République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle

Mémoire de Magister

En
Mathématiques Appliquées

Option

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Développement en série et stabilité forte du système M/M/1/N

Présenté par :
M^elle Zina Hamoudi

Devant le jury composé de :

Président	M^r M. O. Bibi	Professeur	Université de Béjaïa
Rapporteur	M^r D. Aïssani	Professeur	Université de Béjaïa
Examinateur	M^r B. Heidergott	Professeur	Université d'Amsterdam
Examinateur	M^r S. Adjabi	Maître de conf.	Université de Béjaïa
Invité	M^me F. Aoudia	C.C.	Université de Béjaïa

Béjaïa 2008.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à mon directeur de thèse Mr. D. Aissani pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, sa disponibilité, sa patience et ses précieux conseils.

Je remercie également Mr. M. O. Bibi pour avoir accepté de présider le jury, Mr. B. Heidergott et Mr. S. Adjabi pour avoir accepté de juger ce travail et Mme. F. Aoudia de m'avoir honoré en acceptant l'invitation.

Je n'oublierai pas de remercier vivement tous les membres de ma famille et mes amis pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus sincères à mes enseignants, tous mes collègues pour leurs aide et soutiens et tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail, notamment Mr Mouhoubi Zahir et Mr Rabta Boualem.

Que tous ceux qui ont de près ou de loin contribué à l'aboutissement de ce travail trouvent ici l'expression de mes vifs remerciements.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À la mémoire de mes grands parents

À la mémoire de mon oncle

À ma famille, particulièrement à ma maman

À mes amis

À mes enseignants

Zina

SI TU PEUX

Si tu peux voir détruit l'ouvrage de ta vie
Et sans dire un mot te mettre à rebâtir
Ou perdre en un seul coup le gain de cent parties
Sans un geste et sans un soupir

Si tu sais méditer, observer et connaître
Sans devenir jamais sceptique ou destructeur
Rêver sans laisser ton rêve être ton maître
Penser sans n'être que penseur

Si tu peux être dur sans jamais être en rage
Si tu peux être brave sans être impudent
Si tu sais être bon, si tu sais être sage,
Sans être moral ni pédant

Si tu peux rencontrer triomphe après défaite
Et recevoir ces deux menteurs d'un même front
Si tu peux conserver ton courage et ta tête
Quant tous les autres les perdront,

Alors, les rois, la chance et la victoire
Seront à tout jamais tes esclaves soumis
Et ce qui vaut bien mieux que les rois et la gloire
TU SERAS UN HOMME MON FILS

RUDYAR KIPLING.

Table des matières

Introduction générale

L'étude de la stabilité occupe une place remarquable dans la théorie qualitative des systèmes dynamiques, ainsi que dans celle des systèmes stochastiques. La stabilité se définit comme étant la capacité du système à résister aux perturbations. Un système est dit stable, si écarté de sa position d'équilibre (perturbé), il tend à y revenir. Si le système idéal est stable, le système réel est comparable au système idéal. Si de plus, la perturbation est petite, le système réel est proche du système idéal. En pratique, seuls les systèmes stables sont exploitables.

Pour définir mathématiquement le concept de stabilité, on décrit le système considéré par une application $F : X \to Y$, où X représente l'ensemble des paramètres du système (entrées) et Y est l'ensemble des caractéristiques (sorties). La notion de stabilité, ainsi définie, correspond à la continuité de l'application F.

Malgré la simplicité de l'hypothèse markovienne, la plupart des modèles stochastiques peuvent être entièrement décrits par une chaîne de Markov d'une manière directe ou sous une certaine forme d'inclusion. Dans ce cas, on dit que le modèle est stable si la chaîne associée est stable.

Depuis les années soixante dix, plusieurs méthodes de stabilité des modèles stochastiques ont été élaborées, on cite :

– Méthode des fonctions tests élaborée par V. V. Kalashnikov [55].
– Méthode métrique initiée par V. M. Zolotariev [95] et S. T. Rachev [81].
– Méthode de convergence faible introduite par D. Stoyan [89].
– Méthode de stabilité forte élaborée par D. Aissani et N. V. Kartashov [6] [56].
– Méthode de renouvellement proposé par A. A. Borovkov [22].
– Méthode de stabilité absolue introduite par I. C. F. Ispen et C. D. Meyer [54].
– Méthode du développement en série proposée par B. Heidergott et A. Hordijk [39] [41].

La méthode de stabilité forte (ou méthode des opérateurs de la théorie de stabilité) a été élaborée par D. Aissani et N. Kartashov au début des années 80 [6]. L'essence de cette méthode est que l'ergodicité uniforme par rapport à une norme donnée est préservée sous de petites perturbations du noyau de transition du système étudié. Les résultats fondamentaux de cette méthode ont fait l'objet de la publication en 1996 d'une monographie de N. Kartashov [56].

L'étude du développement en série de Taylor dans l'évaluation des performances des réseaux stochastiques a été introduite pour la première fois par M. Zazanis [93] et par W.B. Gong et J.Q. Hu [38]. Puis sont apparus les travaux de F. Baccelli et S. Hasenfuss [12] et H. Ayhan et F. Baccelli [9] qui ont étudié le développement en série pour les réseaux stochastiques linéaires $(\max, +)$. Le développement en série de Taylor pour la distribution stationnaire des chaînes de Markov à espace d'état fini a été élaboré par X. Cao [30]. Cependant, c'est B. Heidergott et A. Hordijk [39] qui ont ensuite appliqué le développement en série de Taylor pour les chaînes de Markov à espace d'états général. Récemment, les mêmes auteurs ont étudié le développement en série pour les chaînes de Markov à espace d'états fini [41], puis pour les processus de Markov à espace d'états dénombrable [40]. Ils ont également élaboré un algorithme pour le calcul numérique de la distribution stationnaire.

L'application de la méthode du développement en série pour la distribution stationnaire consiste à écrire la distribution stationnaire du système perturbé sous forme d'une série qui dépend de la distribution stationnaire du système idéal, des matrices de transition des systèmes idéal et perturbé, et de la matrice de déviation du système idéal.

Dans ce mémoire on se propose d'appliquer pour la première fois, la méthode du développement en série pour le système de files d'attente M/M/1/N. La perturbation concerne le flot des arrivées (le système G/M/1/N est donc le système perturbé). Les résultats utilisés sont ceux concernant les chaînes de Markov à espace d'états fini [41]. Pour pouvoir comparer les résultats, on appliquera la méthode de stabilité forte au même système.

Ce mémoire comprend une introduction, quatre chapitres, une conclusion, une bibliographie et deux annexes.

Dans le premier chapitre, on fait un rappel des résultats classiques sur les systèmes de files d'attente en général et notamment ceux relatifs aux systèmes de type M/M/1, M/M/1/N, M/G/1, M/G/1/N, G/M/1 et G/M/1/N.

Le deuxième chapitre comprend une synthèse sur l'application de la méthode du développement en série : aux chaînes de Markov à espace d'états général [39], puis aux chaînes de Markov à espace d'états fini [41], et enfin aux processus de Markov [40].

Dans le troisième chapitre, on présente les résultats essentiels concernant la théorie de stabilité forte, et les résultats de son application au système de files d'attente M/M/1, après une perturbation du flot des arrivées.

Le quatrième chapitre comprend deux parties : la première partie est consacrée à l'application de la méthode du développement en série et de stabilité forte pour le système M/M/1/N, après une perturbation du flot des arrivées (G/M/1/N). Dans la deuxième partie, nous illustrons l'application de la méthode du développement en série et de stabilité forte sur un exemple numérique et nous comparons les résultats.

Ce travail s'achève par une conclusion générale où nous cernons les perspectives induites par les résultats obtenus.

Dans l'annexe 1, on fait un rappel sur les processus stochastiques et les chaînes de Markov. Une présentation détaillée des algorithmes des deux méthodes (développement en série et stabilité forte), réalisés au chapitre 3, est exposée à l'annexe 2.

Chapitre 1

Théorie des files d'attente

1.1 Introduction et structure des systèmes de files d'attente

Les premiers modèles de files d'attente ont été proposés par l'ingénieur électricien Erlang au début du vingtième siècle, dans le but de décrire les phénomènes de congestion et d'attente dans la communication téléphonique. Par la suite, les files d'attente ont été utilisées dans la modélisation des systèmes de production et des systèmes informatiques.

Le modèle général d'un système d'attente peut être résumé comme suit : des " clients " arrivent à un certain endroit et réclame un certain service. Les instants d'arrivées et les durées de service sont généralement des quantités aléatoires, si un poste de service est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce poste où il est servi, sinon il prend sa place dans une file d'attente dans laquelle les clients se rangent.

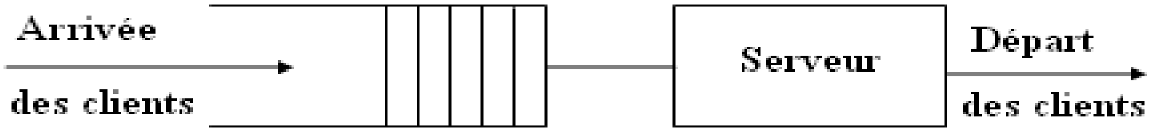

Fig. 1.1 – Système de files d'attente à un seul serveur

1.2 Identification et représentation d'un système de files d'attente

Pour identifier un système d'attente, on a besoin des spécifications suivantes.

- La nature stochastique du processus des arrivées qui est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.
- La distribution du temps aléatoire de service
- Le nombre C de stations de service qui sont montées en parallèle. On admet généralement que les temps de service correspondants suivent la même distribution.
- La capacité N du système. Si N $< +\infty$, la file d'attente ne peut pas dépasser une longueur de N-C. Dans ce cas, certains clients qui arrivent vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.

1.2.1 Notations usuelles des systèmes de files d'attente

Un systèmes de files d'attente est généralement représenté suivant la notation de Kendall qui est définie comme suit :

A/S/C/(N/L/Ds)

qui décrit une file d'attente par les facteurs suivants :

A : Processus d'entrée (distribution de la durée entre deux arrivées consécutives)

S : Processus de sortie (distribution de la durée de service)

C : Nombre de serveurs

N : Capacité maximale du système

L : Population des usagers

Ds : Discipline de service

Les symboles utilisés pour décrire les processus d'entrée et de service sont :

M : Loi exponentielle (processus de Markov)

Ek : Loi Erlang-k

D : Loi constante

Hk : Loi hyper exponentielle d'ordre k

GI : Loi générale indépendante

G : Loi générale

1.2.2 Discipline de service

Une discipline de service est la règle déterminant l'ordre dans lequel les clients vont accéder au service.
Les principales disciplines de service utilisées sont les suivantes :

FIFO (First In First out) : Premier Arrivé, Premier Sorti

LIFO (Last In First out) : Dernier Arrivé, Premier Sorti

PS (Processes Sharing) : Procesus Partagé

FIRO (First In Random Out) : Aléatoire

Lorsque les trois derniers éléments de la notation de Kendall ne sont pas précisés, ils sont pris par défaut comme suit : **Ds** = **FIFO** , **L** $= +\infty$, **K** $= +\infty$.

1.3 Analyse mathématique

L'étude mathématique d'un système se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre $X(t)$ de clients se trouvant dans le système à l'instant t $(t \geq 0)$.
En fonction des quantités qui définissent la structure du système, on cherche à calculer :

- Le régime transitoire du processus stochastique $\{X(t);\ t \geq 0\}$ défini par les probabilités d'état :
$$P_n(t) = \mathrm{P}(X(t) = n).$$
- Le régime stationnaire du processus stochastique $\{X(t);\ t \geq 0\}$ défini par les distributions stationnaires de ce processus :
$$\pi_n = \lim_{t \to +\infty} P_n(t) = \lim_{t \to +\infty} \mathrm{P}(X(t) = n), \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Notons qu'il existe des systèmes pour lesquels l'évolution temporelle ne peut pas être déterminée par le processus $\{X(t);\ t \geq 0\}$ (Exemple M/G/1 et G/M/1).

1.4 Caractéristiques d'un système de files d'attente

A partir de la distribution stationnaire du processus $\{X(t);\ t \geq 0\}$, on peut déterminer les caractéristiques suivantes :

- L : nombre moyen de clients dans le système de files d'attente ;
- L_q : nombre moyen de clients dans la file ;
- W : temps moyen de séjour d'un client dans le système ;
- W_q : temps moyen d'attente d'un client dans le système.

Ces valeurs sont liées les unes aux autres par les relations suivantes :

$$L = \lambda_e W \tag{1.1}$$

$$L_q = \lambda_e W_q \tag{1.2}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{1.3}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} \tag{1.4}$$

où λ_e est le taux d'entrée des clients dans le système et μ le taux de service.
Les deux premières relations sont appelées **Formules de Little**.

1.5 Etude de quelques systèmes de files d'attente

1.5.1 Le système de files d'attente M/M/1

Dans ce système, le flux des arrivées est poissonien, de paramètre λ, et la durée de service est exponentielle, de paramètre μ. La capacité d'attente est illimitée et il y'a une seule station de service.

Régime transitoire

Soit le processus stochastique $\{X(t);\ t \geq 0\}$: "le nombre de clients dans le système à l'instant t". Grâce aux propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle, nous pouvons déterminer les équations différentielles de Kolmogorov correspondantes au processus $X(t)$:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P_n'(t) = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t), \quad \text{n} = 1,\, 2,\, \ldots \end{cases} \tag{1.5}$$

Ces équations permettent de calculer les probabilités d'état si l'on connaît en plus les conditions initiales du processus, c'est-à-dire la distribution de $X(0)$.

Régime stationnaire

Pour calculer les probabilités stationnaires, on utilise les équations de Kolmogorov lorsque $t \to \infty$, on obtient :

$$\pi_n = \pi_0(\frac{\lambda}{\mu})^n \quad n = 0,\ 1,\ \ldots$$

En se servant de la condition $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$, on obtient finalement :

$$\pi_n = (1 - \frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^n \quad n = 0,\ 1,\ \ldots$$

À condition que $\lambda/\mu < 1$, le régime stationnaire du système d'attente M/M/1 est gouverné par la loi géométrique.
Notons que $\rho = \lambda/\mu$ est appelé charge ou coefficient d'utilisation du système.

Caractéristiques du système M/M/1

- Le nombre moyen de clients dans le système (L) :

$$L = E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = (1 - \frac{\lambda}{\mu}) \sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{\lambda}{\mu})^n.$$

d'où

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

- Le nombre moyen de clients dans la file (L_q) :

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

- Les temps moyen de séjour et d'attente d'un client dans le système (W et W_q) :

Le calcul de ces deux caractéristiques se fait soit à l'aide des formules de Little (1.1) et (1.2) avec $\lambda_e = \lambda$, soit à partir des distributions stationnaires du système et on obtient :

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

1.5.2 Le système de files d'attente M/M/1/N

Dans le système M/M/1/N, le flux des arrivées est poissonien, de paramètre λ, la durée de service est exponentielle, de paramètre μ, et il y'a une seule station de service. La capacité d'attente est limitée à N .

Régime transitoire

Les équations différentielles de Kolmogorov correspondantes au processus $X(t)$ du système M/M/1/N sont identiques à celles du système M/M/1 sauf pour $n = N$:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P_n'(t) = -(\lambda + \mu) P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t), \quad \mathrm{n} = \overline{1, N-1} \\ P_N'(t) = -\mu P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t), \end{cases} \tag{1.6}$$

Régime stationnaire

Pour calculer les probabilités stationnaires, on utilise les équations de Kolmogorov lorsque $t \to \infty$, on obtient :

$$\pi_n = \pi_0 \rho^n \quad n \leq N$$

En se servant de la condition $\sum_{n=0}^{N} \pi_n = 1$, on obtient finalement :

$$\pi_n = \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}\right) \rho^n \quad n \leq N$$

Caractéristiques du système M/M/1/N

- Le nombre moyen de clients dans le système (L) :

$$L = \sum_{n=0}^{N} n \pi_n = \frac{(1 - \rho)}{(1 - \rho^{N+1})} \sum_{n=0}^{N} n \rho^n.$$

d'où

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}.$$

- Le nombre moyen de clients dans la file (L_q) :

Pour les systèmes dont la capacité est limitée à N, le calcul de λ_e se fait comme suit :
$\lambda_e = \lambda(1-\pi_N)$
$1-\pi_N$ représente la probabilité de non refus d'un client dans le système.
d'après la relation (1.4), on obtient :

$$L_q = L - \rho(1-\pi_N) = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} - \rho\left(\frac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}}\right).$$

$$L_q = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{N\rho^{N+1}+\rho}{1-\rho^{N+1}}.$$

- Les temps moyens de séjour et d'attente d'un client dans le système (W et W_q) :

A l'aide des formules de Little, on obtient :

$$W = \left(\frac{1}{\mu(1-\rho)} - \frac{(N+1)\rho^N}{\mu(1-\rho^{N+1})}\right)\left(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho^N}\right).$$

$$W = \frac{1-\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^N)} - \frac{(N+1)\rho^N}{\mu(1-\rho^N)} = \frac{1+N\rho^{N+1}-(N+1)\rho^N}{\mu(1-\rho)(1-\rho^N)}.$$

$$W_q = \frac{1-\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho)(1-\rho^N)} - \frac{(N+1)\rho^N}{\mu(1-\rho^N)} - \frac{1}{\mu} = \frac{-N\rho^N+(N-1)\rho^{N+1}+\rho}{\mu(1-\rho)(1-\rho^N)}.$$

1.5.3 Le système de files d'attente M/G/1

Dans ce type de système, la durée des inter-arrivées est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, et la durée de service est une variable aléatoire suivant une loi quelconque H, de moyenne $1/\mu$. La propriété de Markov du processus $\{X(t);\ t \geq 0\}$ facilitant l'analyse des systèmes de type M/M/1 n'est plus vérifiée pour le système M/G/1, ce qui rend son analyse plus délicate. Pour remédier à ce problème, plusieurs méthodes ont été proposées :

- Méthode des étapes d'Erlang.
- Méthode de la chaîne de Markov induite.
- Méthode des variables auxiliaires.

- Méthode des événements fictifs.
- Méthode d'approximation.
- Simulation.

La chaîne de Markov induite

Considérons le processus $X(t)$:le nombre de clients dans le système à l'instant t aux instants $(t_n,\ n = \ 1,\ 2,\ \ldots)$ où t_n est l'instant de départ du $n^{\text{ème}}$ client. On définit ainsi le processus stochastique à temps discret
$\{X_n = X(t_n);\ n = \ 1,\ 2,\ \ldots\}$ représentant le nombre de clients dans le système juste après le départ du $n^{\text{ème}}$ client.

La variable aléatoire X_n est une chaîne de Markov à temps discret. Pour vérifier cela, considérons le nombre A_n de clients qui entrent dans le système pendant que le $n^{\text{ème}}$ client est servi. Les variables aléatoires A_n sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :

$$\mathrm{P}(A_n = k) = a_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} dH(t)$$

Alors,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1} & \text{si } X_n \geq 1 \\ A_{n+1} & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

X_{n+1} ne dépend que de X_n et de A_{n+1} et non pas des valeurs de $X_{n-1},\ X_{n-2},\ \ldots$ Ce qui signifie que la suite $\{X_n;\ n = \ 1,\ 2,\ \ldots\}$ ainsi définie est la chaîne de Markov induite du processus $\{X(t);\ t \geq 0\}$.

Régime transitoire

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite $\{X_n;\ n = \ 1,\ 2,\ \ldots\}$ sont données par :

$$P_{ij} = \mathrm{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

$$p_{ij} = \begin{cases} a_j & \text{si } j \geq 0,\ i = 0, \\ a_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et la matrice des probabilités de transition $P = (p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ prend la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Puisqu'on peut passer de chaque état vers n'importe quel autre état, il s'agit d'une chaîne de Markov irréductible dont on peut montrer qu'elle converge vers une distribution limite si $\rho = \lambda/\mu < 1$.

Régime stationnaire

Supposons que $\rho < 1$ et soit $\pi = (\pi_0,\ \pi_1,\ \ldots)$ la distribution stationnaire de la chaîne de Markov $\{X_n;\ n =\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ où

$$\pi_k = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n = k).$$

Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution π elle-même, mais nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\Pi(Z)$. Ceci, en utilisant la définition de la distribution de probabilité discrète stationnaire par rapport à une matrice stochastique P : $\pi P = \pi$. On obtient :

$$\Pi(Z) = \frac{\pi_0 P(Z)(Z-1)}{Z - P(Z)}.$$

Cette formule est connue sous le nom de la formule de **Pollaczek-Khinchine**.
$P(Z) = \sum_{j\geq 0} P_j Z^j = \int_0^\infty e^{\lambda(Z-1)s} dH(s)$ est la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service, $Z \in \mathbb{C}$, $\mid Z \mid < 1$.

Caractéristiques du système M/G/1

- Le nombre moyen de clients dans le système (L) :

Cette quantité peut être déterminée, en régime stationnaire, en utilisant la relation $E(X) = \lim_{Z\to 1} \Pi'(Z)$. Néanmoins, ce calcul s'avère compliqué. Par contre, elle peut être obtenue aisément en utilisant la relation :

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + A_{n+1} \qquad \text{où } \delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n > 0 \\ 0 & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$L = E(X_n) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \mathrm{Var(Y)}}{2(1-\rho)}.$$

Où Y est la durée de service et Var, la variance.

- Le nombre moyen de clients dans la file (L_q) :

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \mathrm{Var(Y)}}{2(1-\rho)}.$$

- Les temps moyen de séjour et d'attente d'un client dans le système (W et W_q) :

A l'aide des formules de Little avec $\lambda_e = \lambda$ on obtient :

$$W = \frac{1}{\mu} + \lambda \left(\frac{1/\mu^2 + \mathrm{Var(Y)}}{2(1-\rho)} \right).$$

$$W_q = \lambda \left(\frac{1/\mu^2 + \mathrm{Var(Y)}}{2(1-\rho)} \right).$$

1.5.4 Le système de files d'attente M/G/1/N

Le système M/G/1/N est idendique au système M/G/1, sauf pour la capacité du système qui est limitée à N. Dans ce qui suit nous allons reprendre les même notations que celles utilisées pour le système M/G/1.

La chaîne de Markov induite

Soit X_n : le nombre de clients dans le système M/G/1/N juste après le départ du $n^{\text{ème}}$ client. La variable aléatoire X_n est une chaîne de Markov à temps discret et nous avons la relation suivante :

$$X_n = \min(X_{n-1} + A_n, N) - 1$$

On remarque que $X_n \leq N - 1$, c'est à dire que $\mathrm{P}(X_n = N) = 0$.

Régime transitoire

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite $\{X_n;\ n = \ 1,\ 2,\ \ldots\}$ sont données par :

pour $0 \leq j \leq N-2$

$$p_{ij} = \begin{cases} a_j & \text{si } i = 0, \\ a_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour $j = N-1$

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{N-2} a_k & \text{si } i = 0, \\ 1 - \sum_{k=0}^{N-i-1} a_k & \text{si } 1 \leq i \leq N-1 \end{cases}$$

La matrice des probabilités de transition P prend la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-2} & \gamma_{N-2} \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-2} & \gamma_{N-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-3} & \gamma_{N-3} \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{N-4} & \gamma_{N-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

où $\gamma_l = 1 - \sum_{k=0}^{l} a_k$.

1.5.5 Le système de files d'attente G/M/1

Le système G/M/1 peut être considéré comme symétrique du système M/G/1. En effet, les temps des inter-arrivées des clients suivent une loi générale F, de moyenne $1/\lambda$, et le temps de service est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre μ. Afin d'analyser ce système, on fait appel à la méthode de la chaîne de Markov induite.

La chaîne de Markov induite

Soit Y_n : le nombre de clients se trouvant dans le système G/M/1 juste avant l'arrivée du $n^{ème}$ client. La variable aléatoire Y_n est une chaîne de Markov à temps discret. Pour vérifier ce résultat, considérons le nombre B_n de clients servis entre les instants d'arrivées consécutives (T_{n-1}, T_n). Les variables aléatoires B_n sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :

$$\mathrm{P}(B_n = k) = d_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^k}{k!} dF(t)$$

On a alors la relation suivante :

$$Y_n = Y_{n-1} + 1 - B_n$$

B_n est une variable aléatoire qui ne dépend que de la durée $(T_n - T_{n-1})$. D'autre part $(T_n - T_{n-1})$ est une variable aléatoire indépendante de Y_{n-1}, de l'état du processus avant T_{n-1} ainsi que de n. Il s'ensuit que T_n ne dépend que de T_{n-1} et non pas de T_{n-2}, T_{n-3}, $\ldots$.

La suite $\{Y_n;\ n =\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ forme une chaîne de Markov induite du processus $\{Y(t);\ t \geq 0\}$, où $Y(t)$: le nombre de clients dans le système à l'instant t.

Régime transitoire

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite $\{Y_n;\ n =\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ sont données par :

$$q_{ij} = \mathrm{P}(Y_{n+1} = j / Y_n = i)$$

$$q_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i \geq 0,\ j = 0, \\ d_{i-j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha_i = 1 - \sum_{k=0}^{i} d_k$.

Ainsi la matrice des probabilités de transition $Q = (q_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ prend la forme suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_0 & d_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \alpha_1 & d_1 & d_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \alpha_2 & d_2 & d_1 & d_0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

Régime stationnaire

Soit $\nu = (\nu_0,\ \nu_1,\ \ldots)$ la distribution stationnaire de la chaîne de Markov $\{Y_n;\ n =\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ vérifiant $\nu Q = \nu$ où $\nu_k = \lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n = k)$, nous avons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \nu_0 = \sum\limits_{k\geq 0} \nu_k q_{k0} & (1.7) \\ \nu_j = \sum\limits_{k\geq j-1} \nu_k d_{k+1-j} \quad \text{pour } j \geq 1 & (1.8) \end{cases}$$

L'équation (1.7) du système est une combinaison linéaire des autres équations (1.8), on peut donc l'ignorer.
Si le système d'équations considéré admet une solution, l'équation (1.8) peut alors s'écrire :

$$C\omega^j = \sum_{k\geq j-1} C\upsilon^k d_{k+1-j} \qquad \text{avec } \omega \neq 0 \text{ et } C \neq 0$$

$$\omega = \sum_{k\geq j-1} \omega^{k+1-j} d_{k+1-j} = \sum_{k\geq j-1} \omega^k d_k = \int_0^\infty e^{-\mu t(1-\omega)} dF(t)$$

ω est donc solution de l'équation $\omega = \int_0^\infty e^{-\mu t(1-\omega)} dF(t)$, si de plus $(\lambda/\mu) < 1$, elle est unique.
Comme $\sum\limits_{i\geq 0} \nu_i = 1$ on a $\nu_i = (1-\omega)\omega^i \qquad \forall\ i \geq 0$

Caractéristiques du système G/M/1

- Le temp moyen d'attente d'un client dans le système W_q :

$$W_q = \frac{\omega}{\mu(1-\omega)}.$$

- Le temp moyen de séjour d'un client dans le système W :

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\omega)}.$$

- Le nombre moyen de clients dans le système L :

$$L = \frac{\lambda}{\mu(1-\omega)}.$$

- Le nombre moyen de clients dans la files L_q :

$$L_q = \frac{\lambda\omega}{\mu(1-\omega)}.$$

1.5.6 Le système de files d'attente G/M/1/N

Le système G/M/1/N est idendique au système G/M/1, sauf pour la capacité du système qui est limitée à N. Dans ce qui suit, nous allons reprendre les même notations que celles utilisées pour le système G/M/1.

La chaîne de Markov induite

Soit Y_n : le nombre de clients se trouvant dans le système G/M/1/N juste avant l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client. La variable aléatoire Y_n est une chaîne de Markov à temps discret et nous avons la relation suivante :

$$Y_n = \min(Y_{n-1}+1, N) - B_n$$

Régime transitoire

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite $\{Y_n;\ n = \ 1,\ 2,\ \ldots\}$ sont données par :
pour $0 \leq i \leq N-1$

$$q_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = 0, \\ d_{i-j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{si } i+1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

pour $i = N$

$$q_{ij} = \begin{cases} \alpha_{N-1} & \text{si } j = 0, \\ d_{N-j} & \text{si } 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

La matrice des probabilités de transition Q prend la forme suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_0 & d_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & d_1 & d_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & d_2 & d_1 & d_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & 0 \\ \alpha_{N-1} & d_{N-1} & d_{N-2} & \ddots & \ddots & \ldots & d_0 \\ \alpha_{N-1} & d_{N-1} & d_{N-2} & \ddots & \ddots & \ldots & d_0 \end{pmatrix}$$

1.6 Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre, de façon introductive et claire les notions de base de la théorie des files d'attente. Nous avons étudié les système M/M/1 et M/M/1/N de la théorie des files d'attente élémentaires, et les systèmes M/G/1, M/G/1/N, G/M/1 et G/M/1/N de la théorie des files d'attente intermédiaire.

Chapitre 2

Développement en série pour les chaînes de Markov

La méthode du développement en série est une méthode assez récente, elle nous permet d'écrire, sous certaines conditions la distribution stationnaire du système perturbé sous forme d'une série, qui dépend de la distribution stationnaire du système idéal. Différents résultats ont étés élaborés dans ce contexte. Dans ce chapitre, nous résumons les principaux résultats concernant l'application de cette méthode : aux chaînes de Markov à espace d'états général [39], puis aux chaînes de Markov à espace d'états fini [41] et enfin aux processus de Markov [40].

2.1 Développement en série pour les chaînes de Markov à espace d'états général

2.1.1 Préliminaire et notations

Soit $(S,\ \mathcal{T})$ un espace mesurable. Notons par $\mathcal{M}(S,\ \mathcal{T})$ l'espace des mesures de probabilité sur $(S,\ \mathcal{T})$.

Définition 2.1. On appelle noyau de transition toute fonction P définie sur $S \times\ \mathcal{T}$ tel que :

- $\forall\ s\ \in\ S,\ \ P(s, .)\ \in\ \mathcal{M}(S,\ \mathcal{T})$.
- $\forall\ B\ \in\ \mathcal{T},\ \ P(., B)$ est $\mathcal{T}$-mesurable.

Le produit de deux noyaux de transition P et Q est le noyau donné par

$$PQ(s,B) = \int_S P(s,dz)Q(z,B), \quad s \in S, \ B \in \mathcal{T}.$$

Notons par $P^n(s;B)$ le noyau de transition en n étapes, et l'opérateur de transition lui correspondant P^n n'est en fait que la $n^{\text{ième}}$ puissance de P.

Soit $L^1(P)$ l'ensemble des fonctions mesurables $g : S \to \mathbb{R}$, tel que $\int_S P(s,du)\ |g(u)|$ est fini $\forall\ s \in S$. Pour $\mathcal{D} \subset L^1(P)$, le noyau de transition P est dit $\mathcal{D}$-preserving si

$$\int_S P(.,du)g(u) \in \mathcal{D} \ \ \forall\ g \in \mathcal{D}.$$

Considérons la famille de noyaux de transition $(P_\theta : \theta \in \Theta)$ sur $(S, \mathcal{T})$, avec $\Theta \subset \mathbb{R}$, et soit

$$L^1(P_\theta, \Theta) = \bigcap_{\theta \in \Theta} L^1(P_\theta)$$

l'ensemble des fonctions mesurables $g \ : \ S \ \to \ \mathbb{R}$, tel que $\int_S P_\theta(s,du)\ |g(u)|$ est fini $\forall\ \theta \in \Theta$ et $\forall\ s \in S$.

Définition 2.2. Soit $\mathcal{D} \subset L^1(P_\theta, \Theta)$. On dit que P_θ est n fois $\mathcal{D}$-differenciable en θ, si $\exists$ $P_\theta^{(n)}$ tel que, $\forall\ s \in S$ et $\forall\ g \in \mathcal{D}$,

$$\frac{d^n}{d\theta^n} \int_S P_\theta(s,du)\ g(u) = \int_S P_\theta^{(n)}(s,du)\ g(u) \tag{2.1}$$

et $P_\theta^{(n)}$ est $\mathcal{D}$-preserving.

Soit $X(\theta) = \{X_\theta(n)\} = \{X_\theta(s,n)\}$ pour $\theta \in \Theta$, une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans S, de noyau de transition P_θ et dont l'état initial est s. On pose $\forall\ B \in \mathcal{T}$,

$$P_\theta^n(s,B) = P_\theta(s,n,B) = \mathrm{P}(X_\theta(s,n) \in B)$$

Soit $S_\theta \subset S$ la classe des états de telle sorte que X_θ soit irréductible, notons par $\mathcal{T}_\theta$ l'intersection entre $\mathcal{T}$ et S_θ. Par conséquent $(\mathcal{T}_\theta, S_\theta)$ est un espace mesurable $\forall\ \theta \in \Theta$. Considérons les conditions suivantes :

Condition 1. $\exists\ g : S_\theta \to \mathbb{R}$ tel que $g(s) \geq 0$ pour $s \in S_\theta$ et

$$E[g(X_\theta(s,m_\theta))] - g(s) \leq -\epsilon + c1_{V_\theta}(s)$$

pour un certain $m_\theta \geq 1$, $\epsilon > 0$ et $c < \infty$, où pour $d < \infty$,

$$V_\theta = \{s \in S_\theta : g(s) \leq d\}.$$

Condition 2. $\exists\ n_\theta \geq 0$, une mesure de probabilité $\phi_\theta(.)$ sur $(S_\theta, \mathcal{T}_\theta)$ et $p_\theta \in]0,1[$ tel que

$$\inf_{x \in V_\theta} \mathrm{P}(X_\theta(x, n_\theta) \in B) \geq p_\theta \phi_\theta(B)$$

$\forall\ B \in \mathcal{T}_\theta$.

Supposons que la condition 1 est vérifiée pour un certain $\theta \in \Theta$ et posons

$$\varepsilon_\theta(s) = g(X_\theta(s,1)) - g(s), \quad s \in S_\theta$$

On peut introduire la condition suivante :

Condition 3. $\varepsilon_\theta(s)$ est uniformément intégrable en s et en θ sur Θ_0, et $\exists\ \lambda > 0$ tel que $\varepsilon_\theta(s)e^{\lambda\varepsilon_\theta(s)}$ est uniformément intégrable (en s et en θ sur Θ_0).

$\varepsilon_\theta(s)$ est dite uniformément intégrable en s et en θ si

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{s,\theta} \int_{|t|>c} \mathrm{P}(\varepsilon_\theta(s) \in dt) = 0$$

Soit le noyau de transition P. Considérons la norme $\|.\|_v$ où

$$\|P\|_v = \sup_{s \in S} \sup_{\|f\|_v \leq 1} \frac{|\int f(z)P(s,dz)|}{|v(s)|}.$$

Dans ce paragraphe, on utilise la fonction v donnée par :

$$v(s) = e^{\lambda g(s)}, \quad s \in S, \tag{2.2}$$

pour $\lambda \geq 0$, où g est définit dans la condition 1.

Soit π_θ la distribution stationnaire de P_θ et Π_θ le projecteur stationnaire qui vérifie la relation $\Pi_\theta = e\pi_\theta^T$ où e est le vecteur colonne tel que $e^T = (1,\ 1,\ 1,\ \ldots)$.

Définition 2.3. Le noyau de transition P_θ est dit $\|.\|_v$-continûment Lipschitz en $\theta \in \Theta$ si $\Theta_0 \subset \Theta$ de θ existe tel que, pour un certain K,

$$\|P_{\theta+\Delta} - P_\theta\|_v \leq |\Delta|K, \quad \forall\ \theta + \Delta \in \Theta_0.$$

La constante K est appelée constante Lipschitz.

2.1.2 MVD pour la distribution stationnaire

Soit :

$$K_\theta(n) = \sum_{m=0}^{\infty} P_\theta^{(n)} P_\theta^m.$$

On a $P_\theta^{(n)}\Pi_\theta = 0$ [42]. L'opérateur $K_\theta(n)$ peut alors s'écrire

$$K_\theta(n) = P_\theta^{(n)} D_\theta.$$

où

$$D_\theta = \sum_{m=0}^{\infty} (P_\theta^m - \Pi_\theta)$$

est appelé l'opérateur de déviation associé à P_θ.

Remarque 1. Si les conditions 1-3 sont vérifiées en θ, on a [43]

$$\|D_\theta\|_v = \left\| \sum_{m=0}^{\infty} (P_\theta^m - \Pi_\theta) \right\|_v \leq \frac{c_\theta}{1-\rho_\theta}$$

Introduisons la condition suivante :

Condition 4. Pour $\theta \in \Theta$,

$$\lim_{\Delta \to 0} \|P_{\theta+\Delta} - P_\theta\|_v = 0. \tag{2.3}$$

Lemme 2.1. *Si les conditions 1-3 sont vérifiées en θ alors*
(i) $\exists\ \Theta_0$ de θ tel que $\forall\ \theta + \Delta \in \Theta_0$.

$$\Pi_{\theta+\Delta} - \Pi_\theta = \Pi_{\theta+\Delta}(P_{\theta+\Delta} - P_\theta) D_\theta. \tag{2.4}$$

(ii) Si en plus la condition 4 est vérifiée alors :

$$\Pi_{\theta+\Delta} = \Pi_\theta \sum_{m=0}^{\infty} ((P_{\theta+\Delta} - P_\theta) D_\theta)^m \tag{2.5}$$

et

$$\sup_{\hat{\theta} \in \Theta_0} \|\Pi_{\hat{\theta}}\|_v < \infty. \tag{2.6}$$

Lemme 2.2. *Si les conditions 1-4 sont vérifiées en θ, alors $\exists\ c < \infty$, ρ avec $0 < \rho < 1$ et Θ_0 de θ tel que. pour λ assez petit.*

$$\sup_{\hat{\theta} \in \Theta_0} \|P_{\hat{\theta}}^n - \Pi_{\hat{\theta}}\|_v \leq c\rho^n. \tag{2.7}$$

Théorème 2.1. Supposons que les conditions 1-3 sont vérifiées en θ. Si P_θ est $\|.\|_v$-continûment Lipschitz en θ, alors Π_θ est $\|.\|_v$-continûment Lipschitz en θ. Si en plus P_θ est $\mathcal{D}_v$-différenciable en θ, alors Π_θ est $\mathcal{D}_v$-différenciable en θ avec

$$\Pi'_\theta = \Pi_\theta K_\theta(1).$$

où $\mathcal{D}_v = \{g : S \to \mathbb{R} \mid g \text{ est mesurable et } \exists\, r \in \mathbb{R} \text{ tel que } |g(s)| \leq r.\ v(s) \text{ pour } s \in S\}$.

Considérons un ensemble de conditions que nous regroupons en une seule condition qu'on note C^n, $n \geq 0$.

Condition C^n.

(i) Le noyau P_θ est $n+1$ fois $\mathcal{D}_v$-différenciable en θ.

(ii) Pour un certain $r \geq 0$, $\Theta_0 =]\theta - r, \theta + r[$ de θ est tel que, quand $0 \leq m \leq n$, $\|P_\theta^{(m)}\|_v < \infty$ et $P_\theta^{(m)}$ est $\|.\|_v$-continûment Lipschitz en θ.

Théorème 2.2. Si les conditions 1-3 et C^n pour un $n \geq 1$ sont vérifiées en θ alors $K_\theta(n)$ est $\mathcal{D}_v$-différenciable avec

$$K_\theta(n)' = K_\theta(n)K_\theta(1) + K_\theta(n+1).$$

Théorème 2.3. Supposons que les conditions 1-3 et C^n pour un certain $n \geq 1$ sont vérifiées en θ alors Π_θ est n fois $\mathcal{D}_v$-différenciable où

$$\Pi_\theta^{(n)} = \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ 1 \leq l_k \leq n \\ l_1 + \ldots + l_m = n}} \frac{n!}{l_1! \ldots l_m!} \Pi_\theta \prod_{k=1}^{m} K_\theta(l_k),$$

ou encore

$$\Pi_\theta^{(n)} = \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ 1 \leq l_k \leq n \\ l_1 + \ldots + l_m = n}} \frac{n!}{l_1! \ldots l_m!} \Pi_\theta \prod_{k=1}^{m} (P_\theta^{(l_k)} D_\theta).$$

2.1.3 Le développement en série de Taylor

D'après le théorème 2.3, trouver une borne supérieure de la série de Taylor revient à trouver une borne pour l'opérateur $K_\theta(m)$, $0 \leq m \leq n$.

$$\begin{aligned} \|K_\theta(n)\|_v &= \left\| \sum_{m=0}^{\infty} P_\theta^{(n)} (P_\theta^m - \Pi_\theta) \right\|_v \\ &= \|P_\theta^{(n)} D_\theta\|_v \\ &\leq \|P_\theta^{(n)}\|_v \|D_\theta\|_v. \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.3

$$\begin{aligned} \|\Pi_\theta^{(n)}\|_v &\leq \sum_{\substack{1\leq m\leq n \\ 1\leq l_k\leq n \\ l_1+\ldots+l_m=n}} \frac{n!}{l_1!\ldots l_m!}\|\Pi_\theta\|_v \prod_{k=1}^{m} \|P_\theta^{(l_k)} D_\theta\|_v. \\ &\leq \|\Pi_\theta\|_v H_\theta(n) \end{aligned}$$

où

$$H_\theta(n) = \sum_{\substack{1\leq m\leq n \\ 1\leq l_k\leq n \\ l_1+\ldots+l_m=n}} \frac{n!}{l_1!\ldots l_m!} \prod_{k=1}^{m} \|P_\theta^{(l_k)} D_\theta\|_v.$$

Théorème 2.4. [39] Si les conditions 1-3 et C^{n+1} pour un certain n sont vérifiées, alors $\forall g \in \mathcal{D}_v$.

$$\int g\ d\Pi_{\theta+\Delta} = \sum_{m=0}^{n} \frac{\Delta^m}{m!} \int g\ d\Pi_\theta^m + r_{n+1,\Delta}$$

$\forall\ |\Delta| < r$, où r est donné par la condition C^{n+1} et

$$r_{n+1,\Delta} \leq \frac{|\Delta|^{n+1}}{(n+1)!}\|\Pi_\theta\|_v \sup_{|\Delta|\leq r} H_{\theta+\Delta}(n+1).$$

Supposons que les conditions du théorème 2.4 soient vérifiés. Supposons en plus que la condition C^n est vérifiée $\forall\ n$, soit r_θ tel que :

$$\frac{1}{r_\theta} = \limsup_n \left(\frac{1}{n!}\|\Pi_\theta\|_v H_\theta(n)\right)^{1/n} \tag{2.8}$$

$$= \limsup_n \left(\frac{1}{n!} H_\theta(n)\right)^{1/n} \tag{2.9}$$

Alors,$\forall\ g \in \mathcal{D}_v$, $\int g\ d\Pi_\theta$ peut être développé en une série de Taylor dont le rayon de convergence est r_θ et on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.1. Supposons que les conditions 1-3 et $C^n\ \forall\ n \geq 1$ sont vérifiées en θ, alors

$$\Pi_{\theta+\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} \Pi_\theta^{(n)}$$

pour $|\Delta| \leq r_\theta$, où r_θ est donné dans (2.9).

2.1.4 Exemple

soit P la matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov induite du système de files d'attente M/M/1, le flux des arrivées est poissonien, de paramètre η_1, et la durée de service est exponentielle, de paramètre μ, et soit Q la matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov induite du système G/M/1 dont la distribution des inter-arrivés est Cox avec un paramètre η_2. Considérons P_θ la matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov induite du système de files d'attente G_2/M/1 où la distribution des inter-arrivés est exponentielle de paramètre η_1 avec une probabilité $1-\theta$ et de Cox de paramètre η_2 avec une probabilité θ, pour $\theta \in [0,1]$ on a

$$P_\theta = (1-\theta)P + \theta Q.$$

Soit $X_\theta(n) = (X_\theta(1,n), X_\theta(2,n))$, où $X_\theta(1,n)$: le nombre de clients se trouvant dans le système G_2/M/1 juste avant l'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client. $X_\theta(2,n)$ prend la valeur 1 si le flux des arrivées est poissonien, la valeur 2 si la distribution des inter-arrivées est de Cox. On pose

$\mathcal{D}_v = \{g : \mathbb{N} \times \{1,2\} \to \mathbb{R} \ \mid \ \text{pour} \ \ r|g(k,i)| \leq re^{\lambda k} \ \ \forall \ \ (k,i) \in \mathbb{N} \times \{1,2\}\}$
pour λ assez petit.

La matrice de déviation du système M/M/1 est donnée dans [67] par

$$D(i,j) = \frac{\rho^{\max\{j-i,0\}} - (i+j+1)(1-\rho)\rho^j}{\mu(1-\rho)}.$$

où

$$\rho = \frac{\eta_1}{\mu}$$

Il est établi [43] que les conditions 1-3 sont vérifiées $\forall\ \theta \ \in \ [0,1]$. De plus, la condition C^n est vérifiée $\forall\ \theta \ \in \ [0,1]$ et $H_\theta(n) = n!(\|(Q-P)D\|_v)^n$ [39]. En remplaçant $H_\theta(n)$ dans (2.9), on obtient $\dfrac{1}{r_\theta} = \|(Q-P)D\|_v$.
On prend $v(i,k) = \beta^j$ avec $\beta > 1$, $\beta - 1 < \delta$ où $\delta > 0$.

Après les calculs, on trouve [39]

$$\begin{aligned}
\|(Q-P)D\|_v &= \sup_i \frac{\eta_1}{\eta_1+\mu 1_{i>0}} \frac{1}{\mu}\left(\frac{\beta}{1-\rho\beta}+\frac{1}{\beta^i(1-\rho\beta)}\right) \\
&= \frac{1}{\mu}\left(\frac{1+\beta}{(1-\rho\beta)}\right) \\
&= \frac{\rho}{\eta_1}\left(\frac{1+\beta}{(1-\rho\beta)}\right)
\end{aligned}$$

et nous avons

$$r_\theta \geq \limsup_{\rho\downarrow 1}\left(\frac{\rho}{\eta_1}\left(\frac{1+\beta}{(1-\rho\beta)}\right)\right)^{-1} = \frac{\eta_1}{2}\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right).$$

Pour que la série de Taylor converge sur l'intervalle $[0,1]$, il faut choisir η_1 tel que $r_\theta > 1$. soit Π_P le projecteur stationnaire de P, nous avons [39]

$$\begin{aligned}
\Pi_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \Pi_P((Q-P)D)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \Pi_P\left((Q-P)\sum_{n=0}^{\infty}(P^m-\Pi_P)\right)^n.
\end{aligned}$$

$\forall\ \theta\ \in\ [0,1]$.

2.2 Développement en série pour les chaînes de Markov à espace d'états fini

2.2.1 Préliminaire et notations

Considérons une chaîne de Markov X irréductible, apériodique à espace d'états fini et soit S l'ensemble de ses états où $S=\{0,\ 1,\ ,\dots,\ N\}$. Les probabilités de transition entre les états sont données par la matrice $P=(p_{i,j})_{i,j\in S}$, et les probabilités de transition entre les états en n étapes sont données par la matrice $P^n=(p^n_{i,j})_{i,j\in S}$, notons que P^n représente la n$^{\text{ème}}$ puissance de la matrice de transition P. Il est établit [64, 37] que la chaîne X admet un vecteur stationnaire unique π_P et un projecteur stationnaire Π_P avec $\Pi_P = e\pi_P^T$ où e est le vecteur colonne tel que $e^T=(1,\ 1,\ \dots,\ 1)$.

Supposons que la matrice de transition P soit perturbée en $Q=P+\Delta$ de sorte que Q soit la matrice de transition d'une autre chaîne de Markov irréductible X' avec une distribution stationnaire ν et un projecteur stationnaire Π_Q.

Dans ce qui suit, nous utilisons la norme $\|.\|_v$, où v est une fonction mesurable finie. On peut noter $v_i = v(i)$, pour $i \in S$ et donc v peut être considérée comme un vecteur $v = (v_0,\ v_1,\ \dots,\ v_N)$ où $v(i) > 0$, $\forall\ i \in S$.
Pour $w \in \mathbb{R}^S$

$$\|w\|_v = \sup_{i \in S} \frac{|w(i)|}{v(i)}.$$

Pour la matrice $A \in \mathbb{R}^{S \times S}$

$$\|A\|_v = \sup_{i} \frac{\sum_{j=0}^{N} |A|(i,j)\ v(j)}{v(i)}.$$

où $|A|(i,j)$ représente la valeur absolue de l'élément de la $i^{\text{éme}}$ ligne et la $j^{\text{éme}}$ colonne de la matrice A.

2.2.2 Ergodicité géométrique

Définition 2.4. [41] La chaîne de Markov X ayant l'opérateur de transition P est dite v-géométriquement ergodique si $\exists\ N < \infty$ tel que :

$$\|P^n - \Pi_P\|_v \leq c\beta^n,$$

$\forall\ n \geq N$, avec $c < \infty$ et $\beta < 1$.

La notion de l'ergodicité v-géométrique est un outil théorique puissant mais difficile à vérifier en pratique [8]. La principale difficultée réside dans le calcul des puissances de l'opérateur de transition. Dans le cas des chaînes de Markov à espace d'état fini et apériodique, le problème ne se pose plus car d'après le lemme suivant toute chaîne de Markov fini et apériodique est v-géométriquement ergodique.

Lemme 2.3. *[41] Pour une chaîne de Markov X à espace d'état fini et apériodique $\exists$ $N < \infty$ tel que :*

$$\|P^n - \Pi_P\|_v \leq c\beta^n,$$

$\forall\ n \geq N$, avec $c < \infty$ et $\beta < 1$.

2.2.3 La matrice de déviation

Définition 2.5. On appelle matrice de déviation da la chaîne X ayant l'opérateur de transition P la matrice :

$$D_P = \sum_{m=0}^{\infty} (P^m - \Pi_P),$$

lorsqu'elle existe.

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude des propriétés et des conditions d'existence de cette matrice (voir par exemple [76, 91, 33, 65])

D'après le lemme 2.3, la matrice de déviation D_P existe pour toute chaîne de Markov à espace d'état fini et apériodique. En effet :
$\|D_P\|_v = \| \sum_{m=0}^{\infty}(P^m - \Pi_P)\|_v \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|P^m - \Pi_P)\|_v \leq \sum_{m=0}^{\infty} c\beta^m = \frac{c}{1-\beta}$.
Ce qui montre que la matrice D_P existe et qu'elle est bornée par rapport à la norme $\|.\|_v$.

La matrice D_P peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$D_P = \sum_{m=0}^{\infty}(P - \Pi_P)^m - \Pi_P,$$

Théorème 2.5. [33] La matrice de déviation D_P de la chaîne X lorsqu'elle existe possède les propriétés suivantes :

- $D_P\mathbf{1} = 0$.
- $D_P(I - P) = (I - P)D_P = I - \Pi_P$.
- $D_P\Pi_P = \Pi_P D_P = 0$.

Remarque 2. la matrice de déviation D_P représente aussi le groupe inverse de $I - P$ [79], et $\sum_{m=0}^{\infty}(P - \Pi_P)^m$ correspond à la matrice fondamentale de la chaîne de Markov X[33].

2.2.4 La représentation en série de Π_Q

Dans ce qui suit, nous allons voir comment on peut écrire le projecteur stationnaire du système perturbée Π_Q sous forme d'une série qui dépend du projecteur stationnaire du système idéal Π_P, des matrices de transition des deux systèmes (perturbée Q et idéal P) et de la matrice de déviation D_P.

D'après le théorème 2.5, nous avons la propriété suivante :

$$(I - P)D_P = I - \Pi_P.$$

En multipliant les deux termes de l'équation par Π_Q, et comme $\Pi_Q\Pi_P = \Pi_P$, on obtient ainsi :

$$\Pi_Q(I - P)D_P = \Pi_Q - \Pi_P.$$

En utilisant la relation $\Pi_Q = \Pi_Q Q$, on obtient :

$$\Pi_Q = \Pi_P + \Pi_Q(Q - P)D_P. \tag{2.10}$$

En remplaçant (2.10) dans Π_Q à droite de la relation (2.10), on obtient :

$$\Pi_Q = \Pi_P + \Pi_P(Q - P)D_P + \Pi_Q((Q - P)D_P)^2.$$

On répète la même opération l fois de suite :

$$\Pi_Q = \Pi_P \sum_{n=0}^{l}((Q - P)D_P)^n + \Pi_Q((Q - P)D_P)^{l+1}, \tag{2.11}$$

pour $l \geq 0$. En se basant sur l'équation (2.11), on introduit les notations suivantes :
Soit $l \geq 0$, alors $H(l)$, avec

$$H(l) = \Pi_P \sum_{n=0}^{l}((Q - P)D_P)^n,$$

est appelé l'approximation en série de degré l de Π_Q, $T(l)$, avec

$$T(l) = \Pi_P((Q - P)D_P)^l,$$

représente le $l^{\text{ème}}$ élément de $H(l)$, et $R(l)$, avec

$$R(l) = \Pi_Q((Q - P)D_P)^{l+1}.$$

Remarque 3. après avoir introduit les notations, la formule (2.2) peut s'écrire
$\Pi_Q = H(l) + R(l)$ et $H(l) = \sum_{m=0}^{l} T(m)$ pour $l \geq 0$.

2.2.5 La convergence de la série

Lemme 2.4. *[41] Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) La série $\sum_{l=0}^{\infty}((Q - P)D_P)^l$ est convergente.
(ii) $\exists$ k et $\delta_k \in [0,\ 1]$ tel que $\|((Q - P)D_P)^k\|_v < \delta_k$.
(iii) $\exists$ κ et $\delta < 1$ tel que $\|((Q - P)D_P)^l\|_v < \kappa\delta^l \quad \forall\ l \in \mathbb{N}$.
(iv) $\exists$ k et $\delta \in [0,\ 1]$ tel que $\|((Q - P)D_P)^l\|_v < \delta^l \quad \forall\ l \geq k$.

Pour la preuve de ce résultat, consulter [41].
Pour montrer l'existence de la limite de $H(l)$ ((i) du lemme 2.4) il suffit de vérifier l'une

des conditions ((ii), (iii), (iv)) du lemme 2.4 et d'après Heidergott, la condition (ii) est la mieux appropriée. Considérons maintenant la condition suivante :
(C) Il existe un nombre fini k tel que on peut trouver $\delta_k \in]0,\ 1[$ qui satisfait :

$$\|((Q-P)D_P)^k\|_v < \delta_k,$$

et on pose

$$c^v_{\delta_k} = \frac{1}{1-\delta_k}\left\|\sum_{l=0}^{N-1}((Q-P)D_P)^l\right\|_v .$$

Lemme 2.5. *[41] Sous la condition (C) on a*
(i) $\|R(l-1)\|_v \leq c^v_{\delta_k}\|T(l)\|_v \quad \forall\ l,$
(ii) $\lim_{l\to\infty} H(l) = \Pi_P \sum_{n=0}^{\infty}((Q-P)D_P)^n = \Pi_Q.$

Pour la preuve de ce résultat, consulter [41].

2.2.6 L'algorithme

L'algorithme suivant a été introduit par Heidergott et all [41]. Il nous permet de calculer, avec une certaine précision, le projecteur stationnaire Π_Q en se basant sur les résultats présentés précédemment.

L'algorithme 1
Choisir une précision $\epsilon > 0$. Poser $l = 1$, $T(1) = \Pi_P(Q-P)D_P$ et $H(0) = \Pi_P$.

Etape 1 : trouver k tel que $\|((Q-P)D_P)^k\|_1 < 1$. Poser $\delta_k = \|((Q-P)D_P)^k\|_1$ puis calculer

$$c^1_{\delta_k} = \frac{1}{1-\delta_k}\left\|\sum_{l=0}^{N-1}((Q-P)D_P)^l\right\|_1 .$$

Etape 2 : Si

$$c^1_{\delta_k}\|T(l)\|_1 < \epsilon,$$

fin de l'algorithme poser $\Pi_Q = H(l-1)$.
Sinon, aller à l'étape 3.

Etape 3 : Poser $H(l) = H(l-1) + T(l)$. poser $l = l+1$ et $T(l) = T(l-1)(Q-P)D_P$. Aller à l'étape 2.

2.3 Développement en série pour les Processus de Markov

2.3.1 Préliminaire et notations

Considérons $\mathcal{X} = \{X_t,\ t \geq 0\}$ un processus de Markov ergodique prenant ses états dans un espace discret S (fini ou dénombrable), soit $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in S}$ sa matrice de transition, et $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$ sa matrice infinitésimale. On suppose que Q est conservatrice c'est à dire $\sum_{j \in S} q_{ij} = 0,\ i \in S$, et que $\mathcal{X}$ admet une distribution stationnaire unique π et un projecteur stationnaire Π. Supposons que la matrice infinitésimale Q soit perturbée en Q^* de sorte que Q^* soit la matrice infinitésimale d'un autre processus de Markov $\mathcal{X}^*$, ayant une distribution stationnaire π^* et un projecteur stationnaire Π^*.

Lemme 2.6. *[40] Le projecteur stationnaire* Π *et la matrice infinitésimale* Q *du processus* $\mathcal{X}$*, lorsque ils existent, possèdent les propriétés suivantes :*

- $\Pi Q = Q\Pi = 0$,
- $B\Pi = \Pi$, *pour toute matrice stochastique* $B \in \mathbb{R}^{S \times S}$.

Soit $D = (d_{ij})_{i,j \in S}$ la matrice de déviation du processus $\mathcal{X}$, ses éléments sont donnés par :

$$d_{ij} = \int_0^\infty (p_{ij}(t) - \pi_j)dt, \quad i, j \in S. \tag{2.12}$$

Lemme 2.7. *[33] La matrice de déviation D (lorsqu'elle existe) du processus* $\mathcal{X}$ *ayant la matrice infinitésimale* Q *possède les propriétés suivantes :*

- $\Pi D = 0$.
- $-QD = I - \Pi$.

Définition 2.6. [40] La matrice Q est dite infinitésimale avec un taux μ si $\mu = \sup_j |q_{jj}| < \infty$.

Soit Q la matrice infinitésimale avec un taux μ, introduisant la chaîne de Markov $\mathcal{X} = \{X_n^\mu : n \geq 0\}$ de noyau de transition P_μ défini comme suit

$$[P_\mu]_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/\mu & i \neq j \\ 1 + q_{ii}/\mu & i = j, \end{cases} \tag{2.13}$$

Pour $i, j \in S$, on a

$$P(t) = e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} (P_\mu)^n, \quad t \geq 0. \tag{2.14}$$

La chaîne $\mathcal{X}_\mu$ est appelée chaîne subordonnée, sa distribution stationnaire coïncide avec la distribution stationnaire de $\mathcal{X}$ et $\Pi_\mu = \Pi$. Les matrices de déviation de $\mathcal{X}_\mu$ et $\mathcal{X}$ sont liées par la relation suivante [40] :

$$D = \frac{1}{\mu} D_\mu$$

2.3.2 Ergodicité géométrique

Définition 2.7. Le processus de Markov $\mathcal{X}$ ayant la matrice de transition $P(t)$ est dit v-géométriquement ergodique si $\exists\ c < \infty$ et $\beta < 1$ tel que :

$$\|P(t) - \Pi\|_v \leq c\beta^t,$$

$\forall\ t \geq 0$.

Notons que

$$\|D\|_v \leq \int_0^\infty \|P(t) - \Pi\|_v dt$$

ainsi si $\mathcal{X}$ est v-géométriquement ergodique alors $\|D\|_v$ existe.

Lemme 2.8. *Soit Q la matrice infinitésimale avec un taux μ. Si $\exists\ N$, c et β, avec $0 \leq \beta < 1$ tel que $\|(P_\mu)^n - \Pi\|_v \leq c\beta^n \quad \forall\ n \geq N$, alors $P(t)$ est v-géométriquement ergodique.*

Lemme 2.9. *Soit Q la matrice infinitésimale avec un taux μ. Si $\mathcal{X}_\mu$ est v-géométriquement ergodique, alors, D_μ et D existent et*

$$D_\mu = \sum_{n\geq 0} ((P_\mu)^n - \Pi_\mu)$$

et

$$D = \frac{1}{\mu} \sum_{n\geq 0} ((P_\mu)^n - \Pi)$$

2.3.3 La représentation en série de Π^*

Dans ce qui suit, nous allons voir comment on peut écrire le projecteur stationnaire du système perturbé Π^* sous forme d'une série qui dépend du projecteur stationnaire du système idéal Π, des matrices infinitésimales des deux systèmes (perturbé Q^* et idéal Q) et de la matrice de déviation D.
D'après le lemme 2.7, nous avons la propriété suivante :

$$-QD = I - \Pi.$$

En rajoutant Q^*D aux deux termes de l'équation on obtient :

$$(Q^* - Q)D = Q^*D + I - \Pi.$$

Multipliant cette équation par Π^*

$$\Pi^*(Q^* - Q)D = \Pi^*Q^*D + \Pi^* - \Pi^*\Pi.$$

Pour simplifier cette écriture, on utilise les propriétés du lemme 2.6 et on obtient :

$$\Pi^* = \Pi + \Pi^*(Q^* - Q)D. \tag{2.15}$$

En remplaçant (2.15) dans Π^* à droite de la relation (2.15) on obtient :

$$\Pi^* = \Pi + \Pi(Q^* - Q)D + \Pi^*((Q^* - Q)D)^2.$$

On répète la même opération l fois de suite :

$$\Pi^* = \Pi \sum_{n=0}^{l} ((Q^* - Q)D)^n + \Pi^*((Q^* - Q)D)^{l+1}. \tag{2.16}$$

Considérons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} H(l) &= \Pi \sum_{n=0}^{l} ((Q^* - Q)D)^n, \\ T(l) &= \Pi((Q^* - Q)D)^l, \\ R(l) &= \Pi^*((Q^* - Q)D)^{l+1}. \end{aligned}$$

2.3.4 La convergence de la série

Considérons à nouveau le processus $\mathcal{X}$ et soit $S = \{0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$ l'ensemble de ces états. Considérons maintenant la condition suivante :
(C) Il existe un nombre fini k tel que on peut trouver $\delta_k \in]0,\ 1[$ qui satisfait :

$$\|((Q^* - Q)D)^k\|_v < \delta_k,$$

et on pose

$$c^v_{\delta_k} = \frac{1}{1-\delta_k} \left\| \sum_{l=0}^{N-1} ((Q^* - Q)D)^l \right\|_v .$$

Lemme 2.10. *[40] Sous la condition (C), $\forall\ v \geq 1$ on a*
(i) $\|R(l-1)\|_v \leq c^v_{\delta_k} \|T(l)\|_v \quad \forall\ l,$
(ii) $\lim_{l\to\infty} H(l) = \Pi \sum_{n=0}^{\infty} ((Q^* - Q)D)^n = \Pi^*.$
(iii) $\exists\ \delta \in]0,1[$ *et* $\exists\ \kappa \in]0,\infty[$ *tel que* $\forall\ l$

$$\|T(l)\|_v \leq \kappa \|\Pi\|_v \delta^l.$$

Pour la preuve de ce résultat, consulter [40].

2.3.5 L'algorithme

À l'aide de l'algorithme suivant, introduit par Heidergott et all [40], on peut calculer, avec une certaine précision, le projecteur stationnaire Π^*.

L'algorithme 2
Choisir une précision $\epsilon > 0$. Poser $l = 1$, $T(1) = \Pi(Q^* - Q)D$ et $H(0) = \Pi$.

Etape 1 : Trouver k tel que $\|((Q^* - Q)D)^k\|_v < 1$. Poser $\delta_k = \|((Q^* - Q)D)^k\|_v$ puis calculer

$$c^1_{\delta_k} = \frac{1}{1-\delta_k} \left\| \sum_{l=0}^{N-1} ((Q^* - Q)D)^l \right\|_v .$$

Etape 2 : Si

$$c^1_{\delta_k} \|T(l)\|_1 < \epsilon,$$

fin de l'algorithme poser $\Pi^* = H(l-1)$.
Sinon, aller à l'étape 3.

Etape 3 : Poser $H(l) = H(l-1) + T(l)$. poser $l = l + 1$ et $T(l) = T(l-1)(Q^* - Q)D$. Aller à l'étape 2.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait une synthèse sur l'application de la méthode du développement en séries aux chaînes de Markov à espace d'états général, aux chaînes de Markov à espace d'états fini et aux processus de Markov.

Chapitre 3

Stabilité forte

La méthode de stabilité forte (ou méthode des opérateurs de la théorie de stabilité) a été élaborée par D. Aissani et N. Kartashov au début des années 80 [6]. Elle est applicable à tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov. Elle a été principalement appliquée aux modèles de files d'attente par N. Kartashov, D. Aissani [5, 3] et leurs élèves (L. Bouallouche [29], M. Benaouicha [17], L. Berdjoudj [19], O. Lekadir [69], Z. Mouhoubi [72], ...).

3.1 Préliminaires et notations

Soit $X = (X_t, t \geq 0)$, une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace mesurable $(E,\ \mathcal{E})$, donnée par un noyau de transition régulier $P(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$ et admettant une probabilité invariante unique π.

Notons par $m\mathcal{E}$ ($m\mathcal{E}^+$) l'espace des mesures finies (non négatives) sur $\mathcal{E}$, $f\mathcal{E}$ ($f\mathcal{E}^+$) l'espace des fonctions mesurables bornées (non négatives) sur E. On munit l'espace $m\mathcal{E}$ d'une norme $\|.\|$, le sous espace $(\mathcal{M}, \|.\|)$ est un espace de Banach ($\mathcal{M}$ peut être pris comme n'importe quel sous espace fermé de $\{\mu \in m\mathcal{E} : \|\mu\| < \infty\}$). En outre, la norme doit être compatible avec l'ordre structurel dans $m\mathcal{E}$, c'est-à-dire :

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 + \mu_2\| \text{ pour } \mu_i \in \mathcal{M}^+,\ i = 1, 2 \tag{3.1}$$

$$\|\mu_1\| \leq \|\mu_1 - \mu_2\| \text{ pour } \mu_i \in \mathcal{M}^+,\ i = 1, 2 \text{ et } \mu_1 \perp \mu_2. \tag{3.2}$$

$$|\mu|(E) \leq k\|\mu\| \text{ pour } \mu \in \mathcal{M}. \tag{3.3}$$

Où $|\mu|$ est la variation de la mesure μ, k est une constante et $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap (m\mathcal{E}^+)$.
les trois conditions (3.1), (3.2), (3.3) sont particulièrement satisfaites pour les normes

dites normes de variations pondérées (normes-poids), définies par

$$\|\mu\|_v = \int_E v(x)|\mu|(dx), \tag{3.4}$$

où v est une fonction mesurable vérifiant $\inf_{x\in E} v(x) > 0$.
On associe à chaque noyau de transition $Q(x, A)$ et à chaque fonction $f \in f\mathcal{E}$, les applications linéaires Q : $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ et $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ dont les valeurs pour $\mu \in m\mathcal{E}$ sont respectivement :

$$\begin{aligned} Q(\mu)(.) &= \mu Q(.) = \int_E \mu(dx)Q(x, .) \\ f(\mu) &= \mu f = \int_E \mu(dx)f(x) \end{aligned}$$

Les normes induites pour les applications linéaires sont

$$\begin{aligned} \|Q\| &= \sup\{\|\mu Q\|, \|\mu\| \leq 1\}, \\ \|f\| &= \sup\{\|\mu f\|, \|\mu\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Ce qui correspondra pour le choix de la norme-poids à

$$\begin{aligned} \|Q\|_v &= \sup_{x\in E}(v(x))^{-1} \int_E |Q(x, dy)|v(y), \\ \|f\|_v &= \sup_{x\in E}(v(x))^{-1}|f(x)|. \end{aligned}$$

On suppose que l'opérateur $P : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, correspondant au noyau de transition de la chaîne X vérifie

$$\mathcal{M}P \subset \mathcal{M}, \ \|P\| < \infty, \tag{3.5}$$

où $\mathcal{M}P = \{\mu : \mu = \mu_1 P, \mu_1 \in \mathcal{M}\}$. Notons par $\Pi = \mathbf{1} o \pi$ le projecteur stationnaire du noyau P, où $\mathbf{1}$ est la fonction identiquement égale à 1, et par I l'opérateur identité dans $\mathcal{M}$. "o" étant le produit tensoriel d'une fonction et d'une mesure.

3.2 Ergodicité uniforme

Définition 3.1. [58] La chaîne de Markov X est uniformément ergodique par rapport à une norme $\|.\|$, si elle possède une unique mesure invariante π et :

$$\lim_{t\to\infty} \|P^{(t)} - \Pi\| = 0.$$

Théorème 3.1. [6, 58] La chaîne de Markov X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|.\|$, si et seulement si l'opérateur $(I - P + \Pi)$ est inversible et :

$$\|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty. \tag{3.6}$$

Introduisons maintenant la notion de récurrence au sens de Harris.

Définition 3.2. Une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ définie sur $(E, \mathcal{E})$ et de noyau de transition P est récurrente au sens de Harris, s'il existe une mesure invariante μ^* σ-positive, telle que $\mu^*(A) > 0$ alors :

$$P_x\{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_A(X_n) = +\infty\} = 1, \quad \text{pour tout} \quad \forall\, x \in E \tag{3.7}$$

où $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice sur A.

Pour les chaînes de Markov récurrente au sens de Harris, on a le résultat suivant :

Théorème 3.2. [6] Une chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris, est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|.\|$ et apériodique s'il existe un entier $n \geq 1$ une mesure positive $\sigma \in \mathcal{M}^+$ et une fonction mesurable $h \in f\mathcal{E}^+$ telles que les conditions suivantes soient satisfaites :

- $\pi h > 0, \quad \sigma\mathbf{1} = 1, \quad \sigma h > 0,$
- $T = P^n - ho\sigma \geq 0,$
- $\exists\, m \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, \psi \in]0, 1[$ tel que $\|T^m\| \leq \psi$.

3.3 Stabilité forte

Définition 3.3. [6, 58] On dit que la chaîne de Markov X est fortement stable par rapport à la norme $\|.\|$, si chaque noyau stochastique Q dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$ admet une probabilité stationnaire unique ν et :

$$\|\nu - \pi\| \to 0 \;\text{ quand }\; \|Q - P\| \to 0.$$

Théorème 3.3. [6, 58] Si la chaîne de Markov X est fortement stable par rapport à la norme $\|.\|$ alors, pour tout noyau stochastique voisin du noyau P de X on a :

$$\|\nu - \pi\| \leq C\|Q - P\|.$$

où, ν est la mesure invariante de Q et C(P) une constante.

Théorème 3.4. [6, 58] La chaîne de Markov X est fortement stable par rapport à la norme $\|.\|$, si et seulement si elle est uniformément ergodique par rapport à la même norme.

On dira que la chaîne de Markov X est fortement v-stable si elle est stable par rapport à la norme $\|.\|_v$

Corollaire 3.1. (**Critère de v-stabilité forte**) Pour qu'une chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris, de noyau de transition P soit fortement v-stable, il est suffisant de trouver une mesure positive $\sigma \in \mathcal{M}^+$ et une fonction mesurable $h \in f\mathcal{E}^+$, telles que :

1) $\pi h > 0, \quad \sigma \mathbf{1} = 1, \quad \sigma h > 0,$

2) Le noyau $T = P - ho\sigma$ est non négatif,

3) Il existe $\psi < 1$ et $m \geq 1$ tel que, $T^m v(x) \leq \psi \; v(x), \;\; \forall x \in E,$

4) $\|P\|_v < \infty$.

3.4 Inégalités de stabilité forte

La possibilité d'obtenir des inégalités avec un calcul exact des constantes est l'une des spécificités de la méthode de la stabilité forte.

Théorème 3.5. [59] Soit une chaîne de Markov X, de noyau de transition P, et de mesure invariante π, fortement v-stable et vérifiant les conditions du théorème 3.2. Alors, pour un noyau stochastique Q, de mesure stationnaire ν appartenant à un certain voisinage de P, on a l'égalité suivante :

$$\nu = \pi[I - \Delta R_0(I - \Pi)]^{-1},$$

$$\nu = \pi + \sum_{r=1}^{+\infty} \pi[\Delta R_0(I - \Pi)]^r. \tag{3.8}$$

Où : $\Delta = Q - P$ et $R_0 = (I - T)^{-1}$.

Corollaire 3.2. [59] Sous les conditions du théorème 3.2, on a

$$\nu = \pi + \pi \Delta R_0(I - \Pi) + o(\|\Delta\|_v^2) \;\; \text{pour} \;\; \|\Delta\|_v \to 0. \tag{3.9}$$

Corollaire 3.3. [59] Sous les conditions du théorème 3.2 et pour Δ vérifiant la condition $\|\Delta\|_v < \dfrac{(1-\psi)}{c}$, on a :

$$\|\nu - \pi\|_v \leq \|\Delta\|_v \|\pi\|_v c(1 - \psi - c\|\Delta\|_v)^{-1} \tag{3.10}$$

où

$$c = m\|P\|_v^{m-1}(1 + \|\mathbf{1}\|_v\|\pi\|_v)$$

et

$$\|\pi\|_v \leq (\sigma v)(1-\psi)^{-1}(\pi h)m\|P\|_v^{m-1}.$$

Dans le cas où $m = 1$, on a $c = 1 + \|\mathbf{1}\|_v\|\pi\|_v$.

3.5 Stabilité forte et méthode du développement en série

L'existence de la matrice de déviation $D = \sum_{m=0}^{\infty}(P^m - \Pi)$ est fondamentale pour l'application de la méthode du développement en série (voir chapitre 2). Le corollaire suivant nous montre la relation entre l'existence de la matrice de déviation D et la stabilité forte.

Corollaire 3.4. [79] Si l'opérateur D existe et est borné, alors la chaîne X est fortement stable.

Ce résultat signifie que la méthode du développement en série ne s'applique qu'aux systèmes fortement stables.

3.6 Stabilité forte pour le système M/M/1

La méthode de la stabilité forte a été appliquée au système M/M/1 après une perturbation du flot des arrivées par L. Bouallouche [26, 29].

Considérons un système de files d'attente G/M/1, les temps des inter-arrivées des clients suivent une loi générale F, de moyenne $1/\lambda$, et le temps de service est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre μ.

Soit Y'_n : le nombre de clients se trouvant dans le système G/M/1 juste avant l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client. Les probabilités de transition sont données par $(Q = (q_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}})$:

$$q_{ij} = \begin{cases} \alpha'_i & \text{si } j = 0, \\ b'_{i-j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha'_i = 1 - \sum_{k=0}^{i} b'_k, \;\; b'_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^k}{k!} dF(t).$

Considérons en même temps un système de files d'attente M/M/1, les temps des inter-arrivées des clients suivent une loi exponentielle E_λ, de moyenne $1/\lambda$, et la durée de service est exponentielle, de paramètre μ.

Soit Y_n : le nombre de clients se trouvant dans le système M/M/1 juste avant l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client. Les probabilités de transition sont données par $(P = (p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}})$:

$$p_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = 0, \\ b_{i-j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\alpha_i = 1 - \sum_{k=0}^{i} b_k, \;\; b_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^k}{k!} dE_\lambda(t).$

Désignons par π_P et π_Q les distributions stationnaires des chaînes Y_n et Y'_n.

Théorème 3.6. [26] Supposons que $\lambda/\mu < 1$, alors pour tout β tel que $1 < \beta < \mu/\lambda$, la chaîne de Markov induite Y_n est fortement v-stable pour une fonction $v(l) = \beta^l$.

3.6.1 Déviation du noyau de transition

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des états des chaînes de Markov Y_n et Y'_n, estimons au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition P par rapport à l'opérateur Q.

Théorème 3.7. [26] Soient P et Q les noyaux de transition des chaînes de Markov induites des systèmes M/M/1 et G/M/1. Alors, pour tout β tel que : $1 < \beta < \mu/\lambda$, on a :

$$\|P - Q\|_v \leq (1 + \beta)W$$

où $W = \int_0^{\infty} |F - E_\lambda|(dt)$.

3.6.2 Inégalités de stabilité

Théorème 3.8. [26] Supposons que la chaîne de Markov induite Y_n du système M/M/1 soit fortement v-stable et que :

$$W < \frac{(1-\psi)(\mu-\lambda\beta)}{(1+\beta)(2\mu-\lambda(1+\beta))}$$

Alors

$$\|\pi_P - \pi_Q\|_v \leq \frac{(1+\beta)(2\mu-\lambda(1+\beta))(\mu-\lambda)W}{\dfrac{(\beta-1)(\mu-\lambda\beta)^3}{(\beta-1)\mu+\lambda\beta} - (1+\beta)(2\mu-\lambda(1+\beta))(\mu-\lambda\beta)W}$$

pour tout β tel que $1 < \beta < \mu/\lambda$, avec $\quad \psi = \dfrac{\lambda\beta}{\lambda+\mu-\dfrac{\mu}{\beta}}$.

Pour la preuve des théorèmes 3.6, 3.7 et 3.8 consulter [26].

3.6.3 Algorithme d'approximation du système G/M/1

L'algorithme suivant a été élaboré par L. Bouallouche [26, 29]. Il permet de déterminer, si possible, le domaine de validité de l'approximation et de donner la possibilité de calculer l'erreur sur la distribution stationnaire due à l'approximation.

1. Définition de la densité $g(t)$;
2. Définition de la durée moyenne entre deux arrivées $E(T)$;
3. Introduction des paramètres de $g(t)$ et du taux de service μ ;
4. Détermination du taux d'arrivée λ :
   $\lambda = 1/E(T)$;
5. Vérification de l'ergodicité géométrique :
   Si $(\lambda/\mu) \geq 1$ Alors "Le système est instable" ; Fin
6. Détermination de la variation W de $G(t)$ et $E_\lambda(t)$:
   $W = \int_0^\infty |G - E_\lambda| dt$;
7. Détermination du domaine de β tel que $\beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}$ vérifiant :

$$1 < \beta < \mu/\lambda \quad \text{et} \quad W < \frac{(\beta(\mu+\lambda)-\mu-\lambda\beta^2)(\mu-\lambda\beta)}{(1+\beta)(\beta(\lambda+\mu)-\mu)(2\mu-\lambda(1+\beta))}$$

Si aucune valeur de β ne vérifie la condition, alors

"Le système ne peut pas être approché par le système M/M/1" ; Fin

8. Détermination de l'erreur $\|\pi_P - \pi_Q\|_v$:

   Pour β de $\beta_{\min}$ à $\beta_{\max}$, Effectuer

$$\|\pi_P - \pi_Q\|_v \leftarrow \frac{(1+\beta)(2\mu-\lambda(1+\beta))(\mu-\lambda)W}{\dfrac{(\beta-1)(\mu-\lambda\beta)^3}{(\beta-1)\mu+\lambda\beta} - (1+\beta)(2\mu-\lambda(1+\beta))(\mu-\lambda\beta)W}$$

9. Fin.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a passé en revue les résultats essentiels concernant la théorie de stabilité forte, et on a présenté les résultats de son application au système de files d'attente M/M/1, après une perturbation des flots des arrivées.

Chapitre 4

Développement en série et stabilité forte du système M/M/1/N

Dans ce chapitre, on applique la méthode du développement en série au système M/M/1/N, après une perturbation du flot des arrivées. Cette méthode nous permet de calculer la distribution stationnaire du système perturbé G/M/1/N. On applique également la méthode de stabilité forte au même système.

4.1 Préliminaire et position du problème

Considérons un système de files d'attente G/M/1/N, les temps des inter-arrivées des clients suivent une loi générale F, de moyenne $1/\lambda$, et le temps de service est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre μ.

Soit Y'_n : le nombre de clients se trouvant dans le système G/M/1/N juste avant l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client. Les probabilités de transition sont données par $(Q = (q_{i,j})_{i,j \in E})$ où $E = \{0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$:
pour $0 \leq i \leq N-1$

$$q_{ij} = \begin{cases} \alpha'_i & \text{si } j = 0, \\ b'_{i-j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{si } i+1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

pour $i = N$

$$q_{ij} = \begin{cases} \alpha'_{N-1} & \text{si } j = 0, \\ b'_{N-j} & \text{si } 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

où $\alpha'_i = 1 - \sum_{k=0}^{i} b'_k, \;\; b'_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^k}{k!} dF(t).$

Considérons en même temps un système de files d'attente M/M/1/N, les temps des inter-arrivées des clients suivent une loi exponentielle E_λ, de moyenne $1/\lambda$, et la durée de service est exponentielle, de paramètre μ.

Soit Y_n : le nombre de clients se trouvant dans le système M/M/1/N juste avant l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client. Les probabilités de transition sont données par $(P = (p_{i,j})_{i,j \in E})$:
pour $0 \leq i \leq N-1$

$$p_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = 0, \\ b_{i-j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{si } i+1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

pour $i = N$

$$p_{ij} = \begin{cases} \alpha_{N-1} & \text{si } j = 0, \\ b_{N-j} & \text{si } 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

où

$$b_l = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^l}{l!} dE_\lambda(t) = \frac{\lambda \mu^l}{l!(\lambda+\mu)^{l+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^l \, dt = \frac{\lambda \mu^l}{(\lambda+\mu)^{l+1}},$$

$$\alpha_i = 1 - \sum_{l=0}^{i} b_l = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \sum_{l=0}^{i} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^l = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \left(\frac{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{i+1}}{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}} \right) = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{i+1} \quad (4.1)$$

Désignons par π_P et π_Q les distributions stationnaires des chaînes Y_n et Y'_n, et par Π_P et Π_Q les projecteurs stationnaires des chaînes Y_n et Y'_n.

4.2 Application de la méthode de stabilité forte

La méthode de la stabilité forte a été appliquée au système M/M/1 après une perturbation du flot des arrivées dans [29]. À présent, nous allons adapter ces résultats pour le système M/M/1/N.

Théorème 4.1. Supposons que $\lambda/\mu < 1$, alors pour tout β tel que $1 < \beta < \mu/\lambda$, la chaîne de Markov induite Y_n est fortement v-stable pour une fonction $v(l) = \beta^l$.

Preuve

Pour prouver la v-stabilité de la chaîne X pour une fonction $v(l) = \beta^l$, vérifions les conditions du corollaire 3.1

Soit la fonction mesurable :

$h_i = p_{i0}$

et la mesure :

$$\sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{Si } 1 \leq j \leq N \\ 1 & \text{Si } j = 0 \end{cases}$$

Alors, on vérifie facilement que :

- $\pi h = \sum_{i=0}^{N} \pi_i p_{i0} > 0$
- $\sigma \mathbf{1} = 1$
- $\sigma h = p_{00} > 0$

On a

$$T_{ij} = p_{ij} - h_i \; \sigma_j = \begin{cases} p_{i0} - 1 \; p_{i0} = 0 & \text{Si } j = 0 \\ p_{ij} - 0 \; p_{i0} = p_{ij} & \text{Si } 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

D'où $\quad T_{ij} \geq 0 \quad \forall \; 0 \leq i \leq N, \; 0 \leq j \leq N.$

Montrons qu'il existe $\psi < 1$ tel que $Tv(k) \leq \psi v(k)$ pour $k \in E$.

Pour $0 \leq l \leq N-1$

$$\begin{aligned} (Tv)(l) &= \sum_{j=0}^{N} \beta^j T_{lj} = \sum_{j=1}^{N} \beta^j p_{lj} = \sum_{j=1}^{l+1} \beta^j b_{l+1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{l} \beta^{l+1-j} b_j = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \beta^{l+1} \sum_{j=0}^{l} \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)} \right)^j \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \beta^{l+1} \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)} \right)^{l+1}}{1 - \frac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)}} = \lambda \beta^{l+1} \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)} \right)^{l+1}}{\lambda + \mu - \frac{\mu}{\beta}}. \end{aligned}$$

Pour $l = N$

$$\begin{aligned}(Tv)(N) &= \sum_{j=1}^{N} \beta^j p_{Nj} = \sum_{j=1}^{N} \beta^j d_{N-j} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \beta^{N-j} b_j = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \beta^N \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)}\right)^j \\ &= \lambda \beta^N \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)}\right)^N}{\lambda + \mu - \frac{\mu}{\beta}}.\end{aligned}$$

Pour $0 \leq l \leq N$

$(Tv)(l) \leq \beta^l \dfrac{\lambda\beta}{\lambda+\mu-\frac{\mu}{\beta}} \left(1 - \left(\dfrac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)}\right)^N\right), \quad \forall\ \beta > 1.$

on a $\left(1 - \left(\dfrac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)}\right)^N\right) < 1,$

si $\lambda/\mu < 1$ et $1 < \beta < \mu/\lambda$ alors $\dfrac{\lambda\beta}{\lambda+\mu-\frac{\mu}{\beta}} < 1$ donc

$\psi = \dfrac{\lambda\beta}{\lambda+\mu-\frac{\mu}{\beta}} \left(1 - \left(\dfrac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)}\right)^N\right) < 1.$

On peut alors conclure qu'il existe $\psi < 1$ tel que :

pour $0 \leq l \leq N$

$(Tv)(l) \leq \beta^l \psi, \quad$ pour tout $1 < \beta < \mu/\lambda$.

On vérifie maintenant que $\|P\|_v < \infty$:

On a : $P = T + h \circ \sigma$

alors $\|P\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \|\sigma\|_v$.

on a :

- $\|T\|_v = \sup\limits_{0 \leq l \leq N} \dfrac{1}{\beta^l} \sum\limits_{j=0}^{N} \beta^j T_{lj} \leq \psi < 1$
- $\|h\|_v = \sup\limits_{0 \leq l \leq N} \dfrac{h_l}{\beta^l} = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} < 1$
- $\|\sigma\|_v = \sum\limits_{j=0}^{N} \beta^j \sigma_j = 1$

alors $\|P\|_v < \infty$. $\square$

4.2.1 Déviation du noyau de transition

Théorème 4.2. Soient P et Q les noyaux de transition des chaînes de Markov induites des systèmes M/M/1/N et G/M/1/N. Alors, pour tout β tel que : $1 < \beta < \mu/\lambda$, on a :

$$\|P - Q\|_v \leq (1+\beta)W$$

où $W = \int_0^\infty |F - E_\lambda|(dt)$.

Preuve

Pour tout β tel que $1 < \beta < \mu/\lambda$, on a :

$$\|P - Q\|_v = \sup_{0\leq l\leq N} \frac{1}{\beta^l} \sum_{j=0}^{N} \beta^j |p_{lj} - q_{lj}| = \sup_{0\leq l\leq N} \frac{1}{\beta^l} \left(|p_{l0} - q_{l0}| + \sum_{j=1}^{N} \beta^j |p_{lj} - q_{lj}| \right).$$

Désignons par A et B les deux expressions du terme de droite de cette égalité où :

$$A = \sup_{0\leq l\leq N} \frac{1}{\beta^l} |p_{l0} - q_{l0}|$$

Pour $0 \leq l \leq N-1$

$$\begin{aligned}
|p_{l0} - q_{l0}| &= |\sum_{j=0}^{l} b_j - \sum_{j=0}^{l} b'_j| \\
&\leq \sum_{j=0}^{l} \int_0^\infty \frac{1}{j!} e^{-\mu t} (\mu t)^j |F - E_\lambda|(dt) = \int_0^\infty \sum_{j=0}^{l} \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t} |F - E_\lambda|(dt) \\
&\leq \int_0^\infty |F - E_\lambda|(dt) = W
\end{aligned}$$

Pour l = N

$$\begin{aligned}
|p_{N0} - q_{N0}| &= |\sum_{j=0}^{N-1} b_j - \sum_{j=0}^{N-1} b'_j| \\
&\leq \int_0^\infty \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t} |F - E_\lambda|(dt) \\
&\leq \int_0^\infty |F - E_\lambda|(dt) = W
\end{aligned}$$

On a alors $A \leq W$

$B = \sup_{0 \leq l \leq N} \frac{1}{\beta^l} \sum_{j=1}^{N} |p_{lj} - q_{lj}|$

Pour $0 \leq l \leq N-1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta^l} \sum_{j=1}^{N} |p_{lj} - q_{lj}| &\leq \frac{1}{\beta^l} \sum_{j=1}^{l+1} \beta^j \int_0^{\infty} \frac{1}{(l+1-j)!} e^{-\mu t} (\mu t)^{l+1-j} |F - E_\lambda|(dt) \\
&\leq \beta \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \sum_{j=1}^{l+1} \frac{1}{(l+1-j)!} \left(\frac{\mu t}{\beta}\right)^{l+1-j} |F - E_\lambda|(dt) \leq \beta \int_0^{\infty} |F - E_\lambda|(dt)
\end{aligned}$$

Pour l = N

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta^N} \sum_{j=1}^{N} |p_{Nj} - q_{Nj}| &\leq \frac{1}{\beta^N} \sum_{j=1}^{N} \beta^j \int_0^{\infty} \frac{1}{(N-j)!} e^{-\mu t} (\mu t)^{N-j} |F - E_\lambda|(dt) \\
&\leq \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(N-j)!} \left(\frac{\mu t}{\beta}\right)^{N-j} |F - E_\lambda|(dt) \leq \int_0^{\infty} |F - E_\lambda|(dt)
\end{aligned}$$

D'où $B \leq \beta W$. On conclut alors que

$\|P - Q\|_v \leq (1+\beta) W.$ □

4.2.2 Inégalités de stabilité

Théorème 4.3. Supposons que la chaîne de Markov induite Y_n du système M/M/1/N soit fortement v-stable et que :

$$W < \frac{(1-\psi)}{C(1+\beta)} \tag{4.2}$$

Alors

$$\|\pi_P - \pi_Q\|_v \leq \frac{(1-\rho)(1-(\rho\beta)^{N+1})(1+\beta) C W}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)(1-\psi-(1+\beta) W C)} \tag{4.3}$$

pour tout β tel que $1 < \beta < \mu/\lambda$, avec

$$C = \frac{(1-\rho)(1-(\rho\beta)^{N+1}) + (1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)}, \quad \psi = \frac{\lambda\beta}{\lambda + \mu - \frac{\mu}{\beta}} \left(1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)}\right)^N\right).$$

Preuve

Pour tout $\|\Delta\|_v \leq (1-\psi)/C$, on a l'estimation :

$$\|\pi_P - \pi_Q\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\pi_P\|_v (1 - \psi - C\|\Delta\|_v)^{-1} \tag{4.4}$$

où $\Delta = P - Q$ et $C = 1 + \|1\|_v \|\pi_P\|_v$
on a :
$\|1\|_v = \sup_{0 \le l \le N} \frac{1}{\beta^l} = 1$
$\|\pi_P\|_v = \sum_{j=0}^{N} \beta^j \pi_{Pj} = \frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{N+1})} \sum_{j=0}^{N} (\rho\beta)^j = \frac{(1-\rho)(1-(\rho\beta)^{N+1})}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)}$
et
$C = \frac{(1-\rho)(1-(\rho\beta)^{N+1}) + (1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)}$
de (4.4) on a :
$\|\pi_P - \pi_Q\|_v \le \|P-Q\|_v C \|\pi_P\|_v (1-\psi - C(1+\beta)W)^{-1}$ pour tout $\|P-Q\|_v \le \frac{(1-\psi)}{C}$
Autrement dit, pour tout $W < \frac{(1-\psi)}{C(1+\beta)}$ $\forall\, \beta$ tel que $1 < \beta < \mu/\lambda$.

En remplaçant $\|\pi_P\|_v$ par son expression, on obtient l'inégalité (4.3) du théorème 4.3

□

4.3 Le développement en série de Π_Q

Étant donné que la chaîne de Markov considéré Y_n est un chaîne à espace d'état fini, les résultats que nous allons appliquer sont ceux concernant les chaînes de Markov à espace d'état fini [41].

Considérons la condition suivante :
(C) Il existe un nombre fini k tel qu'on peut trouver $\delta_k \in]0,\ 1[$ qui satisfait :

$$\|((Q-P)D)^k\|_v < \delta_k.$$

D'après le lemme 2.5, si la condition (C) est vérifiée, alors :

$$\Pi_Q = \Pi_P \sum_{n=0}^{\infty} ((Q-P)D)^n.$$

A présent, on va chercher une estimation de $\|D\|_v$. On donne $v(l) = \beta^l$

On a

$$D = \sum_{m=0}^{\infty} (P^m - \Pi_P)$$

D'où

$$\|D\|_v = \|\sum_{m=0}^{\infty}(P^m - \Pi_P)\|_v \leq \sum_{m=0}^{\infty}\|P^m - \Pi_P\|_v \tag{4.5}$$

Sous les conditions du corrolaire 3.1, la quantité $\|P^m - \Pi_P\|_v$ est estimé dans [56] par

$$\|P^m - \Pi_P\|_v \leq \left(\psi^m + \frac{\theta^{m+2}}{\psi(\theta - \theta_0)}\right)(1+\eta), \tag{4.6}$$

pour $\theta_0 < \theta < 1$, où

- $\theta_0 = 1 - \dfrac{1-\psi}{1+\psi\eta\omega}$,
- $\eta = \|\pi\|_v, \quad \omega = \min(\omega_1,\ \omega_2)$,
- $\omega_1 = 2\exp\left(-\dfrac{(1-\pi h)\ln(\sigma h)}{\pi h(1-\sigma h)}\right) - 1$,
- $\omega_2 \leq \dfrac{2\eta\psi}{\pi h(1-\psi)\sigma h} + 1$.

Les conditions du corrolaire 3.1 sont vérifiées pour le système M/M/1/N si $\lambda/\mu < 1$ et $1 < \beta \leq \mu/\lambda$, alors d'après (4.4) et (4.5) on a

$$\begin{aligned}\|D\|_v &\leq \sum_{m=0}^{\infty}\left(\psi^m + \frac{\theta^{m+2}}{\psi(\theta-\theta_0)}\right)(1+\eta)\\ &\leq \left[\frac{1}{1-\psi} + \frac{\theta^2}{\psi(1-\theta)(\theta-\theta_0)}\right](1+\eta) = \chi_\theta\end{aligned}$$

Calculons à présant les quantités η, ψ, σh et πh :

- $\eta = \displaystyle\sum_{l=0}^{N}\beta^l\pi_l = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\sum_{l=0}^{N}(\rho\beta)^l = \frac{(1-\rho)(1-(\rho\beta)^{N+1})}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)}$,
- $\psi = \dfrac{\lambda\beta}{\lambda+\mu-\dfrac{\mu}{\beta}}\left(1-\left(\dfrac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)}\right)^N\right) < 1$,
- $\sigma h = p_{00} = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$,
- $\pi h = \displaystyle\sum_{i=0}^{N}\pi_i p_{i0} = \frac{\mu(1-\rho)}{(\lambda+\mu)(1-\rho^{N+1})}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i + \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^N$

$$= \frac{\mu(1-\rho)}{(\lambda+\mu)(1-\rho^{N+1})}\left(\frac{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^N}{\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}}\right) + \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^N = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}.$$

Pour que la condition (C) soit vérifiée, il suffit que $\|P-Q\|_v < \dfrac{1}{\chi_\theta}$ et on a $k \geq \left(\dfrac{\ln \delta_k}{\ln(\chi_\theta\|P-Q\|_v)}\right) + 1$.

4.4 Application numérique

Nous allons maintenant illustrer l'application de la méthode de la stabilité forte et du développement en série sur un exemple numérique. Considérons un système de files d'attente G/M/1/N, on donne $N = 5$, les durées entre deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, dont la densité est :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x} & \text{Si } x \geq 0 \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Les durées de service sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant une loi exponentielle E_μ, de paramètre $\mu = 12$.
Soit $Q = (q_{i,j})_{i,j\in E}$ la matrice de transition de la chaîne Y'_n correspondant au système G/M/1/N considéré :
pour $0 \leq i \leq N-1$

$$q_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\frac{\mu}{\mu+1})^{i+1} + \frac{3}{4}(\frac{\mu}{\mu+2})^{i+1} & \text{si } j = 0, \\ \\ \frac{\mu^{i-j+1}}{4(\mu+1)^{i-j+2}} + \frac{3\mu^{i-j+1}}{2(\mu+1)^{i-j+2}} & \text{si } 1 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{si } i+1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

pour $i = N$

$$q_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\frac{\mu}{\mu+1})^{N} + \frac{3}{4}(\frac{\mu}{\mu+2})^{N} & \text{si } j = 0, \\ \\ \frac{\mu^{N-j}}{4(\mu+1)^{N-j+1}} + \frac{3\mu^{N-j}}{2(\mu+1)^{N-j+1}} & \text{si } 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

Soit $E(T)$, la durée moyenne des inter-arrivées :

$E(T) = \int_0^\infty t\ g(t)dt = \int_0^\infty t(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t})dt = \frac{5}{8}.$
Le taux d'arrivées $\lambda = \frac{1}{E(T)} = \frac{8}{5}$.

Considérons en même temps un système de files d'attente M/M/1/N. On donne $N = 5$ et les temps des inter-arrivées des clients suivent une loi exponentielle E_λ ($\lambda = 8/5$), et la durée de service est exponentielle, de paramètre $\mu = 12$.
Rappelons que $P = (p_{i,j})_{i,j\in E}$ est la matrice de transition de la chaîne Y_n correspondant au système M/M/1/N :
pour $0 \leq i \leq N-1$

$$p_{ij} = \begin{cases} (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{i+1} & \text{si } j = 0, \\ \\ \frac{\lambda\mu^{i-j+1}}{(\lambda+\mu)^{i-j+2}} & \text{si } 1 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{si } i+1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

pour $i = N$

$$p_{ij} = \begin{cases} (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{N} & \text{si } j = 0, \\ \\ \frac{\lambda\mu^{N-j}}{(\lambda+\mu)^{N-j+1}} & \text{si } 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on choisit la fonction $v(l) = \beta^l$.

4.4.1 Application de la méthode de stabilité forte

On désire approcher les caractéristiques du système G/M/1/N (système réel) par celles du système M/M/1/N (système idéal). Pour calculer l'erreur dûe à l'approximation, on passera par les étapes suivantes :

1. Détermination de la variation des distributions G et E_λ :

$$W = \int_0^\infty |d(G - E_\lambda)(x)| = \int_0^\infty \left| \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x} \right|.$$

Cette quantité s'avère difficile à calculer manuellement. Pour remédier à ce problème nous avons fait appel à un programme d'approximation (voir Annexe 2), à partir duquel nous avons obtenu :

$$W = 0.06008912.$$

2. Détermination du domaine de validité de l'approximation :
   C'est l'ensemble des valeurs de β, pour lesquelles la quantité W vérifie la relation (4.2). En utilisant des procédures de recherche dichotomiques (voir Annexe 2), on trouve
   $$1.01 \leq \beta \leq 2.7236071 \ \ (\beta_{min} = 1.01,\ \beta_{max} = 2.7236071)$$
3. Détermination de l'erreur sur la distribution stationnaire $f(\beta) = \|\pi_P - \pi_Q\|_v$:
   Pour voir l'impact du choix de la norme, nous faisons variez β. Pour chaque valeurs de β, le programme que nous avons conçu (voir Annexe 2) calcule la borne supérieure de l'erreur d'approximation. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

β	$\|\pi_P - \pi_Q\|_v$	β	$\|\pi_P - \pi_Q\|_v$
1.01	0.8165805	1.8	1.7373977
1.02	0.8173503	2	2.4102178
1.03	0.8185240	2.2	3.6328277
1.1	0.8365192	2.4	6.4214516
1.2	0.8861564	2.6	18.3466771
1.3	0.9591606	2.7	98.5631519
1.4	1.0546126	2.71	168.7781551
1.6	1.3229628	2.7236071	4118.2563611

TAB. 4.1-Erreur sur la distribution stationnaire, en fonction de β

On remarque que l'erreur $\|\pi_P - \pi_Q\|_v$ croît en fonction de β, elle atteint des valeurs très grandes à la frontière de la borne supérieure de l'intervalle $[1.01, 2.7236071]$. L'estimation minimale de l'erreur est $\|\pi_P - \pi_Q\|_v = 0.8165805$ pour $\beta = 1.01$.

4.4.2 Application de la méthode du développement en série

À l'aide de l'algorithme 1 (voir chapitre 2), nous allons calculer la distribution stationnaire du système G/M/1/N (système perturbé). Nous passerons par les étapes suivantes :

1. Détermination des matrices P, Q, D et Π_P :

   Les calculs sont faits par le biais du programme que nous avons conçu

   • La matrice de transition de la chaîne Y_n est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0.8823529 & 0.1176471 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.7785467 & 0.1038062 & 0.1176471 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.6869530 & 0.0915937 & 0.1038062 & 0.1176471 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.6061349 & 0.0808180 & 0.0915937 & 0.1038062 & 0.1176471 & 0.0000000 \\ 0.5348250 & 0.0713100 & 0.0808180 & 0.0915937 & 0.1038062 & 0.1176471 \\ 0.5348250 & 0.0713100 & 0.0808180 & 0.0915937 & 0.1038062 & 0.1176471 \end{pmatrix}$$

   • Le projecteur stationnaire de la chaîne Y_n est donnée par

$$\Pi_P = \begin{pmatrix} 0.8666715 & 0.1155562 & 0.0154075 & 0.0020543 & 0.0002739 & 0.0000365 \\ 0.8666715 & 0.1155562 & 0.0154075 & 0.0020543 & 0.0002739 & 0.0000365 \\ 0.8666715 & 0.1155562 & 0.0154075 & 0.0020543 & 0.0002739 & 0.0000365 \\ 0.8666715 & 0.1155562 & 0.0154075 & 0.0020543 & 0.0002739 & 0.0000365 \\ 0.8666715 & 0.1155562 & 0.0154075 & 0.0020543 & 0.0002739 & 0.0000365 \\ 0.8666715 & 0.1155562 & 0.0154075 & 0.0020543 & 0.0002739 & 0.0000365 \end{pmatrix}$$

   La distribution stationnaire de la chaîne Y_n est donc donnée par

$$\pi_P = \begin{pmatrix} 0.8666715 \\ 0.1155562 \\ 0.0154075 \\ 0.0020543 \\ 0.0002739 \\ 0.0000365 \end{pmatrix}$$

   • La matrice de transition de la chaîne Y'_n est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 0.8736264 & 0.1263736 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.7640382 & 0.1095882 & 0.1263736 & 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.6689350 & 0.0951032 & 0.1095882 & 0.1263736 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 0.5863376 & 0.0825974 & 0.0951032 & 0.1095882 & 0.1263736 & 0.0000000 \\ 0.5145425 & 0.0717951 & 0.0825974 & 0.0951032 & 0.1095882 & 0.1263736 \\ 0.5145425 & 0.0717951 & 0.0825974 & 0.0951032 & 0.1095882 & 0.1263736 \end{pmatrix}$$

- La matrice de déviation du système M/M/1/N est donnée par

$$D = \begin{pmatrix} 0.1538097 & -0.1128254 & -0.0328205 & -0.0067457 & -0.0012147 & -0.0002034 \\ -0.9794823 & 0.8694024 & 0.0981432 & 0.0107161 & 0.0011135 & 0.0001071 \\ -1.1125003 & -0.1483334 & 1.0957784 & 0.1437342 & 0.0188493 & 0.0024718 \\ 1.2434640 & -0.1657952 & 0.0934502 & 1.1434237 & 0.1521412 & 0.0202441 \\ -1.3590202 & -0.1812027 & 0.0913958 & 0.1431498 & 1.1521047 & 0.1535726 \\ -1.3590202 & -0.1812027 & 0.0913958 & 0.1431498 & 0.1521047 & 1.1535726 \end{pmatrix}$$

2. Détermination des quantités k tel que $\|((Q-P)D)^k\|_1 < 1$, δ_k et c_{δ_k} :
   Comme dans l'algorithme 1, on choisi $\beta = 1$,
   k = 1, $\quad \delta_k = \|((Q-P)D)^k\|_1 = 0.0608407$,

   $$c^1_{\delta_N} = \frac{1}{1-\delta_N}\left\|\sum_{k=0}^{N-1}((Q-P)D_P)^k\right\|_1 = 1.0647821.$$
3. Détermination de la distribution stationnaire du système perturbé π_Q :
   L'algorithme nous permet de calculer le projecteur stationnaire Π_Q du système perturbé, la distribution stationnaire π_Q correspond à l'un des vecteurs lignes de Π_Q, et on trouve

$$\pi_Q = \begin{pmatrix} 0.8665664 \\ 0.1155119 \\ 0.0155031 \\ 0.0020947 \\ 0.0002849 \\ 0.0000390 \end{pmatrix}$$

Pour une précision $\epsilon = 0.001$ on a $\|\pi_Q - \pi_P\|_1 = 3.1435\ 10^{-6}$.

Pour différentes valeurs de β, et pour une précision $\epsilon = 0.001$ le programme que nous avons conçu calcule la distribution stationnaire π_Q du système G/M/1/N (système perturbé). Une fois π_P et π_Q connues on calcule $\|\pi_P - \pi_Q\|_v$

β	k	δ_k	c_{δ_k}	$\|\pi_P - \pi_Q\|_v$
1.01	1	0.0596221	1.0634022	0.0003030
1.1	1	0.0510145	1.0537568	0.0003433
1.2	1	0.0454262	1.0475879	0.0003946
1.5	1	0.0409089	1.0426539	0.0005972
2	1	0.0446965	1.0467877	0.0011885
2.7236071	1	0.0569362	1.0603737	0.0028314
5	1	0.1365551	1.1581515	0.0237096
10	1	0.8363494	6.1105802	0.4393106
20	3	0.4555553	34.2192265	10.9017396
50	5	0.1008670	1502.9580769	924.1780055

TAB. 4.2-Erreur sur la distribution stationnaire, en fonction de β

Aucune condition n'est imposée sur la valeur de β. Nous avons pris des valeurs dans l'intervalle $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$, calculées en appliquant la stabilité forte, pour pouvoir comparer les résultats, et des valeurs plus grandes pour voir l'accroissement de l'erreur.
On constate que pour les valeurs de β tel que $\beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ l'erreur est très petite, voir négligeable, Elle croît au fur et à mesure que β croît mais reste petite. Pour β très grand ($\beta > 50$), l'erreur est très importante.

4.4.3 Modèle de simulation

Notre modèle de simulation inclut deux procédures : La première permettra de simuler la distribution stationnaire du système M/M/1/N (π_P) et à l'aide de la deuxième nous allons simuler la distribution stationnaire du système G/M/1/N (π_Q). Une fois π_P et π_Q connues on calcule $\|\pi_P - \pi_Q\|_v$.
Pour un temps de simulation tsim = 100 unités de temps, on obtient :

$$\pi_P = \begin{pmatrix} 0.8814803 \\ 0.1047793 \\ 0.0116078 \\ 0.0021126 \\ 0.0000201 \\ 0.0000000 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pi_Q = \begin{pmatrix} 0.8753647 \\ 0.1065923 \\ 0.0153273 \\ 0.0024631 \\ 0.0002526 \\ 0.0000000 \end{pmatrix}$$

4.4.4 Comparaison des résultats

Notons par Esf l'erreur estimée par la méthode de stabilité forte et par Eds l'erreur calculée par la méthode du développement en série et Eas l'erreur simulée. Pour différentes valeurs de β tel que $1.01 \leq \beta \leq 2.7236071$, les résultats sont représentés dans le tableau suivant :

β	Esf	Eas	Eds
1.01	0.8165805	0.0137679	0.0003030
1.1	0.8365192	0.0121004	0.0003433
1.2	0.8861564	0.0131188	0.0003946
1.5	1.1744499	0.0193191	0.0005972
2	2.4102178	0.0353015	0.0011885
2.7236071	4118.2563611	0.0585214	0.0028314

TAB. 4.3-Comparaison des erreurs sur la distribution stationnaire

On remarque que pour les mêmes valeurs de β, l'erreur calculée par la méthode du développement en séries et l'erreur simulée sont nettement plus petites que celle calculée par la méthode de stabilité forte. Ce qui signifie que l'erreur estimée par la méthode de stabilité forte est réellement le seuil (majorant) de l'erreur qu'on peut faire lors du passage du système M/M/1/N vers le système G/M/1/N.

Pour la méthode du développement en série et la simulation, le choix de β a peu d'influence sur les résultats ($1.01 \leq \beta \leq 2.7236071$). En effet, la valeur de β n'intervient que dans le calcul de la norme, contrairement à la méthode de stabilité forte où l'erreur est en fonction de β.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode du développement en série au système M/M/1/N. En se basant sur les résultats de Kartashov [56], nous avons obtenu une estimation de la norme de la matrice de déviation $\|D\|_v$. Nous avons aussi appliqué la méthode de la stabilité forte, puis illustré l'application des deux méthodes sur un exemple numérique, puis comparé les résultats obtenus avec ceux de la simulation.

Nous avons constaté que dans le domaine de stabilité, la distribution stationnaire du système idéal est presque identique à la distribution stationnaire du système perturbé, calculée en appliquant la méthode du développement en série. L'erreur est donc négligeable.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons appliqué pour la première fois la méthode du développement en série pour le système de files d'attente M/M/1/N. Nous avons aussi appliqué la méthode de stabilité forte au même système.

Dans un premier temps, nous avons effectué une synthèse sur l'application de la méthode du développement en série aux chaînes de Markov à espace d'états général [39], puis aux chaînes de Markov à espace d'états fini [41], et enfin aux processus de Markov [40].

Le principe de la méthode du développement en série est d'écrire la distribution stationnaire du système perturbé sous forme d'une série qui dépend de la distribution stationnaire du système idéal, des matrices de transitions des systèmes idéal et perturbé, et de la matrice de déviation du système idéal. Dans ce travail, la chaîne de Markov considérée est une chaîne de Markov à espace d'états fini. Le problème de l'existence de la matrice de déviation D ne se pose pas, son calcul a fait l'objet du travail de G. Koole [67].

La principale difficultée de la méthode du développement en série est la convergence de la série de la distribution stationnaire. En se basant sur les résultats de Kartashov [56], nous avons obtenu une estimation de la norme de la matrice de déviation $\|D\|_v$. À partir de cette estimation, nous avons donné une condition suffisante pour la convergence de la série de la distribution stationnaire.

En dernier lieu, nous avons illustré l'application des deux méthodes (développement en série et stabilité forte). Sur un exemple numérique, nous avons déterminé le domaine de stabilité et calculé la déviation de la distribution stationnaire dans le cadre de l'application de la méthode stabilité forte, et nous avons calculé la distribution stationnaire du système perturbé considéré, en appliquant la méthode du développement en série. Nous avons constaté que l'erreur calculée par la méthode du développement en série et plus petite que celle calculée par la méthode de stabilité forte, et qu'elle est négligeable pour les β appartenant au domaine de stabilité.

La méthode du développement en série est une méthode récente et il serait intéressant de l'appliquer à d'autre systèmes de files d'attente (par exemple, le système M/M/1/N après une perturbation de la duré de service), ou encore à d'autre domaines (gestion de stock, modèle de risque), en se basant sur l'un des travaux [39, 41, 40].

Bibliographie

[1] D. Aissani. Perturbation des opérateurs de transition pour l'étude de la stabilité des chaînes de Markov. *Cahiers Mathématiques, fasicule N° 1*, 04, 6-12, 1988.

[2] D. Aissani. Estimate of the strong stability in an M/G/1 system. *VINITI 4119-82 R. Journal matematika*, IB 83, 1-33, 1982.

[3] D. Aissani. Ergodicité uniforme et stabilité forte des chaînes de Markov : Application aux systèmes de files d'attente. *Séminaire Mathématique de ROUEN*, N° 167 : C.N.R.S. Ed, 115-121, 1990.

[4] D. Aissani. Ergodicité et stabilité des chaînes de Markov. *In Seminaire du Département de probabilités-Statistiques*, Université de Constantine, 1985.

[5] D. Aissani and N.V Kartashov. Strong stability of the imbedded Markov chain in an M/G/1 system. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics, American Mathematical Society*, 29, 1-5, 1984.

[6] D. Aissani and N.V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U.S.S.R*, A 11, 1-5, 1983.

[7] W.J. Anderson. *Continuous-Time Markov Chains*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] C. Avrachenkov, E. Altman, and R. Núnez-Queija. Perturbation analysis for denumerable Markov chains with application to queueing models. *Advances in applied Probabilility*, 36, 839-853, 2004.

[9] H. Ayhan and F. Baccelli. Expansions for joint laplace transforms of stationary waiting times in (max,+)-linear systems with poisson input. *Queueing Systems*, 37, 291-328, 2001.

[10] H. Ayhan and D. Seo. Laplace transform and moments of waiting times in poisson driven (max,+)-linear systems. *Queueing Systems*, 37, 405-436, 2001.

[11] H. Ayhan and D. Seo. Tail probability of transient and stationary waiting times in (max,+)-linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47, 151-157, 2002.

[12] F. Baccelli, S. Hasenfuss, and V. Schmidt. Expansions for steady-state characteristics of (max,+)-linear systems. *Statistic and stochastic Models*, 14, 1-24, 1998.

[13] F. Baccelli, S. Hasenfuss, and V. Schmidt. Transient and stationary waiting times in (max,+)-linear systems with poisson input. *Queueing Systems*, 26, 301-342, 1997.

[14] F. Baccelli and V. Schmidt. Taylor series expansions for Poisson driven (max,+)-linear systems. *Advances in applied Probabilility*, 6, 138-185, 1996.

[15] A. Bareche. Analyse statistique des systèmes d'attente. Thèse de magister, Université de Bejaia, 2003.

[16] A. Bareche and D. Aissani. Kernel density in the study of the strong stability of the M/M/1 queueing system. *Operations Research Letters*, 36(5), 535-538, 2008.

[17] M. Benaouicha and D. Aissani. Estimate of the strong stability in a G/M/1 queueing system. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 71, 22-32, 2005.

[18] Z. Benouaret. Stabilité forte dans les modèles de risque. Thèse de magister, Université de Bejaia, 2006.

[19] L. Berdjoudj and D. Aissani. Strong stability in retrial queues. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 68, 11-17, 2004.

[20] A.A Borovkov. Processus probabilistes de la théorie des files d'attente. *Edition Navka, Moskou*, 1972.

[21] A.A Borovkov. *Stochastic Processes in Queueing Theory*. Springer-Verlag, New York, 1976.

[22] A.A Borovkov. *Asymptotic Methods in Queueing Theory*. Wiley and Sons, New York, 1984.

[23] A.A Borovkov. *Ergodicity and Stability of Stochastics Processes*. Wiley and Sons, New York, 1998.

[24] A.A Borovkov and A Hordijk. *On normed ergodicity of Markov chains*. Technical Report MI 2000-40 Leiden University, 2000.

[25] A.A Borovkov and A Hordijk. Characterisation and sufficient conditions for normed ergodicity of Markov chains. *Advances in applied Probabilility*, 36, 227-242, 2004.

[26] L. Bouallouche. Estimation de la stabilité forte dans un système de files d'attente M/M/1. Thèse de magister, Université de Bejaia, 1999.

[27] L. Bouallouche and D Aissani. Quantitative estimates in an $M_2/G_2/1$ priority queue with non-preemptive priority : the method of strong stability. *Stochastic Models*, 24, 1-21, 2008.

[28] L. Bouallouche and D Aissani. Performance analysis and approximation in queueing system of type M/G/1. *International Journal Theory of Probability and Operations Research*, 63(2), 341-356, 2006.

[29] L. Bouallouche and D Aissani. Measurement and performance of the strong stability method. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 72, 1-9, 2005.

[30] X.-R. Cao. The Maclaurin series for performance functions of Markov chains. *Advances in applied Probabilility*, 30, 676-692, 1998.

[31] C. Cassandras and S. Lafortune. *Introduction to Discrete Event Systems.* Kluwer, Norwell, MA, 1999.

[32] G. Cho and C. Meyer. Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain. *Linear Algebra and its applications*, 335, 137-150, 2001.

[33] P. Coolen-Schrijner and E.A. Van Doorn. The deviation matrix of a continuous-time Markov chain. *Probability in the Engineering and informational Sciences*, 16, 351-366, 2002.

[34] R. Dekker and A. Hordijk. Average sensitive and blackwell optimal policies in denumerable Markov decision chains with unbounded rewards. *Mathematics of Operations Research*, 13, 395-420, 1988.

[35] R. Dekker, A. Hordijk, and F.M. Spieksma. On the relation between recurrence and ergodicity properties in denumerable Markov decision chains. *Mathematics of Operations Research*, 19, 539-559, 1994.

[36] D. Dris. Étude comparative des méthodes de stabilité des modèles stochastiques. Thèse de magister, Université de Bejaia, 2003.

[37] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications 3rd ed.* vol. I. Wiley, New York, 1968.

[38] W.B. Gong and J.Q. HU. The Maclaurin series of the GI/G/1 queue. *Journal of applied Probability*, 29, 176-184, 1992.

[39] B. Heidergott and A. Hordijk. Taylor series expansions for stationary Markov chains. *Advances in applied Probabilility*, 35, 1046-1070, 2003.

[40] B. Heidergott, A. Hordijk, and M. N Leder. Series expansions for continuous-time Markov processes. *Vrije Universteit, Departement of Econometrics, Amsterdam*, 2007.

[41] B. Heidergott, A. Hordijk, and M. Van Uitert. Series expansions for finite-state Markov chains. *Vrije Universteit, Departement of Econometrics, Amsterdam*, 2006.

[42] B. Heidergott, A. Hordijk, and H. Weisshaupt. Derivatives of Markov kernels and their jordan decomposition. *Eurandom report 2003-001*, 2002.

[43] B. Heidergott, A. Hordijk, and H. Weisshaupt. Measure-valued differenciation for stationary Markov chains. *Eurandom report 2002-027*, 2002.

[44] B. Heidergott and F. Vázquez-Abad. Measure–valued differentiation for stochastic processes : The finite horizon case. *EURANDOM Report 2000-033*, 2000.

[45] Y. Ho and X. Cao. *Perturbation Analysis of Discrete Event Systems.* Kluwer, Boston, MA, 1991.

[46] A. Hordijk and N. Popov. Large deviation of a coupled processor system. *Probability in the Engineering and informational Sciences*, 17, 397-409, 2003.

[47] A. Hordijk and M. Puterman. On the convergence of policy iteration in finite state undiscounted Markov decision processes : the unichain case. *Mathematics of Operations Research*, 12, 163-176, 1987.

[48] A. Hordijk and F.M. Spieksma. On ergodicity and recurrence properties of Markov chain with an application to an open jackson network. *Advances in applied Probabilility*, 24, 343-376, 1992.

[49] A. Hordijk and F.M. Spieksmma. A new formula for the deviation matrix. *Probability, Statistics and optimisation*, pages 497-507, 1994.

[50] W. Van Den Hout. The power series algorithm. Doctorat thesis, Center for Economic Research, Tilburg University, 2006.

[51] J.Q. Hu. Analyticity of single server queues in light traffic. *Queueing Systems*, 19, 63-80, 1995.

[52] J.Q. Hu. The departure process of the GI/G/1 queue and its Maclaurin series. *Operations Research*, 44, 810-815, 1996.

[53] M. Iosifescu. *Finite Markov Processes and their Applications.* Wiley, Chichester, 1980.

[54] C. F. Ispen and C. D. Meyer. Uniform stability of Markov chains. *SIAM J. Matrix. Anal .Appl*, 15(4), 1061-1074, 1994.

[55] V.V. Kalashnikov and G.S. Tsitsiashvili. On the stability of queueing systems with respect to disturbances of their distribution functions. *Queuing Theory and Reliability*, page 211-217, 1971.

[56] N.V Kartashov. *Strong Stable Markov Chains.* VSP, Untrecht, 1996.

[57] N.V. Kartashov. Inequalitics in theorems of ergodicity and stability for Markov chains with common phase space. *Theory Probability applied*, 30, 247-259, 1985.

[58] N.V. Kartashov. Criteria for ergodicity and stability for Markov chains with common phase space. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 30, 71-89, 1985.

[59] N.V. Kartashov. Strongly Markov chain. *J. Soviet. Math*, 34, 1493-1498, 1986.

[60] N.V. Kartashov. Stabilité forte des chaînes de Markov, in problème de stabilité des modèles stochastiques. *Seminaire VNISSI*, pages 54-59, 1981.

[61] J. Keilson. *Markov Chain models : Rarity and Exponentiality.* Springer-Verlag, New York, 1979.

[62] J. Kemeny and J. Snell. *Finite Markov Chains.* Van Nostrand, New York, 1960.

[63] J. Kemeny and J. Snell. Potencials for denumerable Markov chains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 3, 196-260, 1960.

[64] J. Kemeny and J. Snell. Finite continuous-time Markov chains. *Theory Probability applied*, 6, 101-105, 1961.

[65] J. Kemeny, J. Snell, and A. Knapp. *Denumerable Markov Chains.* Van Nostrand, New York, 1966.

[66] S. Kirkland. Conditioning properties of the stationary distribution for a Markov chain. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 10, 1-15, 2003.

[67] G. Koole. The deviation matrix of the $M/M/1/\infty$ and M/M/1/N queue, with applications to controlled queueing models. *Vrije Universteit, Faculty of Mathematics and Computer Science, Amsterdam*, 1998.

[68] G. Koole and F. Spieksma. On deviation matrices for birth-death process. *Probabilility in the Engineering and informational Sciences*, 15, 239-258, 2001.

[69] O. Lekadir. Stabilité forte dans un réseau de files d'attente à deux stations en tandem. Thèse de magister, Université de Bejaia, 2001.

[70] S.P. Meyn and R.L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability.* Springer, London, 1993.

[71] Z. Mouhoubi. Sur les estimations quantitatives de l'ergodicité et de la stabilité dans les chaînes de Markov. Thèse de magister, Université de Bejaia, 2001.

[72] Z. Mouhoubi and D. Aissani. Some inequalities of uniform ergodicity and strong stability of homogeneous Markov chains. *Pliska Studia Mathematica Bulgarica*, 17, 171-186, 2005, 2005.

[73] Z. Mouhoubi and D. Aissani. Quantitative estimate of the uniform ergodicity for the Markov chains. *Proceedings of the 8-th international Vilnius conference on probability and mathematical statistics*, page 7-8, Vilnius, 2002.

[74] Z. Mouhoubi and D. Aissani. Uniform ergodicity and strong stability of waiting processes. *Bulletin of the international statistical institute*, volume LX, pages 97-98, Berlin, 2003.

[75] G. Pflug. *Optimisation of Stochastic Models.* Kluwer, Boston, MA, 1996.

[76] M.L Puterman. *Markov decision Processes : Discrete Stochastic Dynamic Programming.* John Wiley and Sons, New York, 1994.

[77] B. Rabta. Nouvelles conditions et nouvelles estimations de la stabilité des chaînes de Markov, avec application aux modèles stochastiques de gestion des stocks. Thèse de doctorat, Université de Bejaia, 2006.

[78] B. Rabta and D. Aissani. estimate of strong stability in an (R, s, S) inventory model. *Journal of Mathematical Sciences*, 131, 5669–5673, 2005.

[79] B. Rabta and D. Aissani. Strong stability and perturbation bounds for discrete Markov chains. *Linear Algebra and its Applications*, 428, 1921–1927, 2008.

[80] B. Rabta and D. Aissani. Strong stability in an (R, s, S) inventory model. *International Journal of Production Economics*, 97, 159–171, 2005.

[81] S.T. Rachev. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems*, 4, 287-318, 1989.

[82] S.T. Rachev and W. Römish. Quantitative stability in stochastic programming : The method of probability metrics. *Mathematics of Operations Research*, 27(4), 792-818, 2002.

[83] F. Rahmoune. Stabilité forte dans un système d'attente M/G/1/N avec vacances. Thèse de magister, Université de Bejaia, 2003.

[84] F. Rahmoune and D. Aissani. Strong stability of queues with multiple vacations of the server. *Stochastic Analysis and Applications*, 26(3), 665-678, 2008.

[85] P. Robert. *Réseaux de files d'attente : métodes probabilistes.* Springer, 2000.

[86] A. Ruegg. *Processus stochastiques.* Presses Poytechniques Romandes, 1989.

[87] E. Schweitzer. Perturbation theory and finite Markov chains. *Journal of applied Probability*, 5, 401-413, 1968.

[88] R.F. Serfozo. An equivalence between continuous and discrete time Markov decision processes. *Operations Research*, 27, 616-620, 1979.

[89] D. Stoyan. Ein stetigkeitssatz für einlinige wartemodelle der bedienungstheorie. *Maths. Operations Forsch. Statist*, page 103-111, 1977.

[90] R. Syski. Perturbation models. *Stochastic Processes applied*, 5, 93-130, 1977.

[91] R. Syski. Ergodic potential. *Stochastic Processes applied*, 7, 311-336, 1978.

[92] W. Whitt. Asymptotic formulas for Markov processes with application to simulation. *Operations Research*, 40, 279-291, 1992.

[93] M. Zazanis. Analyticity of poisson driven stochastic systems. *Advances in applied Probabilility*, 24,532-541, 1992.

[94] Y. Zhu and H. Li. The Maclaurin expansion for a G/GI/1 queue with markov-modulated arrivals and services. *Queueing Systems*, 14 :125-134, 1993.

[95] V.M. Zolotarev. On the continuity of stochastic sequences generated by recurrent processes. *Theory of Probability and its Applications*, 20, 819-832, 1975.

Annexes

Annexe A

A.1. Processus stochastique

Les processus stochastiques décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps.

Définition 4.1. On appelle processus stochastique une famille indexée $\{X_t, t \in T\}$ de variables aléatoires définies dans le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ et à valeur dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

$t \in T$ représente une date. Lorsque $T \subseteq \mathbb{Z}$ on parlera de processus à temps discret ou de suite stochastique et lorsque T est un intervalle $I \in \mathbb{R}$, on parlera de processus à temps continu.

On appelle espace des états l'ensemble S où les variables $\{X_t\}$ prennent leurs valeurs. S peut être discret ou continu. Par conséquent, on distingue quatre types de processus :

- Suite stochastique à espace d'états discret,
- Suite stochastique à espace d'états continu,
- Processus continu à espace d'états discret,
- Processus continu à espace d'états continu.

A.2. Processus et chaînes de Markov

A.2.1 Processus markoviens

Définition 4.2. Un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est markovien si il vérifie la propriété de Markov

$$\mathrm{P}(X_t \in A/X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n) = \mathrm{P}(X_t \in A/X_{t_n} = x_n)$$

$\forall\ t_1 < \ldots < t_n < t$ et $\forall\ A \in \mathcal{E}$.

La fonction $\mathrm{P}(s, x; t, A) = \mathrm{P}(X_t \in A/X_s = x)$, $s < t$, $A\ \in \mathcal{E}$ est appelée fonction de transition ou noyau stochastique.

A.2.2 Chaînes de Markov

Les chaînes de Markov sont des processus markoviens à temps discret.
Soit $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

Définition 4.3. On dit que la suite $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov si et seulement si

$$\mathrm{P}(X_{n+1} \in B/X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathrm{P}(X_{n+1} \in B/X_n = i_n)$$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ i_0, \ldots, i_n \in E$ et $\forall\ B \in \mathcal{E}$.

Une chaîne de Markov est complètement définie par ses probabilités de transition en une étape, notées

$$\mathrm{P}_n(x, B) = \mathrm{P}(X_{n+1}\ \in B/X_n = x), \quad B\ \in \mathcal{E},\ x\ \in E$$

et par sa distribution initiale μ_0 définie par

$$\mu_0(B) = \mathrm{P}(X_0\ \in B), \quad B\ \in \mathcal{E}.$$

Lorsque l'espace des états E dans lequel les variables X_n prennent leurs valeurs est fini ou dénombrable, on parlera alors de chaîne de Markov discrète (finie ou dénombrable).

A.2.3 Chaînes de Markov discrètes

Chaînes irréductibles

Définition 4.4. Un état j est accessible à partir d'un état i si la probabilité de transition de i en j en un certain nombre d'épreuves est positive

$$\exists\ n > 0, \quad P_{ij}^{(n)} > 0$$

Si j est accessible à partir de i et i à partir de j, les états i et j sont dits communicants. Par définition, un état est toujours communicant avec lui-même.

La communication de i et j sera noté $i \Leftrightarrow j$. La relation $\Leftrightarrow$ est une relation d'équivalence et les classes d'équivalences forment une partition de E. Chaque classe est composée d'états communicants.

Définition 4.5. Une chaîne de Markov est irréductible si elle n'est constituée que d'une seule classe d'états communicants.

Classification probabiliste des états

Définissons la probabilité de premier passage

$$f_{ij}(n) = \mathrm{P}(X_n = j, X_k \neq j,\ \forall\ k = 1, 2, \dots, n-1/X_0 = i)$$

et le temps de premier passage

$$T_{ij} = \min\{k > 0 : X_k = j, X_0 = i\}.$$

Nous avons alors

$$f_{ij}(n) = \mathrm{P}(T_{ij} = n).$$

Posons

$$F_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k).$$

$F_{ij}(n)$ représente la probabilité pour que la chaîne passant en i atteigne j en moins de $n+1$ transitions.

Nous avons alors les catégories d'états suivants :

État transitoire : la chaîne partant de i peut ne pas repasser par i

$$F_{ii}(+\infty) < 1.$$

État récurrent : la chaîne partant de i repassera à coup sûr par i

$$F_{ii}(+\infty) = 1.$$

Les états récurrents se divisent à leur tour en deux sous-catégories

État récurrent non nul : la chaîne partant de i repassera par i au bout d'un temps fini

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(k) < \infty.$$

État récurrent nul : la chaîne partant de i repassera par i au bout d'un temps infini

$$\mu_i = \infty.$$

Périodicité d'un état

On peut distinguer les états d'une chaîne de Markov par une propriété concernant le renouvellement des états.

Un état i est périodique de période $d(i)$ si

$$d(i) = PGCD\{n,\ P_{ii} > 0\}$$

Si $d(i) = 1$, i est dit apériodique.

Ergodicité d'un état

Un état est dit ergodique s'il est récurrent non nul et apériodique

Annexe B

Algorithmes

B.1. Algorithme de la méthode de stabilité forte

Etant donné un système G/M/1/N, de densité g(x), l'algorithme suivant permet de calculer le domaine d'approximation par un système M/M/1/N.

B.1.1. Algorithme principal

On définit :
landa : taux des arrivées des clients
mu : taux de service
N : capacité du système

Étape 1. Détermination de W
$W \leftarrow$ doublev(landa)
Étape 2. Détermination du domaine de validité de l'approximation [bmin, bmax]
bmin $\leftarrow$ betamin(landa,mu,W,N)
if bmin = 'Faux'
    disp('Le système n'est pas suffisamment proche de M/M/1/N') ;
else
    bmax $\leftarrow$ betamax(landa,mu,bmin,W,N)
Étape 3. Détermination de l'erreur sur la distribution stationnaire
    deviation $\leftarrow$ erreurn(landa,mu,W,N)
end

B.1.2. Les fonctions appelées par l'algorithme principal

doublev(landa) : détermine la variation des distributions G et E_λ ($W = \int_0^\infty |d(G - E_\lambda)(x)|$)

function y = doublev(landa)
expo $\leftarrow$ 0.00001 ;

$w \leftarrow 0$;

$h \leftarrow 0.00001$;

$x \leftarrow h$;

while expo ≥ 0.00001

  expo $\leftarrow$ (landa)* exp((- landa) $*x$) ;

  $g = (1/4) * \exp(-x) + (3/2) * \exp(-2 * x)$;

  $w \leftarrow w$ + abs($g-$expo)$*h$;

  $x \leftarrow x + h$;

end

$y = w$;

fn(x,landa,mu,N)

function y = fn(x,landa,mu,N)

ro $\leftarrow$ landa / mu ;

pi $\leftarrow$ ((1- ro)$*$(1 - (ro $*x)^{N+1}$))/((1- ro $*x$)$*$(1 - ro^{N+1})) ;

$c \leftarrow 1$ + pi ;

psi $\leftarrow$ ((landa $*x$)/(landa + mu - (mu / x)))$*$(1-(mu/($x*$ (landa + mu)))^{N}) ;

$y \leftarrow$(1 - psi)/($c * (1 + x)$) ;

betamin(landa,mu,W,N) : détermine la borne inférieure du domaine de validité de l'approximation (bmin)

function y = betamin(landa,mu,W,N)

pas $\leftarrow$((mu / landa) -1)/10 ;

beta $\leftarrow 1$;

L $\leftarrow$ 'Vrai' ;

while ($W >$ fn(beta,landa,mu,N)) and (beta $<$ (mu/landa))

  beta $\leftarrow$ beta + pas ;

end

if beta $\geq$ (mu / landa)

  L $\leftarrow$ 'Faux' ;

  $y \leftarrow$ L ;

else

  if beta = 1

```
    y ← 1.01 ;
  else
    betam ← (2*beta - pas)/2
    while abs(beta - betam) > 0.001
     pas ← pas/2 ;
     if (w < fn(betam,landa,mu,N))
      beta ← betam ;
     end
     betam ← (2*beta - pas)/2 ;
    end
  y ← betam ;
  end
end
```

betamax(landa,mu,betam,W,N) : détermine la borne supérieure du domaine de validité de l'approximation (bmax)

```
function y = betamax(landa,mu,betam,W,N)
beta ← mu/landa ;
betamax ← (betam + beta)/2 ;
while abs(beta - betamax) > 0.001
  if (W <fn(betamax,landa,mu,N))
    betam ← betamax ;
  else
    beta ← betamax ;
  end
  betamax = (betam + beta)/2 ;
end
y ← betamax ;
```

erreurn(landa,mu,W,N) : détermine l'erreur sur la distribution stationnaire ($\|\pi_P - \pi_Q\|_v$)

```
function y = erreurn(landa,mu,W,N)
betami ← betamin(landa,mu,W,N) ;
```

betama ← betamax(landa,mu,betami,W,N) ;
if (beta ≥ betami) and (beta ≤ betama)
  ro ← landa / mu ;
  pi ← ((1- ro)∗(1 - (ro ∗ beta)$^{N+1}$))/((1- ro ∗ beta)∗(1 - ro^{N+1})) ;
  c ← 1 + pi ;
  psi ← ((landa ∗ beta)/(landa + mu - (mu / beta)))∗(1-(mu/(beta ∗ (landa + mu)))^{N}) ;
end
y ← (pi ∗ (1 + beta)∗c ∗ W)/(1 - psi - c∗(1+ beta)∗W) ;

B.2. Algorithme de la méthode du développement en série

On considère toujours le système G/M/1/N, de densité g(x), l'algorithme suivant permet de calculer la distribution stationnaire de ce système.

B.2.1. Algorithme principal

On définit :
landa : taux des arrivées des clients
mu : taux de service
N : capacité du système

Étape 1. Détermination des matrices P, Q, Pi(Π_P) et D
ro ← landa/mu ;
Q ← matexe2(mu,landa,N) ;
P ← matransi(mu,landa,N) ;
Pi ← dista(mu,landa,N) ;
D ← inv(eye($N+1$)-P+Pi)-Pi ;
Étape 2. Détermination de k tel que $\|((Q-P)D)^k\|_1 < 1$
$l \leftarrow 1$;
$S \leftarrow (Q-P) * D$;
while norme(S,beta,N) ≥ 1 and $l \leq$ nbmax
  $S \leftarrow S * ((Q-P) * D)$;

$l \leftarrow l + 1$;

end

if $l >$ nbmax

disp ('il existe pas k tel que $\|((Q-P)D)^k\|_1 < 1$')

else (norme(S,beta,N) < 1)

$k \leftarrow l$

Étape 3. Détermination de delta(δ_k) et cdelta(c_{δ_k})

delta $\leftarrow$ norme(S,beta,N)

pro $\leftarrow ((Q-P)*D)^0$;

somme $\leftarrow$ pro ;

$m \leftarrow 1$;

while $m \leq k-1$

pro $\leftarrow$ pro$*((Q-P)*D)$;

somme $\leftarrow$ somme + pro ;

$m \leftarrow m + 1$;

end

cdelta = 1/(1-delta) $*$ norme(somme,beta,N)

Étape 4. Détermination de la distribution stationnaire Piprim(π_Q)

$T \leftarrow$ Pi$*((Q-P)*D)$;

$H \leftarrow$ Pi ;

$l \leftarrow 1$;

while cdelta $*$ norme(T,beta,N) $\geq$ eps

$T = T * ((Q-P)*D)$;

$H = H + T$;

$l = l + 1$;

end

project $\leftarrow H$;

Piprim $\leftarrow$ project(1, :)

Étape 5. Détermination de deviation ($\|\pi_P - \pi_Q\|_v$)

deviation $\leftarrow$ normevec(Pivec-Piprim,beta,N)

end

B.2.2. Les fonctions appelées par l'algorithme principal

matexe2(mu,landa,N) : détermine la matrice de transition du système G/M/1/N

function x = matexe2(mu,landa,N)

for $i = 1 : N$

$Q(i,1) \leftarrow ((1/4) * (\mathrm{mu}/(1+\mathrm{mu}))^i) + ((3/4) * (\mathrm{mu}/(2+\mathrm{mu}))^i)$;

for $j = 2 : i+1$

$Q(i,j) \leftarrow ((\mathrm{mu}^{i-j+1})/(4 * (\mathrm{mu}+1)^{i-j+2})) + ((3 * \mathrm{mu}^{i-j+1})/(2 * (\mathrm{mu}+2)^{i-j+2}))$;

end

for $j = i+2 : N+1$

$Q(i,j) \leftarrow 0$;

end

end

$Q(N+1,1) \leftarrow ((1/4) * (\mathrm{mu}/(1+\mathrm{mu}))^N) + ((3/4) * (\mathrm{mu}/(2+\mathrm{mu}))^N)$;

for $j = 2 : N+1$

$Q(N+1,j) \leftarrow ((\mathrm{mu}^{N-j+1})/(4*(\mathrm{mu}+1)^{N-j+2}))+((3*\mathrm{mu}^{N-j+1})/(2*(\mathrm{mu}+2)^{N-j+2}))$;

end

$x \leftarrow Q$;

matransi(mu,landa,N) : détermine la matrice de transition du système M/M/1/N

function x = matransi(mu,landa,N)

for $i = 1 : N$

$P(i,1) \leftarrow (\mathrm{mu}/(\mathrm{landa}+\mathrm{mu}))^i$;

for $j = 2 : i+1$

$P(i,j) \leftarrow (landa * \mathrm{mu}^{i-j+1})/((\mathrm{mu}+\mathrm{landa})^{i-j+2})$;

end

for $j = i+2 : N+1$

$P(i,j) \leftarrow 0$;

end

end

$P(N+1,1) \leftarrow (\mathrm{mu}/(\mathrm{landa}+\mathrm{mu}))^N$;

for $j = 2 : N+1$

$P(N+1,j) \leftarrow (landa * \mathrm{mu}^{N-j+1})/((\mathrm{mu}+\mathrm{landa})^{N-j+2})$;

end

$x \leftarrow P$;

dista(mu,landa,N) : détermine le projecteur stationnaire du système M/M/1/N

function x = matdevia(mu,landa,N)

for $i = 1 : N + 1$

for $j = 1 : N + 1$

Pi$(i, j) \leftarrow ((1 - \text{ro})/(1 - \text{ro}^{N+1})) * \text{ro}^{j-1}$;

end

end

$x \leftarrow$ Pi ;

norme(A,beta,N) : détermine la norme d'une matrice A

function x = norme(A,beta,N)

sup = 0 ;

for $i = 1 : N + 1$

somme $\leftarrow$ 0 ;

for $j = 1 : N + 1$

somme $\leftarrow$ somme + abs$(A(i, j)) * (beta)^{j-1}$;

end

somme $\leftarrow$ (somme)/((beta)$^{i-1}$) ;

if somme > sup

sup $\leftarrow$ somme ;

end

end

$x \leftarrow$ sup ;

normevec(b,beta,N) : détermine la norme d'un vecteur b

function x = normevec(b,beta,N)

somme = 0 ;

for $k = 1 : N + 1$

somme = somme + abs($b(k)$) $*$ $(beta)^{k-1}$;

end

$x \leftarrow$ somme ;

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons effectué une synthèse sur l'application de la méthode du développement en série. Nous avons appliqué cette méthode au système M/M/1/N, après une perturbation du flot des arrivées. Nous avons obtenu une estimation de la norme de la matrice de déviation $\|D\|_v$, ceci nous a permis de donner une condition suffisante pour la convergence de la série de la distribution stationnaire.

Nous avons également appliqué la méthode de stabilité forte au même système.
En dernier lieu nous avons illustré l'application des deux méthodes (développement en série et stabilité forte) sur un exemple numérique. Une comparaison des résultats obtenus avec ceux de la simulation a été réalisée.

Mots clès : Développement en séries, Distribution stationnaire, Matrice de déviation, Stabilité forte, Système de files d'attente.

Abstract

In this memory, we present a review about the application of the series expansion method. We have applied this method for the M/M/1/N queue, which is perturbed on G/M/1/N queue. We have obtained an estimation of the norme of the deviation matrix $\|D\|_v$, this allowed us to give a sufficient condition for the convergence of the serie expansion of stationary distribution.

We have also applied the strong stability method to the same system.
We have constructed a computer program to test numericaly the performance of the résults and to compare them.

Keywords : Series expansion, Stationary distribution, Deviation matrix, strong stability, Queueing Systems.