

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Bejaia
Faculté de la Technologie
Département de Génie Civil

Mémoire

Pour obtenir le titre de Magistère en Génie Civil

Option : Matériaux et Structures

Présenté par

RAMDANI Lyes

Thème

Investigation Numérique des Effets d'Interaction
Fluide-Sol-Structure
sur la Réponse Sismique des Réservoirs de Stockage

Soutenu le 10 05 2009 devant le jury composé de :

Mr MAZA	Mustapha	Maître de conférences	Univ de Bejaia	Président
Mr TAHAKOURT	Abdelkader	Professeur	Univ de Bejaia	Rapporteur
Mr KADRI	Mohamed	Maître de conférences	Univ de Boumerdes	Examineur
Mr CHERRARED	Merzouk	Maître de conférences	Univ de Boumerdes	Examineur
Mr SEGHIR	Abdelghani	Maître assistant A	Univ de Bejaia	Invité

*A ma famille
A tous mes proches et amis*

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au professeur *Tahakourt A. Kader*, sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Pour ses précieux conseils, son aide scientifique, sa patience, qu'il en soit remercié.

Je tiens à exprimer tout particulièrement ma gratitude à Monsieur *Seghir A. Ghani*, à qui je dois ma formation. Ses précieux conseils et sa grande compétence ont largement orienté les axes de recherche de ce mémoire. Son soutien et sa confiance m'ont donné beaucoup d'enthousiasme au travail.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur *Maza Mustapha* qui a accepté la présidence de ce Jury.

Je remercie vivement Messieurs *Kadri Mohamed* et *Cherrared Merzouk* d'avoir accepté de juger ce travail en me faisant l'honneur de le rapporter.

Enfin, je voudrais remercier tous ceux qui m'ont côtoyé de près ou de loin durant ces deux années, en particulier mes amis les plus proches.

Résumé

L'objet de ce travail est l'étude de la réponse sismique des réservoirs de stockage rectangulaires et cylindriques, avec la prise en compte des effets d'interaction fluide-sol-structure et du ballonnement de la surface libre. L'étude se base sur un modèle d'éléments finis à deux et à trois dimensions développé sous MATLAB.

Les forces d'interaction dynamiques liant les deux sous systèmes réservoir - liquide sont prises en compte en imposant une condition d'équilibre entre les accélérations et les pressions à l'interface fluide-structure et celles liant les deux sous systèmes réservoir - sol de fondation sont prises en compte en respectant la continuité des déplacements aux nœuds de contact sol-structure.

Mots-clés : interaction fluide-structure, interaction sol-structure, interaction fluide-sol-structure, pression hydrodynamique, réservoirs rectangulaires et cylindriques, ballonnement, méthode des éléments finis 2D et 3D, technique de symétrisation.

The purpose of this work is to study the seismic response of storage tanks cylindrical and rectangular, with the taking into account the effects of fluid-soil-structure and the sloshing of the free surface. The study is based on a finite element model in two and three dimensions developed in MATLAB. The forces of dynamic interaction between the two subsystems tank - liquid are taken into account by imposing a condition of balance between acceleration and pressure in the fluid-structure interface and linking the two tank system - the foundation soil are taken into account while respecting the continuity of displacements at nodes contact soil-structure.

Keywords : fluid-structure interaction, soil-structure interaction, fluid-soil-structure, hydrodynamic pressure, rectangular and cylindrical tanks, sloshing, finite element method 2D and 3D technical symmetrization.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Formulation et modélisation du problème	4
1.1 introduction	4
1.2 Description du système	5
1.3 Modélisation du réservoir	5
1.3.1 Les conditions aux limites	6
1.3.2 Formulation intégrale	6
1.4 Modélisation du sol de fondation	8
1.4.1 Les conditions aux limites	8
1.4.2 Formulation intégrale	9
1.5 Modélisation du fluide	9
1.5.1 Les conditions aux limites	11
1.5.2 Formulation intégrale	12
2 Discrétisation par éléments finis	13
2.1 Introduction	13
2.2 Discrétisation par éléments finis	14
2.2.1 Discrétisation du réservoir	15
2.2.2 Discrétisation du sol	15
2.2.3 Discrétisation du liquide	15
2.2.4 Expressions des matrices élémentaires	16
2.3 Interaction sol-structure (ISS)	19
2.4 Interaction fluide-structure (IFS)	21
2.5 Interaction fluide-sol-structure (IFSS)	22
2.6 Conclusion	23
3 Analyse dynamique	24
3.1 Introduction	24
3.2 Problèmes des vibrations libres pour le cas des matrices symétriques . .	25
3.3 Problèmes des vibrations libres pour le cas des matrices non symétriques	26
3.3.1 Méthodes de symétrisation pour les problèmes d'interaction fluide- structure	26
3.4 Analyse de la réponse sismique	29
3.4.1 Méthodes d'intégrations directe pas à pas	29

3.4.2	Méthode de l'accélération moyenne constante	29
3.5	Conclusion	31
4	Application au cas d'un réservoir rectangulaire	32
4.1	Introduction	32
4.2	Système étudié	33
4.3	Analyse des vibrations libres	34
4.3.1	Analyse du système couplé fluide-structure	35
4.3.2	Analyse du système couplé fluide-sol-structure	38
4.4	Analyse de la réponse sismique	40
4.4.1	Réponse temporelle	41
4.4.2	Distribution des pressions hydrodynamiques	45
4.4.3	Ballotement de la surface libre	46
4.5	Conclusion	47
5	Application au cas d'un réservoir cylindrique	48
5.1	Introduction	48
5.2	Système étudié	48
5.3	Analyse des vibrations libres	50
5.3.1	Comparaison entre les résultats du programme développé et ABA- QUS	50
5.4	Influence de la hauteur de remplissage sur les périodes propres	51
5.5	Analyse de la réponse sismique	54
5.5.1	Réponse temporelle	54
5.5.2	Distribution des pressions hydrodynamiques	58
5.5.3	Etude des fluctuations de la surface libre	61
5.6	Conclusion	62
	Conclusion générale	63
	Bibliographie	69
	Annexe A. Éléments utilisées	70
	Annexe B. Matrices	73
	Annexe C. points de quadrature de Gauss	75

Table des figures

1.1	Domaine fluide-sol-structure	5
3.1	Hypothèse de la méthode de l'accélération moyenne constante	30
4.1	Système fluide-sol-structure	33
4.2	Maillage du système fluide-sol-structure	33
4.3	Accélération sismique du séisme de l'Impérial Valley d'El-Centro	41
4.4	Déplacement au nœud n_{c1} avec IFS	42
4.5	Déplacement au nœud n_{c1} avec IFSS	42
4.6	Accélération au nœud n_{c1} avec IFS	43
4.7	Accélération au nœud n_{c1} avec IFSS	43
4.8	Pression au nœud n_{c2} n_{c3} avec IFS	44
4.9	Pression au nœud n_{c2} et n_{c3} avec IFSS	44
4.10	Coefficient de pression hydrodynamique avec IFS	45
4.11	Coefficient de pression hydrodynamique avec IFSS	45
4.12	Ballotement de la surface libre avec IFS	46
4.13	Ballotement de la surface libre avec IFSS	46
5.1	Système fluide-sol-structure	49
5.2	Maillage du système fluide-sol-structure	49
5.3	Déplacement au nœud n_{c1} avec IFS	55
5.4	Déplacement au nœud n_{c1} avec IFSS	55
5.5	Accélération au nœud n_{c1} avec IFS	56
5.6	Accélération au nœud n_{c1} avec IFSS	56
5.7	Pression au nœud n_{c2} n_{c3} avec IFS	57
5.8	Pression au nœud n_{c2} et n_{c3} avec IFSS	57
5.9	Coefficient de pression hydrodynamique avec IFS	59
5.10	Coefficient de pression hydrodynamique avec IFSS	59
5.11	Influence de l'interaction sol-structure sur la distribution des pressions .	60
5.12	Distribution des pressions à la base en fonction du périmètre	60
5.13	Fluctuations de la surface libre sans ISS	61
5.14	Fluctuations de la surface libre avec ISS	62

Liste des tableaux

4.1	Caractéristiques mécaniques	34
4.2	Caractéristiques géométriques	34
4.3	Périodes propres calculées par le programme développé, cas d'un fluide incompressible avec IFS	35
4.4	Périodes propres calculées par le logiciel ABAQUS, cas d'un fluide incompressible avec IFS	36
4.5	Périodes propres calculées par le programme développé, cas d'un fluide compressible sans ballottement avec IFS	36
4.6	Périodes propres calculées par le logiciel ABAQUS, cas d'un fluide compressible sans ballottement avec IFS	37
4.7	Périodes propres calculées par le programme développé, cas d'un fluide compressible avec ballottement et IFS	37
4.8	Périodes propres calculées par la formule de Housner, cas d'un fluide compressible avec ballottement et IFS	37
4.9	Périodes propres calculées par le programme développé, cas d'un fluide incompressible avec IFSS	38
4.10	périodes propres calculées par le logiciel ABAQUS, cas d'un fluide incompressible avec IFSS	38
4.11	Périodes propres calculées par le programme développé, cas d'un fluide compressible sans ballottement avec IFSS	39
4.12	Périodes propres calculées par le logiciel ABAQUS, cas d'un fluide compressible sans ballottement avec IFSS	39
4.13	Périodes propres calculées par le programme développé, cas d'un fluide compressible avec ballottement et IFSS	39
4.14	Périodes propres calculées par la formule de Housner, cas d'un fluide compressible avec ballottement et IFSS	40
5.1	Caractéristiques mécaniques	50
5.2	Caractéristiques géométriques	50
5.3	Périodes propres calculées par le programme développé	51
5.4	Périodes propres calculées par le programme développé	51
5.5	Périodes propres calculées par le programme développé, cas d'un fluide incompressible avec IFS	52
5.6	Périodes propres calculées par le programme développé, cas d'un fluide incompressible avec IFS	52

5.7	Périodes propres calculées par le programme développé, cas d'un fluide incompressible avec IFS	53
5.8	Périodes propres calculées par le programme développé, cas d'un fluide incompressible avec IFS	53

Notations

Ω	: domaine.
Γ	: contour.
∇	: opérateur gradient.
S	: opérateur différentiel.
∂	: opérateur de dérivée partielle.
δ	: fonction de Dirac.
σ	: tenseur des contraintes.
ε	: tenseur des déformations.
ρ	: masse volumique.
n	: vecteur normal.
g	: Accélération due à la pesanteur.
f	: vecteur des forces de volume.
v	: vitesse du fluide.
k	: module de compressibilité volumique du fluide.
c	: célérité des ondes de compression dans le fluide.
p	: pressions hydrodynamiques.
P	: vecteur des pressions hydrodynamiques.
u	: déplacement.
U	: vecteur déplacement.
h	: hauteur du ballottement.
ϕ	: vecteur propre.
ω	: valeur propre.
T	: période propre.
ξ	: taux d'amortissement critique.
D	: matrice d'élasticité.
M	: matrice masse.
K	: matrice rigidité.
C	: matrice amortissement.
N	: fonctions de forme.
Q	: matrice d'interaction fluide-structure.

Introduction générale

Les réservoirs de stockages sont utilisés dans plusieurs domaines : l'industrie du pétrole, les silos, l'alimentation en eau potable, etc. Le développement industriel et l'explosion démographique à l'échelle mondiale ont fait en sorte que le nombre et la taille de ces ouvrages deviennent de plus en plus importants, conduisant à des études de stabilité vis-à-vis des charges statiques et dynamiques de plus en plus approfondies.

La rupture d'un réservoir contenant une matière toxique présente un danger pour la population et l'environnement sans compter les préjudices économiques induits en cas de perte du liquide ou l'endommagement de l'ouvrage.

Beaucoup d'études portant sur le comportement dynamique des réservoirs de stockage font l'objet de plusieurs travaux de recherche ayant pour but l'amélioration de leurs conceptions et leurs résistances vis-à-vis de fortes excitations sismiques [49, 32, 36, 52, 19]

Malgré le fait que des solutions approchées, pour certains cas de la réponse sismique des réservoirs soient actuellement connues [26, 18, 27, 30, 24], le traitement des cas plus complexes reste toujours incomplet même si des progrès ont été réalisés y compris dans le domaine non linéaire. La complexité de l'analyse sismique des réservoirs se pose dans l'interaction fluide-sol-structure qui s'intéresse au comportement d'un système constitué par trois entités mécaniques considérées comme distinctes. L'évolution de chacune des trois entités dépendent les unes des autres, sans oublier les effets du balancement de la surface libre.

Les problèmes d'interaction fluide structure se sont posés très tôt aux ingénieurs "construction des ponts, barrages, bateaux, avions, réservoirs,...etc.", Au début, les outils de calcul ne permettaient qu'une modélisation simplifiée en considérant le fluide comme incompressible et la structure infiniment rigide (par exemple : utilisation du concept de masses ajoutées "added mass"). Par la suite, avec le développement des méthodes de calcul numérique en particulier la méthode des éléments finis et l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs des algorithmes de couplage entre l'écoulement du fluide et le mouvement de la structure se sont très vite développés. Actuellement, la prise en compte des effets d'interaction fluide-structure pour le cas d'un fluide compressible conduit à plusieurs formulations variationnelles : la formulation (u, p) qui consiste à prendre comme variables nodales le champ de déplacement u dans la structure et le

champ de pression p régnant dans le domaine fluide [32, 36, 19, 11, 51, 50, 48] , cette formulation conduit après discrétisation par éléments finis à des matrices globales non symétriques, ce qui pose problème pour l'extraction des valeurs et des modes propres, plusieurs techniques de symétrisation existent dans la littérature [15, 65, 53, 45]. La deuxième formulation qu'on peut trouver [66, 65, 53] est la formulation symétrique (u, p, φ) , cette fois ci, la description du fluide est assurée par le champ de pression hydrodynamique p et le potentiel des déplacements φ , la présence d'un deuxième degré de liberté dans le domaine fluide rend la taille des matrices plus grandes, par contre, les matrices découlant de cette formulation sont symétriques. On trouve aussi dans la littérature [53] d'autres formulations en utilisant pour la modélisation du fluide le potentiel des déplacements φ ou un potentiel des vitesses ϑ au lieu de la pression p .

Concernant l'interaction sol-structure, pour les structures posées sur des fondations rigides et sur des sols homogènes, l'effet d'interaction sol-structure peut être résolu avec la méthode des sous-structures [46] par laquelle les réponses de la structure déformable et celle du sol de fondation sont exprimées d'abord séparément, ensuite la réponse globale est obtenue en appliquant les conditions d'équilibre et de compatibilités imposées à l'interface sol-structure. Par contre, pour le cas des sols flexibles, la superposition des solutions par sous-structures n'est pas toujours valable à cause des effets d'interactions sol-structure plus importants induisant des comportements non linéaires de la structure ou du sol. Dans ce cas, l'utilisation de la méthode globale qui consiste à résoudre en une seule étape l'équation dynamique du système couplé est plus préconisée. Généralement la technique de résolution est basée sur la méthode des éléments finis qui présente la plus grande flexibilité, et qui permet en outre, la prise en compte des phénomènes non linéaires, tel le comportement anélastique des matériaux, le décollement ou le glissement des fondations. Seulement, la difficulté de la résolution par éléments finis des problèmes dynamiques d'interaction sol-structure réside dans le traitement des conditions aux limites de troncutures, encore une fois, plusieurs approches ont été proposées pour annihiler ce problème : utilisation d'un couplage éléments finis-éléments infinis [8, 2, 33, 55, 59, 64], imposer des frontières absorbantes sur la limite de troncuture [61, 41, 39] ou bien, utilisation de la technique de couplage éléments finis-éléments de frontières [43, 34].

Le but du présent travail est le développement d'un programme de calcul par éléments finis, à deux et à trois dimensions sous MATLAB, permettant la détermination de la réponse dynamique des réservoirs de stockages, avec la prise en compte des effets d'interaction, fluide-sol-structure et du ballonnement de la surface libre. Pour le cas bidimensionnel, l'étude se base sur un modèle d'éléments finis en déformation plane obtenu par la discrétisation en éléments quadrilatéraux isoparamétriques linéaires du réservoir, du sol, ainsi que du liquide. Concernant le model tridimensionnel, le réservoir de forme cylindrique est modélisé par des éléments coques minces, le liquide ainsi qu'une partie du sol sont modélisés par des éléments hexaédriques isoparamétriques linéaires. L'effet d'interaction fluide-structure est pris en compte en imposant une condition d'équilibre entre les accélérations du réservoir et les pressions du liquide à l'interface fluide-structure en utilisant la formulation non symétrique (u, p) . Le couplage

sol-structure est assuré par la continuité des déplacements à l'interface sol-structure en employant la méthode globale.

Le manuscrit est composé de cinq chapitres avec la présente introduction en premier lieu et une conclusion générale des principaux résultats en dernière partie. Le premier chapitre est consacré à la formulation mathématique du problème d'interaction fluide-sol-structure pour le cas d'un réservoir de forme quelconque. Le second est destiné à la discrétisation par éléments finis des équations intégrales présentées dans le premier chapitre, ensuite un autre consacré à la présentation de quelques méthodes de symétrisation du problème d'interaction fluide-structure résultant de la formulation non symétrique (u, p) ainsi que la présentation de la méthode d'intégration directe pas à pas utilisée dans les programmes développés pour la résolution des équations du mouvement. Finalement, les deux derniers chapitres contiennent respectivement des applications pour le cas d'un réservoir rectangulaire à deux dimensions, et cylindrique à trois dimensions.

Chapitre 1

Formulation et modélisation du problème

1.1 introduction

Souvent, les études réalisées dans le domaine de la recherche présentent des phénomènes physiques réels. Le comportement de ces systèmes continus est généralement représenté par des équations aux dérivées partielles, associées à des conditions aux limites sur le domaine considéré. Dans la plus part des cas, les solutions analytiques de ces systèmes d'équations n'existent pas. Pour cela, il faudrait remplacer le système continu par un autre discret équivalent, dont le comportement est décrit par des équations algébriques qu'on peut résoudre par des méthodes numériques. Pour obtenir de telles équations algébriques, il existe deux procédés : le premier est la méthode des résidus pondérés [66, 9, 35], le second est la détermination de fonctionnelles variationnelles que l'on cherche à rendre stationnaires [35, 58].

La formulation intégrale présentée dans ce présent chapitre s'applique pour le cas des réservoirs à deux et à trois dimensions, elle est obtenue en appliquant la méthode des résidus pondérés de type *Galerkin* aux équations d'équilibre dynamique des différents systèmes fluide, sol et réservoir. Par la suite, les forces d'interaction dynamiques liant les deux sous systèmes sol-réservoir et fluide-réservoir sont introduites en discrétisant les conditions d'équilibre des trois domaines considérés.

1.2 Description du système

La figure (1.1), montre les différents domaines fluide-sol-réservoir, ainsi que les notations utilisées dans la formulation du problème. La structure du réservoir Ω_r , de forme quelconque à deux ou à trois dimensions est ancrée dans la partie du sol modélisée Ω_s sur la frontière Γ_c , la frontière du sol Γ_s est libre et Σ_s encastrée. Le réservoir renferme un domaine liquide Ω_L avec une surface Γ_{sur} considérée libre, l'interaction fluide-structure se fait sur la frontière Γ_i .

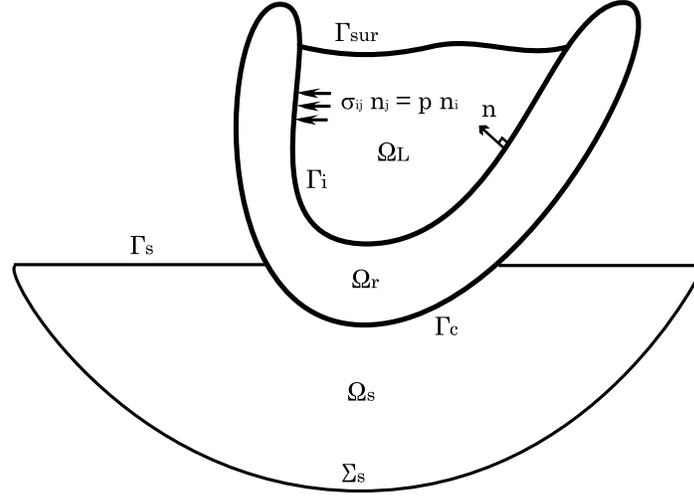


FIG. 1.1 – Domaine fluide-sol-structure

- Ω_r et Σ_r : Réservoir et son contour à l'équilibre.
- Ω_s et Σ_s : Domaine de la partie du sol modélisé et son contour à l'équilibre.
- Ω_L : Domaine liquide.
- Γ_{sur} : Surface libre du liquide.
- Γ_i : Interface fluide-structure.
- Γ_c : Interface sol-structure.
- Γ_s : Surface libre du sol.
- p : Pression hydrodynamique régnant dans le domaine fluide.
- n_i : La i^{eme} composante de la normale unitaire \vec{n} .
- σ_{ij}^r : Composantes du tenseur des contraintes dans le domaine du réservoir.

1.3 Modélisation du réservoir

Le comportement du matériau constituant la structure du réservoir est supposé élastique linéaire et isotrope. L'équation du mouvement de Cauchy d'une brique élémentaire appartenant au corps du réservoir est donnée par :

$$\sigma_{ij}^r + f_i^r = \rho_r \ddot{u}_i^r \quad (1.1)$$

f_i^r : représente le vecteur des forces de volume dans la structure du réservoir.

1.3.1 Les conditions aux limites

Interface fluide-structure

La condition d'équilibre dynamique entre les contraintes dans le corps du réservoir et le chargement, dû à la pression hydrodynamique au contact fluide-structure, est :

$$\sigma_{ij}^r n_j = p n_i \quad | \Gamma_i \quad (1.2)$$

Interface sol-réservoir

Les effets d'interaction sol-structure sont pris en compte en considérant la continuité des déplacements entre le sol de fondation et le réservoir à l'interface sol-structure :

$$u_i = u_i^r + u_i^s \quad | \Gamma_c \quad (1.3)$$

Sur le reste du contour

Sur le reste du contour, le réservoir est libre, donc les contraintes sont nulles.

$$\sigma_{ij}^r n_j = 0 \quad | \Sigma_r - \Gamma_i - \Gamma_c \quad (1.4)$$

u_i^r , \ddot{u}_i^r : Désignent le déplacement et l'accélération dans la direction i d'un point à l'intérieur du corps de la structure.

1.3.2 Formulation intégrale

On peut montrer [66, 65, 35, 9] que l'application de la formulation variationnelle forte de type Galerkin aux équations d'équilibre dynamique (1.1), en prenant $w = \delta u^r$ comme fonction de pondération sur les déplacements, conduit à l'expression suivante, qui est analogue à celle des travaux virtuels [47] :

$$\int_{\Omega_r} \delta u_i^r (\sigma_{ij,j}^r + f_i^r - \rho_r \ddot{u}_i^r) d\Omega = 0 \quad (1.5)$$

Afin d'obtenir la formulation faible, nous intégrons par partie le terme $\int_{\Omega_r} \delta u_i^r \sigma_{ij,j}^r d\Omega$ en utilisant le théorème de *Green* :

$$\int_{\Omega_r} \delta u_i^r \sigma_{ij,j}^r d\Omega = - \int_{\Omega_r} \delta u_{i,j}^r \sigma_{ij}^r d\Omega + \int_{\Sigma_r} \delta u_i^r \sigma_{ij}^r n_j d\Gamma \quad (1.6)$$

d'autre part :

$$\int_{\Omega_r} \delta u_{i,j}^r \sigma_{ij}^r d\Omega = \int_{\Omega_r} \delta \varepsilon_{ij}^r \sigma_{ij}^r d\Omega \quad (1.7)$$

ε_{ij}^r : Représente le tenseur de déformation dans le corps du réservoir. Il faut souligner que dans le cas où le domaine Ω est un espace à trois dimensions, les indices Σ et Γ représentent des surfaces.

En remplaçant les deux équations (1.6) et (1.7) dans (1.5), on obtient :

$$- \int_{\Omega_r} \delta \varepsilon_{ij}^r \sigma_{ij}^r d\Omega + \int_{\Sigma_r} \delta u_i^r \sigma_{ij}^r n_j d\Gamma + \int_{\Omega_r} \delta u_i^r f_i^r d\Omega - \int_{\Omega_r} \delta u_i^r \rho_r \ddot{u}_i^r d\Omega \quad (1.8)$$

Remarque

Vus leurs symétries, dans ce qui suit, les expressions intervenant dans les équations seront écrites en notation vectorielle pour alléger les expressions, aussi les indices utilisés pour distinguer le sol et le réservoir seront écrits sur la partie inférieure des différentes appellations utilisées, les relations suivantes sont ainsi à noter :

Relation contraintes-déformations

Pour un matériau élastique linéaire obéissant à la loi de *Hook*, la relation liant les déformations ε aux contraintes σ s'énonce sous la forme suivante [21] :

$$\sigma_r = D_r \varepsilon_r \quad (1.9)$$

D_r : est appelée matrice d'élasticité.

Relation déformations-déplacements

$$\varepsilon_r = S_r u_r \quad (1.10)$$

S_r : Opérateur différentiel qui dépend de la classe du problème.

L'application des conditions aux limites de (1.2) à (1.4) à l'équation d'équilibre dynamique (1.8) donne dans le cas du réservoir :

$$- \int_{\Omega_r} S_r \delta u_r D_r S_r u_r d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta u_r p n d\Gamma + \int_{\Omega_r} \delta u_r f_r d\Omega - \int_{\Omega_r} \delta u_r \rho_r \ddot{u}_r d\Omega \quad (1.11)$$

1.4 Modélisation du sol de fondation

La modélisation du comportement des sols constitue la tâche la plus difficile dans le domaine de la géotechnique. Plusieurs schémas de comportement existent dans la littérature [29]. En effet, les schémas du comportement élastique linéaire (isotrope ou anisotrope) ou élastoplastique parfait (élasticité linéaire associée à un critère de plasticité et à un potentiel plastique) sont les plus simples et les plus couramment utilisés par les ingénieurs géotechniciens. Les autres schémas sont de type incrémental et non linéaire comme par exemple les modèles élastiques non linéaires ou les modèles d'élastoplasticité avec écrouissage. La mise au point d'un programme de calcul par éléments finis traitant ces modèles de comportement requiert de bonnes connaissances côté numérique et dans le domaine non linéaire et aussi énormément de temps. Pour toutes ces raisons, le comportement du sol traité dans le cadre de ce travail est supposé élastique linéaire et isotrope, l'équation du mouvement de Cauchy s'écrit :

$$\sigma_s + f_s = \rho_s \ddot{u}_i \quad (1.12)$$

f_s : représente le vecteur des forces de volume dans le sol.

1.4.1 Les conditions aux limites

Interface sol-réservoir

L'interaction sol structure est prise en compte par la continuité des déplacements à l'interface sol-structure [62], donc :

$$u = u_s + u_r \quad | \Gamma_c \quad (1.13)$$

Sur la frontière $\Sigma_s - \Gamma_s - \Gamma_c$

La frontière $\Sigma_s - \Gamma_s - \Gamma_c$ délimite un domaine physiquement non borné. Pour pouvoir représenter correctement les choses, comme il a été mentionné dans l'introduction, il existe plusieurs techniques permettant de prendre en compte la partie infinie du sol (ou bien du fluide dans le cas des barrages) : utilisation d'un couplage éléments-finis éléments-infinis, tronquer la partie du sol modélisée à une distance donnée et de remplacer le domaine infini en utilisant les limites de troncatures, une troisième solution est l'utilisation de la technique des équations intégrales aux frontières qui sont particulièrement attirantes pour ce type du problème. Dans notre cas, l'influence du domaine infini n'est pas prise en considération, donc la frontière $\Sigma_s - \Gamma_s - \Gamma_c$ sera simplement encadrée :

$$u_s = 0 \quad | \Sigma_s - \Gamma_s - \Gamma_c \quad (1.14)$$

Sur la frontière libre Γ_s

Sur la frontière Γ_s , le sol est libre :

$$\sigma_s n = 0 \quad | \Gamma_s \quad (1.15)$$

1.4.2 Formulation intégrale

Comme pour le cas du réservoir, l'application de la formulation variationnelle forte de type *Galerkin* aux équations d'équilibre dynamique (1.12) en prenant $w = \delta u_s$ comme fonction poids et l'utilisation du théorème de *Green* pour obtenir la formulation faible donne l'expression suivante :

$$- \int_{\Omega_s} \delta \varepsilon_s \sigma_s \, d\Omega + \int_{\Sigma_s} \delta u_s \sigma_s n \, d\Gamma + \int_{\Omega_s} \delta u_s f_s \, d\Omega - \int_{\Omega_s} \delta u_s \rho_s \ddot{u}_s \, d\Omega \quad (1.16)$$

L'hypothèse d'un comportement élastique linéaire et isotrope pour le sol de fondation permet d'écrire :

$$\sigma_s = D_s \varepsilon_s \quad (1.17)$$

$$\varepsilon_s = S_s u_s \quad (1.18)$$

L'application des conditions aux limites de (1.13) à (1.15) pour l'équation (1.16) et la considération des deux expressions précédentes (1.17) et (1.18) donne :

$$- \int_{\Omega_s} S_s \delta u_s D_s S_s u_s \, d\Omega + \int_{\Omega_s} \delta u_s f_s \, d\Omega - \int_{\Omega_s} \delta u_s \rho_s \ddot{u}_s \, d\Omega \quad (1.19)$$

1.5 Modélisation du fluide

C'est à *Navier* et *Stokes* que l'on doit la déduction d'une équation générale pour les mouvements des fluides [10, 16, 67, 4, 25, 56, 22]. Dans le cas d'hypothèse d'un fluide continu, linéairement compressible et non visqueux qui subit des mouvements de petites amplitudes, l'équation de *Navier-Stokes* s'écrit [65, 66] :

$$\rho_L \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla p \quad (1.20)$$

où v est la vitesse du fluide, ρ_L masse volumique du fluide et p représente la pression hydrodynamique. ∇ est l'opérateur gradient.

Pour une formulation $[u, p]^T$, l'équation (1.20) doit être réécrite uniquement en fonction des pressions hydrodynamiques p , en utilisant les deux équations de continuité et d'état donnée respectivement par :

$$\rho_L \nabla^T v = -\frac{\partial \rho_L}{\partial t} \quad (1.21)$$

$$d\rho_L = \frac{\rho_L}{k} dp \quad (1.22)$$

k : Module de compressibilité volumique du liquide.

D'après les équations (1.21) et (1.22), on a :

$$\nabla^T v = -\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.23)$$

L'élimination de v entre les deux équations (1.20) et (1.23) est obtenue par la multiplication de l'équation (1.20) par l'opérateur ∇^T et la dérivation de (1.23) par rapport au temps, on aura alors le système d'équation d'équilibre dynamique gouverné par la pression hydrodynamique p suivant :

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1.24)$$

Où :

$$c = \sqrt{\frac{k}{\rho_L}} \quad (1.25)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, le module de compressibilité volumique k tend vers l'infini. L'équation (1.24) se réduit à l'équation de *Laplace* qui est donnée par l'expression suivante :

$$\nabla^2 p = 0 \quad (1.26)$$

1.5.1 Les conditions aux limites

Interface fluide-structure

Si on considère une liaison parfaite entre les deux milieux liquide et solide à l'interface fluide-réservoir Γ_i , l'équation (1.20) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_L \frac{\partial v_n}{\partial t} = -\rho_L \ddot{u}_n \quad | \Gamma_i \quad (1.27)$$

\ddot{u}_n : projection des accélérations des particules solides sur les normales n des différentes faces Γ_i .

Surface libre

Sur la surface libre du fluide Γ_{sur} , la condition la plus simple est de considérer une pression atmosphérique nulle et de négliger les ondes de surface.

$$p = 0 \quad (1.28)$$

Cependant, les variations de pression à l'intérieur du réservoir engendrent des fluctuations de la surface libre. Une idée approximative pour inclure les effets des ondes de surface consiste à considérer une surface moyenne pour laquelle toute élévation ou abaissement de la surface actuelle d'une hauteur h se traduit par une variation de pression pouvant être isostatique [66] :

$$p = \rho_L g h \quad (1.29)$$

Donc, l'application de l'équation dynamique (1.20) pour ce cas permet d'écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_L \ddot{h} \quad (1.30)$$

En considérant maintenant l'équation (1.29), avec deux dérivations par rapport au temps, cette condition devient :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{g} \ddot{p} \quad | \Gamma_{sur} \quad (1.31)$$

g : Accélération due à la pesanteur.

Cette condition est connue sous le nom de condition d'ondes de surface linéarisée.

1.5.2 Formulation intégrale

En appliquant toujours, la formulation variationnelle forte de type Galerkin à l'équation dynamique (1.24) en prenant δp comme fonction de perturbation sur la pression hydrodynamique p , on trouve :

$$\int_{\Omega_L} \delta p \nabla^2 p \, d\Omega + \int_{\Omega_L} \delta p \frac{1}{c^2} \ddot{p} \, d\Omega \quad (1.32)$$

La formulation faible associée à l'équation (1.32) est obtenue en utilisant l'intégration par partie :

$$\int_{\Omega_L} \delta \nabla p \nabla p \, d\Omega + \int_{\Gamma_L} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\Omega_L} \delta p \frac{1}{c^2} \ddot{p} \, d\Omega = 0 \quad (1.33)$$

En appliquant les conditions aux limites on aura :

$$\int_{\Omega_L} \nabla \delta p \nabla p \, d\Omega + \int_{\Omega_L} \delta p \frac{1}{c^2} \ddot{p} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta p \rho_L \ddot{u}_r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{sur}} \delta p \frac{1}{g} \ddot{p} \, d\Gamma = 0 \quad (1.34)$$

Chapitre 2

Discrétisation par éléments finis

2.1 Introduction

La résolution des formes intégrales présentées dans le chapitre précédent peut se faire en utilisant des méthodes de résolutions numériques : appelées méthodes de discrétisation. La méthode de discrétisation la plus utilisée en génie civil est la méthode des éléments finis. La méthode des différences finies et la méthode des éléments de frontière [7, 9, 20], sont aussi d'emploi courant.

La méthode des éléments finis est apparue vers 1955 en même temps que les ordinateurs puissants ; d'abord appliquée aux calculs des structures et solides. Quand on a réalisé qu'elle représentait une méthode générale de résolution numérique des problèmes aux limites, cette méthode a pris une extension fantastique. Toute modélisation conduit à des équations différentielles avec des conditions aux limites, lui sont accessible : structure solide, chaleur, fluide, électromagnétisme, ... etc. Que ce soit des problèmes statiques ou dynamiques, linéaires ou non linéaires, isotropes ou non isotropes. Une présentation de la méthode se trouve dans les références [65, 66, 17, 35, 38, 31, 40, 54, 68, 5].

Le but de ce présent chapitre est de montrer comment appliquer la méthode des éléments finis pour la résolution des systèmes d'équations présentés dans le chapitre précédent, Les expressions des matrices élémentaires et celles régissant le phénomène physique d'interaction fluide-structure et fluide-sol-structure seront exposées.

2.2 Discrétisation par éléments finis

Le domaine géométrique étudié est subdivisé en un nombre finis d'éléments de forme géométrique simple, les règles de discrétisation sont données en détail dans les références [35, 65, 66, 17, 47]. La discrétisation des formes intégrales est acquise en utilisant une approximation nodale des différentes variables intervenant dans la formulation du problème, à savoir le champ des déplacements dans le réservoir et le sol de fondation, ainsi que les pressions hydrodynamiques dans le liquide. L'expression des trois interpolations s'écrit de la manière suivante :

$$u_r \approx N_r U_r \quad (2.1)$$

$$u_s \approx N_s U_s \quad (2.2)$$

$$p \approx N_p P \quad (2.3)$$

N_r , N_s et N_p : représentent respectivement les fonctions de forme utilisées pour la discrétisation du réservoir, du sol de fondation ainsi que le liquide stocké.

Pour l'opérateur des perturbations des champs continus :

$$\delta(u_r) \approx \delta(N_r U_r) = \delta U_r^T N_r^T \quad (2.4)$$

$$\delta(u_s) \approx \delta(N_s U_s) = \delta U_s^T N_s^T \quad (2.5)$$

$$\delta(p) \approx \delta(N_p P) = \delta P^T N_p^T \quad (2.6)$$

Pour l'opérateur de dérivation des champs continus et des perturbations :

$$\nabla p \approx \nabla N_p P \quad (2.7)$$

$$\nabla \delta p \approx \delta(\nabla N_p P) = \delta P^T \nabla N_p^T \quad (2.8)$$

Les expressions des matrices élémentaires des différents domaines : réservoir, sol et liquide sont obtenues en remplaçant dans les écritures intégrales données respectivement par les équations (1.11), (1.19) et (1.34), les fonctions continues u_r , u_s et p par leurs approximations données par les expressions de (2.1) à (2.8) :

2.2.1 Discrétisation du réservoir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} \delta U_r^T (S_r N_r)^T D_r (S_r N_r) U_r d\Omega + \int_{\Omega_r} \delta U_r^T N_r^T \rho_r N_r \ddot{U}_r d\Omega \\ - \int_{\Gamma_i} \delta U_r^T N_r^T \rho_L N_p n P d\Gamma + \int_{\Omega_r} \delta U_r^T N_r^T f_r d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2.2 Discrétisation du sol

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \delta U_s^T (S_s N_s)^T D_s (S_s N_s) U_s d\Omega + \int_{\Omega_s} \delta U_s^T N_s^T \rho_s N_s \ddot{U}_s d\Omega \\ + \int_{\Omega_s} \delta U_s^T N_s^T f_s d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2.3 Discrétisation du liquide

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \delta P^T \nabla N_p^T \nabla N_p P d\Omega + \int_{\Omega_L} \delta P^T N_p^T \frac{1}{c^2} N_p \ddot{P} d\Omega \\ + \int_{\Gamma_i} \delta P^T N_r^T \rho_L N_r n \ddot{U}_r d\Gamma + \int_{\Gamma_{sur}} \delta P^T N_p^T \frac{1}{g} \ddot{P} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

En éliminant les vecteurs lignes δU_r^T , δU_s^T et δP^T dans les trois équations précédentes et en effectuant quelques arrangements, les expressions (2.9), (2.10) et (2.11) deviennent :

- Cas du réservoir :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega_r} N_r^T \rho_r N_r d\Omega \right) \ddot{U}_r + \left(\int_{\Omega_r} (S_r N_r)^T D_r (S_r N_r) d\Omega \right) U_r \\ - \left(\int_{\Gamma_i} N_r^T \rho_L N_p n d\Gamma \right) P + \int_{\Omega_r} N_r^T f_r d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

- Cas du sol :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_s} N_s^T \rho_s N_s d\Omega \right) \ddot{U}_s + \left(\int_{\Omega_s} (S_s N_s)^T D_s (S_s N_s) d\Omega \right) U_s \\ & + \int_{\Omega_s} N_s^T f_s d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

- Cas du liquide :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_L} N_p^T \frac{1}{c^2} N_p d\Omega + \int_{\Gamma_{sur}} N_p^T \frac{1}{g} d\Gamma \right) \ddot{P} + \left(\int_{\Omega_L} \nabla N_p^T \nabla N_p d\Omega \right) P \\ & + \left(\int_{\Gamma_i} N_p^T \rho_L N_r n d\Gamma \right) \ddot{U}_r = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.2.4 Expressions des matrices élémentaires

Le but visé dans ce présent travail est l'étude de la réponse sismique. Pour une excitation à la base, les deux termes $\int_{\Omega_r} N_r^T f_r d\Omega$ et $\int_{\Omega_s} N_s^T f_s d\Omega$, qui correspondent respectivement aux forces de volume dans le corps du réservoir et du sol de fondation, ne sont pas pris en compte. Et si on introduit les forces d'amortissement d'origine visqueuse, on peut écrire d'après les équations (2.12) , (2.13) et (2.14) :

$$M_r \ddot{U}_r + C_r \dot{U}_r + K_r U_r = QP \quad (2.15)$$

$$M_s \ddot{U}_s + C_s \dot{U}_s + K_s U_s = 0 \quad (2.16)$$

$$M_L \ddot{P} + K_L P = -\rho_L Q^T \ddot{U}_r \quad (2.17)$$

M_r , C_r et K_r représentent respectivement les matrices globales masse, amortissement et raideur de la structure du réservoir. Celles utilisées pour la discrétisation du sol de fondation sont notées respectivement par : M_s , C_s et K_s . Pour le domaine liquide M_L et K_L expriment respectivement l'énergie cinétique et potentielle dans le fluide et elles sont analogues aux matrices, masse et rigidité, utilisées pour la modélisation des solides. La matrice Q est la matrice d'interaction fluide-structure, elle couple les accélérations des particules solides du réservoir et les pressions hydrodynamiques régnant dans le domaine liquide à l'interface fluide-structure.

Pour les matrices d'amortissement de la structure et du sol, on utilise l'amortissement de Rayleigh qui exprime la matrice d'amortissement sous forme d'une combinaison linéaire de la matrice masse M et de rigidité K [23, 14, 46].

$$C = \alpha M + \beta K \quad (2.18)$$

α et β sont des coefficients arbitraires satisfaisant les conditions d'orthogonalité qui peuvent être obtenues par l'expression :

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_n} \begin{bmatrix} \omega_1 \omega_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

- ω_1 : Fréquence du premier mode.
- ω_n : Fréquence du mode supérieur.
- ξ : Taux d'amortissement critique.

Finalement, les expressions des différentes matrices élémentaires s'écrivent :

- Cas du réservoir

$$M_r = \int_{\Omega_r} N_r^T \rho_r N_r d\Omega \quad (2.20)$$

L'expression (2.20) représente la matrice masse cohérente. Dans la pratique, on utilise souvent la matrice masse concentrée qui est donnée par :

$$M_r = \int_{\Omega_r} N_r^T \rho_r d\Omega \quad (2.21)$$

$$K_r = \int_{\Omega_r} (S_r N_r)^T D_r (S_r N_r) d\Omega \quad (2.22)$$

On pose :

$$B_r = S_r N_r \quad (2.23)$$

Donc l'équation (2.22) s'écrit :

$$K_r = \int_{\Omega_r} B_r^T D_r B_r d\Omega \quad (2.24)$$

$$C_r = \alpha_r M_r + \beta_r K_r \quad (2.25)$$

- Cas du sol

$$M_s = \int_{\Omega_s} N_s^T \rho_s N_s d\Omega \quad (2.26)$$

sous forme concentrée

$$M_s = \int_{\Omega_s} N_s^T \rho_s d\Omega \quad (2.27)$$

$$K_s = \int_{\Omega_s} B_s^T D_s B_s d\Omega \quad (2.28)$$

avec :

$$B_s = S_s N_s \quad (2.29)$$

$$C_s = \alpha_s M_s + \beta_s K_s \quad (2.30)$$

- Cas du fluide

Pour le liquide, les matrices masse et rigidité équivalentes sont différentes des matrices usuelles utilisées pour les structures. Elles sont données par :

$$M_L = \int_{\Omega_L} N_p^T \frac{1}{c^2} N_L d\Omega + \int_{\Gamma_{sur}} N_p^T \frac{1}{g} N_p d\Gamma \quad (2.31)$$

$$K_L = \int_{\Omega_L} \nabla N_p^T \nabla N_p d\Omega \quad (2.32)$$

Le second terme de la matrice masse du fluide tient compte des effets inertiels dus au ballonnement de la surface libre.

- Expression de la matrice d'interaction Q

$$Q = \int_{\Gamma_i} N_p^T \rho_L N_r \vec{n} d\Gamma \quad (2.33)$$

2.3 Interaction sol-structure (ISS)

Le couplage sol-réservoir est assuré par la continuité des déplacements aux nœuds de contact entre les deux domaines selon la description présentée dans la référence [62]. La formulation du problème est basée sur la notion des déplacements ajoutés "*added motion*" [14] qui est mathématiquement simple, théoriquement correcte, et surtout elle ne pose pas trop de problèmes dans la programmation. Il est à noter que cette formulation est applicable pour les cas d'excitations sismiques à la base.

La géométrie du système est divisée en trois parties : la première notée "r" contient les nœuds du réservoir, la seconde désignée par "c" représente les nœuds communs entre le sol et la structure, la dernière partie notée "s" représente les nœuds du sol. L'ISS est donnée en terme de déplacement absolu par le système matriciel d'équilibre dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & M_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_r \\ \ddot{U}_c \\ \ddot{U}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rc} & 0 \\ C_{cr} & C_{cc} & C_{cs} \\ 0 & C_{sc} & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_r \\ \dot{U}_c \\ \dot{U}_s \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rc} & 0 \\ K_{cr} & K_{cc} & K_{cs} \\ 0 & K_{sc} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_r \\ U_c \\ U_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Les matrices masse M_{cc} , amortissement C_{cc} et rigidité K_{cc} sont obtenues par l'assemblage des degrés de liberté correspondant aux nœuds de contact sol-réservoir, ce qui permet d'écrire :

$$M_{cc} = M_{cc}^r + M_{cc}^s \quad (2.35)$$

$$C_{cc} = C_{cc}^r + C_{cc}^s \quad (2.36)$$

$$K_{cc} = K_{cc}^r + K_{cc}^s \quad (2.37)$$

Le déplacement absolu U peut être exprimé en terme de déplacement relatif u et de déplacement du champ libre v qui correspond à l'excitation sismique imposée, donc :

$$\begin{bmatrix} U_r \\ U_c \\ U_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_c \\ u_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_r \\ v_c \\ v_s \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_r \\ \dot{U}_c \\ \dot{U}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_r \\ \dot{u}_c \\ \dot{u}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{v}_r \\ \dot{v}_c \\ \dot{v}_s \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{U}_r \\ \ddot{U}_c \\ \ddot{U}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{u}_c \\ \ddot{u}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{v}_r \\ \ddot{v}_c \\ \ddot{v}_s \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

L'équation (2.34), peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & M_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{u}_c \\ \ddot{u}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rc} & 0 \\ C_{cr} & C_{cc} & C_{cs} \\ 0 & C_{sc} & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_r \\ \dot{u}_c \\ \dot{u}_s \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rc} & 0 \\ K_{cr} & K_{cc} & K_{cs} \\ 0 & K_{sc} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_c \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & M_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_r \\ \ddot{v}_c \\ \ddot{v}_s \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rc} & 0 \\ C_{cr} & C_{cc} & C_{cs} \\ 0 & C_{sc} & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_r \\ \dot{v}_c \\ \dot{v}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rc} & 0 \\ K_{cr} & K_{cc} & K_{cs} \\ 0 & K_{sc} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_c \\ v_s \end{bmatrix} = R \end{aligned} \quad (2.41)$$

Si le déplacement du champ libre v_c est constant le long de la base de la structure, le terme v_r représente le mouvement du corps rigide du réservoir. Donc, l'équation (2.41) peut être simplifiée du fait que :

$$\begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rc} \\ C_{cr} & C_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_r \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rc} \\ K_{cr} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Aussi, le mouvement dynamique du champ libre du sol de fondation exige que :

$$\begin{bmatrix} M_{cc}^s & 0 \\ 0 & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_c \\ \ddot{v}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{cc}^s & C_{cs} \\ C_{sc} & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{v}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{cc}^s & K_{cs} \\ K_{sc} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Finalement, R prend la forme suivante :

$$R = - \begin{bmatrix} M_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & M_{cc}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_r \\ \ddot{v}_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Alors, le système d'équations (2.41) qui permet de prendre en compte l'effet d'interaction sol-structure s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & M_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{u}_c \\ \ddot{u}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rc} & 0 \\ C_{cr} & C_{cc} & C_{cs} \\ 0 & C_{sc} & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_r \\ \dot{u}_c \\ \dot{u}_s \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rc} & 0 \\ K_{cr} & K_{cc} & K_{cs} \\ 0 & K_{sc} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_c \\ u_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & M_{cc}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_r \\ \ddot{v}_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Qui peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$M_{sr}\ddot{U}_{sr} + C_{sr}\dot{U}_{sr} + K_{sr}U_{sr} = -M_r I \ddot{V} \quad (2.46)$$

M_{sr} , C_{sr} et K_{sr} représentent respectivement les matrices classiques masse, amortissement et rigidité du système couplé. I est le vecteur de couplage dynamique permettant d'appliquer aux nœuds du réservoir les forces d'inertie dues aux accélérations sismiques \ddot{V} de la base.

Il est à noter que l'excitation sismique est appliquée uniquement aux nœuds du réservoir comme le montre l'équation (2.45). La plupart des logiciels de calcul dynamique, appliquent les forces d'inertie automatiquement à tous les nœuds du modèle d'éléments finis et ne peuvent résoudre le problème d'ISS que si la masse de la fondation est prise nulle. C'est dans cet esprit que les modèles d'interaction avec fondation sans masse ont été développés. Cependant, l'utilisation d'un programme d'éléments finis permet de choisir la partie du modèle à laquelle seront appliquées les forces d'inertie dues au séisme en intervenant sur le vecteur de couplage dynamique I , et de résoudre le problème avec le modèle d'ISS avec fondation massive.

2.4 Interaction fluide-structure (IFS)

Les forces d'interaction dynamique liant les deux sous systèmes réservoir-liquide sont prises en compte, en imposant une condition d'équilibre entre les accélérations et les pressions à l'interface fluide-structure comme montré précédemment. Le système d'équations d'équilibre dynamique gouvernant le champ de déplacement U_r des parois du réservoir et le champ de pressions hydrodynamiques P régnant dans le liquide, donnés par les deux équations (2.15) et (2.17) sont réécrits en un seul système ayant comme variables de base (U_r, P) :

$$\begin{bmatrix} M_r & 0 \\ \rho_L Q^T & M_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_r \\ \ddot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_r \\ \dot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r & -Q \\ 0 & K_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_r \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

On a d'après les équations (2.38), (2.39) et (2.40) :

$$\ddot{U}_r = \ddot{u}_r + \ddot{v}_r \quad (2.48)$$

$$\dot{U}_r = \dot{u}_r + \dot{v}_r \quad (2.49)$$

$$U_r = u_r + v_r \quad (2.50)$$

Et comme v_r représente le déplacement rigide du réservoir, alors de la même manière que pour le cas d'interaction sol-structure, l'équation (2.47) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_r & 0 \\ \rho_L Q^T & M_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_r \\ \dot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r & -Q \\ 0 & K_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ P \end{bmatrix} \\ & = - \begin{bmatrix} M_r & 0 \\ \rho_L Q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}_r \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dans le cas d'hypothèse d'un fluide incompressible, et si les ondes de surface sont négligées, la matrice masse fluide s'annule, ce qui permet d'exprimer à partir du système (2.51) la pression en inversant la matrice K_F :

$$P = -K_L^{-1} \rho_L Q^T \ddot{u}_r \quad (2.52)$$

En remplaçant la valeur de P dans la première ligne du système d'équations correspondant à l'équilibre dynamique du réservoir, on obtient ainsi un système non couplé pour la structure avec un terme de masse ajoutée :

$$(M_r + QK_L^{-1} \rho_L Q^T) \ddot{u}_r + C_r \dot{u}_r + K_r u_r = (M_r + QK_L^{-1} \rho_L Q^T) \ddot{v}_r \quad (2.53)$$

2.5 Interaction fluide-sol-structure (IFSS)

Pour considérer l'interaction entre les trois domaines fluide-sol-structure (ISS et IFS) au même temps, il suffit de rassembler les deux systèmes matriciels sol-structure et fluide-structure, donnés respectivement par les équations (2.46) et (2.51) en un seul système :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_{sr} & 0 \\ \rho_L Q^T & M_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_{sr} \\ \ddot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{sr} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{sr} \\ \dot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{sr} & -Q \\ 0 & K_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{sr} \\ P \end{bmatrix} \\
& = - \begin{bmatrix} M_r & 0 \\ \rho_L Q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{V} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Pour le cas d'un fluide incompressible, le système (2.54) s'écrit :

$$(M_{sr} + QK_L^{-1}\rho_L Q^T)\ddot{U}_{sr} + C_{sr}\dot{U}_{sr} + K_{sr}U_{sr} = (M_{sr} + QK_L^{-1}\rho_L Q^T)I\ddot{V} \tag{2.55}$$

2.6 Conclusion

Lorsque le fluide est considéré comme incompressible, les effets d'interaction fluide-structure se traduisent par le concept de masses ajoutées. La discrétisation par éléments finis du problème d'interaction sol-structure montre que le chargement sismique s'applique uniquement pour les nœuds du réservoir et que contrairement au problème d'interaction fluide-structure, les matrices obtenues dans ce cas sont symétriques.

Chapitre 3

Analyse dynamique

3.1 Introduction

Les calculs dynamiques de structures sont devenus une étape essentielle dans la conception ou la vérification de tout système déformable évoluant dans un environnement dynamique. La Dynamique des Structures permet la formulation et l'analyse de tout problème de structures pour lesquelles les efforts dynamiques (inertie, dissipation, élasticité) vont jouer un rôle essentiel dans leur comportement dynamique, qu'il s'agisse d'un problème de fréquences ou modes propres, de vibrations, de réponse en fréquence ou de réponse temporelle, allant jusqu'à la dynamique rapide lors d'impacts ou de collisions. La compréhension de la formulation dynamique par la méthode des éléments finis, ainsi que la maîtrise des outils informatiques de calcul dynamique constituent donc deux éléments indispensables de savoir-faire de l'ingénieur en charge de l'analyse dynamique de tout système ou structure.

Les deux chapitres précédents ont fait l'objet de la formulation dynamique par éléments finis du problème d'interaction fluide-sol-structure pour le cas d'un réservoir de forme quelconque. Le but de ce présent chapitre est d'exposer quelques techniques de symétrisations utilisées généralement pour l'analyse des vibrations libres des systèmes couplés fluide-structure découlant de la formulation variationnelle non symétrique (u, p) , ainsi que la méthode d'intégration utilisée dans ce présent travail pour l'analyse de la réponse temporelle.

3.2 Problèmes des vibrations libres pour le cas des matrices symétriques

La raison principale pour le calcul des valeurs et vecteurs propres d'un système physique est qu'ils sont utilisés pour découpler les équations d'équilibre dynamique pour l'utilisation de la méthode de superposition modale et/ou l'analyse avec un spectre de réponse.

La détermination des fréquences et modes propres d'une structure revient à résoudre un problème aux valeurs et vecteurs propres d'un système matriciel, découlant de sa modélisation en éléments finis, sans la prise en compte des termes d'amortissement et du chargement, soit :

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (3.1)$$

La solution harmonique de l'équation (3.1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$U = \phi e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

avec :

$$i^2 = -1.$$

ϕ : Vecteur colonne contenant les amplitudes des différents degrés de liberté.

ω : Valeurs propres des vibrations du système.

\ddot{U} , U : Représentent respectivement les accélérations et les déplacements des différents degrés de liberté.

K et M : sont les matrices de rigidité et masse du système.

En dérivant l'équation (3.2) deux fois par rapport au temps :

$$\ddot{U} = -\omega^2 \phi e^{-i\omega t} \quad (3.3)$$

Maintenant, si on remplace les deux équations (3.3) et (3.2) dans (3.1), on aura l'expression classique (représentant le problème de valeurs et vecteurs propres) suivante :

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0 \quad (3.4)$$

Pour des matrices symétriques, il existe plusieurs méthodes numériques permettant l'extraction des valeurs et vecteurs propres de l'équation (3.4). Toutes les méthodes utilisées sont de nature itérative, puisque cela revient à résoudre une équation polynomiale du même ordre que le système matriciel décrivant le problème. Les algorithmes de ces différentes méthodes sont illustrés dans les références [6, 5, 42].

Pour les structures ayant un nombre de degrés de liberté relativement faible, la méthode de Jacobi [5, 63, 62, 37, 42] peut être utilisée avec succès, par contre dans le cas des systèmes à grandes dimensions, la méthode dite Lanczos [42, 5, 6] et celle des sous-espaces "*sub-space*" [42, 5, 6, 62] qui est basé sur la méthode de Jacobi et celle d'itération inverse "*inverse iteration*" [42, 5] sont les plus recommandées, car contrairement aux autres méthodes, ces deux dernières permettent de choisir le nombre de modes propres à extraire, et donc gagner un espace mémoire important.

L'utilisation du langage de programmation MATLAB permet de résoudre le problème aux valeurs et vecteurs propres d'un système matriciel en utilisant directement la commande "*eigs*".

3.3 Problèmes des vibrations libres pour le cas des matrices non symétriques

L'analyse des vibrations libres des problèmes d'interaction fluide-structure découlant de la formulation variationnelle (u, p) , revient à résoudre l'équation aux valeurs et vecteurs propres suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} K_r & -Q \\ 0 & K_L \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_r & 0 \\ \rho_L Q^T & M_L \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} U_r \\ P \end{bmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

On note immédiatement que le système matriciel (3.5) n'est pas symétrique. Les algorithmes de matrices symétriques sont très satisfaisants dans la pratique. Par contre, il est impossible de concevoir des algorithmes, tout aussi satisfaisants pour le cas des matrices non symétriques. Il y a deux raisons à cela : tout d'abord, les valeurs propres d'une matrice non symétrique peuvent être très sensibles à de petits changements dans les éléments de celle-ci. Deuxièmement, la matrice elle-même peut être défectueuse pour qu'il n'y ait pas ensemble complet de vecteurs propres [42].

Il existe plusieurs modules de base dans l'algorithme QR , qui est généralement considéré comme l'algorithme le plus efficace pour résoudre l'ensemble des valeurs propres d'une matrice non symétrique [42]. Cependant, pour les problèmes d'interaction fluide structure, plusieurs techniques de symétrisation existent dans la littérature [53, 57, 12, 66, 65] dont les plus importantes seront citées ci-dessous.

3.3.1 Méthodes de symétrisation pour les problèmes d'interaction fluide-structure

Ces techniques de symétrisation peuvent être classées en deux types principaux de couplage : un couplage "*masse*" et un couplage "*raideur*".

Symétrisation par couplage masse

Pour ce type de symétrisation, le couplage apparait dans la matrice masse. Trois formes sont présentées ci-après.

1. La première forme de symétrisation présentée ici comme exemple, est proposée par Zienkiewicz [53], elle permet une forme symétrique en effectuant le changement de variable suivant :

$$m = \frac{1}{c^2} M_L P \quad (3.6)$$

L'expression symétrique finale est donnée par :

$$\left(\left[\begin{array}{cc} K_r & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{\rho_L} M_L^{-1} \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} M_r + \rho_L Q K_L^{-1} Q^T & Q K_L^{T-1} \\ K_L^{T-1} Q^T & \frac{1}{\rho_L} K_L^{-1} \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} U_r \\ m \end{array} \right] \quad (3.7)$$

2. La deuxième variante est proposée par Ohayon [53, 65, 66, 12, 1]. Le potentiel des déplacements q du liquide est introduit dans le système matriciel, tel que :

$$p = -\rho_L \ddot{q} \quad (3.8)$$

Après quelques manipulations, et substitutions le nouveau système symétrique s'écrit :

$$\left(\left[\begin{array}{ccc} K_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_L}{\rho_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{ccc} M_r & 0 & \rho_L Q \\ 0 & 0 & M_L \\ \rho_L Q^T & M_L & \rho_L K_L \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} U_r \\ P \\ q \end{array} \right] \quad (3.9)$$

La présence d'un zéro en diagonale pose problème du coté numérique, pour cela, le potentiel de déplacement du liquide q , peut être éliminé du système (3.9) en utilisant une condensation statique, avec :

$$q = K_L^{-1} \left(\frac{M_L P}{\rho_L} + Q^T U \right) \quad (3.10)$$

Le système matriciel final s'écrit alors comme suit :

$$\left(\left[\begin{array}{cc} K_r & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_L} M_L \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} M_r + \rho_L Q K_L^{-1} Q^T & Q K_L^{-1} M_L \\ K_L^{-1} M_L Q^T & \frac{1}{\rho_L} M_L K_L^{-1} M_L \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} U_r \\ P \end{array} \right] \quad (3.11)$$

La forme symétrique (3.11) offre le double avantage de garder le problème posé en variables de base (U, P) et de ne faire intervenir que l'inversion d'une seule matrice par

rapport à l'expression donnée par l'équation (3.7). Toutefois, il faut souligner que ces deux techniques ne peuvent être appliquées que si la matrice rigidité du liquide K_L soit rendue définie positive en appliquant les conditions de pressions nulles au niveau de la surface libre ; donc, les effets du ballonnement seront négligés.

Les deux formes symétriques suivantes, permettent d'éviter l'inversion de la matrice rigidité du liquide, l'inversion s'effectue au niveau de la matrice rigidité et masse de la structure, ce qui permet de prendre en compte les effets des ondes de surface.

3. Cette présente forme symétrique est présentée par Daniel [15] , elle fait intervenir l'inversion de la matrice raideur de la structure et pose les variables de base en termes de pression dans le liquide et d'accélération dans la structure, et elle se présente comme suit :

$$\left(\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\rho_L} M_L & 0 \\ 0 & M_L \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\rho_L} M_L + Q^T K_r^{-1} Q & -Q^T K_r^{-1} M_r \\ -M_r^T K_r^{-1} Q^T & M_r K_r^{-1} M_r \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} P \\ \ddot{U}_r \end{array} \right] \quad (3.12)$$

Symétrisation par couplage raideur

4. Dans ce deuxième type de symétrisation, le couplage apparaît dans la matrice raideur et elle fait intervenir l'inversion de la matrice masse de la structure, elle est proposée pour la première fois par Tiliouine et Seghir [57], son expression est donnée comme suit :

$$\left(\left[\begin{array}{cc} K_r^T M_r^{-1} K_r & K_r^T M_r^{-1} Q \\ -Q^T M_r^{-1} K_r & \frac{1}{\rho_L} K_L + Q^T M_r^{-1} \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} K_r^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_L} M_L \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} U_r \\ P \end{array} \right] \quad (3.13)$$

cette dernière forme de symétrisations est très intéressante, elle présente plusieurs avantages, non seulement puisqu'elle permet de prendre en compte les effets des fluctuations de la surface libre et de conserver le problème posé en variables de base (U, P) , mais aussi, l'utilisation d'un système de masses concentrées, cas le plus fréquent en pratique, le processus d'inversion numérique de la matrice masse peut être évité puisque :

$$M_r^{-1} = \frac{1}{m_{ii}} I \quad (3.14)$$

I : représente la matrice identité et m_{ii} sont les éléments de la matrice masse.

Remarque :

Pour le cas d'un fluide incompressible et si les ondes de surface sont négligées, les valeurs des pressions hydrodynamiques p peuvent être éliminées de l'équation du mouvement, tel que montré précédemment, donc, les valeurs et vecteurs propres sont obtenus directement par la résolution de l'équation suivante :

$$(K_r - \omega^2(M_r + QK_r^{-1}\rho_L Q^T))U = 0 \quad (3.15)$$

3.4 Analyse de la réponse sismique

En général, dans les modèles d'éléments finis, la détermination de la réponse dynamique d'une structure revient à la résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre comme celui défini par l'équation (2.46). Les méthodes de résolution les plus utilisées sont la méthode de superposition modale et les méthodes d'intégration directe pas à pas. Dans le cas des systèmes à comportement linéaire et à amortissement classique (proportionnel), la méthode de superposition modale est plus recommandée, compte tenu des gains importants qu'elle apporte en terme de calculs. Par contre, si le comportement est non linéaire, ou si l'amortissement du système n'est pas proportionnel, ou encore si les matrices ne sont pas symétriques, comme le cas de l'équation (2.51), les méthodes d'intégrations directes pas à pas sont pratiquement inévitables même si elles demandent beaucoup de temps d'exécution. Dans les cas d'interaction fluide-structure, plusieurs méthodes de symétrisation ont été proposées, mais aucune technique permettant de rendre l'amortissement proportionnel n'est à notre disposition, pour cela, on opte pour la méthode d'intégration directe pas à pas, basée sur l'accélération constante.

3.4.1 Méthodes d'intégrations directe pas à pas

Il existe beaucoup de schémas numériques pour l'intégration directe des équations d'équilibre dynamique, on peut citer la méthode d'accélération constante, méthode d'accélération linéaire, les algorithmes de Newmark, la méthode de Wilson θ et aussi la méthode d'Hilber, Huges et Taylor (HHT), quelques algorithmes de ces différentes méthodes se trouvent dans les références [62, 5, 23, 14].

Généralement, les méthodes d'intégration directe pas à pas peuvent être fondamentalement classées comme étant soit explicites ou implicites. Les méthodes explicites sont les plus simples pour la résolution mais comportent de mauvaises propriétés de stabilité : la convergence n'est assurée que si le pas d'intégration temporelle est petit, ce qui implique un nombre important d'itérations. Les schémas explicites sont donc en pratique peu utilisés. La formulation implicite est beaucoup plus efficace car il n'y a pas forcément de restrictions sur le pas d'intégration [62, 3].

Dans ce présent travail, l'analyse de la réponse sismique des différents systèmes étudiés est obtenue par la résolution des équations du mouvement présentées dans le chapitre précédent en utilisant la méthode de l'accélération moyenne constante, qui est inconditionnellement stable dans le cas des systèmes linéaires [23].

3.4.2 Méthode de l'accélération moyenne constante

L'hypothèse de base de cette méthode est que l'accélération relative de chaque degré de liberté est constante durant un pas de temps Δt comme le montre la figure (3.1) :

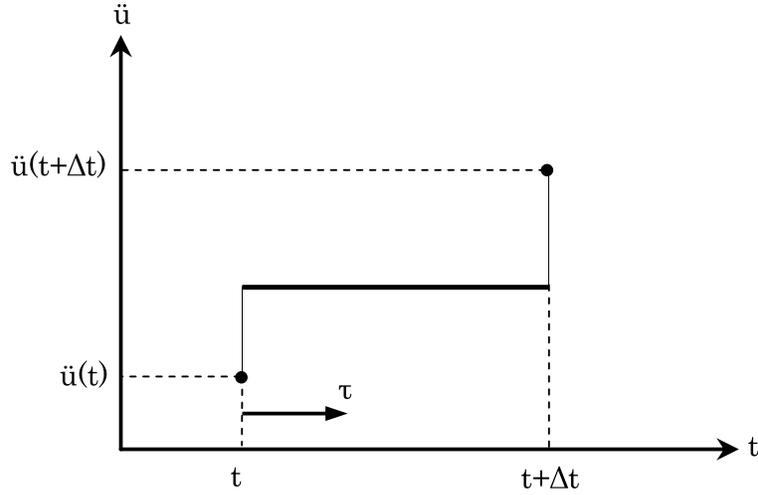


FIG. 3.1 – Hypothèse de la méthode de l'accélération moyenne constante

On a d'après l'hypothèse, l'accélération relative du degré de liberté dynamique i ($DDLDi$) pendant un pas de temps Δt s'écrit :

$$\ddot{u}_i(\tau) = \frac{1}{2}[\ddot{u}_i(t) + \ddot{u}_i(t + \Delta t)] = \frac{1}{2}[2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)] \quad (3.16)$$

La vitesse du degré du $DDLDi$ pendant un intervalle de temps est obtenue en intégrant l'équation (3.16) :

$$\dot{u}_i(\tau) = \frac{1}{2}[2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)]\tau + \dot{u}_i(t) \quad (3.17)$$

De la même manière, le déplacement relatif du $DDLDi$ pendant un pas de temps tout est obtenu par l'intégration de l'équation (3.18) :

$$u_i(\tau) = \frac{1}{4}[2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)]\tau^2 + \dot{u}_i(t)\tau + u_i(t) \quad (3.18)$$

A la fin de chaque pas de temps ($\tau = \Delta t$), les trois équations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} \ddot{u}_i(t + \Delta t) = \frac{1}{2}[2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)] \\ \dot{u}_i(t + \Delta t) = \frac{1}{2}[2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)]\Delta t + \dot{u}_i(t) \\ u_i(t + \Delta t) = \frac{1}{4}[2\ddot{u}_i(t) + \Delta\ddot{u}_i(t)]\Delta t^2 + \dot{u}_i(t)\Delta t + u_i(t) \end{cases} \quad (3.19)$$

Ce qui donne pour les incréments de vitesse et de déplacement durant le pas de temps Δt :

$$\Delta \dot{u}_i(t) = \frac{1}{2}[2\ddot{u}_i(t) + \Delta \ddot{u}_i(t)]\Delta t \quad (3.20)$$

$$\Delta u_i(t) = \frac{1}{4}[2\ddot{u}_i(t) + \Delta \ddot{u}_i(t)]\Delta t^2 + \dot{u}_i(t)\Delta t \quad (3.21)$$

La forme incrémentale de l'équation du mouvement s'écrit :

$$M\Delta \ddot{u}_i(t) + C\Delta \dot{u}_i(t) + K\Delta u_i(t) = \Delta P(t) \quad (3.22)$$

M , C et K désignent respectivement les matrices masse, amortissement et rigidité de la structure, et $P(t)$ représente l'excitation.

Si on remplace les expressions de Δu_i et $\Delta \dot{u}_i$ dans l'équation (3.22), on obtient le système linéaire suivant :

$$\overline{M}\Delta \ddot{u}_i(t) = \Delta \overline{P}(t) \quad (3.23)$$

avec :

$$\overline{M} = M + C\frac{\Delta t}{2} + K\frac{\Delta t^2}{4} \quad (3.24)$$

$$\Delta \overline{P}(t) = \Delta P(t) - [C\ddot{u}_i(t)\Delta t + K(\ddot{u}_i(t)\frac{\Delta t^2}{2} + \dot{u}_i(t)\Delta t)] \quad (3.25)$$

La résolution de l'équation (3.23), nous donne la valeur de \ddot{u} pour chaque pas de temps.

A la fin de chaque pas de temps :

$$\begin{cases} \ddot{u}_i(t + \Delta t) = \ddot{u}_i(t) + \Delta \ddot{u}_i(t) \\ \dot{u}_i(t + \Delta t) = \dot{u}_i(t) + \Delta \dot{u}_i(t) \\ u_i(t + \Delta t) = u_i(t) + \Delta u_i(t) \end{cases} \quad (3.26)$$

3.5 Conclusion

Il a été constaté que la forme symétrique (3.13) est la plus intéressante, Il est à noter aussi que cette dernière présente un petit problème lorsque le réservoir est modélisé par des éléments coques. Cela est dû à la présence des zéros en diagonale dans la matrice masse, correspondant aux degrés de liberté en rotation. Cette difficulté peut être surmontée en utilisant une condensation statique.

Chapitre 4

Application au cas d'un réservoir rectangulaire

4.1 Introduction

L'analyse dynamique des réservoirs de stockage de forme rectangulaire en déformation plane est souvent rencontrée dans la littérature [32, 36, 28, 13, 60]. La transformation du problème tridimensionnel en bidimensionnel en utilisant les lois d'élasticité plane facilite la tâche pour la prise en compte de l'interaction fluide-structure, sol-structure ainsi que le ballonnement de la surface libre.

Le but de ce présent chapitre est d'appliquer la formulation du problème d'interaction fluide-sol-réservoir présentée dans les chapitres précédents pour le cas d'un réservoir rectangulaire. Pour pouvoir appliquer les lois d'élasticité plane isotrope (déformation plane), on suppose que la longueur du réservoir est infiniment longue selon la direction y figure (4.1).

Le réservoir ainsi que le sol de fondation sont modélisés par des éléments finis quadrilatéraux linéaires Q4 avec deux degrés de liberté par nœud qui représentent les deux composantes du champ des déplacements. Les mêmes types d'éléments sont utilisés pour la modélisation du fluide mais avec un seul degré de liberté par nœud, qui représente la pression hydrodynamique. Pour le calcul de la matrice d'interaction fluide-structure Q , on utilise des éléments linéiques linéaires.

4.2 Système étudié

La géométrie du système fluide-sol-structure est représentée par la figure (4.1), et le maillage du programme développé correspondant est donné par la figure (4.2). Les caractéristiques mécaniques et géométriques du système fluide-sol-réservoir, utilisées dans ce présent chapitre, sont illustrées dans les tableaux (4.1) et (5.6).

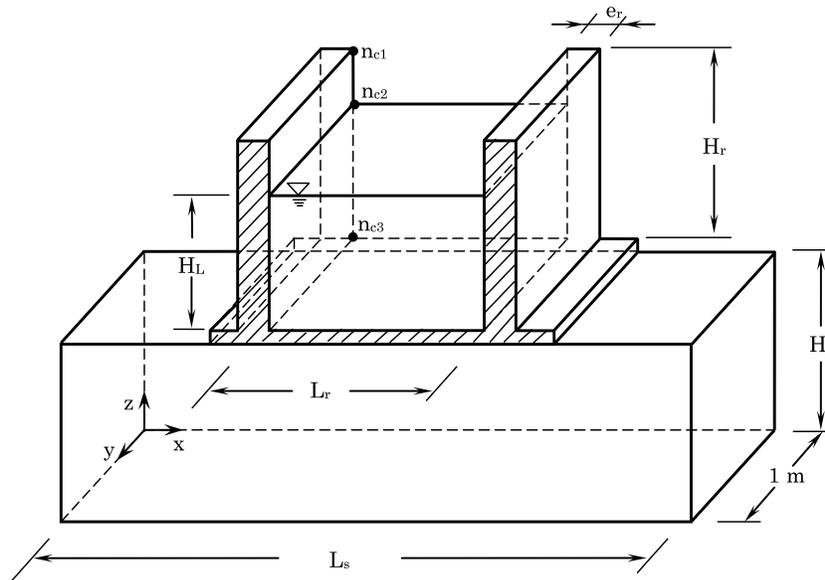


FIG. 4.1 – Système fluide-sol-structure

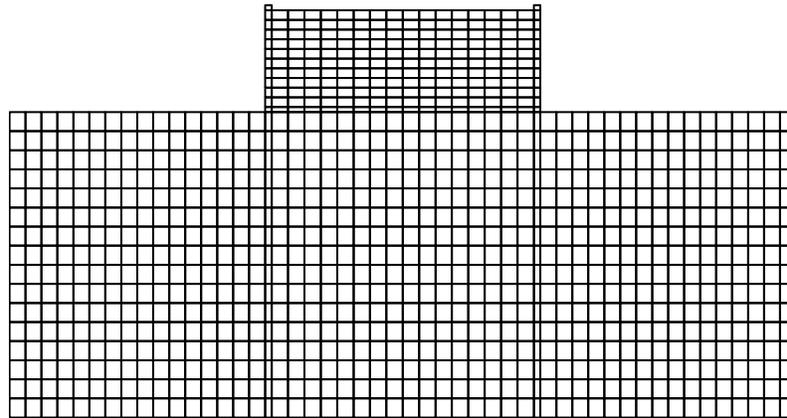


FIG. 4.2 – Maillage du système fluide-sol-structure

TAB. 4.1 – Caractéristiques mécaniques

Matériaux		
Réservoir	Masse volumique(ρ_r)(Kg/m^3)	$2.5 \cdot 10^3$
	Module de Young(E_r)(Pa)	$32.00 \cdot 10^9$
	Coefficient de poisson(ν_r)	0.2
	Amortissement critique(ξ_r)(%)	5
Liquide	Masse volumique(ρ_L)(Kg/m^3)	$1.0 \cdot 10^3$
	Module de compressibilité(k_0)(Pa)	$2.073 \cdot 10^9$
Sol	Masse volumique(ρ_s)(Kg/m^3)	$1.9 \cdot 10^3$
	Module de Young(E_s)(Pa)	$300 \cdot 10^6$
	Coefficient de poisson(ν_s)	0.4
	Amortissement critique(ξ_s)(%)	10

TAB. 4.2 – Caractéristiques géométriques

Géométries		
Réservoir	Largeur (L_r)(m)	20
	Hauteur (H_r)(m)	10
	Epaisseur (e_r)(m)	0.5
Liquide	Hauteur (H_L)(m)	variable
Sol	Largeur (L_s)(m)	60
	Hauteur (H_s)(m)	30

4.3 Analyse des vibrations libres

Pour le cas d'un fluide compressible, le calcul des périodes propres du système couplé fluide-structure et fluide-sol-structure est obtenu respectivement par la résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres des systèmes matriciels (2.51) et (2.54) sans la prise en compte des termes d'amortissement et du chargement en utilisant la technique de symétrisation donnée par l'équation (3.13). Concernant l'analyse avec hypothèse d'un fluide incompressible, les deux systèmes (2.51) et (2.54), sont remplacés respectivement par les équations (2.53) et (2.55).

Les différents tableaux suivants montrent l'influence de la hauteur de remplissage, la compressibilité du fluide et le ballonnement de la surface libre sur les six premières périodes de vibration du système couplé fluide-structure et fluide-sol-structure. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par le logiciel d'éléments finis ABAQUS.

Les périodes de ballonnement sont calculées uniquement par le programme d'éléments finis développé, puisque aucune technique de prise en compte des fluctuations de la surface libre par le logiciel ABAQUS n'est à notre disposition, pour la validation du modèle d'éléments finis, la première période de ballonnement peut être calculé par la formule de *Housner* (4.1) [44] :

$$T_{Hou} = 2\pi \left[\frac{L_F}{1.58 \tanh(1.58\alpha)g} \right]^{1/2} \quad (4.1)$$

$$\alpha = H_F/L_F \quad (4.2)$$

Les deux tableaux (4.8) et (4.14) montrent respectivement les périodes fondamentales calculées par la formule de *Housner* T_{Hou} en fonction de la hauteur de remplissage pour le cas d'interaction fluide-structure et fluide-sol-structure, et elles sont comparées à celles calculées par le modèle d'éléments finis T_{MEF} .

4.3.1 Analyse du système couplé fluide-structure

TAB. 4.3 – Périodes propres calculées par le programme développé
- Fluide incompressible avec IFS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
1	0.5025	0.3816	0.3218	0.3002
2	0.4909	0.3797	0.3218	0.3002
3	0.0847	0.0801	0.0635	0.0512
4	0.0826	0.0792	0.0635	0.0512
5	0.0269	0.0259	0.0237	0.0195
6	0.0267	0.0258	0.0237	0.0195

TAB. 4.4 – Périodes propres calculées par le logiciel ABAQUS
 - Fluide incompressible avec IFS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
1	0.5385	0.4146	0.3555	0.3480
2	0.5270	0.4134	0.3554	0.3480
3	0.0921	0.0873	0.0698	0.0569
4	0.0899	0.0864	0.0698	0.0659
5	0.0294	0.0262	0.0260	0.0215
6	0.0292	0.0261	0.0260	0.0215

TAB. 4.5 – Périodes propres calculées par le programme développé
 - fluide compressible sans ballottement avec IFS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
1	0.5027	0.3816	0.3219	0.3002
2	0.4910	0.3798	0.3218	0.3002
3	0.0855	0.0806	0.0637	0.0512
4	0.0831	0.0796	0.0637	0.0512
5	0.0281	0.0268	0.0242	0.0195
6	0.0274	0.0264	0.0240	0.0195

TAB. 4.6 – Périodes propres calculées par le logiciel ABAQUS
 - fluide compressible sans ballottement avec IFS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
1	0.5387	0.4155	0.3555	0.3480
2	0.5271	0.4134	0.3554	0.3480
3	0.0929	0.0879	0.0700	0.0569
4	0.0905	0.0868	0.0700	0.0569
5	0.0305	0.0292	0.0266	0.0215
6	0.0299	0.0291	0.0265	0.0215

TAB. 4.7 – Périodes propres calculées par le programme développé
 - fluide compressible avec ballottement et IFS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
1	5.3298	5.5528	6.2218	8.2334
2	3.6520	3.6668	3.7855	4.4559
3	3.0629	3.0622	3.0816	3.3289
4	2.7664	2.7655	2.7677	2.8529
5	2.6116	2.6114	2.6110	2.6318
6	2.5953	2.5980	2.5971	2.5550

TAB. 4.8 – Périodes propres calculées par la formule de Housner
 - fluide compressible avec ballottement et IFS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
T_{Hou}	5.2535	5.4899	6.1603	8.1555
T_{MEF}	5.3298	5.5528	6.2218	8.2334
$Ecart(\%)$	1.4516	1.1440	0.9981	0.9552

4.3.2 Analyse du système couplé fluide-sol-structure

TAB. 4.9 – Périodes propres calculées par le programme développé
- Fluide incompressible avec IFSS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
1	0.5472	0.4250	0.3555	0.3307
2	0.5497	0.4176	0.3496	0.3266
3	0.2429	0.2428	0.2428	0.2426
4	0.2373	0.2339	0.2280	0.2215
5	0.2058	0.2044	0.2027	0.1992
6	0.1591	0.1589	0.1585	0.1578

TAB. 4.10 – Périodes propres calculées par le logiciel ABAQUS
- fluide incompressible avec IFSS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
1	0.5943	0.4275	0.3884	0.3768
2	0.5904	0.4194	0.3831	0.3732
3	0.2435	0.2435	0.2436	0.2432
4	0.2387	0.2352	0.2290	0.2221
5	0.2086	0.2059	0.2051	0.2011
6	0.1598	0.1597	0.1594	0.1588

TAB. 4.11 – Périodes propres calculées par le programme développé
- fluide compressible sans ballottement avec IFSS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
1	0.5498	0.4250	0.3555	0.3307
2	0.5473	0.4176	0.3496	0.3266
3	0.2429	0.2428	0.2428	0.2426
4	0.2374	0.2340	0.2281	0.2215
5	0.2058	0.2044	0.2027	0.1992
6	0.1591	0.1589	0.1585	0.1578

TAB. 4.12 – Périodes propres calculées par le logiciel ABAQUS
- fluide compressible sans ballottement avec IFSS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
1	0.5945	0.4276	0.3884	0.3768
2	0.5905	0.4195	0.3831	0.3732
3	0.2435	0.2435	0.2435	0.2432
4	0.2389	0.2353	0.2291	0.2222
5	0.2086	0.2060	0.2051	0.2011
6	0.1598	0.1597	0.1594	0.1588

TAB. 4.13 – Périodes propres calculées par le programme développé
- fluide compressible avec ballottement et IFSS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
1	5.336	5.5570	6.2236	8.2356
2	3.6521	3.6682	3.7859	4.4583
3	3.0639	3.0634	3.0819	3.3323
4	2.7664	2.7666	2.7678	2.8576
5	2.7670	2.6130	2.6111	2.6382
6	0.5968	2.6035	2.5971	2.5759

TAB. 4.14 – Périodes propres calculées par la formule de Housner
- fluide compressible avec ballonnement et IFSS -

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)			
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$
T_{Hou}	5.2535	5.4899	6.1603	8.1555
T_{MEF}	5.3366	5.5570	6.2236	8.2356
$Ecart(\%)$	1.5571	1.2074	1.0170	0.9726

Pour les deux cas d'interaction fluide-structure et fluide-sol-structure, les résultats montrent que :

- les périodes propres, calculées par le programme développé, sont très proches de celles calculées par le logiciel ABAQUS et par la formule de Housener.
- la compressibilité du fluide n'influe pas sur les caractéristiques vibratoires du système couplé fluide-structure et fluide-sol-structure.
- lorsque le ballonnement de la surface libre est négligé, les périodes propres augmentent avec l'augmentation de la hauteur de remplissage.
- les périodes de ballonnement augmentent avec la diminution de la hauteur de remplissage.
- lorsque les ondes de surface sont négligées, les résultats montrent que l'interaction sol-structure allonge les valeurs des périodes propres, cela est du à la contribution de la masse de la partie du sol modélisée, les autres remarques sont les mêmes que pour le cas d'interaction fluide-structure.

4.4 Analyse de la réponse sismique

L'analyse de la réponse sismique du système couplé fluide-structure, fluide-sol-structure pour le cas d'un liquide compressible est obtenue respectivement par la résolution de l'équation (2.51) et (2.54) en utilisant la méthode d'intégration directe pas à pas présenté dans le chapitre précédent. Pour le cas d'un fluide incompressible les deux équations (2.51) et (2.54) sont remplacées respectivement par (2.53) et (2.55).

L'excitation dynamique considérée dans cette étude est l'enregistrement accélérométrique de la composante horizontale du séisme de l'Impérial Valley du 18 mai 1940, à la station d'El-Centro. La figure (4.2) représente les quinze premières secondes de cet accélérogramme, celles que l'on estime comme étant les plus sévères pour le présent cas d'étude.

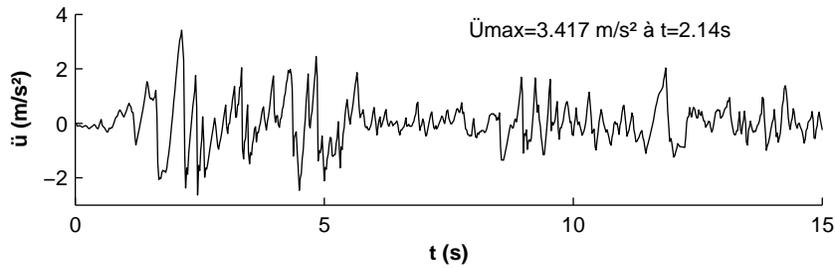


FIG. 4.3 – Accélération sismique du séisme de l’Impérial Valley d’El-Centro

4.4.1 Réponse temporelle

Pour l’analyse de la réponse temporelle pour les deux cas d’interaction fluide-structure, fluide-sol-structure, on considère une hauteur de remplissage de $0.95H_r$. On s’intéressera particulièrement aux trois nœuds de contrôle n_{c1}, n_{c2} et n_{c3} représentés sur la figure (4.1).

Les figures de (4.4) à (4.9) représentent l’évolution dans le temps des valeurs des déplacements, accélérations au nœud n_{c1} , des pressions au nœud n_{c2} et n_{c3} , les résultats sont donnés pour le cas d’un fluide incompressible, compressible sans ballottement et compressible avec ballottement.

Les résultats les plus remarquables de l’étude de la réponse sismique sont les suivants :

- dans les deux cas d’interaction fluide-structure et fluide-sol-structure, la compressibilité du liquide n’influe pas sur la réponse sismique en terme de déplacement et d’accélération ;
- les fluctuations de la surface libre affaiblissent légèrement la valeur des déplacements et des accélérations ;
- la prise en compte des effets d’interaction sol-structure allonge les valeurs des déplacements et diminue les accélérations, ainsi que les pressions à la base.

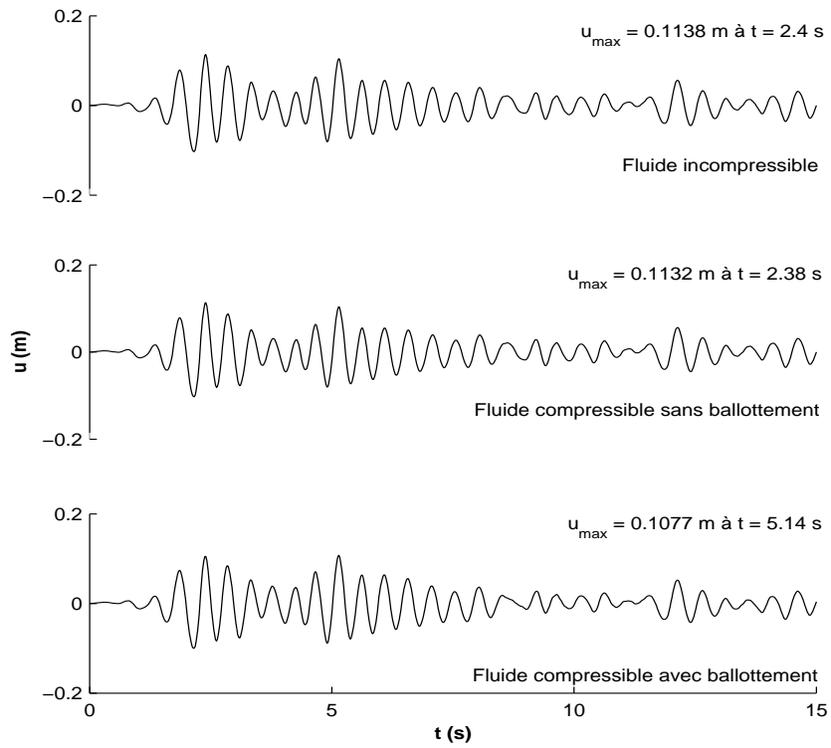


FIG. 4.4 – Déplacement au nœud n_{c1} avec IFS

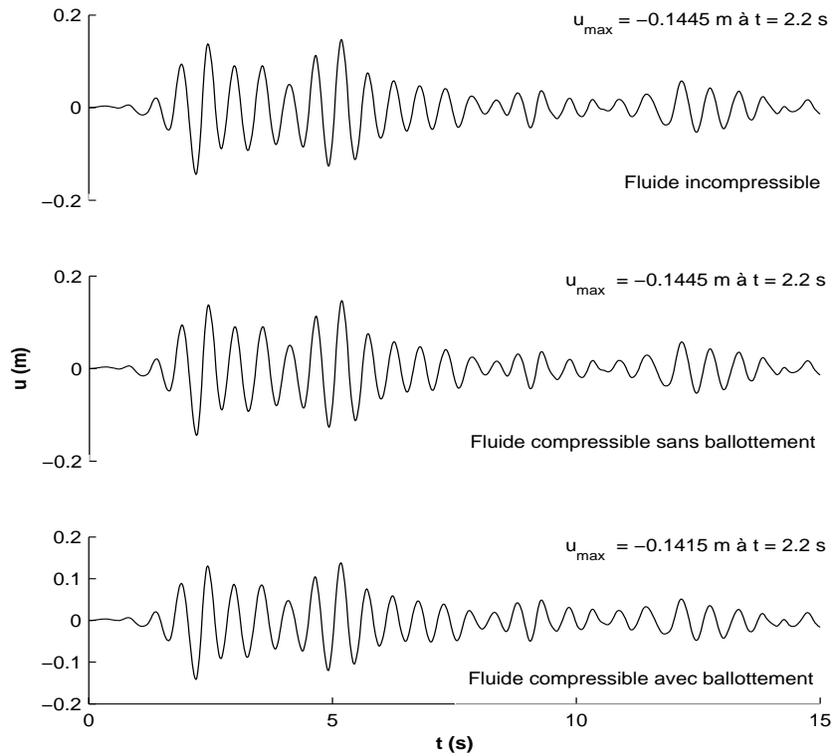


FIG. 4.5 – Déplacement au nœud n_{c1} avec IFSS

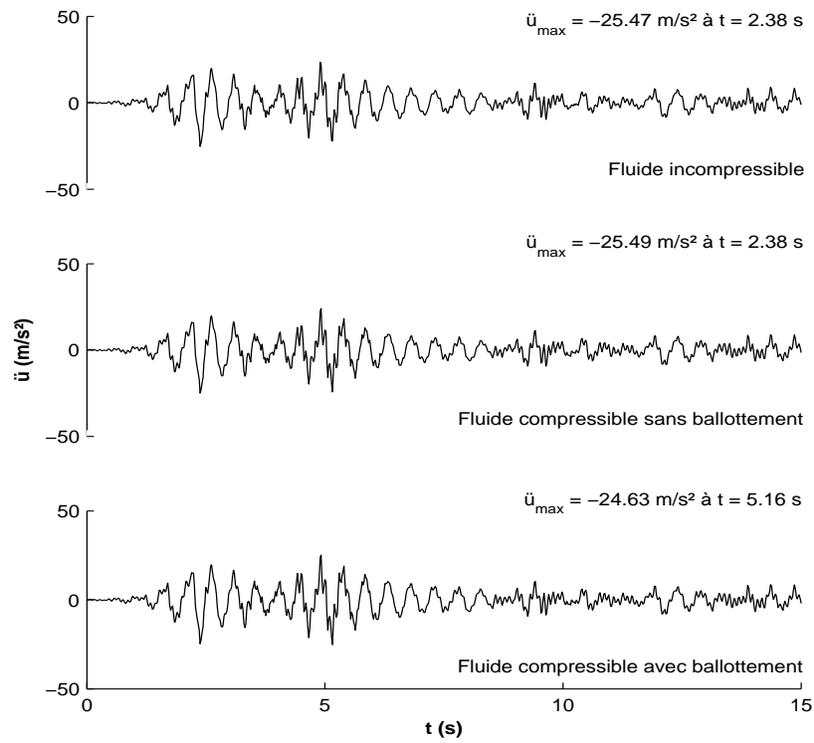


FIG. 4.6 – Accélération au nœud n_{c1} avec IFS

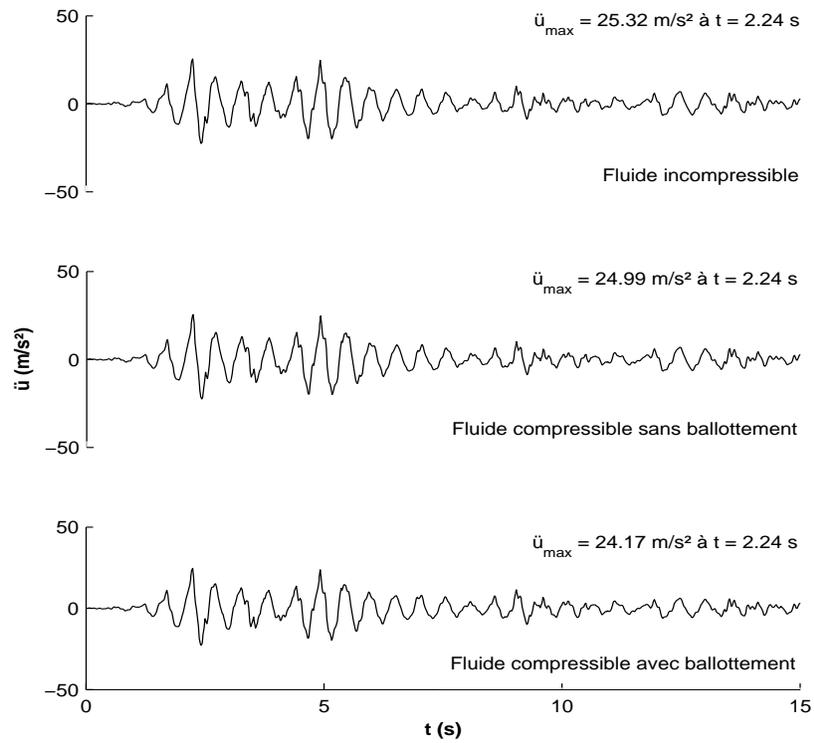


FIG. 4.7 – Accélération au nœud n_{c1} avec IFSS

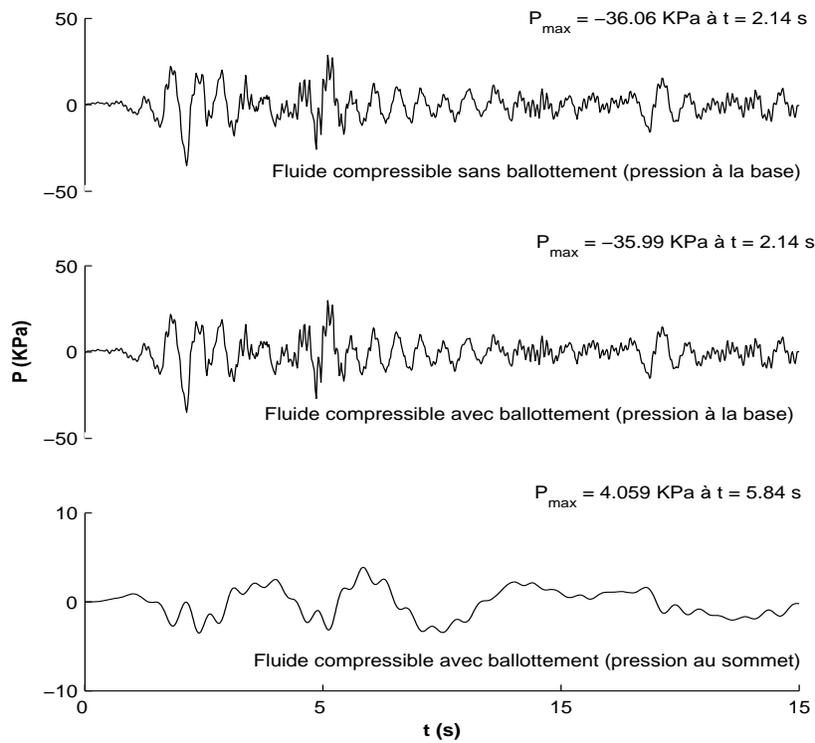


FIG. 4.8 – Pression au nœud n_{c2} n_{c3} avec IFS

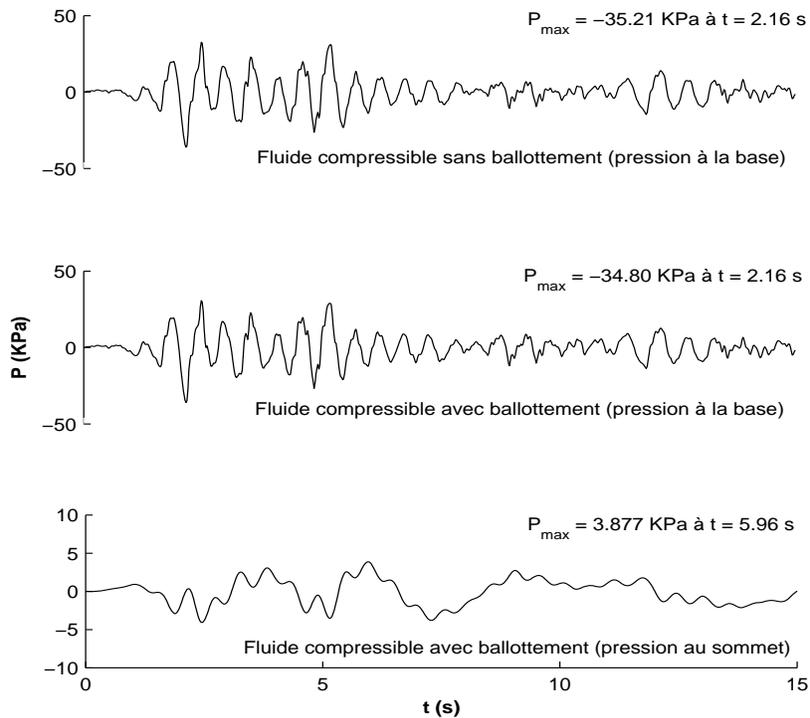


FIG. 4.9 – Pression au nœud n_{c2} et n_{c3} avec IFSS

4.4.2 Distribution des pressions hydrodynamiques

Les figures (4.10) et (4.12) montrent la distribution du coefficient de pression hydrodynamique $C_p = P/\rho_L g H_L$ sur la paroi gauche du réservoir, pour les deux cas d'IFS et d'IFSS avec et sans la prise en compte des fluctuations de la surface libre. La distribution du coefficient de pression hydrodynamique C_p est représenté pour des rapports L_r/H_L différents est à des instants ou la pression est maximale à la base du réservoir.

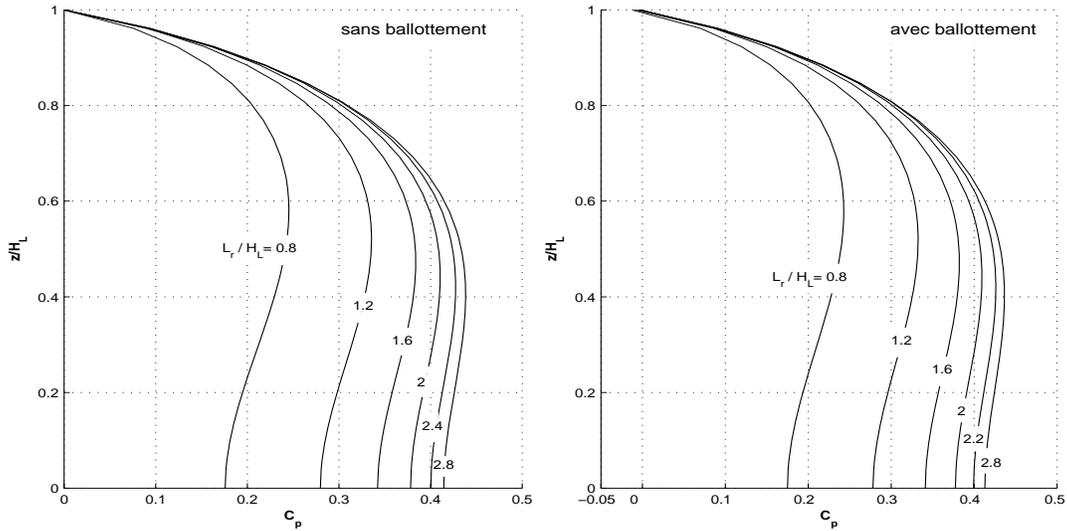


FIG. 4.10 – Coefficient de pression hydrodynamique avec IFS

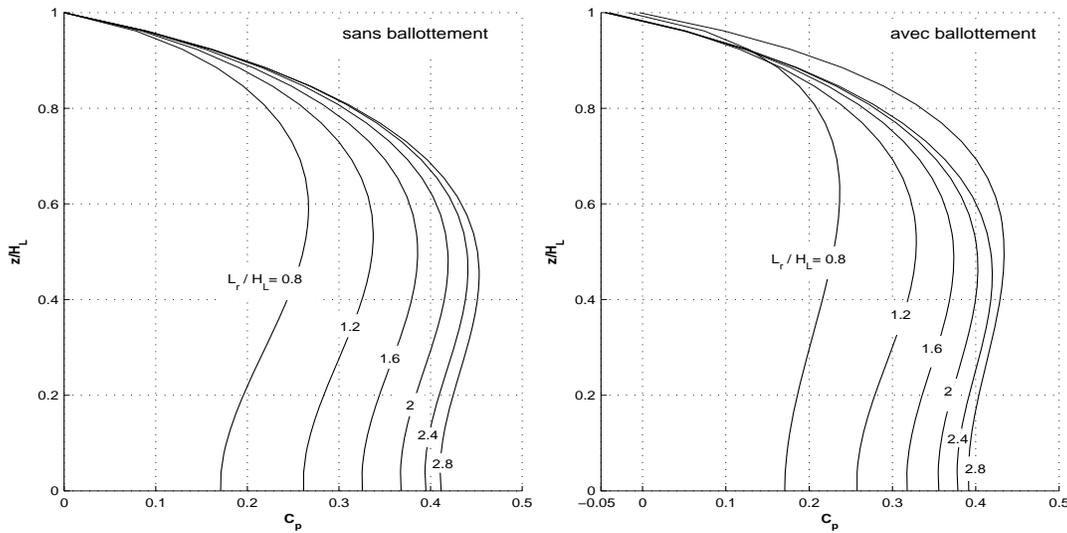


FIG. 4.11 – Coefficient de pression hydrodynamique avec IFSS

les résultats montrent que les valeurs du coefficient de pression hydrodynamique augmentent avec l'augmentation du rapport L_r/H_L , et que cette augmentation est d'autant plus implorante que ce dernier est faible.

4.4.3 Ballotement de la surface libre

Les deux figures (4.12) et (4.13) montrent respectivement le ballotement maximum de la surface libre pour le cas d'ISS et d'IFSS, les résultats sont donnés pour des hauteurs de remplissage différentes.

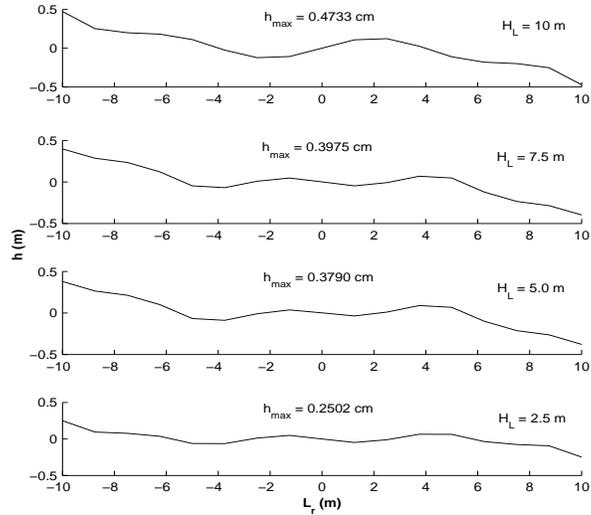


FIG. 4.12 – Ballotement de la surface libre avec IFS

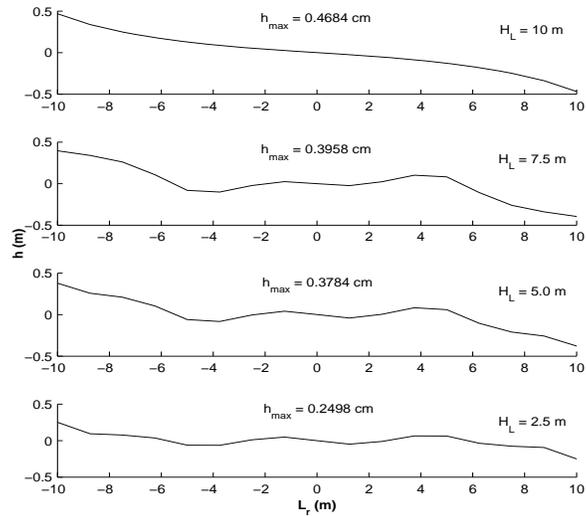


FIG. 4.13 – Ballotement de la surface libre avec IFSS

- les fluctuations de la surface libre augmentent avec l'augmentation de la hauteur de remplissage dans les deux cas d'IFS et d'IFSS ;
- l'interaction sol-structure affaiblit légèrement le ballotement de la surface libre.

4.5 Conclusion

Les résultats de l'analyse de la réponse sismique montrent que la hauteur maximale atteinte par le liquide en ballotement n'est pas négligeable, ce qui signifie que la prise en compte des fluctuations de la surface libre est d'une importance capitale lors d'une analyse sismique des réservoirs. Elle nous renseigne sur la hauteur de remplissage critique à ne pas dépasser pour éviter tout risque de déversement du liquide stocké en cas d'un tremblement de terre.

Chapitre 5

Application au cas d'un réservoir cylindrique

5.1 Introduction

Le présent et dernier chapitre est consacré pour la présentation de quelques résultats obtenus pour le cas tridimensionnel. Le réservoir en acier de forme cylindrique discrétisé en éléments Coques minces 3D avec six degrés de liberté par nœud qui représentent le champ des déplacements et des rotations des points nodaux. Le liquide est modélisé par des éléments de forme hexaédrique avec un seul degré de liberté par nœud qui représente la pression hydrodynamique. La partie du sol modélisée est un cylindre, discrétisée en 3D par des éléments hexaédriques avec trois degrés de liberté par nœud qui représentent les trois composantes du champ des déplacements.

5.2 Système étudié

Comme pour le cas bidimensionnel, la géométrie du système fluide-sol-structure est représentée par la figure (5.1), le maillage du programme développé est donné par la figure (5.2). Les caractéristiques mécaniques et géométriques du système fluide-sol-réservoir utilisées sont illustrées dans les tableaux (5.1) et (5.2).

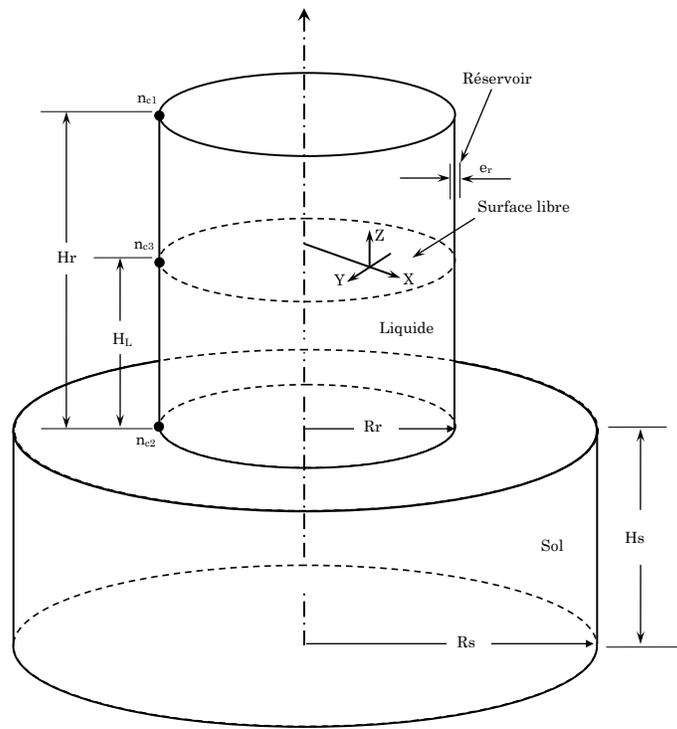


FIG. 5.1 – Système fluide-sol-structure

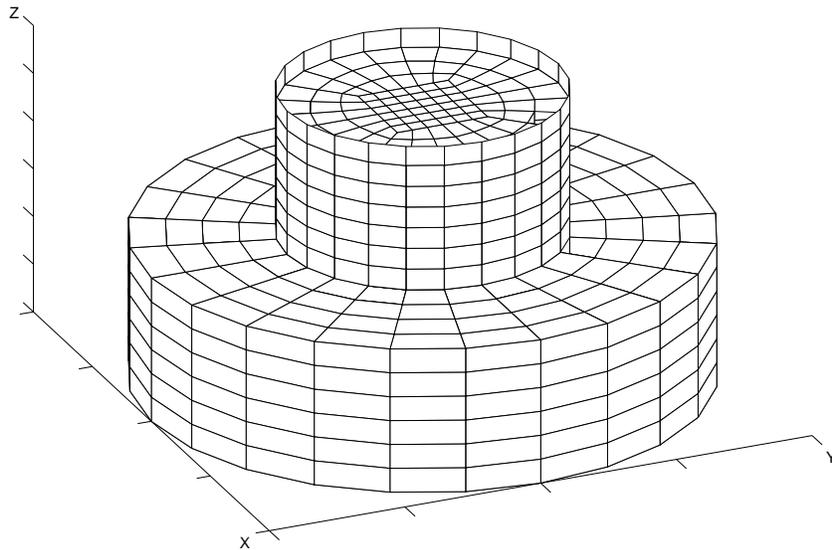


FIG. 5.2 – Maillage du système fluide-sol-structure

TAB. 5.1 – Caractéristiques mécaniques

Matériaux		
Réservoir	Masse volumique(ρ_r)(Kg/m^3)	$7.85 \cdot 10^3$
	Module de Young(E_r)(Pa)	$2.1 \cdot 10^{11}$
	Coefficient de poisson(ν_r)	0.3
	Amortissement critique(ξ_r)(%)	4
Liquide	Masse volumique(ρ_L)(Kg/m^3)	$1.0 \cdot 10^3$
	Module de compressibilité(k_0)(Pa)	$2.073 \cdot 10^9$
Sol	Masse volumique(ρ_s)(Kg/m^3)	$1.9 \cdot 10^3$
	Module de Young(E_s)(Pa)	$300 \cdot 10^6$
	Coefficient de poisson(ν_s)	0.4
	Amortissement critique(ξ_s)(%)	10

TAB. 5.2 – Caractéristiques géométriques

Géométries		
Réservoir	Rayon (R_r)(m)	variable
	Hauteur (H_r)(m)	10
	Epaisseur (e_r)(m)	0.03
Liquide	Hauteur (H_L)(m)	variable
Sol	Rayon (R_s)(m)	30
	Hauteur (H_s)(m)	20

5.3 Analyse des vibrations libres

5.3.1 Comparaison entre les résultats du programme développé et ABAQUS

Afin de valider les résultats de l'analyse des vibrations libres des systèmes couplés fluide-structure et fluide-sol-structure, les tableaux (5.3) et (5.4) illustrent les six premières périodes de vibration pour le cas d'un fluide compressible et non compressible obtenue par le programme développé et ABAQUS avec $R_r = 4m$. D'après les deux tableaux

on voit que les résultats sont relativement proches, ce qui permet la validation des résultats du programme d'éléments finis développé.

TAB. 5.3 – Périodes propres avec IFS

périodes (s)	MATLAB		ABAQUS	
	compressible	incompressible	compressible	incompressible
1	0.2041	0.2040	0.2169	0.2175
2	0.2024	0.2024	0.2157	0.2144
3	0.1844	0.1846	0.1783	0.1792
4	0.1853	0.1853	0.1783	0.1753
5	0.1503	0.1500	0.1615	0.1615
6	0.1498	0.1498	0.1615	0.1593

TAB. 5.4 – Périodes propres avec IFSS

périodes (s)	MATLAB		ABAQUS	
	compressible	incompressible	compressible	incompressible
1	0.3108	0.3100	0.3361	0.3349
2	0.3109	0.3109	0.3295	0.3265
3	0.2547	0.2549	0.2535	0.2567
4	0.2523	0.2523	0.2427	0.2405
5	0.2025	0.2026	0.1932	0.1924
6	0.2025	0.2025	0.1902	0.1901

5.4 Influence de la hauteur de remplissage sur les périodes propres

Toujours pour un réservoir de rayon $R_r = 4m$, les différents tableaux suivants montrent l'influence de la hauteur de remplissage et la compressibilité du fluide sur les six premières périodes de vibration des systèmes fluide-structure et fluide-sol-structure obtenues par le programme développé.

Analyse du système couplé fluide-structure

TAB. 5.5 – Influence de la hauteur de remplissage, cas d'un fluide compressible

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)				
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$	vide
1	0.2041	0.1434	0.1115	0.1036	0.1030
2	0.2024	0.1440	0.1115	0.1036	0.1030
3	0.1844	0.1272	0.0945	0.0859	0.0852
4	0.1853	0.1272	0.0946	0.0859	0.0853
5	0.1503	0.1120	0.0891	0.0833	0.0828
6	0.1498	0.1119	0.0890	0.0833	0.0828

TAB. 5.6 – Influence de la hauteur de remplissage, cas d'un fluide incompressible

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)				
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$	vide
1	0.2040	0.1433	0.1113	0.1035	0.1030
2	0.2024	0.1440	0.1114	0.1035	0.1030
3	0.1846	0.1270	0.0947	0.0859	0.0852
4	0.1853	0.1274	0.0946	0.0859	0.0853
5	0.1500	0.1120	0.0890	0.0832	0.0828
6	0.1498	0.1119	0.0890	0.0832	0.0828

Analyse du système couplé fluide-sol-structure

TAB. 5.7 – Influence de la hauteur de remplissage, cas d'un fluide compressible

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)				
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$	vide
1	0.3108	0.2217	0.2026	0.2026	0.2026
2	0.3109	0.2224	0.1795	0.1795	0.1795
3	0.2547	0.2026	0.1656	0.1557	0.1557
4	0.2523	0.1885	0.1661	0.1529	0.1532
5	0.2025	0.1794	0.1554	0.1507	0.1515
6	0.2025	0.1866	0.1530	0.1448	0.1423

TAB. 5.8 – Influence de la hauteur de remplissage, cas d'un fluide incompressible

périodes (s)	Hauteur de remplissage (m)				
	$0.95H_s$	$0.75H_s$	$0.50H_s$	$0.25H_s$	vide
1	0.3100	0.2217	0.2026	0.2026	0.2026
2	0.3109	0.2223	0.1794	0.1794	0.1794
3	0.2549	0.2026	0.1658	0.1558	0.1558
4	0.2523	0.1883	0.1661	0.1530	0.1530
5	0.2026	0.1794	0.1558	0.1507	0.1507
6	0.2025	0.1868	0.1530	0.1449	0.1428

Il en résulte à partir de ces tableaux que :

- L’interaction hydrodynamique a pour effet principal d’allonger les périodes de vibration du système, notamment pour les taux de remplissage supérieur à 50 % et ce, indépendamment de l’ISS.
- La compressibilité du liquide n’influe pas sur les résultats des vibrations libres dans les deux cas d’interaction fluide-structure et fluide-sol-structure.
- La prise en compte des effets d’interaction sol-structure allonge les périodes de vibration et cet allongement revient essentiellement à la contribution de la masse de la partie du sol modélisé.

5.5 Analyse de la réponse sismique

Le système analysé est représenté sur la figure (5.1) en prenant toujours une hauteur de remplissage de $0.95H_r$, la même excitation sismique considérée dans le chapitre précédent est retenue ici. Les réponses sont typiquement données pour trois nœuds de contrôle de la figure (5.1) choisis judicieusement comme suit : n_{c1} situé sur le sommet du réservoir, n_{c2} situé à la base du réservoir au contact fluide structure et n_{c3} situé à la surface libre du liquide au contact fluide-structure.

5.5.1 Réponse temporelle

Pour les deux cas d’interaction fluide-structure et fluide-sol-structure, Les figures suivantes montrent respectivement l’évolution dans le temps des déplacements, accélérations, et pressions hydrodynamiques sous l’excitation sismique considérée :

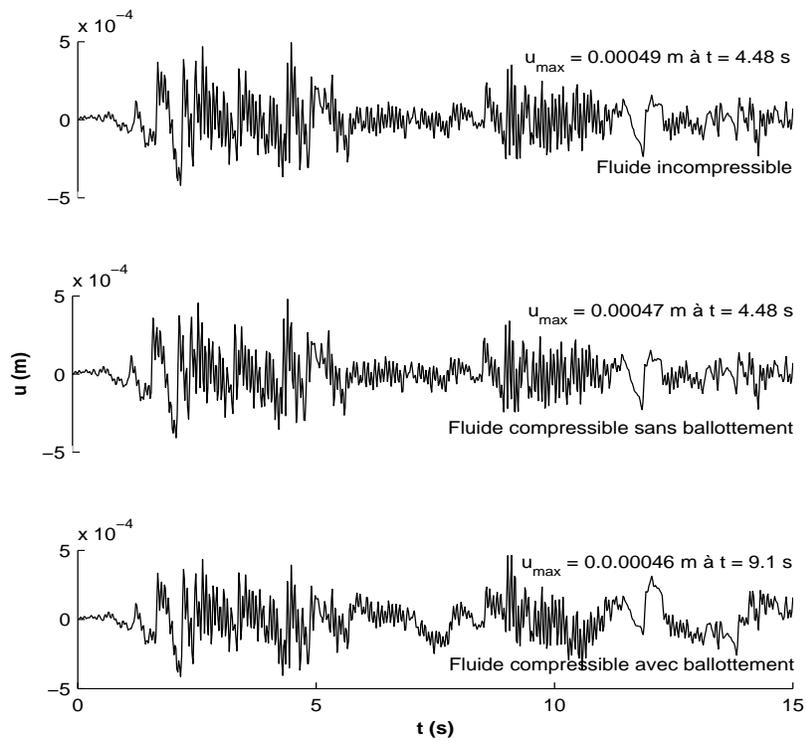


FIG. 5.3 – Déplacement au nœud n_{c1} avec IFS

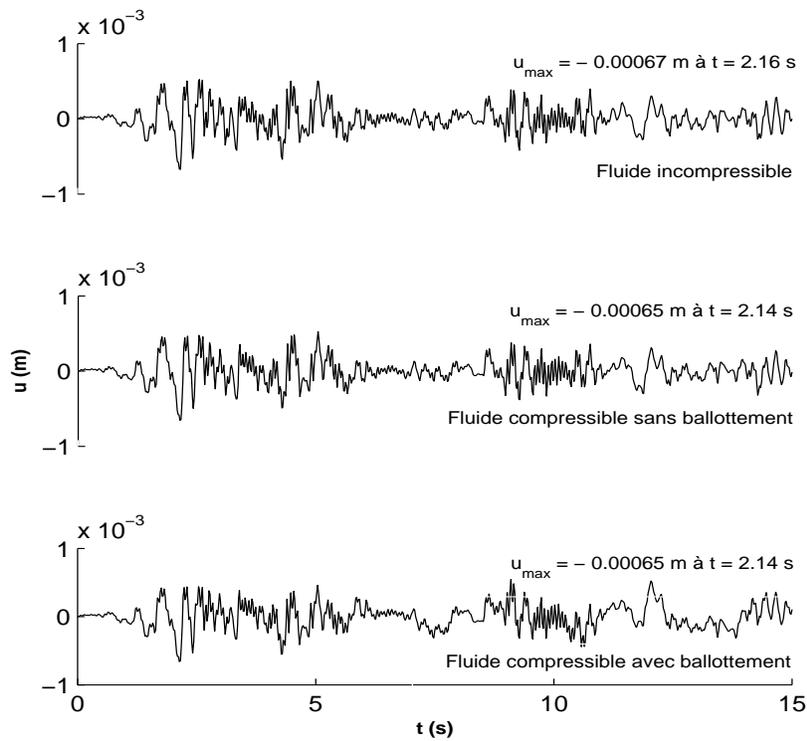


FIG. 5.4 – Déplacement au nœud n_{c1} avec IFSS

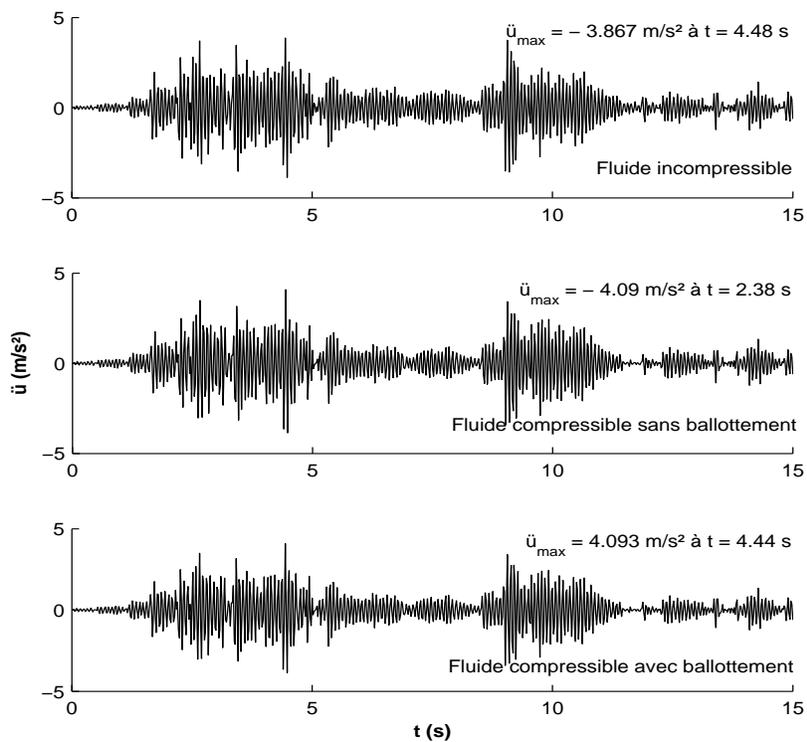


FIG. 5.5 – Accélération au nœud n_{c1} avec IFS

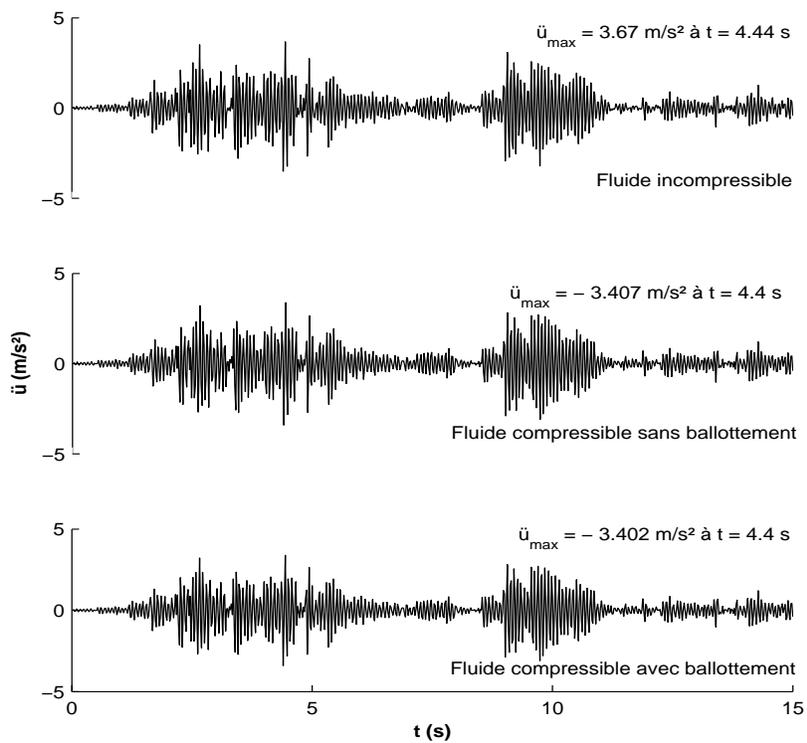


FIG. 5.6 – Accélération au nœud n_{c1} avec IFSS

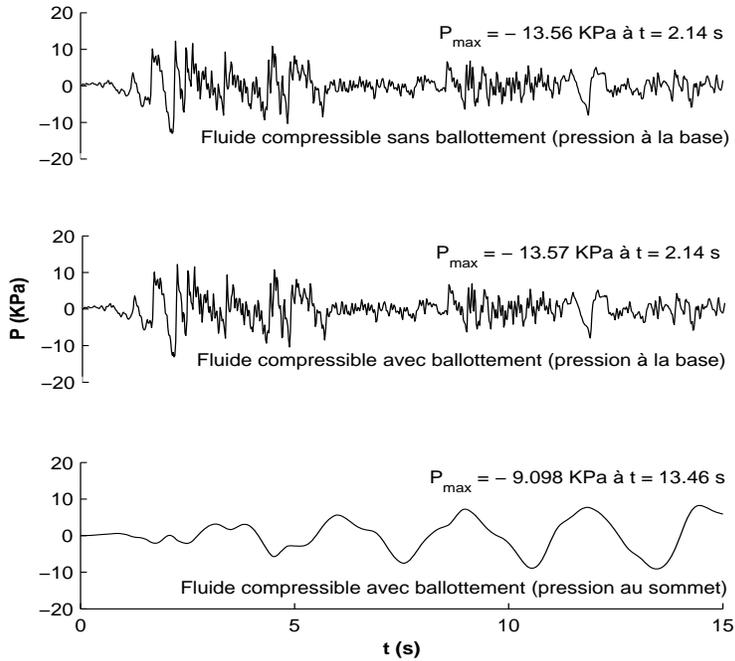


FIG. 5.7 – Pression au nœud n_{c2} n_{c3} avec IFS

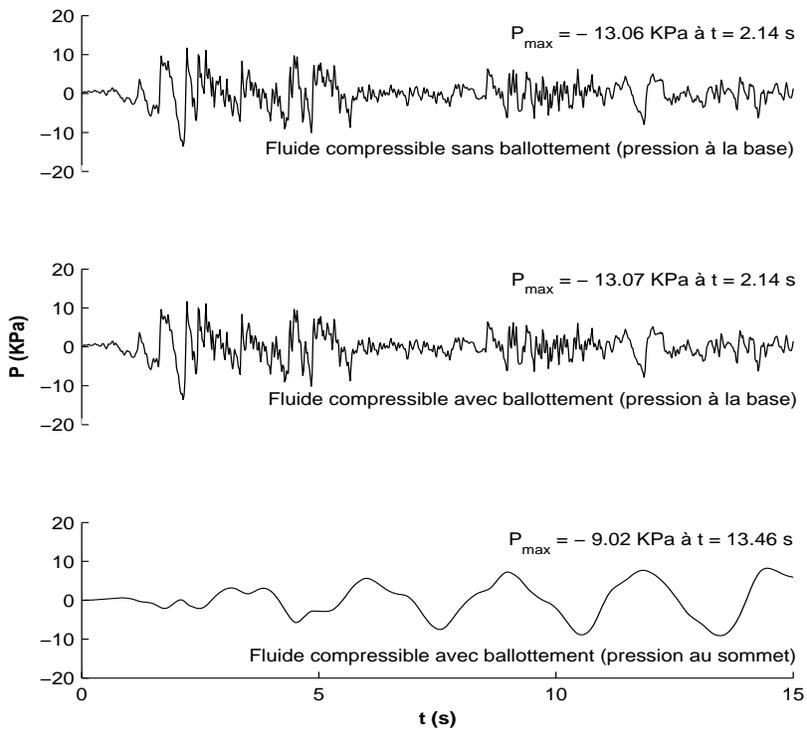


FIG. 5.8 – Pression au nœud n_{c2} et n_{c3} avec IFSS

On voit que la compressibilité n'a pas d'effet sur la réponse de la structure en termes de valeurs maximales des déplacements et d'accélération. Aussi les allures des réponses temporelle restent les mêmes. Identiquement à la compressibilité, le ballonnement de la surface libre influe peu sur les déplacements et les accélérations maximaux. Néanmoins, on remarque à partir des deux figures (5.3) et (5.4) (fluide compressible avec ballonnement) que le nœud n_{c1} vibre autour d'une position d'équilibre variable dans le temps dû aux fluctuations de la surface libre. Pour les pressions aussi, on remarque que l'effet de ballonnement influe peu sur les valeurs maximales à la base du réservoir.

Pour le cas d'interaction fluide-sol-structure, les résultats montrent globalement que l'ISS fait diminuer les fréquences de la réponse sismique des déplacements, les autres paramètres de réponse (accélérations et pressions) restent approximativement inchangés. En termes de valeurs maximales, on constate aussi que seuls les déplacements relatifs subissent une amplification due à l'ISS, ils sont pratiquement amplifiés de 40%. On précise qu'il s'agit des déplacements relatifs par rapport à la base du réservoir. En ce qui concerne les pressions, elles diminuent en valeurs sous l'effet de l'ISS. On souligne bien que cette remarque ne peut être généralisée dans tous les cas de dimension des réservoirs, types du sol et de l'excitation sismique. Les valeurs des pics dépendent fortement des fréquences de vibrations du système et du contenu fréquentiel de l'accélérogramme.

5.5.2 Distribution des pressions hydrodynamiques

Les résultats précédant ne concernent que les trois zones de contrôle sommet et base du réservoir ; les deux figures (5.9) et (5.10) montrent la distribution du coefficient de pression hydrodynamique C_p sur la paroi du réservoir entre les nœuds n_{c1} et n_{c2} dans les deux cas d'ISS pris en compte ou non. Les résultats sont donnés pour des rapports R_r/H_L différents, les distributions correspondantes aux instants où les pressions sont maximales à la base du réservoir.

Les résultats montrent que les valeurs des pressions hydrodynamiques, s'exerçant sur les proies latérales, sont proportionnelles au rapport R_r/H_L . On remarque aussi que lorsque les ondes de surface sont prises en compte, les valeurs des pressions changent de signe au sommet du réservoir. Cela peut provoquer des efforts de cisaillement dans les parois du réservoir.

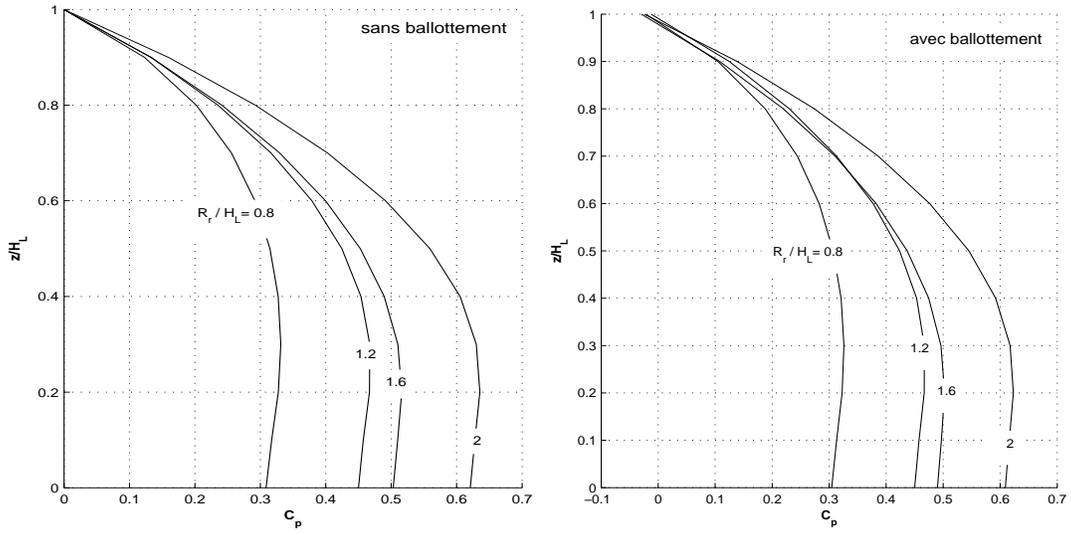


FIG. 5.9 – Coefficient de pression hydrodynamique avec IFS

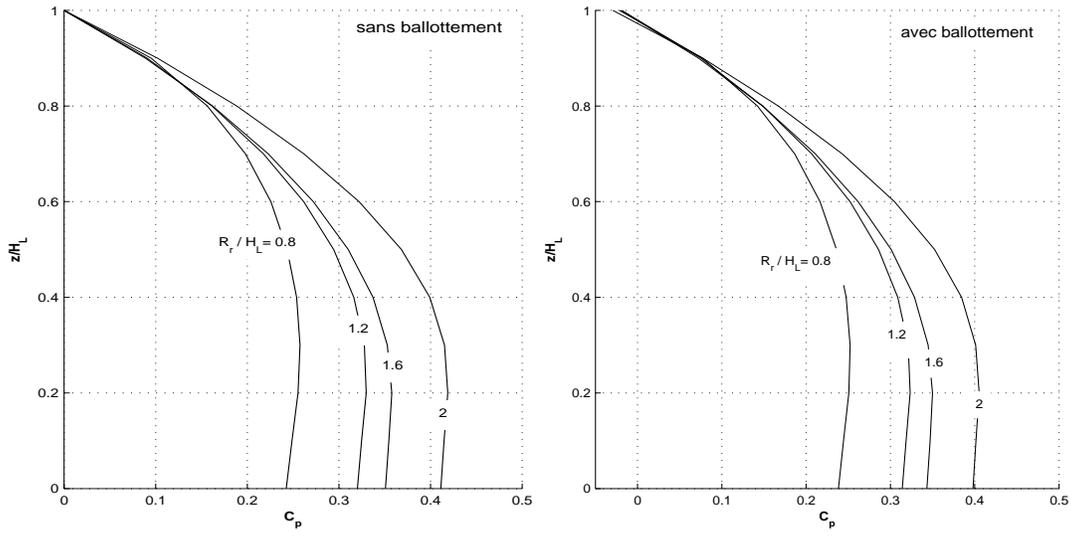


FIG. 5.10 – Coefficient de pression hydrodynamique avec IFSS

Pour mieux voir l'influence de l'interaction sol-structure sur la distribution des pressions, la figure (5.11) montre la distribution du coefficient de pression hydrodynamique C_p sur la droite, entre les deux nœuds n_{c1} et n_{c2} , avec et sans la prise en compte des effets du ballottement de la surface libre.

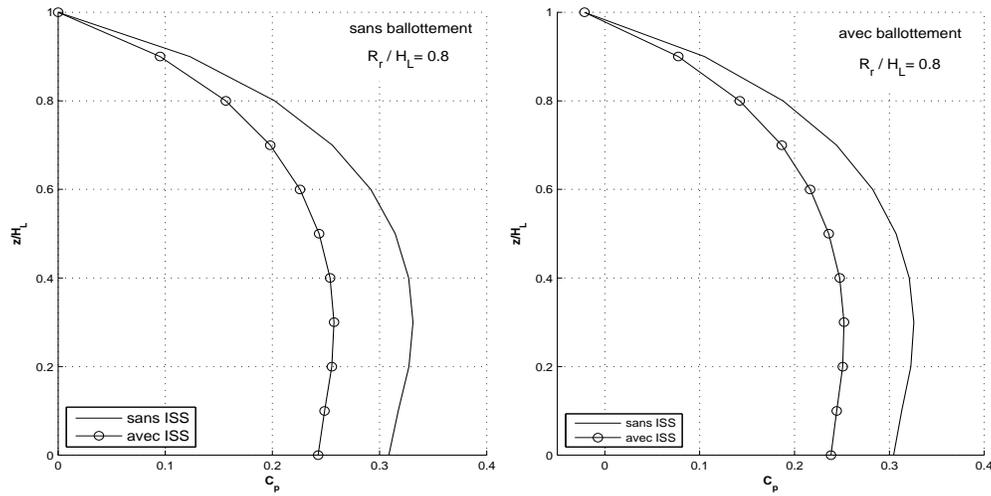


FIG. 5.11 – Influence de l'interaction sol-structure sur la distribution des pressions

la figure (5.11) montre bien que l'atténuation des valeurs des pressions par l'interaction réservoir-sol s'effectue au long de toute la hauteur. Par ailleurs, comme résultats complémentaires on montre sur la figure (5.12) la distribution des pressions au long du périmètre du réservoir, prises au niveau de la base.

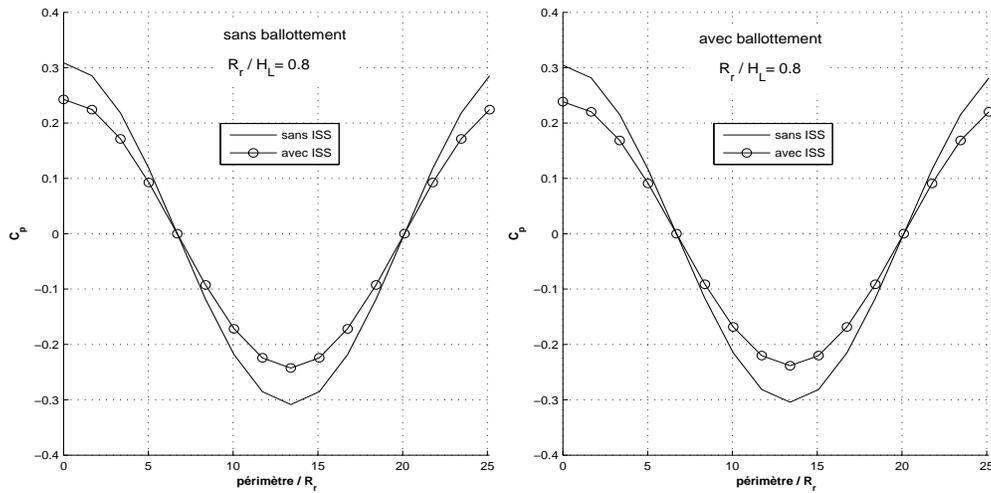


FIG. 5.12 – Distribution des pressions à la base en fonction du périmètre

Comme peut être escomptée, cette distribution des pressions hydrodynamiques n'est pas symétrique, elle est maximale dans la direction d'excitation sismique et s'annule dans la direction perpendiculaire. On constate aussi l'atténuation due à l'ISS.

5.5.3 Etude des fluctuations de la surface libre

Afin de raffiner l'étude des fluctuations de la surface libre, on examine l'influence de la hauteur de remplissage sur les déplacements des points de la surface initiale. Les figures (5.13) et (5.14) représentent respectivement pour les deux cas d'ISS et d'IFSS, l'élévation maximale de la surface libre par rapport à la position initiale du liquide en fonction de la hauteur de remplissage. Les résultats sont donnés pour un réservoir de 10m de hauteur avec un rayon de 8m.

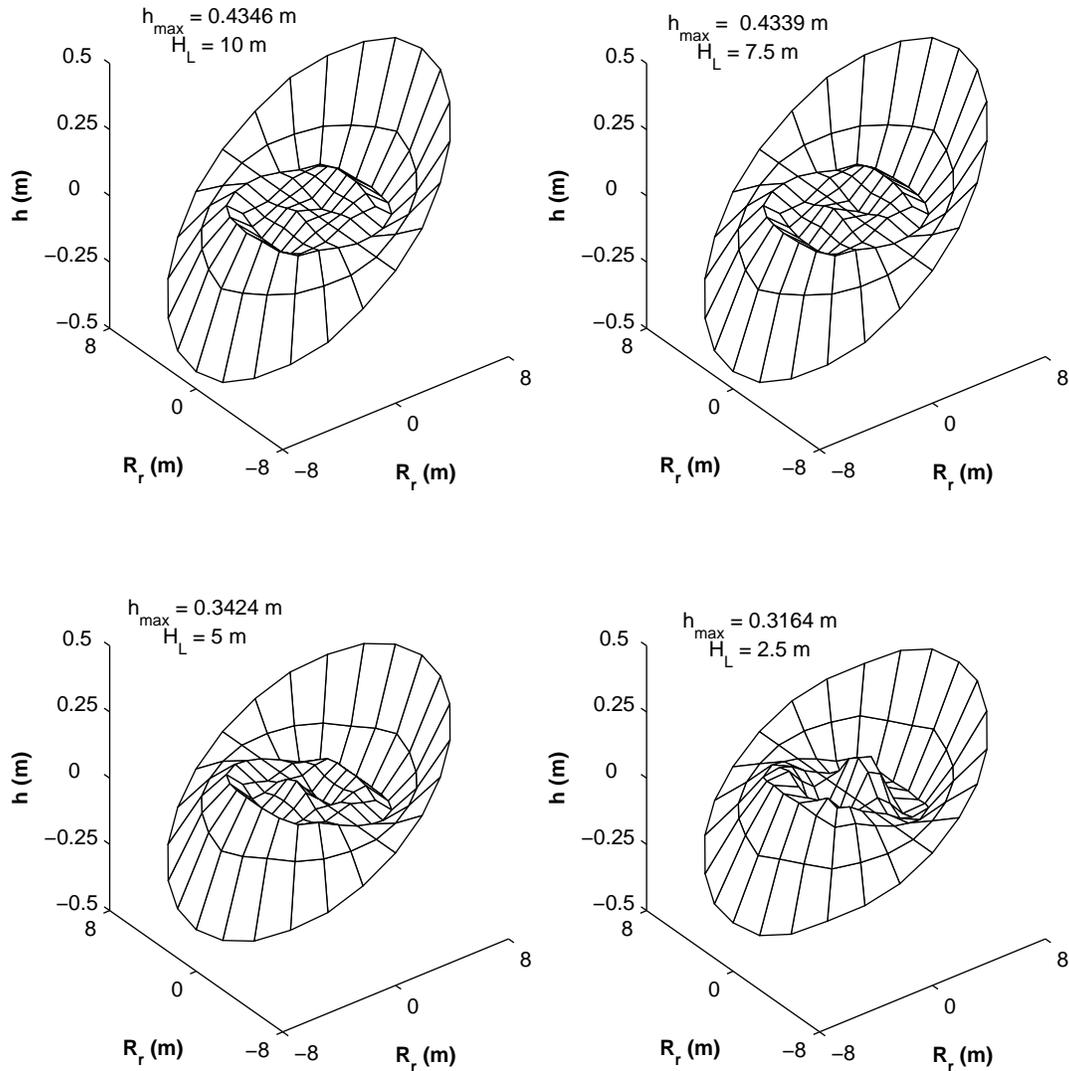


FIG. 5.13 – Fluctuations de la surface libre sans ISS

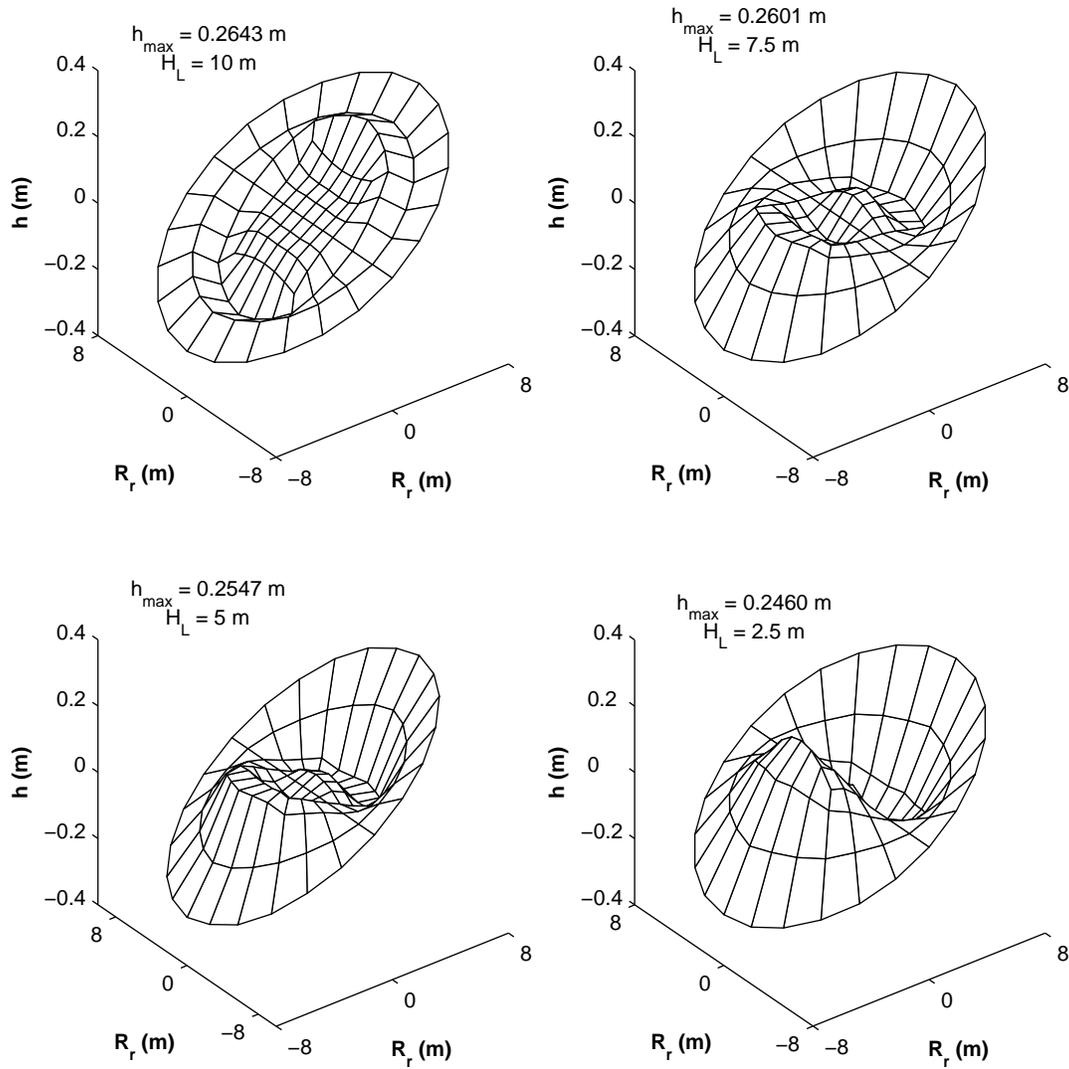


FIG. 5.14 – Fluctuations de la surface libre avec ISS

On voit que ces fluctuations sont d'autant plus importantes que la hauteur de remplissage soit importante, Et que l'interaction sol-structure affaiblit leurs valeurs.

5.6 Conclusion

La modélisation du système fluide-sol-structure en trois dimensions engendre des matrices de grande tailles, et comme la compressibilité du fluide n'influe pas sur les résultats de la réponse sismique, il est très intéressant de considérer uniquement le cas d'un fluide incompressible et d'introduire les effets du ballonnement de la surface libre en utilisant une condensation statique pour garder uniquement les éléments non nuls dans la matrice masse fluide.

Conclusion générale

Le travail réalisé durant ce mémoire nous a permis d'étudier les effets d'interactions fluide-sol structure sur le comportement dynamique des réservoirs de stockages, à deux et trois dimensions, en utilisant la méthode des éléments finis. Le modèle tridimensionnel permet d'étudier les réservoirs de forme cylindriques, concernant le cas bidimensionnel le modèle s'applique pour des réservoirs rectangulaires en déformation plane. Plusieurs paramètres ont été examinés, entre autre la compressibilité du fluide, les effets de ballonnement de la surface libre du liquide ainsi que ceux de l'interaction sol-structure.

A cet effet, un programme de calcul par éléments de couplage fluide-sol-structure a été développé sous MATLAB et a été validé par rapport aux résultats obtenus par des modèles implantés dans le logiciel ABAQUS. L'examen des périodes des vibrations libres ainsi que quelques paramètres de réponse sous un chargement sismique ont montré que :

- L'interaction hydrodynamique a pour effet principal d'allonger les périodes de vibration du système notamment pour les taux de remplissage supérieurs à 50 % et ce indépendamment de l'ISS ;
- La compressibilité du liquide n'influe pas sur les résultats des vibrations libres, et de la réponse sismique, dans les deux cas d'interaction fluide-structure et fluide-sol-structure ;
- La prise en compte des effets d'interaction sol-structure allonge les périodes de vibration, et cet allongement est dû essentiellement à la contribution de la masse de la partie du sol modélisé. Concernant la réponse sismique, en termes de valeurs maximales, on constate que seuls les déplacements relatifs subissent une amplification due à l'ISS, ils sont pratiquement amplifiés de 25 % ;
- Les valeurs des pressions hydrodynamiques diminuent avec la prise en compte des effets d'interaction sol-structure ;
- Le ballonnement de la surface libre peut changer, dans le temps, la position d'équilibre autour de laquelle vibrent les parois du réservoir ;
- Le ballonnement de la surface libre augmente avec l'augmentation de la hauteur de remplissage et diminue avec la prise en compte des effets d'interaction sol-structure ;

- Les valeurs des pressions hydrodynamiques sur les parois du réservoir sont proportionnelles aux rapports R_r/H_L et L_r/H_L respectivement pour le cas d'un réservoir cylindrique et rectangulaire ;
- Les fluctuations de la surface libre du liquide se font à basses fréquences ;
- L'étude des fluctuations de la surface libre est d'une importance capitale lors d'une analyse sismique des réservoirs. Elle nous renseigne sur la hauteur de remplissage critique à ne pas dépasser pour éviter tout risque de déversement du liquide stocké en cas d'un tremblement de terre.

Les perspectives de ce présent travail sont :

- La prise en compte des effets d'interaction sol-structure en utilisant les éléments de contact et l'introduction d'un modèle de comportement élastoplastique pour le sol ;
- La prise en compte de la non linéarité matériel et géométrique de la structure du réservoir ;
- La prise en compte des effets des fluctuations de la surface libre pour le cas d'un fluide incompressible ;
- Prise en compte de l'interaction fluide-structure en utilisant un couplage éléments finis-éléments de frontières ;
- Prise en compte de l'interaction sol-structure en utilisant toujours un couplage éléments finis-éléments de frontières permettant la prise en compte de la partie infinie du sol de fondation ;
- Modélisation du fluide par la méthode des éléments discrets (couplage éléments finis-éléments discrets) ;
- Chercher une formule analytique pour le calcul de la distribution des pressions hydrodynamiques pour le cas d'un réservoir flexible de forme cylindrique ;

Bibliographie

- [1] Abaqus. *Theory Manual, Version 6.7*. Simulia, 2007.
- [2] T. T. Abdel-Fattah, H. A. Hodhod, and A.Y. Akl. A novel formulation of infinite elements for static analysis. *Computers and structures*, 258(77) :371–379, 2000.
- [3] A. Ahmad, O. Terraz, S. Adly, and D. Ghazanfarpour. Stabilisation par filtrage de méthodes d’intégration explicites. In *Journées de l’Association Francophone d’Informatique Graphique*, Bordeaux, France, 2006.
- [4] R. Ansoorge. *Mathematical Models of Fluid Dynamics*. WILEY-VCH GmbH & Co.KGaA, 2003.
- [5] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentie Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [6] K. J. Bathe and E. L. Wilson. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentie Hall, 1976.
- [7] A. A. Becker. *The Boundary Element Method in Engineering*. Copyright, 1992.
- [8] P. Bettess. *Infinite Elements*. Penshaw Press, 1992.
- [9] C. A. Brebbia and J. Dominguez. *Boundary Element Methods An Introductory Course, second edition*. WIT press, 1992.
- [10] T. Cebeci, J. Rshao, F. Kafyeke, and E. Laurendeau. *Computational Fluid Dynamics for Engineers*. Horizons Publishing Inc., Long Beach, California, 2005.
- [11] J. R. Cho and H. W. Lee. Numerical study on liquid sloshing in baffled tank by nonlinear finite element method. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 193 :2581–2598, 2004.
- [12] J. R. Cho, H. W. Lee, and K. W. C. Cawley. Free vibratio analysis of baffled liquidstorage tanks by the structural-acoustic finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 258(5) :847–866, 2002.
- [13] J.R. Cho, H.W. Lee, and S.Y. Ha. Finite element analysis of resonant sloshing response in 2-d baffled tank. *Journal of Sound and Vibration*, 288 :829–845, 2005.
- [14] R. W. Clough and J. Penzien. *Dynamics of Structures*. Computers & Structures, 2003.
- [15] W.J.T. Daniel. Modal methods in finite element fluid-structure eigenvalue problems. *J. Num. Meth. Eng.*, (15) :1161–1175, 1980.

- [16] A. W. Date. *Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2005.
- [17] G. Dhatt and G. Touzout. *Une présentation de la Méthode des Eléments Finis*. Maloine S. A., 1984.
- [18] L. Dongming and L. Pengzhi. A numerical study of three dimensional liquid sloshing in tanks. *Journal of Computational Physics*, 227 :3921–3939, 2007.
- [19] B. Edoardo, S. Fulvio, and P. Fabio. A partition method for the solution of a coupled liquid-structure interaction problem. *Applied Numerical Mathematics*, 51 :463–475, 2004.
- [20] L. L. Faulkner. *Boundary Methods Elements, Contours, and Nodes*. Taylor & Francis Group, LLC, 2005.
- [21] F. Fery. *Analyse des Structures et Milieux Continus, Mécanique des solides*. Traité de Génie Civil, Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, Volume 3.
- [22] J. H. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2002.
- [23] A. Filiatrault. *Eléments de Génie Parasismique et de Calcul Dynamique des Structures*. Ecole Polytechnique de Montreal, 1996.
- [24] A. Gedikli and M. E. Erguven. Evaluation of sloshing problem by variational boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27 :935–943, 2003.
- [25] T. J. Ghung. *Computational Fluid Dynamics*. Combrige University Press, 2002.
- [26] P. B. GONCALVES and N. R. S. S. RAMOS. Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid. *Journal of Sound and Vibration*, 195 :318–333, 1996.
- [27] A. Hakan and U. N. Erdem. Sloshing in a three-dimensional rectangular tank : Numerical simulation and experimental validation. *Ocean Engineering*, 33 :2135–2149, 2006.
- [28] Akyildiz. Hakan and Unal. Erdem. Experimental investigation of pressure distribution on a rectangular tank due to the liquid sloshing. *Ocean Engineering*, (32) :1503–1516, 2005.
- [29] P. Y. Hicher and J. Shao. *Elastoplasticité des sols et des roches*. Modeles de comportement des sols et des roches 1, Lavoisier, 2002.
- [30] H. B. Hugo, H. Z. Ernesto, and A. A. Alvaro. Nonlinear sloshing response of cylindrical tanks subjected to earthquake ground motion. *Engineering Structures*, 29 :3364–3376, 2007.
- [31] D. V. Hutton. *Fondamental Finite Element Analysis*. McGRAW-HILL, 2004.
- [32] C. V. Juan, A. P. Carlos, and A. G. Luis. Free vibratio analysis of baffled liquidstorage tanks by the structural-acoustic finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 312 :442–460, 2008.

- [33] G. R. Karpurapu and R. J. Bathurst. Comparative analysis of some geomechanics problems using finite and infinite element methods. *Computers and Geotechnics*, (5) :269–284, 1988.
- [34] M. H. B. M. Khani. *Dynamic soil-structure interaction analysis using the scaled boundary finite-element method*. Phd thesis, The University of New South Wales Sydney, Australia, 2007.
- [35] A. Khannene. *Méthode des Eléments Finis, Enoncé des Principes de base*. Office Des Publications Universitaires, 1997.
- [36] M. R. Kianoush and J. Z. Chen. Effect of vertical acceleration on response of concrete rectangular liquid storage tanks. *Engineering Structures*, 28 :704–715, 2005.
- [37] J. Kiusalaas. *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*. Cambridge University Press, New York, 2005.
- [38] J. S. Larry. *Allied Finite Element Analysis, Second Edition*. John Wiley & Sons, 1984.
- [39] R. Livaoglu and A. Dogangun. Affect of foundation embedment on seismic behavior of elevated tanks considering fluid-structure-soil interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, (27) :855–853, 2007.
- [40] G. R. Liw and S. S. Quek. *The Finite Element Method*. Elsevier, 2003.
- [41] E. Mesquita and R. Pavanello. Numerical methods for the dynamics of unbounded domains. *Comp. Appl. Math*, 1(77) :1–26, 2005.
- [42] D. T. Nguyen. *Finite Element Methods : Parallel-Sparse Statics and Eigen-Solutions*. Springer, 2006.
- [43] K. V. Nguyen. *Etude des effets de site dus aux conditions topographiques et géotechniques par une méthode hybride éléments finis/éléments frontières*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, 2005.
- [44] U.S. Army Corps of Engineers. *Time-History Dynamic Analysis of Concrete Hydrolic Structures*. Departement of army, Washington, 2003.
- [45] R. Ohayon. Vibrations of fluid structure coupled systems. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 32(15) :1343–1344, July 1996.
- [46] A. Pecker. *Dynamique des structures et des ouvrages*. Ecole nationale des ponts et chaussees, France, 2006.
- [47] L. Ramdani and R. Bendahmane. *Etude de la réponse sismique des réservoirs de stockage avec interaction fluide-structure par la méthode des éléments finis*. Mémoire de fin d'étude, Université Mira. A. de Bejaia, Algerie, 2006.
- [48] L. Ramdani and A. Seghir. Modélisation du comportement dynamique des réservoirs de stockage. In *International Conference on Numerical Computation in Geotechnical Engineering*, Université 20 Août 1955,Skikda,Algérie, 2008.
- [49] L. Ramdani and A. Seghir. Étude de la réponse sismique des réservoirs de stockage rectangulaires. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 13 :33–52, 2009.

- [50] L. Ramdani, A. Seghir, and A. Tahakourt. Simulation numérique du comportement dynamique des réservoirs de stockage rectangulaires avec interaction fluide-sol-structure. In *Colloque International- Caractérisation et Modélisation des Matériaux et Structures*, Université M. Mammeri de Tizi-Ouzou, Algérie, 2008.
- [51] M. Santanu and K. P. Sinhamahapatra. Coupled slosh dynamics of liquid filled containers using pressure based finite element method. In iCEER, editor, *Exploring Innovation in Education and Research*, Tainan, Taiwan, 2005.
- [52] J. S. Schotte and R. Ohayon. Effect of gravity on a free free elastic tank partially filled with incompressible liquid. *Journal of Fluids and Structures*, 18 :215–226, May 2003.
- [53] A. Seghir. *Investigation des effets d'interaction sismique fluide-structure par couplage éléments-finis éléments-infinis*. Thèse de magister, Ecole National Polytechnique, Alger, 1999.
- [54] S. R. Singirsu. *The Finite Element Method In Engineering*. Elsevier Science & Technology Books, 2004.
- [55] T. G. Sitharam and K. I. V. Vijay. Non-linear analysis of geomechanical problems using coupled finite and infinite elements. *Geotechnical and Geological engineering*, (16) :129–149, 1998.
- [56] E. J. Taft and Z. Nashed. *The Navier and Stokes Equation : Theory and numerical methods*. Marcel Dekker, Inc. New York. Basel, 2002.
- [57] B. Tilliouine and A. Seghir. Sur la symétrisation du problème de vibrations des systèmes couples fluide-structure. In AFPS, editor, *Colloque national N°5, Cachan , France*, pages 860–867, Paris, France, October 1999.
- [58] P. Trompette. *Mécanique Des Structures par la méthode des éléments finis statique et dynamique*. Masson, 1992.
- [59] M. N. Viladkar, J. Noorzaeei, and P. N. Godbole. Behaviour of infinite elements in an elasto-plastic domain. *Computers and structures*, (4) :337–342, 1994.
- [60] C.Z. Wang and B.C. Khoo. Finite element analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problems in random excitations. *Ocean Engineering*, 32 :107–133, 2004.
- [61] E. Wilson. *Three dimensional static and dynamic analysis of structures ; A physical approach with emphasis on earthquake engineering*. Computer and Structures, 2001.
- [62] E. L. Wilson. *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*. Third Edition, Computers & Structures, Inc. Berkeley, California, USA, 2002.
- [63] W. Y. Yang, w. Cao, T. Chung, and J. Morris. *Applied Numerical Methods using MATLAB*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.
- [64] C. B. Yun, D. K. Kim, and J. M. Kim. Analytical frequency dependent infinite elements for soil-structure interaction analysis in two-dimensional medium. *Engineering Structures*, (22) :258–271, 2000.
- [65] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *La Méthode des Eléments Finis, Formulation de base et problème linéaire*. Afnor, 1991.

- [66] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method, Fifth edition, Volume1 : The Basis*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [67] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method, Fifth edition, Volume3 : Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [68] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

Annexe A. Éléments utilisées

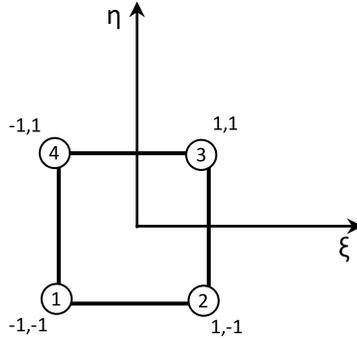
Éléments linéiques



$$N_1 = 1/2(1 - \xi)$$

$$N_2 = 1/2(1 + \xi)$$

Éléments à deux dimensions



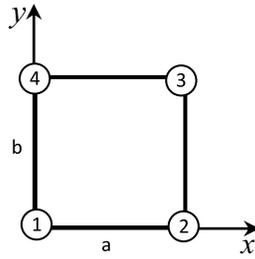
$$N_1 = 1/4(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = 1/4(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = 1/4(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = 1/4(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Éléments coques à trois dimensions



Les éléments Shell utilisés sont de type coques minces peu profondes, qui sont un assemblage entre des éléments plaques minces (plaques de Kirchhoff) et des éléments membranes. Les éléments membranes travaillent en contraintes planes (problème de classe C^0) donc ils sont modélisés par les mêmes éléments quadrilatéraux présentés précédemment. Par contre, pour le cas des plaques minces en flexion le problème est de classe C^1 , donc le polynôme d'interpolation est différent, celui utilisé dans le programme MATLAB développé est fondé sur la base polynomiale suivantes :

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3$$

les fonctions de forme découlant de ce type d'éléments s'écrivent donc :

$$N_1 = (-a + x)(b - y)(2b^2x^2 - b^2ax - a^2b^2 - ya^2b + 2y^2a^2)/(a^3b^3)$$

$$N_2 = -y(b - y)^2(-a + x)/(ab^2)$$

$$N_3 = -x(-a + x)^2(b - y)/(a^2b)$$

$$N_4 = -x(b - y)(-3b^2ax + 2b^2x^2 - ya^2b + 2y^2a^2)/(a^3b^3)$$

$$N_5 = xy(b - y)^2/(ab^2)$$

$$N_6 = -x^2(-a + x)(b - y)/(a^2b)$$

$$N_7 = y(-a + x)(2b^2x^2 - b^2ax + 2y^2a^2 - 3ya^2b)/(a^3b^3)$$

$$N_8 = y^2(-a + x)(b - y)/(ab^2)$$

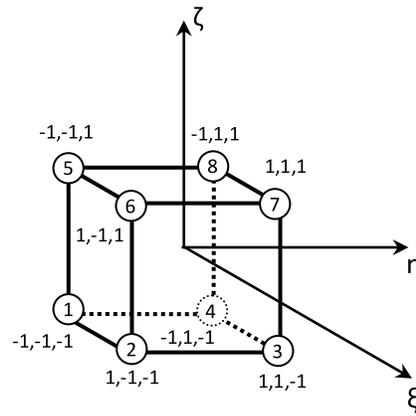
$$N_9 = -xy(-a + x)^2/(a^2b)$$

$$N_{10} = -xy(a^2b^2 - 3b^2ax - 3ya^2b + 2b^2x^2 + 2y^2a^2)/(a^3b^3)$$

$$N_{11} = -xy^2(b - y)/(ab^2)$$

$$N_{12} = -x^2y(-a + x)/(a^2b)$$

Éléments à trois dimensions



$$N_1 = 1/8(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_2 = 1/8(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_3 = 1/8(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_4 = 1/8(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_5 = 1/8(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_6 = 1/8(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_7 = 1/8(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_8 = 1/8(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

Annexe B. Matrices

Les matrices d'élasticité D et celles de déformation B utilisés dans les programmes sont :

Éléments quadrilatéraux linéaires

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \dots\dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots\dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots\dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \end{bmatrix}, n=4$$

Déformations planes (modélisation du sol et du réservoir en 2D)

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ sym. & 1 & 0 \\ & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Contraintes planes (éléments membranes)

$$D = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ sym. & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Éléments plaque

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \dots\dots & \frac{\partial^2 N_n}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \dots\dots & \frac{\partial^2 N_n}{\partial x^2} \\ \frac{2\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & \dots\dots & \frac{2\partial^2 N_n}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, n=12$$

$$D = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ sym. & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Eléments hexaédriques

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \dots\dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \dots\dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \dots\dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \dots\dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots\dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dots\dots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad n=8$$

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & \nu & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Annexe C. points de quadrature de Gauss

Les coordonnées ξ_i , η_i et ζ_i ainsi que les poids de Gauss w_i utilisés pour l'intégration numérique sont :

Intégration à une dimension (voir Annex A. figure 1)

ξ_i	0.5775	-0.5775
w_i	1.0	1.0

Intégration à deux dimensions (voir Annex A. figure 2)

ξ_i	0.8164	-0.8164	0	0
η_i	0	0	0.8164	-0.8164
w_i	1.0	1.0	1.0	1.0

Remarque

Pour les éléments plaques, c'est l'intégration analytique qui est utilisée.

Intégration à trois dimensions (voir Annex A. figure 4)

ξ_i	-0.5774	0.5774	0.5774	-0.5774	-0.5774	0.5774	0.5774	-0.5774
η_i	-0.5774	-0.5774	0.5774	0.5774	-0.5774	-0.5774	0.5774	0.5774
ζ_i	-0.5774	-0.5774	-0.5774	-0.5774	0.5774	0.5774	0.5774	0.5774
w_i	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
