.585786437626904 E+00	0.853553390593273 E+00
2	0.341421356237309 E+01	0.146446609406726 E+00
Ordre $n = 3$		
1	0.415774556783479 E+00	0.711093009929173 E+00
2	0.229428036027904 E+01	0.278517733569240 E+00
3	0.628994508293747 E+01	0.103892565015861 E-01
Ordre $n = 4$		
1	0.322547689619392 E+00	0.603154104341633 E+00
2	0.174576110115834 E+01	0.357418692437799 E+00
3	0.423662029692113 E+01	0.388879085150054 E-01
4	0.939507091230113 E+01	0.539294705561327 E-03

Annexe B : Méthodes de résolution

Considérons le système d'équations différentielles suivant :

$$[K]\{U\} + [C]\{\dot{U}\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F(t)\} \quad (B.1)$$

Les méthodes de résolution du système (B.1) dans le domaine temporel sont de deux types : l'intégration directe pas à pas, et de superpositions modale.

B.1 Méthode de l'intégration directe pas à pas

La technique employée est la méthode d'accélération moyenne constante qui soutient que l'accélération relative de chaque degré de liberté est constant durant un laps de temps Δt (figure B.1).

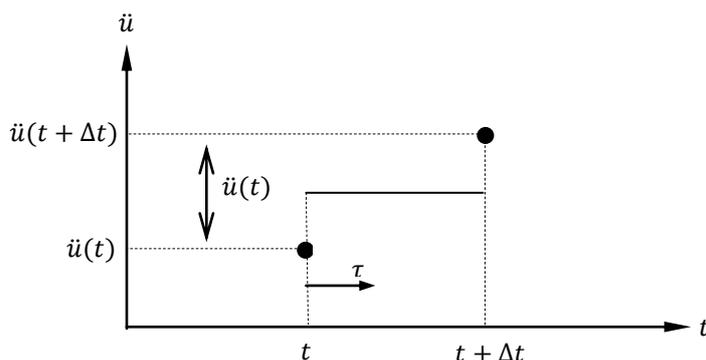


Figure B.1 : Hypothèse de l'accélération moyenne constante.

L'accélération relative pendant un pas de temps, s'écrit comme suit :

$$\ddot{u}_i(\tau) = \frac{1}{2} [\ddot{u}_i(t) + \ddot{u}_i(t + \Delta t)] = \frac{1}{2} [2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)] \quad (B.2)$$

On obtient la vitesse du degré de liberté i pendant un laps de temps en intégrant l'équation (B.2) :

$$\dot{u}_i(\tau) = \frac{1}{2} [2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)] \tau + \dot{u}_i(t) \quad (B.3)$$

Le déplacement relatif au degré de liberté i pendant un pas de temps à son tour est obtenu par l'intégration (B.3) :

$$u_i(\tau) = \frac{1}{4} [2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)] \tau^2 + \dot{u}_i(t)\tau + u_i(t) \quad (B.4)$$

A la fin du pas de temps $\tau = \Delta t$, l'accélération, la vitesse et le déplacement deviennent :

$$\begin{cases} \ddot{u}_i(t + \Delta t) = \frac{1}{2} [2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)] \\ \dot{u}_i(t + \Delta t) = \frac{1}{2} [2\dot{u}_i(t) + \Delta\dot{u}_i(t)]\Delta t + \dot{u}_i(t) \\ u_i(t + \Delta t) = \frac{1}{4} [2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)] \Delta t^2 + \dot{u}_i(t)\Delta t + u_i(t) \end{cases} \quad (B.5)$$

Les incréments de vitesse et de déplacement durant le pas de temps s'obtiennent :

$$\begin{cases} \Delta\dot{u}_i(t) = \frac{1}{2} [2\dot{u}_i(t) + \Delta\dot{u}_i(t)]\Delta t \\ \Delta u_i(t) = \frac{1}{4} [2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)] \Delta t^2 + \dot{u}_i(t)\Delta t \end{cases} \quad (B.6)$$

La forme incrémentale de l'équation (B.1), s'écrit :

$$[K].\Delta u_i(t) + [C].\Delta\dot{u}_i(t) + [M].\Delta\ddot{u}_i(t) = \Delta F(t) \quad (B.7)$$

En remplaçant les $\Delta\dot{u}_i$ et Δu_i par leurs expressions dans (B.7), on obtient le système linéaire suivant :

$$[M^*].\Delta\ddot{u}_i(t) = \Delta P^*(t) \quad (B.8)$$

Avec :

$$\begin{cases} [M^*] = [M] + \frac{\Delta t}{2} [C] + \frac{\Delta t^2}{4} [K] \\ \Delta P^*(t) = \Delta P(t) - \left[[C]\ddot{u}_i(t)\Delta t + [K] \left(\ddot{u}_i(t) \frac{\Delta t^2}{2} + \dot{u}_i(t)\Delta t \right) \right] \end{cases} \quad (B.9)$$

$\Delta\ddot{u}_i(t)$ est obtenu en résolvant le système (B.8). A la fin du pas de temps :

$$\begin{cases} \ddot{u}_i(t + \Delta t) = \Delta \dot{u}_i(t) + \ddot{u}_i(t) \\ \dot{u}_i(t + \Delta t) = \Delta u_i(t) + \dot{u}_i(t) \\ u_i(t + \Delta t) = \Delta u_i(t) + u_i(t) \end{cases} \quad (B.10)$$

B.2 Méthode de superposition modale

La stratégie de base de l'analyse modale consiste à introduire une transformation linéaire des variables, en utilisant la matrice modale $[\Phi]$. Cette transformation convertit les équations différentielles des coordonnées géométriques en un nouveau système de coordonnées normales ou principales.

$$\{U\} = [\Phi]\{Y\} \quad (B.11)$$

U et Y sont respectivement les vecteurs de coordonnées géométriques et de coordonnées normales, et Φ la matrice modale qui permet de passer des coordonnées normales aux coordonnées géométriques.

Pour le découplage des équations, en remplaçant l'équation (B.11) dans (B.1) :

$$[K][\Phi]\{Y\} + [C][\Phi]\{\dot{Y}\} + [M][\Phi]\{\ddot{Y}\} = \{F(t)\} \quad (B.12)$$

En prémultipliant l'équation (B.12) par la transformation d'un mode de vibration particulier Φ_i , on obtient :

$$\langle \Phi_i \rangle [K][\Phi]\{Y\} + \langle \Phi_i \rangle [C][\Phi]\{\dot{Y}\} + \langle \Phi_i \rangle [M][\Phi]\{\ddot{Y}\} = \langle \Phi_i \rangle \{F(t)\} \quad (B.13)$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes de vibration, pour $i \neq j$:

$$\begin{cases} \langle \Phi_i \rangle [K]\{\Phi_j\} = 0 \\ \langle \Phi_i \rangle [C]\{\Phi_j\} = 0 \\ \langle \Phi_i \rangle [M]\{\Phi_j\} = 0 \end{cases} \quad (B.14)$$

Alors une seule relation en y_i de l'équation (B.13) demeure :

$$K_i y_i + C_i \dot{y}_i + M_i \ddot{y}_i = F_i(t) \quad (B.15)$$

Avec :

$$\begin{cases} K_i = \langle \Phi_i \rangle [K] \{ \Phi_i \} \\ C_i = \langle \Phi_i \rangle [C] \{ \Phi_i \} \\ M_i = \langle \Phi_i \rangle [M] \{ \Phi_i \} \\ F_i(t) = \langle \Phi_i \rangle \{ F(t) \} \end{cases} \quad (B.16)$$

Les expressions K_i , C_i , M_i et F_i représentent respectivement rigidité, amortissement, masse et force généralisées du mode de vibration i .

En divisant l'équation (B.15) par M_i , on obtient :

$$\omega_i^2 y_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \ddot{y}_i = \frac{F_i(t)}{M_i} \quad (B.17)$$

Avec :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}} \quad ; \quad \xi_i = \frac{C_i}{2\omega_i M_i} \quad (B.18)$$

ω_i et ξ_i désignent respectivement la pulsation propre et le facteur d'amortissement du mode de vibration i . La solution explicite de l'équation (B.17) s'obtient par l'intégrale de Duhamel :

$$y_i(t) = \frac{1}{\omega_i M_i} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_{Di} (t-\tau)) d\tau \quad (B.19)$$

ω_{Di} la pulsation des vibrations amorties du mode i et qui est donnée par :

$$\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (B.20)$$

Après avoir trouvé la solution de chacune des coordonnées principales y_i , on détermine la réponse de chaque degré de liberté en utilisant la transformation de l'équation (B.11). La réponse géométrique d'un degré de liberté i particulier $u_i(t)$ s'obtient par :

$$u_i = \sum_{j=1}^n \Phi_j^i y_j \quad (B.21)$$

avec Φ_j^i le degré de liberté i du mode j .