

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

MÉMOIRE DE MAGISTER

En

Mathématiques Appliquées

Option

Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Méthode adaptée pour la résolution d'un problème de programmation quadratique convexe à variables mixtes

Présenté par :

M^r LAOUAR Abdelhek

Devant le jury composé de :

Président	M ^r	Djamil	AÏSSANI	Professeur	Université de Béjaia
Rapporteur	M ^r	Mohand-Ouamer	BIBI	Professeur	Université de Béjaia
Examineur	M ^r	Mohammed Saïd	RADJEF	Professeur	Université de Béjaia
Examineur	M ^r	Mohamed	AÏDENE	Professeur	Université de Tizi-Ouzou

Béjaia, Janvier 2010

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au professeur M. O. Bibi, mon directeur de mémoire, pour la confiance qu'il m'a faite en acceptant de diriger mes recherches, et pour ses précieux conseils et orientations, ainsi que pour l'intérêt particulier qu'il a accordé à ce travail. Je le remercie pour sa grande contribution à l'aboutissement de ce travail.

*J'*adresse mes remerciements au professeur D. Aïssani pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également les professeurs M. S. Radjef et M. Aïdene pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie tous mes collègues pour leurs aides et soutiens et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je n'oublierai pas de remercier ma famille qui ma toujours encouragé et soutenu.



Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents.

A mes frères Mourad et Mohamed et mes Sœurs

A mon grand père et toute ma grande famille .

A tous les adhérents du Club Scientifique

"SCOR"

A tous mes amis

Abdelhek

TABLE DES MATIÈRES

Liste de figures	iv
Liste des algorithmes	v
Liste des tables	vi
Introduction générale	1
1 Rappels sur l’algèbre linéaire et la programmation mathématique	4
1.1 Introduction	4
1.1.1 Vecteurs et matrices	4
1.1.2 Matrices et vecteurs partitionnés	5
1.2 Espace vectoriel	6
1.2.1 Sous-espace linéaire	6
1.2.2 Sous-espace affine	6
1.2.3 Combinaison linéaire	7
1.2.4 Indépendance et dépendance linéaire	7
1.2.5 Noyau et image d’une matrice	7
1.2.6 Rang d’une matrice	7
1.3 Sous-espace complémentaire orthogonal	8
1.4 Discussion générale sur l’existence et le nombre de solutions d’un système linéaire	9
1.5 Propriétés des formes quadratiques	10
1.5.1 Gradient d’une forme quadratique	10
1.5.2 Forme quadratique définie et semi-définie positive	11
1.5.3 Critère de Sylvester pour les formes quadratiques définies et semi-définies	12
1.6 Propriétés des formes quadratiques semi-définies positives	12
1.7 Éléments de topologie	13
1.8 Notions sur la convexité	15
1.8.1 Ensembles convexes	15

1.8.2	Propriétés des ensembles convexes	15
1.8.3	Fonctions convexes	15
1.8.4	Propriétés des fonctions convexes	16
1.9	Programmation non linéaire avec contraintes	16
1.9.1	Conditions d’optimalité sans contraintes	17
1.9.2	Conditions d’optimalité pour le cas des contraintes linéaires de type égalités	18
1.9.3	Conditions d’optimalité pour le cas des contraintes linéaires de type inégalités	20
1.10	Programmation convexe	20
1.10.1	Problème quadratique convexe (P.Q.C)	22
1.11	Dualité en programmation quadratique convexe	22
1.11.1	Dualité en programmation convexe	23
2	Méthodes de points intérieurs pour la programmation quadratique convexe	25
2.1	Introduction	25
2.2	Conditions de KKT pour PQ standard	25
2.3	Le Problème dual	26
2.4	Méthode de mise en échelle affine primale pour PQ Convexe	27
2.4.1	Trouver un point intérieur initial	27
2.4.2	Détermination d’une direction de descente	28
2.4.3	Calcul du pas	29
2.4.4	Critère de convergence (d’arrêt)	30
2.4.5	Algorithme de la méthode	31
2.5	Méthodes de points intérieurs primales-duales	33
2.5.1	Méthode de Newton	33
2.5.2	Chemin central	36
2.5.3	Direction de Newton centrée	37
2.5.4	Méthodes de suivi de chemin ”Path-following”	37
2.5.5	Méthode de réduction de potentiel	44
2.6	Méthodes de points intérieurs à départ non admissible	45
2.6.1	Calcul du pas	47
2.6.2	Critère de convergence	47
2.6.3	Algorithme de la méthode	48
2.7	Conclusion	49
3	Méthode directe de support pour la programmation quadratique convexe à variables mixtes	50
3.1	Introduction	50
3.2	Position du problème et définitions	50
3.3	Formule d’accroissement de la fonction objectif	52
3.4	Critère d’optimalité	54
3.5	Critère de suboptimalité	58
3.6	Construction de l’algorithme	60
3.6.1	Calcul de la direction l	61
3.6.2	Calcul du pas θ^0	63

3.6.3	Changement de support	65
3.7	Algorithme de la méthode	66
3.8	Conclusion	68
4	Méthode adaptée pour la programmation quadratique convexe à variables mixtes	69
4.1	Introduction	69
4.2	Position du problème et définitions	69
4.3	Formule d'accroissement de la fonction objectif	71
4.4	Critère d'optimalité	73
4.5	Critère de suboptimalité	77
4.6	Construction de l'algorithme	79
4.6.1	Construction d'une direction d'amélioration adaptée	79
4.6.2	Calcul du pas θ^0	81
4.6.3	Changement de support	83
4.7	Algorithme de la méthode	85
4.8	Conclusion	86
5	Résultats numériques et étude comparative	87
5.1	Introduction	87
5.2	Choix du langage	87
5.2.1	Généralités sur le langage	87
5.2.2	Programmation avec Matlab	88
5.2.3	Plan initial :	88
5.2.4	Générateur d'exemples	89
5.2.5	Générateur d'exemples tests	89
5.3	La méthode d'activation des contraintes pour la résolution de PQC	90
5.4	Comparaison entre les différentes méthodes	90
5.4.1	Discussions des résultats	103
5.5	Conclusion	103
	Conclusion générale	104
	Annexe : La direction de descente pour la méthode de mise en échelle affine	106
	Bibliographie.	113

TABLE DES FIGURES

1.1	Ensemble convexe	15
1.2	Fonction convexe	16
2.1	Progression avec mise à l'échelle affine	29
2.2	Exemple de chemin central à deux dimensions	37
2.3	Quelques itérés d'une méthode de suivi de chemin	38
2.4	Voisinage du chemin central	39
2.5	Méthode de suivi de chemin à pas court en axes xu	41
2.6	Méthode de suivi de chemin à prédiction-corrrection en axes xu	42
2.7	Méthode de suivi de chemin à pas long en axes xu	43

LISTE DES ALGORITHMES

1	Mise en échelle affine	32
2	Algorithme de la méthode de Newton	34
3	Algorithme générique de points intérieurs	39
4	Méthode de suivi de chemin à pas court	40
5	Méthode de suivi de chemin à prédiction-correction	43
6	Méthode de suivi de chemin à pas long	44
7	Méthode de réduction de potentiel	45
8	Méthode de points intérieurs à départ non-admissible	48
9	Méthode de support pour la programmation quadratique convexe à variables hybrides	66
10	Méthode adaptée pour la programmation quadratique convexe à variables hybrides	85
11	Générateur d'exemples tests	89

LISTE DES TABLEAUX

5.1	Résultats numériques pour la méthode d'activation des contraintes, mise en échelle et à départ non admissible	94
5.2	Résultats numériques pour les méthodes du type suivi de chemin	98
5.3	Résultats numériques pour la méthode de réduction du potentiel, la méthode de support et la méthode adaptée	102

Introduction générale

L'optimisation et plus particulièrement la programmation mathématique, vise à résoudre des problèmes où l'on cherche à déterminer parmi un grand nombre de solutions candidates, celle qui donne le meilleur rendement. Plus précisément, on cherche à trouver une solution satisfaisant un ensemble de contraintes, et qui minimise ou maximise une fonction donnée. L'application de la programmation mathématique est de plus en plus en expansion croissante et trouve beaucoup d'applications dans plusieurs domaines pratiques.

L'optimisation quadratique est l'une des théories de la programmation mathématique la mieux adaptée à la formulation des problèmes pratiques. Cette branche est très importante d'un point de vue pratique que théorique. Du point de vue applications, plusieurs problèmes en économie, en mathématiques, dans les sciences de l'ingénieur, la recherche opérationnelle et la commande optimale, sont naturellement modélisés comme des problèmes d'optimisation quadratique. Du point de vue théorique, elle est une transition naturelle entre la programmation linéaire et non linéaire. Les algorithmes développés pour le cas de l'optimisation non linéaire reposent essentiellement sur l'approche quadratique, tels que les méthodes de programmation quadratique séquentielle (PQS).

Plusieurs méthodes ont été développées pour la résolution de ce type de problèmes, parmi lesquelles on peut citer :

- ✓ La méthode d'activation des contraintes (Active-set method, ASM) est une méthode classique, développée au début des années soixante-dix pour la résolution des problèmes de programmation linéaire et quadratique. Elle s'applique pour des problèmes d'optimisation avec des contraintes linéaires de type inégalités ou mixtes (égalités et inégalités). La première méthode est mise au point par Fletcher en 1971 [28] ; par la suite d'autres auteurs ont fait des raffinements numériques à cette dernière tels que Gill et Murray en 1978 [37] ainsi que Gould en 1991 [42]. Goldfarb et Idnani en 1983 ont développé la méthode duale [39] pour le cas des programmes quadratiques strictement convexes, tandis que Boland [11] l'a généralisée en 1997 pour le cas convexe. Le principe général de la méthode consiste à écarter temporairement un certain nombre de contraintes d'inégalités et de résoudre à chaque itération un

problème avec uniquement des contraintes d'égalités, correspondant aux contraintes actives. Par la suite, l'ensemble des indices actifs est ajusté en ajoutant ou/et en supprimant une contrainte à la fois jusqu'à l'obtention de la solution optimale.

- ✓ Les méthodes de points intérieurs sont apparues dans les années cinquante, notamment dans le livre de Fiacco et McCormick [27]. C'est dans ce livre que le terme de points intérieurs sera introduit. Les itérés générés par ces méthodes sont strictement réalisables : ils restent à l'intérieur du domaine réalisable, d'où le nom donné à ces méthodes.

Avant 1984, tout problème d'optimisation linéaire se résolvait par la méthode du simplexe développée par Dantzig [20] ou par une variante de celle-ci. Des recherches ont été menées pour mettre au point une autre méthode mais aucune de celles proposées n'améliorait celle du simplexe. Aussi, pendant une quarantaine d'années, cette méthode domina l'optimisation linéaire. Puis, dans les années 70, la théorie de la complexité devint une partie intégrante de l'optimisation linéaire, si bien qu'on demanda aux méthodes développées de converger en un temps polynômial, c'est-à-dire de résoudre le problème en un nombre d'opérations qui doit être borné par un polynôme fonction de la taille du problème. Mais la méthode du simplexe n'a pas cette propriété, comme l'ont montré Klee et Minty [46]. On se demanda alors si un algorithme d'optimisation linéaire avait cette propriété. En 1979, Khachian proposa un algorithme de programmation linéaire appelé méthode des ellipses de Khachian [45]. Bien que convergeant polynômialement en théorie, cet algorithme convergeait en pratique moins vite que le simplexe. Toutefois, Khachian montra théoriquement l'existence d'algorithmes à convergence polynômiale. Il restait maintenant à en trouver qui soient efficaces en pratique. Ce que fit Karmarkar en 1984 [44]. Il proposa en effet un algorithme de points intérieurs à convergence polynômiale pour résoudre des problèmes d'optimisation linéaire. Cela provoqua un regain d'intérêt pour les méthodes de points intérieurs, aussi bien en programmation linéaire qu'en programmation non linéaire.

Le succès des méthodes de points intérieurs pour la résolution des problèmes de programmation linéaire entraîna son extension aux problèmes de programmation non linéaire et en particulier aux problèmes de programmation quadratique convexe [55, 74] ainsi qu'aux problèmes non linéaires convexes [78, 75]. Ces études ne contredirent pas l'efficacité des méthodes de points intérieurs du type primal-dual observée pour le cas linéaire. Il en découla l'envie de généraliser cette approche aux problèmes non linéaires et non convexes. El-Bakry et al. [25], McCormick et Falk [89], Akrotirianakis et al. [2], Nocedal [36, 58, 57] ont développé des algorithmes du type primal-dual à convergence globale pour les problèmes non linéaires non convexes. Une bibliographie complète des différentes versions de ces méthodes peut être trouvée dans [50].

- ✓ Méthodes adaptées de support [29, 31, 32, 34, 30] : Ces méthodes sont intermédiaires entre les deux classes de méthodes citées précédemment. Elles traitent les problèmes linéaires et quadratiques tels qu'ils se présentent et utilisent un critère d'arrêt ε -

optimal.

Le principe de ces méthodes est simple : partant d'une solution réalisable de support initiale, chaque itération consiste à trouver une direction d'amélioration et un pas maximal le long de cette direction de façon à améliorer la valeur de la fonction objectif tout en veillant à ne pas sortir du domaine réalisable déterminé par les contraintes du problème.

L'objet de ce mémoire est de faire une synthèse sur les méthodes de points intérieurs utilisées en programmation quadratique convexe, et de proposer ensuite une méthode adaptée de résolution pour le cas des variables mixtes, et ce en s'inspirant des méthodes adaptées de support pour la résolution des problèmes de programmation linéaire et quadratique, conçues par R. Gabassov et al. [30, 33, 34]. Dans ce travail, nous avons étendu la méthode de support pour la résolution de ce type de problèmes [65]. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle manipule les contraintes de bornes telles qu'elles se présentent sans chercher à les modifier. De plus, elle permet d'avoir une solution optimale à ε près, où ε est une précision choisie à l'avance.

Ce travail s'articule autour de cinq chapitres, une bibliographie et une annexe.

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur l'algèbre linéaire et la programmation mathématique. Les notions de forme quadratique, de programmation quadratique convexe, et de dualité sont introduites.

Le chapitre deux fait une synthèse des travaux sur les méthodes de points intérieurs en programmation quadratique convexe et le troisième est consacré à la présentation de la méthode de support à variables mixtes, dont l'algorithme utilise seulement la métrique du simplexe pour la détermination de la direction d'amélioration. Le quatrième chapitre présente la méthode adaptée, où on propose une autre métrique différente de celle du simplexe.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation des résultats numériques établis pour comparer l'algorithme proposé avec les méthodes classiques, telles que les méthodes de points intérieurs et la méthode d'activation des contraintes implémentées sous Matlab.

Enfin, ce mémoire s'achève par une conclusion générale et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

Rappels sur l'algèbre linéaire et la programmation mathématique

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne quelques rappels sur l'algèbre linéaire et la programmation mathématique. On rappelle tout d'abord les propriétés essentielles des formes quadratiques, ainsi que la notion des ensembles et fonctions convexes. Par la suite, on résume les résultats fondamentaux sur l'optimisation non linéaire et sur la dualité en programmation quadratique convexe.

1.1.1 Vecteurs et matrices

Définition 1.1.1. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Une matrice d'ordre $m \times n$ à coefficients dans \mathbb{R} est un tableau à deux dimensions, ayant m lignes et n colonnes, représenté sous la forme suivante :

$$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

où $I = \{1, 2, \dots, m\}$ et $J = \{1, 2, \dots, n\}$ représentent respectivement l'ensemble des indices des lignes et colonnes de A . Pour des calculs pratiques, la matrice A se note aussi

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_j^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix},$$

où

$$a_j = A(I, j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ est un vecteur-colonne de dimension } m,$$

$A_i^T = A(i, J) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ est un vecteur-ligne de dimension n .

Le symbole (T) est celui de la transposition. Chaque vecteur, noté $x = x(J) = (x_j, j \in J)$, sera ainsi considéré comme un vecteur-colonne, tandis que le vecteur-ligne sera noté x^T .

La matrice transposée de A sera notée :

$$A^T = A^T(J, I) = (a_{ji}, j \in J, i \in I).$$

Notons qu'un vecteur-colonne de dimension n peut être considéré comme une matrice d'ordre $(n \times 1)$, tandis qu'un vecteur-ligne de dimension n peut être considéré comme une matrice d'ordre $(1 \times n)$.

La matrice A est dite carrée si on a $n = m$; de plus, si $A = A^T$, la matrice est dite symétrique. La matrice identité d'ordre n sera notée I_n .

1.1.2 Matrices et vecteurs partitionnés

On peut effectuer le produit d'une matrice A et d'un vecteur x , après les avoir partitionnés judicieusement. On dit alors qu'on a effectué le produit par blocs. En effet, si l'on a

$$A = [A_1|A_2], \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

alors on peut écrire :

$$Ax = [A_1|A_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A_1x_1 + A_2x_2.$$

De même, pour

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

l'équation $Ax = b$ peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

On peut partitionner une matrice d'une manière arbitraire. Par exemple, si $A = A(I, J)$ est une matrice d'ordre $(m \times n)$, J_B et J_N sont deux sous-ensembles quelconques de J , tels que :

$$|J_B| = m, \quad J_B \cup J_N = J, \quad J_B \cap J_N = \emptyset,$$

alors on peut partitionner A de la façon suivante :

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n) = [A_B|A_N],$$

avec $A_B = A(I, J_B)$, et $A_N = A(I, J_N)$.

Si $x = x(J) = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, avec $x_B = x(J_B)$, $x_N = x(J_N)$, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{j=1}^n a_j x_j = \sum_{j \in J_B} a_j x_j + \sum_{j \in J_N} a_j x_j = A(I, J_B)x(J_B) + A(I, J_N)x(J_N) \\ &= A_B x_B + A_N x_N. \end{aligned}$$

1.2 Espace vectoriel

Un vecteur (point) x de \mathbb{R}^n est une collection ordonnée $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ de n réels $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ appelés composantes de x . Le nombre n est appelé *dimension* du vecteur.

L'espace \mathbb{R}^n est l'ensemble de toutes les collections de ce type. Il est muni des deux opérations linéaires de base :

- **Addition** : La somme de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de \mathbb{R}^n , défini par :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)^T, \quad (1.1)$$

- **Multiplication par des réels** : Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ un vecteur de \mathbb{R}^n . La multiplication du vecteur x par le réel λ est aussi un vecteur de \mathbb{R}^n , défini comme suit :

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)^T. \quad (1.2)$$

La structure que nous obtenons (l'ensemble de tous les vecteurs n -dimensionnels avec les deux opérations qu'on vient de définir) s'appelle l'*espace vectoriel réel* \mathbb{R}^n n -dimensionnel.

1.2.1 Sous-espace linéaire

Un sous-ensemble S non vide de \mathbb{R}^n est appelé sous-espace linéaire de \mathbb{R}^n si les deux opérations (1.1) et (1.2) sont stables dans S , autrement dit :

$$\forall x, y \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in S.$$

1.2.2 Sous-espace affine

Un sous-ensemble A de E est un sous-espace affine si

$$\forall x \in A, y \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha x + (1 - \alpha)y \in A.$$

Autrement dit, un sous-espace affine contient toujours la droite passant par deux de ses points x et y .

1.2.3 Combinaison linéaire

Étant donnés k vecteurs a_1, a_2, \dots, a_k , et un ensemble de k scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Le vecteur b est dit combinaison linéaire des vecteurs $\{a_i\}_{i=1\dots k}$ s'il s'écrit sous la forme :

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k. \quad (1.3)$$

L'expression (1.3) peut être écrite sous forme du produit d'une matrice et d'un vecteur comme suit :

$$b = (a_1, a_2, \dots, a_k) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = A\lambda,$$

où a_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A , et λ_j est le $j^{\text{ème}}$ élément du vecteur colonne λ .

Une combinaison linéaire où tous les coefficients sont nuls est appelée *combinaison linéaire triviale* ; dans le cas contraire elle est appelée *combinaison linéaire non triviale*.

1.2.4 Indépendance et dépendance linéaire

Les vecteurs a_1, a_2, \dots, a_k sont dits linéairement indépendants si :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Les vecteurs $a_i, i = 1, \dots, k$, sont dits linéairement dépendants s'il existe une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs, avec des scalaires $\lambda_i, i = 1, \dots, k$, non tous nuls.

1.2.5 Noyau et image d'une matrice

Définition 1.2.1. Soit A une matrice d'ordre $m \times n$.

– Le noyau de A est l'ensemble

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\},$$

– L'image ou l'espace image de A est l'ensemble

$$R(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n, Ax = y\}.$$

Proposition 1.2.1.

- $N(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- $R(A)$ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m , engendré par les colonnes de A .

1.2.6 Rang d'une matrice

Définition 1.2.2. On appelle rang d'une matrice, la dimension de l'image de la matrice A :

$$\text{rang}(A) = \dim R(A). \quad (1.4)$$

Théorème 1.1. "théorème de la dualité"

Soit A une matrice d'ordre $m \times n$, alors

$$\dim R(A) = \dim R(A^T) \quad \text{ou} \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A^T).$$

Théorème 1.2. "théorème du noyau-image"

Soit A une matrice d'ordre $m \times n$, alors

$$\dim R(A) + \dim N(A^T) = n.$$

1.3 Sous-espace complémentaire orthogonal

Le produit scalaire de deux n -vecteurs x et y est le scalaire défini par :

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes :

- Commutativité : $x^T y = y^T x$;
- Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs : $x^T (y + z) = x^T y + x^T z$;
- Positivité : $x^T x \geq 0$ et $x^T x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Si $x^T y = 0$, les vecteurs x et y sont dits orthogonaux et on note $x \perp y$. Deux parties A et B de \mathbb{R}^n sont dites orthogonales si :

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a^T b = 0.$$

Soit A une partie de \mathbb{R}^n . On appelle orthogonal de A , le sous-ensemble de \mathbb{R}^n défini par :

$$A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall a \in A, x^T a = 0\}.$$

Proposition 1.3.1.

- A^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ;
- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Pour chaque sous-espace L de \mathbb{R}^n , il existe un ensemble complémentaire \bar{L} dont les éléments sont définis comme suit : $y \in \bar{L}$ si pour chaque $x \in L$, $x^T y = 0$. i.e, y est orthogonal à chaque vecteur dans L . Le sous-ensemble \bar{L} est un sous-espace, puisque chaque combinaison de vecteurs de \bar{L} est orthogonale à chaque vecteur de L . Le sous-espace \bar{L} est appelé complément orthogonal de L , et les deux sous-espaces n'ont que le vecteur nul en intersection. si la dimension de L est p , alors la dimension de \bar{L} est $n - p$.

Proposition 1.3.2. Soit A une matrice d'ordre $m \times n$, alors on a :

- $N(A)^\perp = R(A^T)$,
- $R(A)^\perp = N(A^T)$.

1.4. DISCUSSION GÉNÉRALE SUR L'EXISTENCE ET LE NOMBRE DE SOLUTIONS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

En effet, pour tout x du noyau $N(A)$, on a : $Ax = 0$. Donc pour tout $i = 1, 2, \dots, n$; $(Ax)_i = 0$. $(Ax)_i$ est obtenu en multipliant le vecteur-ligne A_i^T par le vecteur-colonne x :

$$(Ax)_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \text{ d'où } A_i^T \perp x.$$

On déduit que $N(A) \perp R(A^T)$. De plus, $\dim R(A^T) = \dim R(A) = n - \dim N(A)$, d'où le résultat. Par passage à la transposée, on déduit aussi que : $R(A)^\perp = N(A^T)$.

1.4 Discussion générale sur l'existence et le nombre de solutions d'un système linéaire

Soient m et n deux nombres entiers. Un système de m équations linéaires à n inconnus x_1, x_2, \dots, x_n s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.5)$$

où les coefficients a_{ij} sont des réels. Les nombres b_1, b_2, \dots, b_m sont appelés les membres libres du système (1.5) ou les seconds membres. En posant

$$A = (a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

le système (1.5) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$Ax = b. \quad (1.6)$$

Tout vecteur x vérifiant les équations (1.5) s'appelle solution du système. Le système (1.5) est dit compatible s'il possède une ou plusieurs solutions. Dans le cas contraire, il est dit incompatible ou impossible.

D'une manière générale, le système (1.6) possède une solution si le vecteur $b \in R(A)$, i.e, appartient au sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice A . Lorsque le vecteur b est nul, le système (1.6) est dit homogène. Tout système homogène possède la solution triviale $x = 0$.

Définition 1.4.1. Le système linéaire (1.6) est dit de rang complet en lignes si $\text{rang}(A) = m$, avec $m \leq n$, et de rang complet en colonnes si $\text{rang}(A) = n$, avec $m \geq n$.

Lemme 1.4.1. Soit $m \leq n$ et $\text{rang} A = m$. Alors le système $Ax = b$ admet toujours des solutions, quel que soit le second membre b :

- (a) une solution unique si $m = n$,
- (b) une infinité de solutions si $m < n$.

1.5 Propriétés des formes quadratiques

Définition 1.5.1. Une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, est dite *forme quadratique* de n variables x_1, x_2, \dots, x_n si elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x^T A x, \quad (1.7)$$

où $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un n -vecteur-ligne et $A = (a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ une matrice carrée d'ordre n .

Pour $i \neq j$, le coefficient du terme $x_i x_j$ s'écrit $a_{ij} + a_{ji}$. En vertu de cela, la matrice A peut être supposée symétrique. En effet, en définissant de nouveaux coefficients

$$d_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

on obtient une nouvelle matrice D symétrique telle que :

$$D = (d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n), \quad \text{avec } d_{ij} = d_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}.$$

Il est clair qu'après une redéfinition des coefficients, la valeur de la forme quadratique $F(x)$ reste inchangée pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F(x) = x^T A x = x^T D x.$$

1.5.1 Gradient d'une forme quadratique

Définition 1.5.2. Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continûment différentiable. Son gradient au point x est défini par :

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Soit une forme quadratique et D sa matrice symétrique associée :

$$F(x) = x^T D x. \quad (1.9)$$

En écrivant la matrice D sous forme de vecteurs colonnes

$$D = (d_1, d_2, \dots, d_n),$$

l'expression (1.9) peut se mettre sous la forme suivante :

$$F(x) = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \begin{pmatrix} d_1^T x \\ d_2^T x \\ \vdots \\ d_j^T x \\ \vdots \\ d_n^T x \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j d_j^T x.$$

La dérivée partielle de F par rapport à chaque variable x_j est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j} &= x_1 d_{1j} + \cdots + x_{j-1} d_{(j-1)(j)} + d_j^T x + x_j d_{jj} + \cdots + x_n d_{nj} \\ &= x_1 d_{1j} + \cdots + x_{j-1} d_{(j-1)(j)} + x_j d_{jj} + \cdots + x_n d_{nj} + d_j^T x \\ &= 2d_j^T x.\end{aligned}$$

Par conséquent, le gradient de $F(x)$ est :

$$\nabla F(x) = 2Dx. \quad (1.10)$$

Définition 1.5.3. Soit une fonction réelle de classe \mathcal{C}^2 , $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Le Hessien de la fonction F est défini par :

$$\begin{aligned}\nabla^2 F(x) &= \left(\nabla \frac{\partial F}{\partial x_1}, \nabla \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \nabla \frac{\partial F}{\partial x_j}, \dots, \nabla \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (1.11)$$

Définition 1.5.4. Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . La dérivée directionnelle de F dans la direction d au point x est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial d} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + td) - F(x)}{t} \\ &= \frac{\partial F(x + td)}{\partial x_1} \Big|_{t=0} d_1 + \cdots + \frac{\partial F(x + td)}{\partial x_n} \Big|_{t=0} d_n \\ &= \nabla F(x)^T d.\end{aligned}$$

1.5.2 Forme quadratique définie et semi-définie positive

Soit $F(x) = x^T D x$ une forme quadratique avec D symétrique.

Définition 1.5.5.

- $F(x)$ est dite *définie positive* si $x^T D x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. Elle est dite semi-définie positive ou définie non négative si $x^T D x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $F(x)$ est dite *définie négative* si $x^T D x < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. Elle est dite semi-définie négative ou définie non positive si $x^T D x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.5.6. Une matrice symétrique D est dite matrice définie positive (non négative) et on note $D > 0$ ($D \geq 0$) si elle est associée à une forme quadratique définie positive (non négative).

1.5.3 Critère de Sylvester pour les formes quadratiques définies et semi-définies

L'intérêt du critère du Sylvester est de caractériser une forme quadratique définie ou semi-définie. Pour cela, considérons la matrice symétrique suivante :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le mineur de la matrice D , formé des lignes i_1, i_2, \dots, i_p et les colonnes j_1, j_2, \dots, j_p , sera noté comme suit :

$$D \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ j_1, j_2, \dots, j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} d_{i_1 j_1} & d_{i_1 j_2} & \cdots & d_{i_1 j_p} \\ d_{i_2 j_1} & d_{i_2 j_2} & \cdots & d_{i_2 j_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{i_p j_1} & d_{i_p j_2} & \cdots & d_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Ce mineur est dit principal si $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_p = j_p$, c'est-à-dire s'il est formé de lignes et de colonnes portant les mêmes numéros. Les mineurs suivants

$$D_1 = d_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \dots, \quad D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix},$$

sont appelés mineurs principaux successifs. Alors, le critère de Sylvester se formule comme suit :

Théorème 1.3. (critère de Sylvester)

– Pour qu'une matrice symétrique D soit définie positive ($D > 0$), il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux successifs soient positifs :

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \dots, \quad D_n > 0, \tag{1.12}$$

– Pour que la matrice D soit semi-définie positive ($D \geq 0$), il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux soient non négatifs :

$$D \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ i_1, i_2, \dots, i_p \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n, \quad p = 1, 2, \dots, n. \tag{1.13}$$

1.6 Propriétés des formes quadratiques semi-définies positives

Les matrices symétriques définies ont des propriétés très intéressantes. En voici quelques unes :

Propriété 1.6.1. Soit la matrice D partitionnée de la manière suivante :

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}.$$

Si $D > 0$ ($D \geq 0$), alors les sous-matrices principales D_{11} et D_{22} sont aussi définies positives (non négatives). D'une manière générale, toute sous-matrice principale d'une matrice définie positive (non négative) est aussi définie positive (non négative).

Propriété 1.6.2. Un élément de la diagonale d'une matrice symétrique D définie non négative ne peut s'annuler que si les autres éléments de la même ligne et colonne s'annulent aussi.

Propriété 1.6.3. Soit D une matrice symétrique définie non négative. Si $x \in \mathbb{R}^n$ est un point quelconque fixe tel que $x^T D x = 0$, alors on aura : $D x = 0$.

1.7 Éléments de topologie

Nous nous plaçons ici dans un espace vectoriel normé \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne :

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2}.$$

Cette norme permet de définir la distance $d(x, y)$ entre deux éléments de \mathbb{R}^n par : $d(x, y) = \|x - y\|$. On dit que \mathbb{R}^n est un espace vectoriel métrique.

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de \mathbb{R}^n .

Définition 1.7.1. "Boule ouverte"

Soient $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et un nombre réel $r > 0$. L'ensemble

$$B_r(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^0\| < r\},$$

est appelé *boule ouverte* de centre x^0 et de rayon r .

Définition 1.7.2. "Point intérieur"

Un vecteur $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ est appelé point intérieur de S , s'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$, tel que : $B_\varepsilon(x) \subset S$.

L'ensemble des points intérieurs de S est appelé *l'intérieur* de S , noté par $\text{int}(S)$.

Définition 1.7.3. "Frontière d'un ensemble"

Un vecteur $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ est appelé point frontière de S , si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B_\varepsilon(x) \cap C_{\mathbb{R}^n} S \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points frontières de S , est appelé *frontière* de l'ensemble S .

Définition 1.7.4. "Point adhérent"

Un vecteur $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ est appelé *point adhérent* de S , si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on a : $B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset$.

L'ensemble de tous les points d'adhérence de S est appelé *l'adhérence* de S ¹, notée $cl(S)$. On a évidemment $S \subset cl(S)$.

Définition 1.7.5. "Ensemble ouvert"

Un ensemble S est dit *ouvert* s'il coïncide avec son intérieur, c'est-à-dire si $S = int(S)$.

Propriété 1.7.1. *L'intersection d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ouvert. La réunion d'un nombre fini ou infini d'ensembles ouverts est un ouvert.*

Définition 1.7.6. "Ensemble fermé"

Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit *fermé* s'il coïncide avec son adhérence, c'est-à-dire si $cl(S) = S$.

Proposition 1.7.1. *Le complémentaire (dans \mathbb{R}^n) d'un ouvert est un fermé. Le complémentaire (dans \mathbb{R}^n) d'un fermé est un ouvert.*

Propriété 1.7.2. *L'union d'un nombre fini d'ensembles fermés est un fermé. L'intersection d'un nombre fini ou infini d'ensembles fermés est un fermé.*

Une propriété fondamentale des sous-ensembles fermés est la suivante :

Propriété 1.7.3. *L'ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de S a sa limite dans S .*

Définition 1.7.7. "Ensemble borné"

Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est borné, s'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in S$, on ait $\|x\| \leq M$.

La propriété suivante donne une caractérisation simple des ensembles compacts dans \mathbb{R}^n .

Propriété 1.7.4. *Dans \mathbb{R}^n , un sous-ensemble S est compact si et seulement s'il est fermé et borné.*

Le résultat suivant est fondamental et concerne l'existence d'une solution optimale pour un problème d'optimisation.

Théorème 1.4. "Weierstrass"

Si F est une fonction réelle continue sur $S \subset \mathbb{R}^n$ compact, alors le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \text{Minimiser } F(x) \\ x \in S \end{cases}$$

a une solution optimale $x^0 \in S$.

¹On dit aussi fermeture ou clôture

1.8 Notions sur la convexité

La convexité joue un rôle central dans la théorie classique de l'optimisation. Elle est un outil indispensable pour la recherche des conditions à la fois nécessaires et suffisantes d'optimalité.

1.8.1 Ensembles convexes

Définition 1.8.1. Un ensemble C de \mathbb{R}^n est dit convexe, si

$$\forall x_1, x_2 \in C, \lambda \in [0, 1], \text{ le vecteur } x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C.$$

1.8.2 Propriétés des ensembles convexes

Propriété 1.8.1. Soit une famille $\{C_i\}_{i=1, \dots, k}$ d'ensembles convexes, alors on a :

- $C = \bigcap_{i=1}^k C_i$ est un ensemble convexe.
- $C = \prod_{i=1}^k C_i$ est un ensemble convexe.

Propriété 1.8.2. Si C est convexe, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble $K = \{x | x = \lambda x_1, x_1 \in C\}$ est convexe.

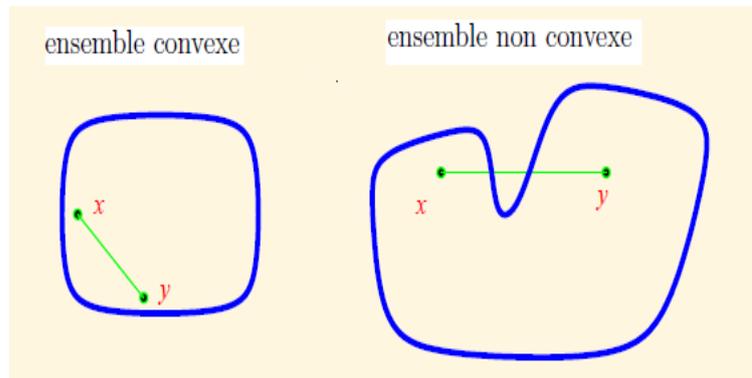


FIG. 1.1: Ensemble convexe

1.8.3 Fonctions convexes

Définition 1.8.2. Une fonction réelle F définie sur un ensemble convexe C de \mathbb{R}^n , est dite convexe, si pour tous les points $x, y \in C$, et pour tout nombre réel positif ou nul λ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y). \quad (1.14)$$

Définition 1.8.3. Une fonction convexe $F(x), x \in C$, est dite *strictement convexe* si l'inégalité (1.14) est stricte pour tous les points $x_1, x_2 \in C$, avec $x_1 \neq x_2$ et $\lambda \in]0, 1[$.

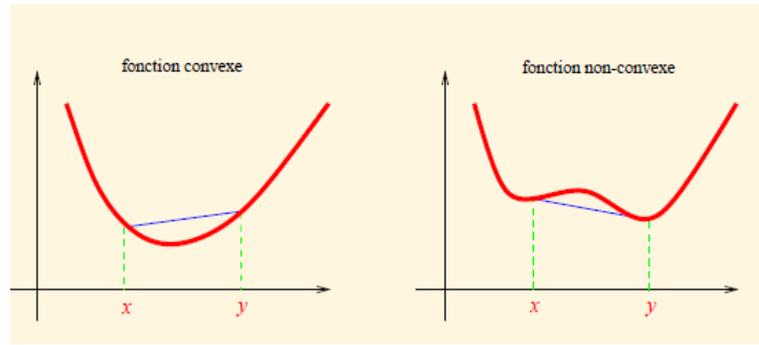


FIG. 1.2: Fonction convexe

1.8.4 Propriétés des fonctions convexes

Propriété 1.8.3. Soit F une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$. Alors F est convexe si et seulement si son épigraphe

$$\text{epi}(F) = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in C, F(x) \leq r\},$$

est un ensemble convexe.

Théorème 1.5. [54] Si F est continûment différentiable, les conditions (a) et (b) ci-dessous sont équivalentes ; de plus, les conditions (a), (b) et (c) ci-dessous sont équivalentes si F est deux fois continûment différentiable :

- (a) F est convexe ;
- (b) $\forall x \in C, \forall y \in C : F(y) - F(x) \geq [\nabla F(x)]^T (y - x)$;
- (c) $\forall x \in C$, le Hessien $\nabla^2 F(x)$ est une matrice semi-définie positive.

Alors d'après ce théorème, on déduit facilement qu'une fonction quadratique $F(x) = x^T D x + c^T x$ est convexe si et seulement si sa matrice associée D est semi-définie positive.

1.9 Programmation non linéaire avec contraintes

Un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes se formule de la manière suivante :

$$\min_{x \in S} F(x), \tag{1.15}$$

où $S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, k, g_i(x) \leq 0, i = k + 1, \dots, m\}$ désigne l'ensemble des solutions réalisables. On suppose que les fonctions F et $g_i (i = 1, \dots, m)$ sont de classe \mathcal{C}^1 , i.e, continûment différentiables sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.9.1.

- Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est appelé *solution réalisable* ou plan du problème (1.15) s'il vérifie toutes les contraintes du problème, c'est-à-dire, que $x \in S$.
- Une solution réalisable x^0 est appelée *solution optimale* du problème (1.15) si

$$F(x^0) \leq F(x), \quad \forall x \in S,$$

et on note $\min_{x \in S} F(x) = F(x^0)$.

– $x^0 \in S$ est appelé minimum local du problème (1.15) s'il existe un réel $\varepsilon > 0$, tel que :

$$F(x^0) \leq F(x), \quad \forall x \in S \cap B(x^0, \varepsilon),$$

où $B(x^0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - x^0\| \leq \varepsilon\}$ est la boule de centre x^0 et de rayon ε .

Définition 1.9.2. Soit $x \in S$. On dit qu'un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible en x s'il existe un nombre réel $\bar{\alpha} > 0$, tel que :

$$x + \alpha d \in S, \quad \forall \alpha \in [0, \bar{\alpha}]. \quad (1.16)$$

Si x est un point intérieur, alors toutes les directions sont admissibles.

Théorème 1.6. Soit la fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Si x^0 est un point minimum local (ou global) du problème (1.15), alors pour toute direction admissible $d \in \mathbb{R}^n$ en x^0 , on a

$$d^T \nabla F(x^0) \geq 0. \quad (1.17)$$

1.9.1 Conditions d'optimalité sans contraintes

Soit le programme non linéaire et sans contraintes suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x). \quad (1.18)$$

La fonction F est supposée au moins deux fois continûment différentiable. Soit x^0 un minimum local pour ce problème. Alors, pour tout $\alpha > 0$ assez petit, on a nécessairement :

$$F(x^0) \leq F(x^0 + \alpha d), \quad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

Ceci implique :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{F(x^0 + \alpha d) - F(x^0)}{\alpha} = d^T \nabla F(x^0) \geq 0.$$

De plus, la direction $d = -\nabla F(x^0)$ est admissible, alors

$$[\nabla F(x^0)]^T \nabla F(x^0) = \|\nabla F(x^0)\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow \nabla F(x^0) = 0.$$

Ainsi, on a donc le théorème suivant :

Théorème 1.7. (*condition nécessaire du premier ordre*)

Si x^0 est un minimum local pour le problème (1.18), et si de plus F est différentiable en x^0 , alors

$$\nabla F(x^0) = 0. \quad (1.19)$$

Un point vérifiant la condition (1.19) est appelé *point stationnaire*. Au deuxième ordre on obtient :

$$\begin{aligned} F(x^0) &\leq F(x^0 + \alpha d), \\ F(x^0) &\leq F(x^0) + \alpha \nabla F(x^0)^T d + \frac{\alpha^2}{2} d^T \nabla^2 F(x^0) d + o(\alpha^2), \end{aligned}$$

où $o(\alpha^2)$ dénote une fonction telle que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} = 0.$$

Comme x^0 est un minimum local, on a :

$$0 \leq \frac{\alpha^2}{2} d^T \nabla^2 F(x^0) d + o(\alpha^2).$$

En divisant par α^2 et en prenant la limite on aura le théorème suivant :

Théorème 1.8. (conditions nécessaires du second ordre)

Soit x^0 un minimum local (global) pour le problème (1.18) de F sur \mathbb{R}^n et si de plus F est deux fois continûment différentiable en x^0 , alors

- (i) $\nabla F(x^0) = 0$ (stationnarité),
- (ii) $d^T \nabla^2 F(x^0) d \geq 0, \forall d \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.9. (conditions suffisantes du deuxième ordre)

Soit x^0 un point vérifiant :

- (i) $\nabla F(x^0) = 0$ (stationnarité);
- (ii) $d^T \nabla^2 F(x^0) d > 0, \forall d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0$.

alors x^0 est un minimum local strict.

1.9.2 Conditions d'optimalité pour le cas des contraintes linéaires de type égalités

Le problème se formule sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min F(x), \\ g_i(x) = A_i^T x - b_i = 0, \forall i \in I = \{1, 2, \dots, m\}, \end{cases} \quad (1.20)$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continûment différentiable, b est un vecteur de \mathbb{R}^m et A une matrice d'ordre $m \times n$, formée des vecteurs colonnes et lignes suivants :

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n); \quad A = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix}; \quad \text{et } g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix},$$

est une fonction vectorielle définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m .

Proposition 1.9.1. Un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible au point x si et seulement si

$$Ad = 0. \quad (1.21)$$

De plus on a, $x(\alpha) = x + \alpha d \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.9.1. Pour que l'ensemble des solutions réalisables S ne soit pas vide ou ne soit pas réduit à un point isolé, on considérera que $\text{rang} A = m < n$.

Définition 1.9.3. La fonction $L(x, \lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$ est appelée *fonction de Lagrange* associée au problème (1.20). Le vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, formé des multiplicateurs de Lagrange λ_i , est unique grâce à la remarque (1.9.1).

Théorème 1.10. Soit x^0 un minimum du problème (1.20). Alors, il existe nécessairement un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vérifiant

$$\nabla F(x^0) + A^T \lambda = 0. \quad (1.22)$$

Si de plus A est de rang complet en lignes, alors λ est unique.

La condition (1.22) peut être donnée autrement, en utilisant la fonction de Lagrange :

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla F(x) + A^T \lambda = 0. \quad (1.23)$$

De plus, un minimum local est tout d'abord un point réalisable, qui vérifie

$$Ax = b \Rightarrow \nabla_\lambda L(x, \lambda) = Ax - b = 0. \quad (1.24)$$

En combinant les relations (1.23) et (1.24), on obtient alors la condition nécessaire d'optimalité de premier ordre pour le problème (1.20).

Théorème 1.11. (théorème de Lagrange)

Soit x^0 un minimum local (ou global) pour le problème (1.20). Alors, il existe un vecteur multiplicateur de Lagrange $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$, tel que :

$$\nabla L(x^0, \lambda^0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\lambda^0} L(x^0, \lambda^0) = 0, \\ \nabla_{x^0} L(x^0, \lambda^0) = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Le couple (x^0, λ^0) est appelé *point stationnaire* de la fonction de Lagrange.

La condition nécessaire du second ordre pour le problème (1.20) est la suivante :

Théorème 1.12. Soit x^0 un minimum local pour le problème (1.20) et λ^0 un vecteur multiplicateur de Lagrange vérifiant (1.25), alors la matrice $\nabla^2 F(x^0)$ est semi-définie positive sur l'ensemble des points de la variété linéaire $Ay = 0$. Autrement dit,

$$y^T \nabla^2 F(x^0) y \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{M}_0 = \{y \in \mathbb{R}^n : Ay = 0\}. \quad (1.26)$$

La condition suffisante de second ordre est la suivante :

Théorème 1.13. Soit (x^0, λ^0) un couple de vecteurs vérifiant la condition nécessaire d'optimalité de premier ordre du problème (1.20), i.e

$$\nabla L(x^0, \lambda^0) = 0.$$

Pour que x^0 soit un minimum local du problème (1.20), il est suffisant que la matrice $\nabla^2 F(x^0)$ soit définie positive sur le sous-espace vectoriel \mathcal{M}_0 .

1.9.3 Conditions d'optimalité pour le cas des contraintes linéaires de type inégalités

Considérons maintenant un problème non linéaire avec contraintes linéaires de type inégalités :

$$\begin{cases} \min F(x), \\ g_i(x) = A_i^T x - b_i \leq 0, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases} \quad (1.27)$$

Définition 1.9.4. Soit x une solution réalisable du problème (1.27). L'ensemble des contraintes actives (saturées) au point x est l'ensemble d'indices suivants :

$$I_0 = I_0(x) = \{i \in I : A_i^T x = b_i\}.$$

Lemme 1.9.1. Pour les contraintes d'inégalités du problème (1.27), un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible au point x si et seulement si

$$A^T d \leq 0, \quad \forall i \in I_0(x). \quad (1.28)$$

Lemme 1.9.2. (Farkas)

Soit $(m+1)$ vecteurs de \mathbb{R}^n , $c, A_i, i = 1, 2, \dots, m$, avec $m < n$.

Si pour chaque vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $A_i^T x \leq 0, i = 1, \dots, m$, on a $c^T x \leq 0$, alors il existe des coefficients $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m$, tels que

$$c = \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i. \quad (1.29)$$

Théorème 1.14. (Théorème de Karush-Kuhn-Tucker 1951)

Soit x^0 un minimum local (ou global) du problème (1.27). Alors il existe un m -vecteur $\lambda^0 \geq 0$ tel que :

(i) Pour la fonction de Lagrange $L(x^0, \lambda^0) = F(x^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 g_i(x^0)$, la condition de stationnarité est vérifiée :

$$\nabla F(x^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 A_i = 0, \quad (1.30)$$

(ii) La condition de complémentarité (écarts complémentaires) est remplie :

$$\lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, \quad \forall i \in I. \quad (1.31)$$

1.10 Programmation convexe

L'hypothèse de convexité apporte élégance et simplicité à la théorie de l'optimisation. En particulier, les conditions nécessaires d'optimalité deviennent également suffisantes, et tout le résultat acquiert un caractère global.

Définition 1.10.1. On dit qu'un problème de programmation mathématique est convexe (respectivement strictement convexe), s'il consiste à minimiser une fonction convexe (respectivement strictement convexe) sur un domaine convexe.

L'étude des problèmes convexes et des algorithmes de résolution correspondants est l'objet de la programmation convexe. L'hypothèse de convexité est cruciale en optimisation. Notons que :

- Les problèmes convexes sont synonymes de minimisation.
- Les problèmes convexes sont les bons problèmes de la théorie : ceux pour lesquels il existe des algorithmes de résolution efficaces.
- L'hypothèse de convexité ne garantit cependant ni l'existence ni l'unicité d'une éventuelle solution.

Pour tout problème de programmation convexe, nous avons les propriétés suivantes :

Propriété 1.10.1. *Soit F une fonction convexe définie sur un convexe $C \in \mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble des points où F atteint son minimum est convexe.*

Propriété 1.10.2. *Tout minimum local est minimum global.*

Propriété 1.10.3. *Si la fonction F est strictement convexe, alors son minimum global lorsqu'il existe est atteint en un seul point x^0 .*

Considérons d'abord le problème sans contraintes donné sous la forme (1.18), où F est une fonction convexe de classe \mathcal{C}^1 .

Théorème 1.15. *Soit F une fonction convexe continûment différentiable sur \mathbb{R}^n . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) x^0 est un minimum global de F sur \mathbb{R}^n ;
- (ii) x^0 est un minimum local de F sur \mathbb{R}^n ;
- (iii) x^0 est un point stationnaire de F , i.e, $\nabla F(x^0) = 0$.

Considérons maintenant le problème avec contraintes donné sous la forme (1.27), où F est une fonction convexe de classe \mathcal{C}^1 .

Théorème 1.16. *Considérons (x^0, λ^0) un couple de vecteurs vérifiant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker :*

- (i) $\nabla L_x(x^0, \lambda^0) = 0, \lambda_i^0 \geq 0, i \in I$;
- (ii) $\lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, i \in I$.

Alors le vecteur x^0 constitue un minimum global de (1.27).

Démonstration. En effet, le théorème 1.5 nous permet d'écrire

$$F(x) - F(x^0) \geq (x - x^0)^T \nabla F(x^0), \forall x \in S,$$

d'où

$$F(x) - F(x^0) \geq - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 A_i^T (x - x^0), \forall x \in S.$$

Comme $\lambda_i^0 = 0$ pour $i \in I \setminus I_a(x^0)$, alors on aura

$$\begin{aligned} F(x) - F(x^0) &\geq - \sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 A_i^T (x - x^0) \\ &\geq - \sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 (A_i^T x - A_i^T x^0) \\ &\geq - \sum_{i \in I_a(x^0)} \lambda_i^0 (A_i^T x - b_i) \geq 0, \quad \forall x \in S. \end{aligned}$$

Par conséquent, x^0 est un point minimum global de F sur S . ■

Ainsi, les conditions de KKT sont donc à la fois nécessaires et suffisantes de minimalité (c'est le théorème de KKT-convexe).

1.10.1 Problème quadratique convexe (P.Q.C)

Il s'agit d'une classe de problèmes d'optimisation où la fonction objectif est quadratique, s'écrivant sous la forme $F(x) = \frac{1}{2}x^T D x + c^T x$, avec D symétrique, que l'on minimise sur un polyèdre convexe fermé. Ce genre de problèmes est convexe dès lors que la matrice D est semi-définie positive.

Remarque 1.10.1. On remarquera qu'un problème linéaire est un problème quadratique dégénéré ($D = 0$), et c'est toujours un problème convexe.

1.11 Dualité en programmation quadratique convexe

Le concept de la dualité revient souvent dans la littérature sur la programmation mathématique. Le but est de trouver une formulation alternative équivalente du problème de programmation mathématique, qui convient le plus à la pratique ou qui a une signification théorique importante. Le problème original est dit problème primal et le problème transformé est le dual. Souvent, les variables dans le dual peuvent être interprétées comme des multiplicateurs de Lagrange pour le cas linéaire et prennent la valeur de λ^0 comme solution duale, quand λ^0 est le multiplicateur associé à la solution optimale x^0 . Cependant, dans le cas non linéaire, il existe toujours une fonction objectif (souvent reliée à la fonction de Lagrange) qui doit être optimisée. Ici, on traitera la dualité associée à un problème de programmation convexe comme problème primal. Il est important de remarquer que si le problème primal n'est pas convexe, alors le problème dual peut très bien ne pas avoir de solution à partir de laquelle la solution primale peut être déduite. Donc, ce n'est pas possible d'appliquer la dualité comme technique générale dans le but de rechercher une solution.

Nous allons par conséquent nous contenter d'introduire un résultat de base de la théorie de la dualité en programmation convexe.

1.11.1 Dualité en programmation convexe

Définition 1.11.1. "Problème primal"

On définit un problème primal comme un problème de minimisation qui consiste à trouver un vecteur x^0 , s'il existe, tel que :

$$(PCP) \begin{cases} F(x^0) = \min_{x \in S} F(x), \\ x^0 \in S = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}, \end{cases}$$

où la fonction F est convexe sur l'ensemble S , défini par les fonctions $g_i(x), i = 1, \dots, m$, qui sont aussi convexes sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.11.2. "problème dual"

On définit le problème dual de (PCP) comme un problème de maximisation qui consiste à trouver deux vecteurs $\kappa^0 \in \mathbb{R}^n$ et $y^0 \in \mathbb{R}^m$, s'ils existent, tels que :

$$(PCD) \begin{cases} L(\kappa^0, y^0) = \max_V L(\kappa, y), \\ (\kappa^0, y^0) \in V = \{(\kappa, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / \nabla_{\kappa} L(\kappa, y) = 0, y \geq 0\}, \end{cases}$$

où $L(\kappa, y) = F(\kappa) + y^T g(\kappa)$ est la fonction de Lagrange associée au problème (PCP).

Les relations existantes entre le programme primal et de son dual sont données par les théorèmes suivants :

Théorème 1.17. "Théorème de la dualité faible (Wolf 1961)"

Soient $F(x)$ et $L(\kappa, y)$ les fonctions objectives des problèmes primal et dual respectivement. On a alors

$$L(\kappa, y) \leq F(x), \forall (\kappa, y) \in V, \forall x \in S.$$

Démonstration. Comme $F(x)$ est convexe, on peut écrire

$$F(x) - F(\kappa) \geq (\nabla F(\kappa))^T (x - \kappa),$$

d'où

$$F(x) \geq F(\kappa) + (\nabla F(\kappa))^T (x - \kappa).$$

Le couple (κ, y) appartient à V . Donc

$$\nabla_{\kappa} L(\kappa, y) = \nabla F(\kappa) + \nabla g(\kappa)y = 0 \Rightarrow \nabla F(\kappa) = -\nabla g(\kappa)y,$$

et

$$F(x) \geq F(\kappa) - y^T (\nabla g(\kappa))^T (x - \kappa).$$

De la convexité de la fonction $g(\kappa)$, on déduit que

$$F(x) \geq F(\kappa) + y^T (g(\kappa) - g(x)).$$

Comme $y^T g(x) \leq 0$, on obtient alors

$$F(x) \geq F(\kappa) + y^T g(\kappa) \Rightarrow L(\kappa, y) \leq F(x).$$

■

Théorème 1.18. "Théorème de la dualité forte de Wolf (1961)"

Soit x^0 une solution optimale du problème primal (PCP). Alors, il existe $y^0 \in \mathbb{R}^m, y^0 \geq 0$ tel que le couple (x^0, y^0) est une solution optimale du problème dual (PCD), et on a

$$F(x^0) = L(x^0, y^0).$$

Démonstration. Le théorème de Karush-Kuhn-Tucker nous assure qu'il existe $y^0 \in \mathbb{R}^m, y^0 \geq 0$, tel que le couple (x^0, y^0) satisfait les conditions :

$$\begin{aligned} \nabla F(x^0) + \nabla g(x^0)y^0 &= 0, \\ (y^0)^T g(x^0) &= 0, \\ g(x^0) &\leq 0, \\ y^0 &\geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$(x^0, y^0) \in V = \{(\kappa, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / \nabla F(\kappa) + \nabla g(\kappa)y = 0, y \geq 0\}.$$

En utilisant le théorème précédent et l'égalité $(y^0)^T g(x^0) = 0$, on obtient

$$L(\kappa, y) \leq F(x^0) = F(x^0) + (y^0)^T g(x^0) = L(x^0, y^0), \forall (\kappa, y) \in V.$$

Ceci prouve que le couple (x^0, y^0) réalise un maximum pour le problème dual (PCD). De plus, on a $F(x^0) = L(x^0, y^0)$.

■

CHAPITRE 2

Méthodes de points intérieurs pour la programmation quadratique convexe

2.1 Introduction

Les méthodes de points intérieurs jouent un rôle de plus en plus important dans l'optimisation des systèmes de grande taille. Après leur succès en programmation linéaire, elles ont été généralisées pour le cas quadratique. Ces dernières exploitent la structure particulière de ces problèmes, généralement rencontrés en tant que sous-problèmes dans la résolution de ceux de programmation non linéaire. Elles sont connues pour leur bonne complexité, qui est polynômiale.

Ce chapitre présente une étude théorique des méthodes des points intérieurs pour la programmation quadratique convexe.

2.2 Conditions de KKT pour PQ standard

La programmation quadratique est la minimisation d'une fonction objectif quadratique sous des contraintes linéaires. L'importance de la programmation quadratique provient du fait que plusieurs problèmes réels et académiques sont quadratiques. Un programme quadratique est écrit sous la forme standard suivante :

$$\min q(x) = \frac{1}{2}x^T D x + c^T x, \quad (2.1)$$

$$sc \quad Ax = b, \quad (2.2)$$

$$x \geq 0, \quad (2.3)$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $D^T = D$.

Pour les méthodes présentées dans ce chapitre, il n'est pas nécessaire d'avoir des composantes positives du vecteur b , comme c'était le cas pour la méthode du simplexe. Ainsi, tous les problèmes de la programmation quadratique peuvent être écrits sous la forme standard ci-dessus avec peu d'effort. En outre, il est facile de voir que le problème (2.1)-(2.3) est convexe si la matrice D est au moins semi-définie positive.

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sont des conditions nécessaires d'optimalité, valables dans le cadre général de l'optimisation non-linéaire sous contraintes avec une fonction objectif différentiable. Elles s'appliquent donc bien sûr à la programmation quadratique, et sont même dans ce cas suffisantes grâce à la propriété de convexité.

Théorème 2.1. *Si le problème quadratique (2.1)-(2.3) est convexe, alors x est un optimum global de (2.1)-(2.3) ssi $\exists v \in \mathbb{R}^m$ et $u \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :*

$$\begin{aligned} Ax - b &= 0, \\ -Dx + A^T v + u &= c, \\ u_i x_i &= 0, \forall i = 1, \dots, n, \\ x_i &\geq 0, u_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Il est commode d'exprimer matricielement les conditions de complémentarité ($u_i x_i = 0$). Pour ce faire, nous définissons les matrices diagonales d'ordre n :

$$U = \text{diag}[u_i] \text{ et } X = \text{diag}[x_i].$$

En outre, par la définition d'un vecteur e de dimension n , dont toutes ses composantes sont égales à 1, i.e,

$$e^T = (1, 1, \dots, 1),$$

les conditions de complémentarité sont alors écrites comme suit :

$$XUe = 0. \tag{2.4}$$

2.3 Le Problème dual

En utilisant la notion de la dualité lagrangienne, il est possible de définir explicitement le problème dual de (2.1)-(2.3). La fonction duale est définie comme suit :

$$M(u, v) = \min_x \left[c^T x + \frac{1}{2} x^T D x - u^T x + v^T (-Ax + b) \right]; \quad u_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Le minimum peut être facilement calculé en différenciant par rapport à x , puis en résolvant le système d'équations obtenu :

$$c + Dx - u - A^T v = 0.$$

En prenant la transposition, puis en multipliant par x à droite, on aura

$$c^T x + x^T D x - u^T x - v^T A x = 0 \Leftrightarrow c^T x - u^T x - v^T A x = -x^T D x.$$

En substituant dans la fonction duale, on obtient

$$M(u, v) = -\frac{1}{2}x^T D x + v^T b.$$

Le problème dual de (2.1)-(2.3) peut donc être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{1}{2}x^T D x + v^T b, \\ \text{sc} \quad & D x + c - u - A^T v = 0, \\ & u_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Pour le cas particulier où la matrice D est définie positive, et donc l'inverse de D existe, les variables primales x peuvent être éliminées dans le problème dual à l'aide de la relation :

$$x = D^{-1} [-c + u + A^T v].$$

Dans ce cas, Le problème dual peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{1}{2} [-c + u + A^T v]^T D^{-1} [-c + u + A^T v] + v^T b, \\ \text{sc} \quad & u_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Numériquement, il peut être utile de résoudre le problème dual, car il ne contient que les contraintes de non négativité.

2.4 Méthode de mise en échelle affine primale pour PQ Convexe

Le principe de l'algorithme de la mise en échelle affine primale (Primal Affine Scaling) pour la programmation quadratique convexe consiste à utiliser à partir d'un point intérieur la direction projetée de plus forte pente (anti-gradient) dans un espace transformé. La direction de plus forte pente est, parmi toutes les directions réalisables, celle qui donne le plus grand taux de décroissance. Cette propriété est utile si le point courant se trouve éloigné des frontières définies par les bornes de non négativité. Dans le cas contraire, le pas effectué dans cette direction sera petit donnant une décroissance nettement petite de la fonction objectif. Ainsi, l'approche consiste à calculer une direction de descente qui n'approche pas trop rapidement de la frontière. Cette direction de plus forte pente est calculée à partir d'un problème mis à l'échelle qui centre la solution courante et qui est ensuite transformée dans l'espace original. L'algorithme comprend les trois étapes suivantes : calcul de la direction de descente, calcul du pas et calcul de la transformation affine.

2.4.1 Trouver un point intérieur initial

Par définition, un point intérieur doit avoir toutes ses composantes supérieures à zéro, et il doit en plus satisfaire la contrainte (2.2). Étant donné que la fonction objectif n'entre

pas dans ces considérations, la première phase de cette méthode consiste à déterminer un point intérieur initial. Ainsi, on choisit un point initial quelconque $x^{(0)} > 0$ (il ne vérifie pas forcément la contrainte (2.2)), disons $x^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T$; alors, à partir de la contrainte (2.2), on a

$$z^{(0)} = b - A x^{(0)}.$$

Si $z^{(0)} = 0$, alors $x^{(0)}$ est un point intérieur initial. Sinon, on introduit des variables artificielles et on résout le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & a, \\ \text{sc} \quad & A x + a z = b, \\ & x > 0, \\ & a \geq 0. \end{aligned}$$

La solution optimale de ce problème est obtenue lorsque $a = 0$, et à ce stade, $Ax = b$, ce qui rend x un point intérieur pour le problème d'origine (2.1)-(2.3).

2.4.2 Détermination d'une direction de descente

La direction de descente admissible est la projection de l'anti-gradient de la fonction objectif sur le sous-espace orthogonal à celui engendré par les colonnes de la matrice A , noté $\text{null}(A)$. Après l'introduction de deux transformations et toute une série de manipulations (voir l'annexe), la direction de descente est définie comme suit :

$$d^{(k)} = - [I - H^{(k)} A^T (A H^{(k)} A^T)^{-1} A] H^{(k)} (D x^{(k)} + c), \quad (2.6)$$

où $x^{(k)}$ est le point intérieur à la $k^{\text{ème}}$ itération, et $H^k = [D + (T^{(k)})^{-2}]^{-1}$, avec

$$(T^{(k)})^{-2} = \begin{pmatrix} 1/(x_1^{(k)})^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/(x_2^{(k)})^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/(x_n^{(k)})^2 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$w^{(k)} = (A H^{(k)} A^T)^{-1} A H^{(k)} (D x^{(k)} + c). \quad (2.7)$$

Alors (2.6) devient :

$$d^{(k)} = - H^{(k)} (D x^{(k)} + c) + H^{(k)} A^T w^{(k)} = -H^{(k)} (D x^{(k)} + c - A^T w^{(k)}).$$

En posant

$$s^{(k)} = D x^{(k)} + c - A^T w^{(k)}, \quad (2.8)$$

La direction de descente (2.6) aura la forme finale suivante :

$$d^{(k)} = - H^{(k)} s^{(k)}. \quad (2.9)$$

Il faut noter qu'au lieu d'inverser la matrice $(A H^{(k)} A^T)$, comme indiqué dans sa définition (2.7), $w^{(k)}$ peut être calculé d'une manière plus efficace par la résolution du système d'équations linéaires suivant :

$$(A H^{(k)} A^T)w^{(k)} = A H^{(k)}(D x^{(k)} + c).$$

Si on veut interpréter ça dans l'espace initial, cela revient à chercher la direction du pas non plus autour d'un cercle mais d'une ellipse centrée à l'itéré courant. Cette direction résout correctement nos deux problèmes : en effet, celle-ci évolue bien en fonction de la position de l'itéré courant, et permet de progresser plus rapidement vers la solution lorsque l'itéré est peu central, comme le montre la Figure 2.1.

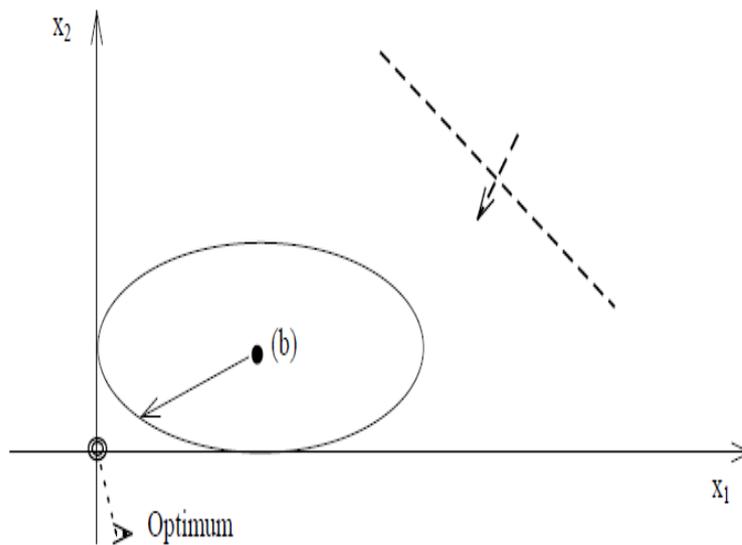


FIG. 2.1: Progression avec mise à l'échelle affine

2.4.3 Calcul du pas

Une fois la direction de descente est connue, l'étape suivante consiste à déterminer le pas maximal que l'on peut faire le long de cette direction. Seule la contrainte (2.2) est utilisée au cours du calcul de la direction. La condition de positivité des variables (2.3) est prise en compte lors du calcul du pas. Ainsi, nous avons besoin de trouver le plus grand α telle que ces conditions soient vérifiées en termes des variables originales et modifiées, avec :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha d^{(k)} > 0.$$

Du fait que l'optimum d'un programme quadratique peut être atteint à l'intérieur du domaine réalisable, comme elle peut être atteint en un point frontière, nous devons alors examiner ces deux possibilités.

Si la solution optimale est un point frontière, le pas est déterminé par les composantes négatives du vecteur direction $d^{(k)}$, alors on pose :

$$\alpha_1 = \beta \min \left[-x_i^{(k)}/d_i^{(k)}, d_i^{(k)} < 0, \forall i = 1, \dots, n \right]. \quad (2.10)$$

Le paramètre β (avec $0 < \beta < 1$) est introduit pour s'assurer que le prochain point (itéré) est à l'intérieur du domaine réalisable. En pratique, $\beta = 0,995$ est choisi pour aller le plus loin possible sans qu'une variable ne devienne négative.

Si la solution optimale est un point intérieur, le pas est déterminé en minimisant la fonction objectif (2.1) le long de cette direction. Cela revient à résoudre le problème sans contrainte à une dimension suivant :

$$\min_{\alpha} q(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) = \min_{\alpha} c^T(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) + \frac{1}{2}(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})^T D(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}).$$

La condition nécessaire pour le minimum est que la dérivée première par rapport à α doit être égal à zéro. Ainsi, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\partial q(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})}{\partial \alpha} = c^T d^{(k)} + \frac{1}{2}(d^{(k)})^T D(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) + \frac{1}{2}(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})^T D(d^{(k)}) = 0,$$

ou bien

$$(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})^T D(d^{(k)}) = -c^T d^{(k)} \Leftrightarrow (x^{(k)})^T D d^{(k)} + \alpha (d^{(k)})^T D d^{(k)} = -c^T d^{(k)},$$

Alors

$$\alpha = \alpha_2 = - \frac{c^T d^{(k)} + (x^{(k)})^T D d^{(k)}}{(d^{(k)})^T D d^{(k)}} = - \frac{(d^{(k)})^T (D x^{(k)} + c)}{(d^{(k)})^T D d^{(k)}}. \quad (2.11)$$

De plus, on a

$$\frac{\partial^2 q(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})}{\partial^2 \alpha} = (d^{(k)})^T D d^{(k)} \geq 0, \quad \text{car } D \geq 0.$$

Alors, α_2 est bel et bien un point minimum.

En pratique, puisque on ne sait pas si la solution optimale est sur la frontière ou à l'intérieur du domaine réalisable, alors on détermine les valeurs α_1 et α_2 , puis on sélectionne la plus petite des deux. Le prochain point intérieur est donnée alors par :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha d^{(k)}, \quad \alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

2.4.4 Critère de convergence (d'arrêt)

À partir de ce nouveau point, on recommencera la même série d'étapes jusqu'à avoir l'optimum. Théoriquement, l'optimum est atteint lorsque $d^{(k)} = 0$. Ainsi, on peut définir la première condition du critère de convergence comme suit :

$$\sigma_1 = \|d^{(k)}\| \leq \varepsilon_1,$$

où ε_1 est un nombre positif.

En outre, en raison de la présence d'erreurs d'arrondi, la mise en œuvre numérique de l'algorithme vérifie également les conditions suivantes provenant des conditions d'optimalité de KKT :

Admissibilité du Primal

La contrainte (2.2) doit être satisfaite à l'optimum, c'est-à-dire, $Ax^{(k)} - b = 0$. Pour l'utiliser dans le critère de convergence, cette condition est exprimée comme suit :

$$\sigma_2 = \frac{\|Ax^{(k)} - b\|}{\|b\| + 1} \leq \varepsilon_2,$$

où ε_2 est un petit nombre positif. Le 1 est ajouté au dénominateur pour améliorer les performances numériques.

Admissibilité du dual

La contrainte principale du problème dual doit être satisfaite à l'optimum, c'est-à-dire,

$$u^{(k)} = Dx^{(k)} + c - A^T v^{(k)}.$$

À l'optimum, ces variables duales doivent être positives, donc nous avons la troisième condition du critère de convergence suivante :

$$\sigma_3 = \frac{\|u^{(k)}\|}{\|Dx^{(k)} + c\| + 1} \leq \varepsilon_3,$$

où ε_3 est un nombre positif.

Conditions de complémentarité

Les variables primales et duales doivent satisfaire la condition de complémentarité suivante :

$$(x^{(k)})^T u^{(k)} = 0.$$

Ainsi, on peut définir une autre condition du critère de convergence comme suit :

$$\sigma_4 = |(x^{(k)})^T u^{(k)}| \leq \varepsilon_4,$$

où ε_4 est un nombre positif.

2.4.5 Algorithme de la méthode

Algorithme 1 Mise en échelle affine

Phase I

La phase I, consiste à trouver un point intérieur.

Phase II

Données : Un point intérieur initial $x^{(0)}$, le paramètre $\beta = 0.995$, les tolérances $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, $k = 1$.

- ❶ Déterminer la matrice de transformation d'échelle

$$(T^{(k)})^{-2} = \begin{pmatrix} 1/(x_1^{(k)})^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/(x_2^{(k)})^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(x_n^{(k)})^2 \end{pmatrix},$$

et

$$H^{(k)} = [D + (T^{(k)})^{-2}]^{-1}.$$

- ❷ Calculer $w^{(k)}$ en résolvant le système d'équations linéaires :

$$(AH^{(k)}A^T)w^T = AH^{(k)}(Dx^{(k)} + c).$$

- ❸ Calculer

$$s^{(k)} = Dx^{(k)} + c - A^T w^{(k)}.$$

- ❹ Calculer la direction

$$d^{(k)} = -H^{(k)} s^{(k)}.$$

- ❺ Vérification de la convergence. Si

$$\|d^{(k)}\| \leq \varepsilon_1, \quad \frac{\|Ax^{(k)} - b\|}{\|b\| + 1} \leq \varepsilon_2, \quad \frac{\|s^{(k)}\|}{\|Dx^{(k)} + c\| + 1} \leq \varepsilon_3, \quad |(x^{(k)})^T s^{(k)}| \leq \varepsilon_4,$$

nous avons la solution optimale. Sinon, aller à ❻.

- ❻ Calculer le pas $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, avec :

$$\alpha_1 = \beta \min \left[-x_i^{(k)} / d_i^{(k)}, \quad d_i^{(k)} < 0, \forall i = 1, \dots, n \right],$$

$$\alpha_2 = -\frac{(d^{(k)})^T (Dx^{(k)} + c)}{(d^{(k)})^T D d^{(k)}}.$$

- ❼ Calculer la nouvelle solution

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha d^{(k)}.$$

Retourner à ❶.

2.5 Méthodes de points intérieurs primales-duales

Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité d'un programme quadratique convexe standard sont résumées par le système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} Ax - b &= 0 && \text{Admissibilité du primal} \\ -Dx + A^T v + u &= c && \text{Admissibilité du dual} \\ XUe &= 0 && \text{Condition de complémentarité} \\ x_i \geq 0, u_i &\geq 0 && \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

En écrivant sous forme matricielle les conditions **KKT**, nous savons en effet que l'optimum global vérifie :

$$F(x, u, v) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ -Dx + u + A^T v - c \\ XUe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (x, u) \geq 0. \quad (2.12)$$

Le principe d'une méthode de points intérieurs primale-duale est d'essayer de résoudre directement ce système d'équations. Ce système est carré et possède $2n + m$ variables et $2n + m$ équations. Les deux premières séries d'équations sont linéaires, tandis que la dernière est non linéaire.

On peut observer que si nous n'avions à faire qu'à des équations linéaires et que la contrainte $(x, u) \geq 0$ n'existait pas, la résolution se ferait alors très simplement par la méthode d'élimination de Gauss. La tâche est donc rendue compliquée par l'existence des contraintes de positivité et des équations non linéaires.

En regardant le système d'un point de vue fonctionnel, on s'aperçoit qu'il est équivalent à résoudre l'équation $F(x, u, v) = 0$, où F est une fonction de \mathbb{R}^{2n+m} dans \mathbb{R}^{2n+m} . La résolution d'équation de ce type est un domaine bien connu des méthodes numériques. En effet, sans l'existence des contraintes de positivité, cette équation se résout très bien par la méthode de Newton.

Actuellement, les différentes méthodes proposées ne sont en fait que des modifications de la méthode de Newton, tenant compte des contraintes de positivité. Nous rappelons la méthode de Newton avant d'aborder les méthodes de points intérieurs.

2.5.1 Méthode de Newton

La méthode de Newton est dédiée à la résolution des systèmes d'équations non-linéaires du type $F(x) = 0$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction réelle continûment dérivable. Nous savons que le développement de Taylor d'ordre 1 autour d'un point de son domaine de définition $x^{(k)}$ donne l'approximation suivante :

$$F(x^{(k)} + \delta) \approx G(\delta) = F(x^{(k)}) + \nabla F(x^{(k)})\delta,$$

$\nabla F(x^{(k)})$ étant la matrice Jacobienne de F au point $x^{(k)}$.

Partant de $x^{(k)}$, cette approximation nous donne une indication sur la nouvelle direction à prendre pour s'approcher de la solution recherchée. Cette direction est matérialisée par la valeur δ qu'il convient de choisir judicieusement.

Comme nous cherchons la solution de $F(x) = 0$, il est naturel de choisir δ de manière à ce que :

$$G(\delta) = 0 \Leftrightarrow \delta = - [\nabla F(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}). \quad (2.13)$$

Par conséquent, on définit donc un nouveau point $x^{(k+1)}$ vérifiant $F(x^{(k+1)}) \approx 0$ par :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [\nabla F(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}).$$

Algorithme 2 Algorithme de la méthode de Newton

❶ INITIALISATION :

Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ un estimé initial de la solution, et soit $\varepsilon > 0$ un seuil de convergence. Poser $k = 0$.

❷ CALCUL DU GRADIENT :

Si $\|\nabla F(x^{(k)})\| \leq \varepsilon$, alors on termine avec une solution $x^{(k)}$ qui est ε -stationnaire. Sinon aller à ❸.

❸ APPROXIMATION :

Posons $x^{(k+1)} = x^{(k)} + p^{(k)}$ où $p^{(k)}$ est la solution du système (2.13); et donc $x^{(k+1)} = x^{(k)} - [\nabla F(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)})$. Poser $k \leftarrow k + 1$, et retourner à ❷.

Revenons maintenant à la description des méthodes de points intérieurs primales-duales. Étant donné que le problème primal et son dual sont extrêmement liés, on les considérera simultanément la plupart du temps, ce qui nous amène à redéfinir nos concepts de point intérieur et strictement intérieur, pour englober les deux problèmes. Soient les ensembles :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{(x, u, v) : Ax = b, A^T v - Dx + u = c, x \geq 0, u \geq 0\}, \\ \mathcal{X}^0 &= \{(x, u, v) : Ax = b, A^T v - Dx + u = c, x > 0, u > 0\}. \end{aligned}$$

Les méthodes de points intérieurs primales-duales génèrent des itérés $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) \in \mathcal{X}^0$, d'où l'origine de l'appellation de " *points intérieurs* ". Soit un point initial intérieur $(x^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)}) \in \mathcal{X}^0$, On essaye de générer un nouveau point $(x^{(1)}, u^{(1)}, v^{(1)}) \in \mathcal{X}^0$ qui réduit l'erreur de satisfaction de la condition de complémentarité.

Ignorons pour le moment la contrainte de non négativité $(x, u) \geq 0$, et concentrons nous sur le système d'équations non linéaire $F(x, u, v) = 0$ dans (2.12). Ce système se résout facilement par la méthode de Newton.

Admettons qu'on a une estimation initiale $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) \in \mathcal{X}^0$. La méthode de Newton forme une approximation linéaire du système non linéaire et itère selon :

$$(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = (x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + (d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)}),$$

où $(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)})$ est la solution du système suivant :

$$J(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) \begin{bmatrix} d_x^{(k)} \\ d_u^{(k)} \\ d_v^{(k)} \end{bmatrix} = -F(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}), \quad (2.14)$$

$J(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ étant la matrice Jacobienne de la fonction F et $[d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)}]^T$ la direction de recherche. On a

$$J(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ -D & I & A^T \\ U^{(k)} & X^{(k)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

De plus, $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) \in \mathcal{X}^0$, alors on a

$$F(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{(k)}U^{(k)}e \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Donc, l'équation de Newton s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -D & I & A^T \\ U^{(k)} & X^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^{(k)} \\ d_u^{(k)} \\ d_v^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -X^{(k)}U^{(k)}e \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Un pas complet le long de cette direction n'est pas toujours permis, parce que la méthode de Newton n'est pas une méthode qui tient compte de contraintes; rien ne garantit que ce pas de Newton ne nous emmène pas en dehors de la zone admissible (à savoir la zone où $x \geq 0$ et $u \geq 0$). C'est d'ailleurs à cause de cela qu'il a fallu faire une recherche linéaire le long de cette direction pour déterminer le paramètre $\alpha^{(k)}$ indiquant la longueur du pas. Une fois la longueur du pas est déterminée, on calcule alors le nouveau itéré comme suit :

$$(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = (x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + \alpha^{(k)}(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)}).$$

Mais, malheureusement les modifications apportées à la méthode de Newton en introduisant le paramètre $\alpha^{(k)}$ sont insuffisantes en pratique. Cela est dû au fait que les pas suivants $(\alpha^{(k+1)}, \alpha^{(k+2)} \dots)$ sont très petits, car les itérés correspondants tendent vers le bord de la zone admissible, ce qui ralentit extrêmement la convergence de la méthode. La direction obtenue dans (2.17) est dite direction de Newton pure, et pour pallier à ce problème, on considère une modification de cette dernière dite direction de Newton centrée. Nous introduisons tout d'abord le concept du chemin central.

2.5.2 Chemin central

Le concept du chemin central joue un rôle très important dans l'étude théorique des méthodes de points intérieurs. On appelle chemin central C , une trajectoire de l'intérieur relatif \mathcal{X}^0 . Cette trajectoire est paramétrée par un scalaire τ , et chaque point $(x_\tau, u_\tau, v_\tau) \in C$ est solution du système suivant :

$$F(x_\tau, u_\tau, v_\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Alors le chemin central est défini comme suit :

$$C = \{(x_\tau, u_\tau, v_\tau) : \tau > 0\}. \quad (2.19)$$

Le troisième bloc d'équations dans (2.18) peut être écrit :

$$(x_\tau)_i (u_\tau)_i = \tau, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Sous l'hypothèse $\mathcal{X}^0 \neq \emptyset$, on peut montrer que ce système associe à chaque valeur strictement positive de τ un point unique $(x_\tau, u_\tau, v_\tau) \in \mathcal{X}^0$. Dans ces conditions, on peut définir une courbe C par $\{(x_\tau, u_\tau, v_\tau) | \tau > 0\}$. On appelle C le chemin central du couple de problèmes primal et dual. Il possède les propriétés suivantes :

- Ses équations de définition sont une approximation des conditions d'optimalité d'autant meilleure que τ est proche de 0.
- Le saut de dualité pour le point (x_τ, u_τ, v_τ) vaut $n\tau$. Il tend donc vers 0 lorsque τ tend vers 0.
- Les points de C sont centrés (c'est-à-dire éloignés des frontières des contraintes de non-négativité).
- Le point (x_τ, u_τ, v_τ) converge vers un point (x^*, u^*, v^*) lorsque τ tend vers 0. De plus, ce point est une solution optimale du couple de problèmes primal et dual.

On déduit de ces propriétés que les points de C fournissent un chemin le long duquel le saut de dualité décroît régulièrement au fur et à mesure que τ approche de 0, tendant vers une solution optimale tout en restant éloigné des frontières des contraintes de non-négativité (centré). C'est cette interprétation des équations qui va expliquer le rôle de τ dans les algorithmes de points intérieurs. La Figure 2.2 fournit un exemple de chemin central.

En conclusion, on peut voir le chemin central comme un guide vers la solution optimale, qui permet d'éviter les bords de la zone admissible (c'est-à-dire les contraintes de non-négativité) pour garantir une convergence plus rapide.

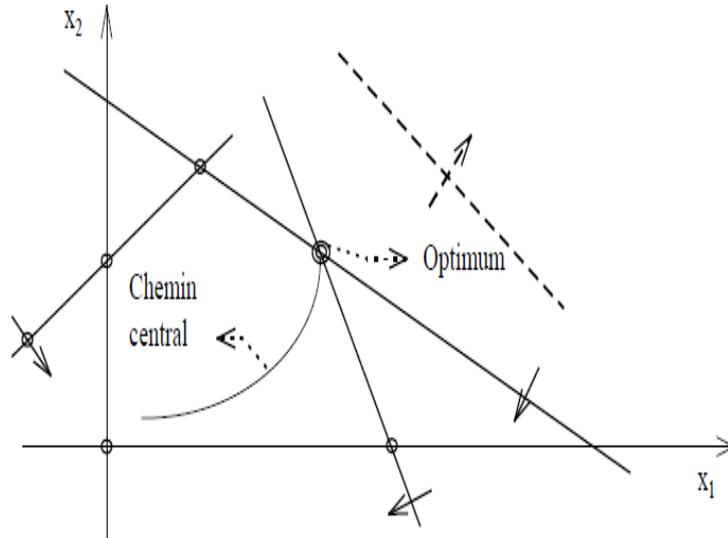


FIG. 2.2: Exemple de chemin central à deux dimensions

2.5.3 Direction de Newton centrée

La direction de Newton centrée est obtenue en appliquant la direction de Newton modifiée (avec le paramètre α) pour le système suivant :

$$F(x, u, v) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ -Dx + u + A^T v - c \\ XUe - \tau e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Alors l'équation de Newton modifiée pour la direction centrée est donnée par :

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -D & I & A^T \\ U^{(k)} & X^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x_c}^{(k)} \\ d_{u_c}^{(k)} \\ d_{v_c}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau e - X^{(k)}U^{(k)}e \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

l'indice c étant utilisé pour indiquer que la direction est centrée.

2.5.4 Méthodes de suivi de chemin "Path-following"

Les méthodes de suivi de chemin (path-following methods) sont articulées autour du chemin central décrit plus haut et se caractérisent par un choix du paramètre τ différent de zéro. Leur principe revient à définir un certain voisinage autour du chemin central, et à faire évoluer les itérés à l'intérieur de ce voisinage tout en progressant vers la solution, comme le montre la Figure 2.3.

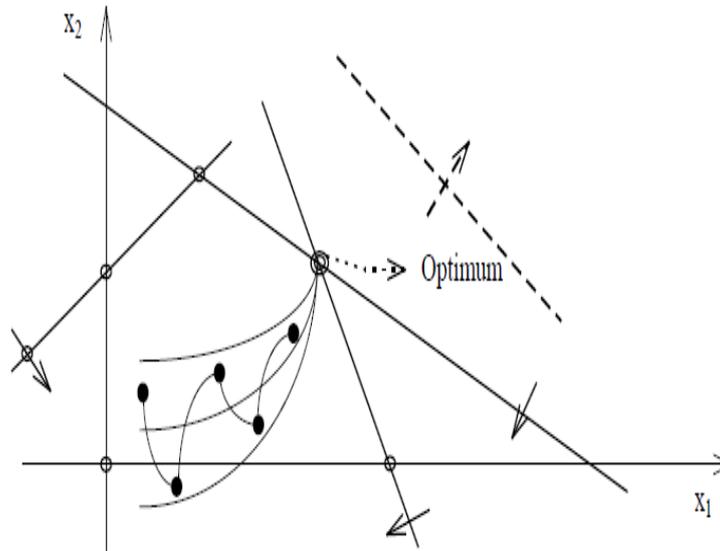


FIG. 2.3: Quelques itérés d'une méthode de suivi de chemin

On peut se demander comment ces algorithmes choisissent les valeurs de $\tau^{(k)}$, chaque choix de $\tau^{(k)}$ revient à choisir une cible appartenant au chemin central. Le principe général est de choisir cette cible en fonction de la position actuelle de l'itéré suivant par rapport au chemin central.

En général, l'itéré courant ne sera pas sur le chemin central, mais dans son voisinage. La caractéristique des points du chemin central, outre leur admissibilité, étant l'égalité des produits $x_i u_i$ (on a $x_i u_i = \tau$ pour le point repéré par τ), on définit la mesure de dualité suivante :

$$\mu = \mu(x, u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i u_i = \frac{x^T u}{n}. \quad (2.22)$$

Cette mesure, qui équivaut au produit moyen des $x_i u_i$, vaut donc τ pour le point du chemin central repéré par τ . Pour les points situés hors de ce chemin, elle fournit une valeur définissant une sorte de projection sur le chemin central (le point le plus proche). La dénomination "mesure de dualité" provient du fait que le saut de dualité de l'itéré (x, u, v) , mesurant sa proximité à l'optimum, est égal à $x^T u$.

Le principe des méthodes de suivi de chemin sera donc de calculer la mesure de dualité de l'itéré courant, soit $\mu^{(k)}$, et à prendre pour cible un $\tau^{(k)}$ inférieur (plus proche de l'optimum) en appliquant un coefficient de proportionnalité $\sigma^{(k)} \in [0, 1]$, selon la formule $\tau^{(k)} = \sigma^{(k)} \mu^{(k)}$. Le choix de $\sigma^{(k)}$ dépend de la méthode considérée.

La direction de Newton centrée peut être maintenant obtenue en résolvant le système

suivant :

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -D & I & A^T \\ U^{(k)} & X^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x_c}^{(k)} \\ d_{u_c}^{(k)} \\ d_{v_c}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma^{(k)}\mu^{(k)}e - X^{(k)}U^{(k)}e \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Algorithme 3 Algorithme générique de points intérieurs

❶ Choisir $(x^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)}) \in \mathcal{X}^0$.

Pour $k = 0, 1, \dots$ répéter

❷ Choisir $\sigma^{(k)} \in [0, 1]$, soit $\mu^{(k)} = \frac{(x^{(k)})^T u^{(k)}}{n}$; résoudre le système (2.23) avec $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ et $\tau^{(k)} = \sigma^{(k)}\mu^{(k)}$ pour obtenir $(d_{x_c}^{(k)}, d_{u_c}^{(k)}, d_{v_c}^{(k)})$.

❸ Choisir $\alpha^{(k)}$ tel que :

$$x^{(k)} + \alpha^{(k)}d_{x_c}^{(k)} > 0 \quad \text{et} \quad u^{(k)} + \alpha^{(k)}d_{u_c}^{(k)} > 0.$$

❹ $(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = (x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + \alpha^{(k)}(d_{x_c}^{(k)}, d_{u_c}^{(k)}, d_{v_c}^{(k)})$, $k = k + 1$.

Il existe de nombreux types de méthodes de suivi de chemin, nous en détaillerons trois au cours de ce chapitre : les méthodes dites à pas court, les méthodes prédiction-correction (à pas alterné) et les méthodes à pas long. Il existe également plusieurs définitions possibles du voisinage du chemin central. Les deux versions les plus intéressantes sont celles du voisinage $\mathcal{N}_2(\theta)$ et du voisinage $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$ (avec θ et γ compris entre 0 et 1).

$$\mathcal{N}_2(\theta) = \left\{ (x, u, v) \in \mathcal{X}^0 : \|XUe - \mu e\| \leq \theta\mu, \mu = \frac{x^T u}{n} \right\}, \quad (2.24)$$

$$\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma) = \left\{ (x, u, v) \in \mathcal{X}^0 : x_i u_i > \gamma\mu, \forall i = 1, \dots, n; \mu = \frac{x^T u}{n} \right\}, \quad (2.25)$$

Les valeurs typiques pour les paramètres θ et γ sont 0,5 et 10^{-3} respectivement.

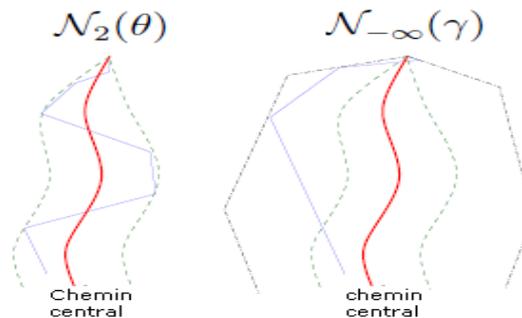


FIG. 2.4: Voisinage du chemin central

Le voisinage $\mathcal{N}_2(\theta)$ exprime que la distance euclidienne entre $(x_1u_1, x_2u_2, \dots, x_nu_n)$ et (μ, μ, \dots, μ) ne peut excéder un certain pourcentage de μ . Quant à $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$, il exprime simplement que chaque produit x_iu_i ne peut être inférieur à un certain pourcentage de leur valeur moyenne μ .

Le voisinage $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$ est assez lâche : en prenant un γ suffisamment petit, on peut arriver à y inclure n'importe quel point de \mathcal{X}^0 . Par contre, $\mathcal{N}_2(\theta)$ est plus restrictif puisque certains points de \mathcal{X}^0 n'y sont inclus pour aucune valeur de θ .

En gardant tous leurs itérés dans l'un de ces voisinages, les méthodes de suivi de chemin veulent garder leurs itérés centraux, et tentent de réduire tous les produits x_iu_i à zéro à la même vitesse, c'est-à-dire plus ou moins en même temps.

Méthode de suivi de chemin à pas court

Le principe de cette méthode consiste à choisir un voisinage $\mathcal{N}_2(\theta)$ pour une valeur de θ donnée, et de fixer les paramètres $\sigma^{(k)}$ et $\alpha^{(k)}$ à deux valeurs constantes : $\sigma^{(k)} = \sigma; \alpha^{(k)} = 1, \forall k$. Un choix judicieux du couple (θ, σ) permet de démontrer que les itérés successifs seront tous contenus dans le voisinage choisi et que la mesure de dualité $\mu^{(k)}$ converge vers zéro. En pratique

$$\theta = 0.4 \quad \text{et} \quad \sigma = 1 - \frac{0.4}{\sqrt{n}}.$$

Voici l'algorithme de la méthode du suivi de chemin à pas court :

Algorithme 4 Méthode de suivi de chemin à pas court

Soit $0 < \theta < 1$, $0 < \sigma < 1$ et un itéré initial $(x^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)}) \in \mathcal{N}_2(\theta)$.

Pour $k = 0, 1, \dots$ faire

- ❶ Calculer $\mu^{(k)}$.
 - ❷ Résoudre le système (2.23) avec $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ et $\tau^{(k)} = \sigma\mu^{(k)}$ pour obtenir $(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)})$.
 - ❸ $(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = (x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + (d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)})$.
-

On qualifie cette méthode de suivi de chemin à pas court à cause du choix de σ relativement conservateur. En effet, les valeurs choisies sont souvent très proches de 1 à cause du caractère restrictif du voisinage \mathcal{N}_2 . Cela implique que le $\tau^{(k)}$ visé sera très proche du $\mu^{(k)}$ courant : on demande à la méthode de Newton d'atteindre un point du chemin central relativement proche de l'itéré courant, ce qui entraîne le calcul d'un pas relativement court et une progression assez lente vers la solution (l'extrémité du chemin). On peut visualiser les itérés fournis par cette méthode à l'aide de la Figure 2.5, dans le cas où $n = 2$.

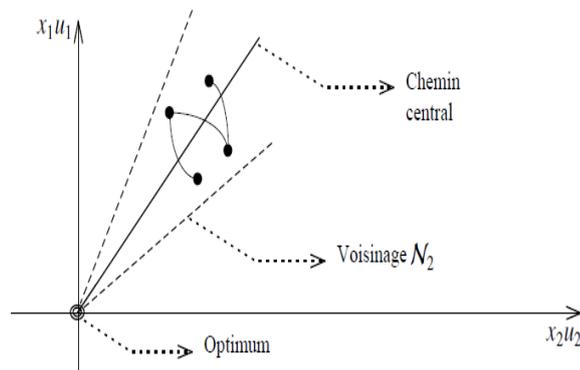


FIG. 2.5: Méthode de suivi de chemin à pas court en axes xu

Méthode de suivi de chemin à prédiction-correction

La méthode de suivi de chemin à pas court avait pour caractéristique un σ constant, compris entre 0 et 1. Ce choix σ assurait deux objectifs simultanés : rester central (en visant une cible sur le chemin central) et se rapprocher de l'optimum (en réduisant la mesure de dualité). La méthode à prédiction-correction va également chercher à atteindre ces deux objectifs, mais à l'aide de deux types d'itérations différentes.

Avant de décrire ces deux itérations, nous allons examiner les conséquences de deux choix particuliers pour le paramètre σ : $\sigma = 0$ et $\sigma = 1$.

- **Cas $\sigma = 0$:**

Dans ces conditions, on a $\tau^{(k)} = 0$ à chaque itération. On cherche ici uniquement à réduire la mesure de dualité μ pour atteindre l'optimum, sans se préoccuper de la centralité des itérés. L'inconvénient d'une méthode exclusivement basée sur ce choix de σ est que l'on arrive très vite aux bords de la zone admissible, ce qui réduit ensuite la taille des pas de Newton que l'on peut effectuer.

- **Cas $\sigma = 1$:**

Cette situation est à l'opposé de la précédente : on vise ici un point du chemin central repéré par un $\tau^{(k)}$ égal à $\mu^{(k)}$, la mesure de dualité de l'itéré courant. Cela signifie donc que l'on ne cherche pas à progresser vers l'optimum (on vise un saut de dualité identique à celui que l'on a déjà), mais plutôt à se recentrer, c'est-à-dire à se rapprocher du chemin central (plus précisément, du point repéré par $\mu^{(k)}$). Une méthode basée exclusivement sur ce choix de σ n'a bien sûr aucune chance de converger vers un optimum.

Les deux types d'itérations que propose la méthode de suivi de chemin à prédiction-correction correspondent exactement aux deux choix de σ présentés plus haut. Cette méthode comporte une seconde caractéristique : elle se base sur deux voisinages emboîtés de type \mathcal{N}_2 : le voisinage extérieur \mathcal{N}_2^{ext} et le voisinage intérieur \mathcal{N}_2^{int} .

Le déroulement de l'algorithme est alors le suivant :

- Itérations de prédiction paires ($k = 0, 2, 4, 6, \dots$) : partant de l'itéré courant situé à l'intérieur de \mathcal{N}_2^{int} , on effectue un pas de type $\sigma = 0$. Ce pas va naturellement s'éloigner du chemin central. On choisira une valeur de $\alpha^{(k)}$ la plus grande possible de façon à rester dans le voisinage \mathcal{N}_2^{ext} .
- Itérations de correction impaires ($k = 1, 3, 5, \dots$) : partant de l'itéré courant situé à l'intérieur de \mathcal{N}_2^{ext} , on effectue un pas de recentrage ($\sigma = 1$) qui nous ramène à l'intérieur de \mathcal{N}_2^{int} . On peut dans ce cas toujours prendre $\alpha^{(k)} = 1$.

Ce déroulement est représenté sur la Figure 2.6.

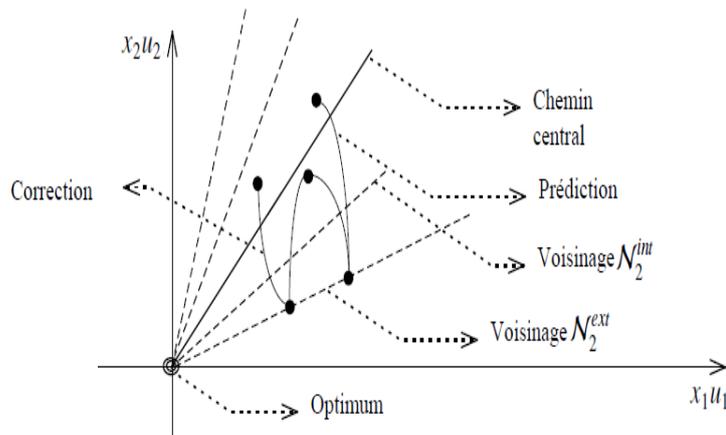


FIG. 2.6: Méthode de suivi de chemin à prédiction-correction en axes xu

Un choix judicieux des voisinages permet de garantir la validité des pas de correction, à savoir le retour à l'intérieur de \mathcal{N}_2^{int} . À titre d'exemple, la convergence a été prouvée pour les voisinages $\mathcal{N}_2^{ext}(0.5)$ et $\mathcal{N}_2^{int}(0, 25)$ [79].

Ce type de méthodes est une amélioration certaine par rapport aux méthodes à pas court ou de mise à l'échelle affine : en effet, le recentrage qui survient à l'itération de correction permet d'avoir des pas de Newton beaucoup plus longs lors de l'itération de prédiction suivante. Cependant, cet algorithme souffre encore du fait que les voisinages \mathcal{N}_2 sont assez restrictifs, en particulier au début de l'algorithme, lorsqu'on est encore assez éloigné de l'optimum. On constate ensuite une amélioration progressive au fur et à mesure de l'avancement de la résolution, les pas de prédiction devenant de plus en plus longs.

Algorithme 5 Méthode de suivi de chemin à prédiction-correction

Soit $0 < \theta^{int} < \theta^{ext} < 1$, $0 < \sigma < 1$ et un itéré initial $(x^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)}) \in \mathcal{N}_2(\theta^{int})$.

Pour $k = 0, 1, \dots$ faire

❶ Si k est pair

Résoudre le système (2.23) avec $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ et $\tau^{(k)} = 0$

pour obtenir $(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)})$,

Calculer $\alpha^{(k)}$ maximum tel que :

$$(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + \alpha^{(k)}(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)}) \in \mathcal{N}_2(\theta^{ext}),$$

$$(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = (x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + \alpha^{(k)}(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)}).$$

❷ Si k est impair

Calculer $\mu^{(k)}$.

Résoudre le système (2.23) avec $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ et $\tau^{(k)} = \mu^{(k)}$

pour obtenir $(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)})$.

$$(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = (x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + (d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)}).$$

Méthode de suivi de chemin à pas long

Le principe de cette méthode est encore une fois de prendre les itérés dans un voisinage du chemin central, défini cette fois-ci par $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$. Cependant, on va cette fois s'autoriser un choix moins conservateur du paramètre $\sigma^{(k)}$: on le prendra à l'intérieur de l'intervalle $[\sigma_{min}, \sigma_{max}]$. Le paramètre $\alpha^{(k)}$ sera quant à lui le plus grand possible tout en conservant l'itéré à l'intérieur du voisinage $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$ (ce qui entraîne donc que l'on prendra la plupart du temps un pas de Newton partiel, à l'inverse de la méthode à pas court).

Le comportement typique de ces méthodes est illustré sur la Figure 2.7

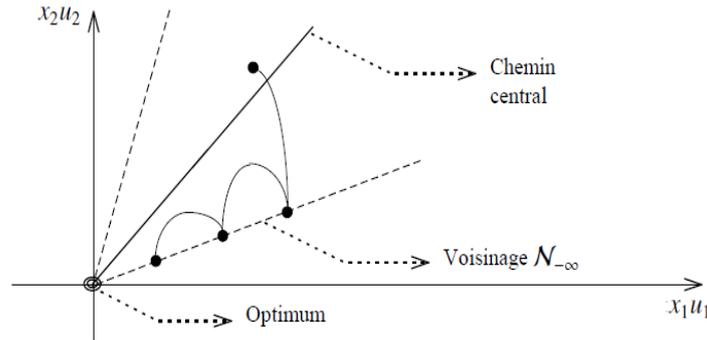


FIG. 2.7: Méthode de suivi de chemin à pas long en axes xu

Le nombre σ_{min} garantit un certain recentrage : le pas de Newton va donc commencer par s'éloigner de la frontière du voisinage. Cependant, au fur et à mesure que l'on avance dans cette direction, on commence à s'écarter à nouveau du chemin central. Cela est dû au fait que les équations de Newton sont basées sur une approximation linéaire d'équations

en réalité non-linéaires. Plus on s'avance dans la direction préconisée, plus l'approximation linéaire s'éloigne de la réalité et plus on s'éloigne à nouveau du point central visé.

Le nombre σ_{max} , quant à lui, garantit une certaine progression minimale vers la solution à chaque itération. En effet, on a déjà vu que des valeurs élevées de σ (proches de 1) entraînent de petits pas de Newton et une convergence assez lente.

Algorithme 6 Méthode de suivi de chemin à pas long

Soit $0 < \gamma < 1$, $0 < \sigma_{min} < \sigma_{max} < 1$ et un itéré initial $(x^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)}) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$.

Pour $k = 0, 1, \dots$ faire

- ❶ Calculer $\sigma^{(k)} \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$.
 - ❷ Résoudre le système (2.23) avec $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ et $\tau^{(k)} = \sigma^{(k)}\mu^{(k)}$ pour obtenir $(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)})$.
 - ❸ Calculer $\alpha^{(k)}$ maximum tel que $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + \alpha^{(k)}(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)}) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$.
 - ❹ $(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = (x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + \alpha^{(k)}(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)})$.
-

2.5.5 Méthode de réduction de potentiel

Les méthodes de réduction de potentiel (potential reduction methods) prennent des pas de Newton de la même forme que ceux des méthodes de suivi de chemin. Cependant, ces méthodes ne suivent pas explicitement le chemin central, et se justifient indépendamment de lui. Elles utilisent une fonction-potential logarithmique, que nous appellerons Φ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi \rightarrow -\infty &\Leftrightarrow (x, u, v) \in \Omega, \text{ où } \Omega \text{ est l'ensemble des solutions optimales,} \\ \Phi \rightarrow +\infty &\text{ si } \exists i/x_i u_i \rightarrow 0 \text{ mais } \mu \not\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ces conditions signifient que

- d'une part, la fonction-potential tend vers $-\infty$ si et seulement si l'itéré tend vers une solution optimale,
- d'autre part, la fonction-potential tend vers $+\infty$, lorsque l'un des produits $x_i u_i$ tend vers zéro sans que la mesure de dualité tende également vers cette valeur, c'est-à-dire lorsqu'on se rapproche des contraintes de non-négativité (un x_i ou un u_i tend vers 0) sans se rapprocher simultanément de l'optimalité (μ ne tend pas vers 0).

L'objectif de ces algorithmes sera donc de faire tendre Φ vers $-\infty$ (d'où leur dénomination), la première condition assurant la convergence vers une solution optimale, tandis que la seconde permet de s'éloigner des contraintes et rester central. Comme dans le cas des méthodes de suivi de chemin, on utilise la mesure de dualité μ , et il faut choisir un $\sigma^{(k)}$ et un $\alpha^{(k)}$ à chaque itération, le choix de ces paramètres dépendant de la méthode.

Soit la fonction-potentiel symétrique primale-duale de Tanabe, Todd et Ye [68, 71] suivante :

$$\Phi = \rho \ln x^T u - \sum_{i=1}^n \ln x_i u_i.$$

L'algorithme que nous allons choisir est celui de Kojima, Mizuno et Yoshise [47]. Étant donné un paramètre fixé $\rho > n$, on fixe $\sigma^{(k)}$ égal à n/ρ afin de calculer le pas de Newton par (2.23). La fonction-potentiel Φ est alors utilisée pour le choix du paramètre $\alpha^{(k)}$: on va prendre la valeur qui minimise Φ selon :

$$\alpha^{(k)} = \arg \min_{\alpha \in [0, \alpha_{max}^{(k)}]} \Phi_\rho(x^{(k)} + \alpha d_x^{(k)}, u^{(k)} + \alpha d_u^{(k)}).$$

Voici la description complète de l'algorithme

Algorithme 7 Méthode de réduction de potentiel

Soit $\rho > n$ et un itéré initial $(x^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)}) \in \mathcal{X}^0$.

Pour $k = 0, 1, \dots$ faire

- ❶ Calculer $\mu^{(k)}$.
 - ❷ Résoudre le système (2.23) avec $(x^k, u^{(k)}, v^{(k)})$ et $\tau^{(k)} = n\mu^{(k)}/\rho$ pour obtenir $(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)})$.
 - ❸ Calculer $\alpha_{max}^{(k)}$ et choisir $\alpha^{(k)}$ minimisant $\Phi_\rho(x_k + \alpha d_x^{(k)}, u_k + \alpha d_u^{(k)})$ sur $[0, \alpha_{max}^{(k)}]$.
 - ❹ $(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = (x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + \alpha^{(k)}(d_x^{(k)}, d_u^{(k)}, d_v^{(k)})$.
-

2.6 Méthodes de points intérieurs à départ non admissible

Le schéma général de la méthode de points intérieurs primale-duale que nous avons présenté plus haut nécessite la connaissance d'un point de départ strictement admissible (appartenant à \mathcal{X}^0). Les méthodes requérant ce type de point de départ sont qualifiées de méthodes à départ admissible (feasible methods). Cependant, il faut noter qu'il existe également des méthodes dites à départ non-admissible (infeasible methods), c'est-à-dire qui ne nécessitent pas la connaissance d'un premier itéré strictement admissible. Ces méthodes sont utiles dans deux cas :

- On ne connaît pas de point de départ. En fait, pour certains problèmes, la recherche d'un point admissible est presque aussi difficile que le calcul de l'optimum.
- Il n'existe pas de point strictement admissible. En effet, il existe des problèmes pour lesquels \mathcal{X}^0 est vide tout en admettant une solution optimale finie.

Il s'agit en fait de confier à la méthode de Newton le soin de réduire l'inadmissibilité. Soit l'équation de Newton (2.20) :

$$F(x, u, v) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ -Dx + u + A^T v - c \\ XUe - \tau e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alors, l'équation de Newton pour la direction centrée est donnée par :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ -D & I & A^T \\ U^{(k)} & X^{(k)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x^{(k)} \\ d_u^{(k)} \\ d_v^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Ax^{(k)} - b \\ -Dx^{(k)} + A^T v^{(k)} + u^{(k)} - c \\ X^{(k)} U^{(k)} e - \mu^{(k)} e \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Les matrices $U^{(k)}$ et $X^{(k)}$ sont définies en utilisant les valeurs de $u^{(k)}$ et $x^{(k)}$ connues au cours de la $k^{\text{ème}}$ itération. Pour faciliter les calculs, on peut réécrire ce système plus explicitement comme suit :

$$Ad_x^{(k)} = -Ax^{(k)} + b \equiv r_p, \quad (2.27)$$

$$-Dd_x^{(k)} + d_u^{(k)} + A^T d_v^{(k)} = Dx^{(k)} - A^T v^{(k)} - u^{(k)} + c \equiv r_d, \quad (2.28)$$

$$U^{(k)} d_x^{(k)} + X^{(k)} d_u^{(k)} = -X^{(k)} U^{(k)} e + \mu^{(k)} e \equiv r_c. \quad (2.29)$$

De (2.29), on a

$$X^{(k)} d_u^{(k)} = r_c - U^{(k)} d_x^{(k)}.$$

En multipliant l'équation (2.28) par $X^{(k)}$ à gauche et par substitution de $X^{(k)} d_u^{(k)}$, on aura :

$$-X^{(k)} D d_x^{(k)} + r_c - U^{(k)} d_x^{(k)} + X^{(k)} A^T d_v^{(k)} = X^{(k)} r_d,$$

$$- [X^{(k)} D + U^{(k)}] d_x^{(k)} + X^{(k)} A^T d_v^{(k)} = X^{(k)} r_d - r_c,$$

$$- d_x^{(k)} + [X^{(k)} D + U^{(k)}]^{-1} X^{(k)} A^T d_v^{(k)} = [X^{(k)} D + U^{(k)}]^{-1} (X^{(k)} r_d - r_c). \quad (2.30)$$

En multipliant maintenant (2.30) par A à gauche, et de l'aide de l'équation (2.27), on obtient le système d'équations suivant qu'il faut résoudre pour avoir $d_v^{(k)}$.

$$A [X^{(k)} D + U^{(k)}]^{-1} X^{(k)} A^T d_v^{(k)} = r_p + A [X^{(k)} D + U^{(k)}]^{-1} (X^{(k)} r_d - r_c).$$

Une fois que la valeur de $d_v^{(k)}$ est connue, $d_x^{(k)}$ est calculé à partir de (2.30) comme suit :

$$\begin{aligned} d_x^{(k)} &= [X^{(k)} D + U^{(k)}]^{-1} X^{(k)} A^T d_v^{(k)} - [X^{(k)} D + U^{(k)}]^{-1} (X^{(k)} r_d - r_c) \\ &= [X^{(k)} D + U^{(k)}]^{-1} (X^{(k)} A^T d_v^{(k)} - X^{(k)} r_d + r_c). \end{aligned}$$

Finalement, $d_u^{(k)}$ est calculé à partir de (2.29) comme suit :

$$d_u^{(k)} = X^{-1} (r_c - U d_x^{(k)}).$$

2.6.1 Calcul du pas

Jusqu'à présent on n'a pas pris en compte la condition de positivité $x_i \geq 0$ et $u_i \geq 0$. Supposons qu'on a un point initial vérifiant cette condition. En introduisant la notion du pas le long de cette direction.

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha_p d_x^{(k)}, \\ u^{(k+1)} &= u^{(k)} + \alpha_d d_u^{(k)}, \\ v^{(k+1)} &= v^{(k)} + \alpha_d d_v^{(k)}. \end{aligned}$$

Le pas maximal est celui qui fera l'une des variables x_i ou u_i égale à zéro :

$$x_i^{(k)} + \alpha_p d_{x_i}^{(k)} \geq 0, \quad u_i^{(k)} + \alpha_d d_{u_i}^{(k)} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Les variables avec des changements positifs restent bien évidemment positives quel que soit le pas. Donc seulement les variables qui ont un changement négatif qui posent problème. Afin de maintenir strictement l'admissibilité, le pas doit être légèrement plus petit que le pas maximum. Le pas choisi est donné par :

$$\alpha_p = \beta \min [1, -x_i/d_{x_i}^{(k)}, d_{x_i}^{(k)} < 0] \quad \text{et} \quad \alpha_d = \beta \min [1, -u_i/d_{u_i}, d_{u_i} < 0].$$

Le paramètre $0 \leq \beta < 1$ avec une valeur pratique de $\beta = 0.999$. Les variables sont ensuite mises à jour comme suit :

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_p d_x, \\ u^{k+1} &= u^k + \alpha_d d_u, \\ v^{k+1} &= v^k + \alpha_d d_v. \end{aligned}$$

2.6.2 Critère de convergence

Admissibilité du primal

La contrainte (2.2) doit être satisfaite à l'optimum, c'est-à-dire, $Ax^{(k)} - b = 0$. Pour l'utiliser comme critère de convergence, cette condition est exprimée comme suit :

$$\sigma_p = \frac{\|Ax^{(k)} - b\|}{\|b\| + 1} \leq \varepsilon_1,$$

où ε_1 est un nombre positif. Le 1 est ajouté au dénominateur pour éviter la division par petites quantités.

Admissibilité du dual

On a également la condition

$$-Dx^{(k)} + A^T v^{(k)} + u^{(k)} = c.$$

Cela donne une autre condition du critère de convergence :

$$\sigma_d = \frac{\|r_d\|}{\|Dx^{(k)} + c\| + 1} \leq \varepsilon_2,$$

où ε_2 est un nombre positif assez petit.

Condition de complémentarité

La valeur du paramètre μ détermine la façon avec laquelle la condition de complémentarité est vérifiée. Les expériences numériques suggèrent de définir la valeur moyenne de μ comme suit :

$$\mu^{(k)} = \frac{(x^{(k)})^T u^{(k)}}{n}.$$

Ce paramètre devrait être nul à l'optimum. Ainsi, on a la troisième condition du critère de convergence :

$$\mu^{(k)} \leq \varepsilon_3,$$

où ε_3 est un nombre positif.

2.6.3 Algorithme de la méthode

Algorithme 8 Méthode de points intérieurs à départ non-admissible

Données :

La matrice A , le vecteur b , le vecteur c , le paramètre β , les tolérances de convergence $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Initialisation :

$k = 0$, un itéré $(x^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)})$ arbitraire avec valeurs initiales (≥ 0), par exemple $x^{(0)} = u^{(0)} = e$ (vecteur de toutes les entrées 1) et $v^{(0)} = 0$.

Le prochain point $x^{(k+1)}$ est calculé comme suit :

❶ $\mu^{(k)} = \left[\frac{(x^{(k)})^T u}{n} \right] / (k + 1)$. Vérification de la convergence. Si

$$\left[\frac{\|Ax^{(k)} - b\|}{\|b\| + 1} \leq \varepsilon_1, \frac{\|r_d\|}{\|Dx^{(k)} + c\| + 1} \leq \varepsilon_2, \mu^{(k)} \leq \varepsilon_3 \right],$$

Terminer, nous avons l'optimum. Sinon, aller ❷.

❷ À partir de

$$\begin{aligned} r_p &= -Ax^{(k)} + b, \\ r_d &= Dx^{(k)} - A^T v^{(k)} - u^{(k)} + c, \\ r_c &= -XUe + \mu^{(k)}e. \end{aligned}$$

❸ Résoudre le système d'équations linéaires pour d_v :

$$A[XD + U]^{-1} XA^T d_v = r_p + A[XD + U]^{-1} (Xr_d - r_c).$$

- ④ Calculer les accroissements :

$$\begin{aligned}d_x &= [XD + U]^{-1} (XA^T d_v - Xr_d + r_c), \\d_u &= X^{-1}(r_c - Ud_x).\end{aligned}$$

- ⑤ Calculer les pas :

$$\alpha_p = \beta \min [1, -x_i/d_{x_i}, d_{x_i} < 0] \text{ et } \alpha_d = \beta \min [1, -u_i/d_{u_i}, d_{u_i} < 0].$$

- ⑥ Calculer le point suivant :

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha_p d_x, \\u^{(k+1)} &= u^{(k)} + \alpha_d d_u, \\v^{(k+1)} &= v^{(k)} + \alpha_d d_v.\end{aligned}$$

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synthèse des travaux sur les méthodes de points intérieurs en programmation quadratique convexe. Les algorithmes de points intérieurs ont la propriété remarquable de converger en quelques dizaines d'itérations sur la plupart des exemples réels.

CHAPITRE 3

Méthode directe de support pour la programmation quadratique convexe à variables mixtes

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous exposons une méthode directe de support pour la programmation quadratique convexe à variables mixtes [65], basée sur le principe des méthodes adaptées développées par les professeurs R. Gabassov et F.M. Kirillova [30, 34]. Ces méthodes sont intermédiaires entre les méthodes d'activation des contraintes et celles de points intérieurs.

3.2 Position du problème et définitions

Le problème de la programmation quadratique convexe à variables mixtes se présente sous la forme canonique suivante :

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x^T D_1 x + c^T x + \frac{1}{2}y^T D_2 y + p^T y \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

$$Ax + Hy = b, \quad (3.2)$$

$$d^- \leq x \leq d^+, \quad (3.3)$$

$$y \geq 0, \quad (3.4)$$

où c et x sont des n_x -vecteurs, p et y sont des n_y -vecteurs, A et H des matrices d'ordre respectivement $m \times n_x$ et $m \times n_y$, avec $\text{rang}(A|H) = m < n_x + n_y$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d^- \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $d^+ \in \mathbb{R}^{n_x}$; les matrices D_1 et D_2 sont symétriques et semi-définies positives. Soient les ensembles d'indices suivants :

3.2. POSITION DU PROBLÈME ET DÉFINITIONS

$I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J_x = \{1, 2, \dots, n_x\}$, $J_y = \{n_x+1, n_x+2, \dots, n_x+n_y\}$, J_{x_B} et J_{y_B} sont les indices des variables basiques bornées et simples respectivement, J_{x_N} et J_{y_N} sont les indices des variables non basiques bornées et simples respectivement, $J = J_x \cup J_y$, $J_x = J_{x_B} \cup J_{x_N}$, $J_y = J_{y_B} \cup J_{y_N}$ avec $J_{x_B} \cap J_{x_N} = \emptyset$, $J_{y_B} \cap J_{y_N} = \emptyset$, et $|J_{x_B}| + |J_{y_B}| = m$.

Posons $J_B = J_{x_B} \cup J_{y_B}$, $J_N = J \setminus J_B = J_{x_N} \cup J_{y_N}$, et notons par A_H la matrice $(A|H)$ d'ordre $m \times (n_x + n_y)$. On peut alors écrire et fractionner les vecteurs de la manière suivante :

- $d^- = d^-(J_x) = (d_j^-, j \in J_x)$;

- $d^+ = d^+(J_x) = (d_j^+, j \in J_x)$;

- $c = c(J_x) = (c_j, j \in J_x)$,

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ -- \\ c_N \end{pmatrix}, \quad c_B = c(J_{x_B}) = (c_j, j \in J_{x_B}), \quad c_N = c(J_{x_N}) = (c_j, j \in J_{x_N});$$

- $x = x(J_x) = (x_j, j \in J_x)$,

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ -- \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x_B = x(J_{x_B}) = (x_j, j \in J_{x_B}), \quad x_N = x(J_{x_N}) = (x_j, j \in J_{x_N});$$

- $p = p(J_y) = (p_j, j \in J_y)$,

$$p = \begin{pmatrix} p_B \\ -- \\ p_N \end{pmatrix}, \quad p_B = p(J_{y_B}) = (p_j, j \in J_{y_B}), \quad p_N = p(J_{y_N}) = (p_j, j \in J_{y_N});$$

- $y = y(J_y) = (y_j, j \in J_y)$,

$$y = \begin{pmatrix} y_B \\ -- \\ y_N \end{pmatrix}, \quad y_B = y(J_{y_B}) = (y_j, j \in J_{y_B}), \quad y_N = y(J_{y_N}) = (y_j, j \in J_{y_N});$$

- $A = A(I, J_x) = (a_{ij}, i \in I, j \in J_x) = (a_j, j \in J_x)$,

$$A = (A_B|A_N), \quad A_B = A(I, J_{x_B}), \quad A_N = A(I, J_{x_N});$$

- $H = H(I, J_y) = (h_{ij}, i \in I, j \in J_y) = (h_j, j \in J_y)$,

$$H = (H_B|H_N), \quad H_B = H(I, J_{y_B}), \quad H_N = H(I, J_{y_N});$$

- $A_H = A_H(I, J) = (a_{Hij}, i \in I, j \in J_x \cup J_y) = (a_{Hj}, j \in J_x \cup J_y)$,

$$A_H = (A_{H_B}|A_{H_N}), \quad A_{H_B} = A_H(I, J_{x_B} \cup J_{y_B}) = (A_B|H_B), \\ A_{H_N} = A_H(I, J_{x_N} \cup J_{y_N}) = (A_N|H_N).$$

Définition 3.2.1. "solution réalisable"

Un vecteur (x, y) vérifiant les contraintes (3.2)-(3.4) est appelé plan ou solution réalisable du problème (3.1)-(3.4).

Définition 3.2.2. "solution optimale"

Un plan (x^0, y^0) est dit optimal si :

$$F(x^0, y^0) = \frac{1}{2}x^{0T} D_1 x^0 + c^T x^0 + \frac{1}{2}y^{0T} D_2 y^0 + p^T y^0 = \min\left(\frac{1}{2}x^T D_1 x + c^T x + \frac{1}{2}y^T D_2 y + p^T y\right),$$

où (x, y) est pris parmi tous les plans du problème (3.1)-(3.4).

Définition 3.2.3. "solution suboptimale"

Un plan (x^ϵ, y^ϵ) est appelé ϵ -optimal ou suboptimal si

$$F(x^\epsilon, y^\epsilon) - F(x^0, y^0) \leq \epsilon,$$

où ϵ est un nombre positif ou nul, donné à l'avance et (x^0, y^0) est une solution optimale du problème (3.1)-(3.4).

Définition 3.2.4. "support des contraintes"

L'ensemble $J_B = (J_{x_B}, J_{y_B}) \subset J, |J_B| = m$ est appelé support des contraintes si :

$$\det A_{H_B} = \det(A(I, J_{x_B}), H(I, J_{y_B})) = \det(A_B, H_B) \neq 0.$$

Définition 3.2.5. "plan de support"

Le couple $\{(x, y); (J_{x_B}, J_{y_B})\}$, formé d'une solution réalisable (x, y) et d'un support (J_{x_B}, J_{y_B}) , est appelé plan de support.

Définition 3.2.6. "plan de support non dégénéré"

Le plan de support est dit non dégénéré, si

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \quad \forall j \in J_{x_B} \text{ et } y_j > 0, \quad \forall j \in J_{y_B}.$$

3.3 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{(x, y); (J_{x_B}, J_{y_B})\}$ un plan de support du problème (3.1)-(3.4). On note par :

$$D = \begin{pmatrix} D_1(J_x, J_x) & 0 \\ 0 & D_2(J_y, J_y) \end{pmatrix} : \text{la matrice d'ordre } (n_x + n_y) \times (n_x + n_y),$$

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \text{le vecteur de dimension } (n_x + n_y),$$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix} : \text{le vecteur de dimension } (n_x + n_y),$$

La fonction objectif (3.1) peut alors s'écrire :

$$F(z) = F(x, y) = \frac{1}{2}x^T D_1 x + c^T x + \frac{1}{2}y^T D_2 y + p^T y = \frac{1}{2}z^T D z + \bar{c}^T z.$$

3.3. FORMULE D'ACCROISSEMENT DE LA FONCTION OBJECTIF

Considérons un autre plan quelconque $\bar{z} = z + \Delta z = (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \Delta x, y + \Delta y)$. L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 F(\bar{z}) - F(z) &= \frac{1}{2}\bar{z}^T D\bar{z} + \bar{c}^T \bar{z} - \frac{1}{2}z^T Dz - \bar{c}^T z \\
 &= \frac{1}{2}(z + \Delta z)^T D(z + \Delta z) + \bar{c}^T (z + \Delta z) - \frac{1}{2}z^T Dz - \bar{c}^T z \\
 &= (\Delta z)^T (Dz + \bar{c}) + \frac{1}{2}(\Delta z)^T D\Delta z, \\
 F(\bar{z}) - F(z) &= (g(z))^T \Delta z + \frac{1}{2}(\Delta z)^T D\Delta z, \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

où $g(z) = Dz + \bar{c}$ est le gradient de la fonction (3.1), avec

$$g(z) = Dz + \bar{c} = \begin{pmatrix} D_1x + c \\ D_2y + p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_B \\ - \\ g_N \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{cases} Ax + Hy = b, \\ A\bar{x} + H\bar{y} = b. \end{cases} \Leftrightarrow A_H \bar{z} = A_H z = b.$$

D'où

$$A_H(\Delta z + z) = A_H \Delta z + A_H z = b \Leftrightarrow A_H \Delta z = 0.$$

En posant : $\Delta z = \begin{pmatrix} \Delta z_B \\ - \\ \Delta z_N \end{pmatrix}$, $\Delta z_B = \Delta z(J_B)$, $\Delta z_N = \Delta z(J_N)$, l'égalité $A_H \Delta z = 0$ peut être alors écrite $A_{H_B} \Delta z_B + A_{H_N} \Delta z_N = 0$, d'où

$$\Delta z_B = -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \Delta z_N. \tag{3.6}$$

Grâce à cette dernière égalité, l'accroissement de la fonction objectif (3.5) devient :

$$\begin{aligned}
 F(\bar{z}) - F(z) &= g_B^T \Delta z_B + g_N^T \Delta z_N + \frac{1}{2}(\Delta z_B, \Delta z_N)^T D(\Delta z_B, \Delta z_N) \\
 &= g_B^T (-A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \Delta z_N) + g_N^T \Delta z_N + \\
 &\quad \frac{1}{2}(-A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \Delta z_N, \Delta z_N)^T D(-A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \Delta z_N, \Delta z_N) \\
 &= (-g_B^T A_{H_B}^{-1} A_{H_N} + g_N^T) \Delta z_N + \frac{1}{2}(\Delta z_N)^T \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix} \Delta z_N,
 \end{aligned}$$

où $I_N = I(J_N, J_N)$ est une matrice identité d'ordre $(n_x + n_y - m)$.

Posons

$$Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix}, \quad M = M(J_N, J_N) = Z^T D Z, \tag{3.7}$$

3.4. CRITÈRE D'OPTIMALITÉ

et définissons le vecteur des potentiels u ainsi que le vecteur des estimations E comme suit :

$$u^T = g_B^T A_{H_B}^{-1}, \quad E^T = g^T - u^T A_H = (E_B^T, E_N^T),$$

avec

$$E_B^T = 0, \quad E_N^T = g_N^T - u^T A_{H_N}.$$

Finalement, l'accroissement de la fonction objectif (3.5) aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(\bar{z}) - F(z) &= E_N^T \Delta z_N + \frac{1}{2} (\Delta z_N)^T Z^T D Z (\Delta z_N) \\ &= E_N^T \Delta z_N + \frac{1}{2} (\Delta z_N)^T M \Delta z_N. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Comme

$$\Delta z_N = \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}, \quad E_N = \begin{pmatrix} E_{x_N} \\ E_{y_N} \end{pmatrix},$$

l'accroissement de la fonction objectif peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(\bar{z}) - F(z) &= F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) \\ &= E_{x_N}^T \Delta x_N + E_{y_N}^T \Delta y_N + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Remarque 3.3.1. Ayant les matrices $D_1 \geq 0$ et $D_2 \geq 0$, alors la matrice $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$, et $M = Z^T D Z$ sont aussi semi-définies positives.

3.4 Critère d'optimalité

Théorème 3.1. [65] ”*Critère d'optimalité*”

Soit $\{z, J_B\} = \{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$ un plan de support des contraintes du problème (3.1)-(3.4). Alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_{x_j} \geq 0, & \text{si } x_j = d_j^- \\ E_{x_j} \leq 0, & \text{si } x_j = d_j^+ \\ E_{x_j} = 0, & \text{si } d_j^- < x_j < d_j^+, \quad j \in J_{x_N}; \\ E_{y_j} \geq 0, & \text{si } y_j = 0 \\ E_{y_j} = 0, & \text{si } y_j > 0, \quad j \in J_{y_N}, \end{cases} \quad (3.10)$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan $z = (x, y)$.

Ces mêmes relations sont aussi nécessaires, si le plan de support des contraintes est non dégénéré.

Démonstration

Condition suffisante : Soit $\{z, J_B\} = \{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$ un plan de support des contraintes du problème (3.1)-(3.4) vérifiant les relations (3.10). Pour tout plan $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ du problème (3.1)-(3.4), la formule d'accroissement (3.9) nous permet d'écrire :

$$F(\bar{z}) - F(z) = F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) \geq E_{x_N}^T \Delta x_N + E_{y_N}^T \Delta y_N,$$

car la matrice M est semi-définie positive. D'où

$$F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) \geq \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} > 0} E_{x_j}(\bar{x}_j - x_j) + \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} < 0} E_{x_j}(\bar{x}_j - x_j) + \sum_{j \in J_{y_N}, E_{y_j} > 0} E_{y_j}(\bar{y}_j - y_j).$$

Comme $d_j^- \leq \bar{x}_j \leq d_j^+$, alors $\bar{x}_j - d_j^- \geq 0$ et $\bar{x}_j - d_j^+ \leq 0$; de plus $\bar{y}_j \geq 0$, et en vertu des relations (3.10), on aura

$$F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) \geq \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} > 0} E_{x_j}(\bar{x}_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} < 0} E_{x_j}(\bar{x}_j - d_j^+) + \sum_{j \in J_{y_N}, E_{y_j} > 0} E_{y_j}(\bar{y}_j - 0) \geq 0,$$

où $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ est une solution réalisable arbitraire du problème (3.1)-(3.4).

Par conséquent, le vecteur $z = (x, y)$ est une solution optimale du problème (3.1)-(3.4).

Condition Nécessaire : Soit $\{z, J_B\} = \{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$ un plan de support optimal non dégénéré du problème (3.1)-(3.4), et supposons que les relations (3.10) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire, qu'il existe au moins un indice $j_0 \in J_N$, tel que :

$$\begin{aligned} E_{x_{j_0}} > 0, & \quad \text{pour} \quad x_{j_0} > d_{j_0}^-, j_0 \in J_{x_N}, \\ & \quad \text{ou bien} \\ E_{x_{j_0}} < 0, & \quad \text{pour} \quad x_{j_0} < d_{j_0}^+, j_0 \in J_{x_N}, \\ & \quad \text{ou bien} \\ E_{y_{j_0}} < 0, & \quad \text{pour} \quad y_{j_0} = 0, j_0 \in J_{y_N}, \\ & \quad \text{ou bien} \\ E_{y_{j_0}} \neq 0, & \quad \text{pour} \quad y_{j_0} > 0, j_0 \in J_{y_N}. \end{aligned}$$

On construit un autre plan $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \theta l_x, y + \theta l_y)$, où θ est un nombre réel positif, et $l = l(J) = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(J_x) \\ l(J_y) \end{pmatrix}$ est un vecteur de direction que l'on construit comme suit :

- Si $j_0 \in J_{x_N}$, le vecteur l est donné par :

$$\begin{cases} l_{x_{j_0}} = -\text{sign} E_{x_{j_0}}, \\ l_{x_j} = 0, j \neq j_0, j \in J_{x_N}, \\ l_{y_j} = 0, j \in J_{y_N}. \end{cases}$$

D'autre part, on doit avoir

$$A_H \bar{z} = A_H z + \theta A_H l = b \Leftrightarrow A_{H_B} l_B + A_{H_N} l_N = 0.$$

D'où

$$l_B = \begin{pmatrix} l_{x_B} \\ l_{y_B} \end{pmatrix} = -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} l_N = A_{H_B}^{-1} a_{j_0} \text{sign} E_{x_{j_0}}.$$

- Si $j_0 \in J_{y_N}$, le vecteur l est donné par :

$$\begin{cases} l_{y_{j_0}} = -\text{sign} E_{y_{j_0}}, \\ l_{y_j} = 0, j \neq j_0, j \in J_{y_N}, \\ l_{x_j} = 0, j \in J_{x_N}. \end{cases}$$

D'autre part, on doit avoir

$$A_H \bar{z} = A_H z + \theta A_H l = b \Leftrightarrow A_{H_B} l_B + A_{H_N} l_N = 0.$$

D'où

$$l_B = \begin{pmatrix} l_{x_B} \\ l_{y_B} \end{pmatrix} = -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} l_N = A_{H_B}^{-1} h_{j_0} \text{sign} E_{y_{j_0}}.$$

En vertu de la procédure de construction de la direction d'amélioration l , le vecteur $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ satisfait la contrainte principale (3.2), et pour qu'il soit un plan du problème (3.1)-(3.4), il doit en plus vérifier les inégalités (3.3) et (3.4) :

$$d^- \leq \bar{x} \leq d^+ \Leftrightarrow d^- \leq x + \theta l_x \leq d^+ \Leftrightarrow d^- - x \leq \theta l_x \leq d^+ - x,$$

$$\bar{y} \geq 0 \Leftrightarrow y + \theta l_y \geq 0 \Leftrightarrow \theta l_y \geq -y.$$

Soit, en écrivant composante par composante :

$$\begin{aligned} d_j^- - x_j \leq \theta l_{x_j} \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{x_B}, \\ d_j^- - x_j \leq \theta l_{x_j} \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{x_N}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

et

$$\begin{aligned} \theta l_{y_j} \geq -y_j, j \in J_{y_B}, \\ \theta l_{y_j} \geq -y_j, j \in J_{y_N}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Deux cas peuvent se présenter :

- Si $j_0 \in J_{x_N}$, nous posons $\theta_x = \min(\theta_{x_{j_1}}, \theta_{x_{j_0}})$ où

$$\theta_{j_1} = \min(\theta_j, j \in J_{x_B}), \text{ tel que } \theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{x_j} = 0, \end{cases}$$

et

$$\theta_{x_{j_0}} = \begin{cases} d_{j_0}^+ - x_{j_0}, & \text{si } E_{x_{j_0}} < 0, \\ x_{j_0} - d_{j_0}^-, & \text{si } E_{x_{j_0}} > 0. \end{cases}$$

3.4. CRITÈRE D'OPTIMALITÉ

Le nombre θ_y va être calculé comme suit :

$$\theta_y = \min(\theta_{y_j}, j \in J_{y_B}), \text{ tel que } \theta_{y_j} = \begin{cases} \frac{-y_j}{l_{y_j}}, & \text{si } l_{y_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{y_j} \geq 0. \end{cases}$$

Nous posons alors

$$\theta^0 = \min(\theta_x, \theta_y).$$

En vertu de la non-dégénérescence du plan de support $\{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$, le pas θ^0 ainsi construit est strictement positif, et le vecteur $\bar{z} = z + \theta l$ est une solution réalisable du problème (3.1)-(3.4) pour tout θ tel que $0 \leq \theta \leq \theta^0$.

La formule d'accroissement de la fonction objectif (3.9) nous donne alors :

$$\begin{aligned} F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) &= E_{x_N}^T \Delta x_N + E_{y_N}^T \Delta y_N + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix} \\ &= \theta E_{x_N}^T l_{x_N} + \underbrace{\theta E_{y_N}^T l_{y_N}}_{\parallel} + \frac{1}{2} \theta^2 \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \\ &= -\theta E_{x_{j_0}} \text{sign} E_{x_{j_0}} + \frac{1}{2} \theta^2 \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \\ &= \theta \left(-|E_{x_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \right) \\ &= \theta \left(-|E_{x_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta l_N^T M l_N \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour $\theta > 0$ assez petit, on aura $-|E_{x_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta l_N^T M l_N < 0$. D'où $F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) < 0$, ce qui contredit l'optimalité de (x, y) .

- Si $j_0 \in J_{y_N}$, nous posons $\theta_x = \min(\theta_{x_j}, j \in J_{x_B})$, où

$$\theta_{x_j} = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{x_j} = 0. \end{cases}$$

Le nombre θ_y va être calculé comme suit :

$$\theta_y = \min(\theta_{y_{j_1}}, \theta_{y_{j_0}}),$$

avec

$$\theta_{y_{j_1}} = \min(\theta_{y_j}, j \in J_{y_B}), \text{ tel que } \theta_{y_j} = \begin{cases} -\frac{y_j}{l_{y_j}}, & \text{si } l_{y_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{y_j} \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\theta_{y_{j_0}} = \begin{cases} y_{j_0}, & \text{si } E_{y_{j_0}} > 0, \\ \infty, & \text{si } E_{y_{j_0}} < 0. \end{cases}$$

Nous définissons $\theta^0 = \min(\theta_x, \theta_y)$.

Pour tout θ tel que $0 \leq \theta \leq \theta^0$, le vecteur $\bar{z} = z + \theta l$ est une solution réalisable du problème (3.1)-(3.4). La formule d'accroissement de la fonction objectif (3.9) nous donne :

$$\begin{aligned}
 F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) &= E_{x_N}^T \Delta x_N + E_{y_N}^T \Delta y_N + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{\theta E_{x_N}^T l_{x_N}}_0 + \theta E_{y_N}^T l_{y_N} + \frac{1}{2} \theta^2 \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \\
 &= -\theta E_{y_{j_0}} \text{sign} E_{y_{j_0}} + \frac{1}{2} \theta^2 \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \\
 &= \theta \left(-|E_{y_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \right) \\
 &= \theta \left(-|E_{y_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta l_N^T M l_N \right). \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Pour $\theta > 0$ assez petit, nous aurons encore $-|E_{y_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta l_N^T M l_N < 0$, et donc $F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) < 0$, ce qui contredit l'optimalité de (x, y) .

Par conséquent, les relations (3.10) sont suffisantes, et aussi nécessaires pour l'optimalité du plan non dégénéré (x, y) . ■

3.5 Critère de suboptimalité

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale $F(x^0, y^0)$ et une autre valeur $F(x, y)$ d'un plan de support des contraintes quelconque $\{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$, remplaçons dans la formule d'accroissement (3.9) le vecteur \bar{z} par z^0 et en minorant cette expression, on aura donc :

$$\begin{aligned}
 F(z^0) - F(z) &= F(x^0, y^0) - F(x, y) \\
 &= E_{x_N}^T \Delta x_N + E_{y_N}^T \Delta y_N + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{j \in J_{x_N}} E_{x_j} (x_j^0 - x_j) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j} (y_j^0 - y_j) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix} \\
 &\geq \sum_{j \in J_{x_N}} E_{x_j} (x_j^0 - x_j) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j} (y_j^0 - y_j), \quad \text{car } M \geq 0.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} F(z) - F(z^0) &\leq \sum_{j \in J_{x_N}} E_{x_j}(x_j - x_j^0) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j}(y_j - y_j^0), \\ &\leq \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} > 0} E_{x_j}(x_j - x_j^0) + \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} < 0} E_{x_j}(x_j - x_j^0) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j}(y_j - y_j^0). \end{aligned}$$

Nous avons $d_j^- \leq x_j^0 \leq d_j^+, j \in J_{x_N}$, alors on aura :

$$E_{x_j}(x_j - x_j^0) \leq E_{x_j}(x_j - d_j^-), \text{ si } E_{x_j} > 0,$$

$$E_{x_j}(x_j - x_j^0) \leq E_{x_j}(x_j - d_j^+), \text{ si } E_{x_j} < 0.$$

De plus, en supposant que $E_{y_N} \geq 0$, nous aurons :

$$y_j^0 \geq 0, j \in J_y \Rightarrow y_j - y_j^0 \leq y_j - 0 \Rightarrow E_{y_j}(y_j - y_j^0) \leq E_{y_j}y_j, j \in J_y.$$

Par conséquent, on obtient la majoration suivante :

$$F(z) - F(z^0) \leq \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} > 0} E_{x_j}(x_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} < 0} E_{x_j}(x_j - d_j^+) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j}y_j. \quad (3.15)$$

Le nombre

$$\beta((x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})) = \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} > 0} E_{x_j}(x_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} < 0} E_{x_j}(x_j - d_j^+) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j}y_j, \quad (3.16)$$

est appelé estimation de suboptimalité.

Théorème 3.2. "Condition suffisante de suboptimalité"

Soit $\{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$ un plan de support des contraintes du problème (3.1)-(3.4), et ϵ un nombre positif ou nul arbitraire.

Si $E_{y_N} \geq 0$ et si $\beta((x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})) \leq \epsilon$, alors le plan (x, y) est ϵ -optimal.

Démonstration. En vertu de (3.15), nous avons

$$F(z) - F(z^0) = F(x, y) - F(x^0, y^0) \leq \beta((x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})).$$

Comme $\beta((x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})) \leq \epsilon$, alors on aura

$$F(x, y) - F(x^0, y^0) \leq \epsilon.$$

Le plan (x, y) est donc ϵ -optimal. Dans le cas particulier où $\epsilon = 0$, la relation réalisable (x, y) est par conséquent optimale. ■

3.6 Construction de l'algorithme

Avant de présenter la méthode de résolution, donnons quelques définitions essentielles.

Définition 3.6.1. "Support de la fonction objectif"

On appelle support de la fonction objectif du problème (3.1)-(3.4), l'ensemble des indices $J_S \subset J_N$, où $J_S = (J_{x_S}, J_{y_S})$ et $J_N = (J_{x_N}, J_{y_N})$ tel que :

$$\det M(J_S, J_S) \neq 0.$$

On posera $J_{x_{NN}} = J_{x_N} \setminus J_{x_S}$, $J_{y_{NN}} = J_{y_N} \setminus J_{y_S}$, $J_{x_{NN}} \cup J_{y_{NN}} = J_{NN}$.

Définition 3.6.2. "Support du problème"

L'ensemble des indices $J_P = \{J_B, J_S\}$ est appelé support du problème (3.1)-(3.4), où $J_B = J_{x_B} \cup J_{y_B}$ est le support des contraintes et $J_S = J_{x_S} \cup J_{y_S}$ est le support de la fonction objectif.

Définition 3.6.3. "Plan de support"

On appelle plan de support du problème (3.1)-(3.4), la paire $\{(x, y), J_P\}$ formée du plan (x, y) et du support J_P ; il est dit accordé si $E(J_S) = 0$.

Définition 3.6.4. "direction admissible - direction d'amélioration"

La direction $l = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$ où $l_x = l(J_x)$ et $l_y = l(J_y)$, est dit admissible si $Al_x + Hl_y = 0$.

Elle est dite d'amélioration si en outre $E_x^T l_x + E_y^T l_y < 0$.

Étant donné un nombre réel positif ou nul quelconque ϵ et un plan de support initial $\{(x, y), J_P\}$ accordé, le but de l'algorithme est alors de construire un plan ϵ -optimal (x^ϵ, y^ϵ) ou carrément un plan optimal (x^0, y^0) . L'itération de l'algorithme consiste à faire le passage de $\{(x, y), J_P\}$ vers $\{(\bar{x}, \bar{y}), \bar{J}_P\}$ tel que $F(\bar{x}, \bar{y}) \leq F(x, y)$. Pour cela, construisons le nouveau plan (\bar{x}, \bar{y}) de la manière suivante :

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) + \theta(l_x, l_y),$$

où $\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix} = l$ est la direction d'amélioration, et θ le pas le long de cette direction.

Dans cet algorithme, on choisira la métrique du simplexe. On ne fera donc varier qu'une seule composante parmi celles qui ne vérifient pas les relations (3.10). Pour que l'accroissement de la fonction objectif soit maximal, il faut prendre θ aussi grand que possible et choisir l'indice j_0 tel que :

$$|E_{j_0}| = \max(|E_{x_{j_0}}|, |E_{y_{j_0}}|),$$

avec

$$|E_{x_{j_0}}| = \max(|E_{x_j}|, j \in J_{x_{NNO}}), \quad |E_{y_{j_0}}| = \max(|E_{y_j}|, j \in J_{y_{NNO}}),$$

où $J_{x_{NNO}}$ et $J_{y_{NNO}}$ sont les sous ensembles des ensembles d'indices respectivement de J_{x_N} et J_{y_N} qui ne satisfont pas les relations (3.10).

3.6.1 Calcul de la direction l

Nous avons deux cas :

- Si $|E_{j_0}| = |E_{x_{j_0}}|$, on calcule l_{NN} de manière à assurer $E^T l < 0$, on posera alors

$$\begin{cases} l_{x_{j_0}} = -\text{sign}E_{x_{j_0}}, \\ l_{x_j} = 0, j \neq j_0, j \in J_{x_{NN}}, \\ l_{y_j} = 0, j \in J_{y_{NN}}. \end{cases}$$

Nous calculons la composante l_S d'une manière à assurer que

$$\bar{E}_j = E_j(x + \theta l) = 0, \quad j \in J_S.$$

En vertu de (3.7) Nous avons :

$$E_N^T = g_N^T - g_B^T A_{H_B}^{-1} A_{H_N} = (g_B^T, g_N^T) \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix} = (g(z))^T Z.$$

Comme l doit être admissible, alors

$$A_H l = A_{H_B} l_B + A_{H_N} l_N = 0 \Rightarrow l_B = -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} l_N.$$

Donc

$$l = \begin{pmatrix} l_B \\ l_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} l_N \\ l_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix} l_N = Z l_N.$$

On aura donc

$$\bar{E}_N^T = (g(z + \theta l))^T Z = (g(z))^T Z + \theta l^T D Z = (g(z))^T Z + \theta l_N^T Z^T D Z = E_N^T + \theta l_N^T M.$$

Finalement, nous avons

$$\bar{E}_N = E_N + \theta M l_N.$$

Comme $E(J_S) = 0$, alors l'équation $\bar{E}(J_S) = 0$ est équivalente à :

$$M(J_S, J_N) l_N = 0 \Rightarrow M(J_S, J_S) l(J_S) + M(J_S, J_{NN}) l(J_{NN}) = 0.$$

Donc

$$l(J_S) = -M_S^{-1} M(J_S, J_{NN}) l(J_{NN}).$$

Puis, nous calculons l_B tel que $A_H l = 0$:

$$\begin{aligned} l_B &= -A_{H_B}^{-1} (A_{H_S} l_S + A_{H_{NN}} l_{NN}) = -A_{H_B}^{-1} [A_H(I, J_S) l(J_S) + A_H(I, j_0) l_{j_0}] \\ &= -A_{H_B}^{-1} [A_H(I, J_S) l(J_S) - A(I, j_0) \text{sign} E_{x_{j_0}}]. \end{aligned}$$

En résumé, si $|E_{j_0}| = |E_{x_{j_0}}|$, nous poserons :

$$\begin{aligned} l_{x_{j_0}} &= -\text{sign} E_{x_{j_0}}, \\ l_{x_j} &= 0, j \neq j_0, j \in J_{x_{NN}}, \\ l_{y_j} &= 0, j \in J_{y_{NN}}, \\ l(J_S) &= M_S^{-1} M(J_S, j_0) \text{sign} E_{x_{j_0}}, \\ l_B &= -A_{H_B}^{-1} [A_H(I, J_S) l(J_S) - A(I, j_0) \text{sign} E_{x_{j_0}}]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

- Si $|E_{j_0}| = |E_{y_{j_0}}|$, on calcule l_{NN} de manière à assurer $E^T l < 0$, on posera alors

$$\begin{cases} l_{y_{j_0}} = -\text{sign}E_{y_{j_0}}, \\ l_{y_j} = 0, j \neq j_0, j \in J_{y_{NN}}, \\ l_{x_j} = 0, j \in J_{x_{NN}}. \end{cases}$$

Nous calculons la composante l_S d'une manière à assurer que

$$\bar{E}_j = E_j(x + \theta l) = 0, \quad j \in J_S.$$

En vertu de (3.7), nous avons :

$$E_N^T = g_N^T - g_B^T A_{H_B}^{-1} A_{H_N} = (g_B^T, g_N^T) \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix} = (g(z))^T Z.$$

Comme l doit être admissible, alors

$$A_H l = A_{H_B} l_B + A_{H_N} l_N = 0 \Rightarrow l_B = -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} l_N.$$

Donc

$$l = \begin{pmatrix} l_B \\ l_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} l_N \\ l_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix} l_N = Z l_N.$$

On aura donc

$$\bar{E}_N^T = (g(z + \theta l))^T Z = (g(z))^T Z + \theta l^T D Z = (g(z))^T Z + \theta l_N^T Z^T D Z = E_N^T + \theta l_N^T M.$$

Finalement, nous avons

$$\bar{E}_N = E_N + \theta M l_N.$$

Comme $E(J_S) = 0$, alors l'équation $\bar{E}(J_S) = 0$ est équivalente à :

$$M(J_S, J_N) l_N = 0 \Rightarrow M(J_S, J_S) l(J_S) + M(J_S, J_{NN}) l(J_{NN}) = 0.$$

Donc

$$l(J_S) = -M_S^{-1} M(J_S, J_{NN}) l(J_{NN}).$$

Puis nous calculons l_B tel que $A_H l = 0$:

$$\begin{aligned} l_B = -A_{H_B}^{-1} (A_{H_S} l_S + A_{H_{NN}} l_{NN}) &= -A_{H_B}^{-1} [A_H(I, J_S) l(J_S) + A_H(I, j_0) l_{j_0}] \\ &= -A_{H_B}^{-1} [A_H(I, J_S) l(J_S) - H(I, j_0) \text{sign} E_{y_{j_0}}]. \end{aligned}$$

En résumé, si $|E_{j_0}| = |E_{y_{j_0}}|$, nous poserons :

$$\begin{aligned} l_{y_{j_0}} &= -\text{sign} E_{y_{j_0}}, \\ l_{y_j} &= 0, j \neq j_0, j \in J_{y_{NN}}, \\ l_{x_j} &= 0, j \in J_{x_{NN}}, \\ l(J_S) &= M_S^{-1} M(J_S, j_0) \text{sign} E_{y_{j_0}}, \\ l_B &= -A_{H_B}^{-1} [A_H(I, J_S) l(J_S) - H(I, j_0) \text{sign} E_{y_{j_0}}]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.6.2 Calcul du pas θ^0

On construit alors un nouveau plan $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ sous la forme :

$$\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = z + \theta^0 l = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \theta^0 \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix},$$

où l est la direction d'amélioration définie précédemment (section) et le nombre θ^0 est le pas le long de cette direction, avec $\theta^0 = \min\{\theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$. Les nombres θ_{j_1} et θ_{j_s} se calculent de façon à ce que les contraintes directes sur le vecteur $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ soient vérifiées :

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_{x_j} \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{x_B}, \quad (3.19)$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_{x_j} \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{x_S}, \quad (3.20)$$

$$\theta l_{y_j} \geq -y_j, \quad j \in J_{y_B}, \quad (3.21)$$

$$\theta l_{y_j} \geq -y_j, \quad j \in J_{y_S}, \quad (3.22)$$

tandis que pour j_0 , deux cas peuvent se présenter :

– Si $j_0 \in J_{x_N}$, alors

$$d_{j_0}^- - x_{j_0} \leq \theta l_{x_{j_0}} \leq d_{j_0}^+ - x_{j_0} \Rightarrow d_{j_0}^- - x_{j_0} \leq -\theta \text{sign} E_{j_0} \leq d_{j_0}^+ - x_{j_0}. \quad (3.23)$$

– Si $j_0 \in J_{y_N}$, alors

$$\theta l_{y_{j_0}} \geq -y_{j_0} \Rightarrow \theta \text{sign} E_{j_0} \leq y_{j_0}. \quad (3.24)$$

En calculant les différentes valeurs maximales que peut prendre les pas θ dans ces relations, on obtient :

De (3.19), on a

$$\theta_{x_{j_1}} = \min\{\theta_{x_j}, j \in J_{x_B}\}, \quad \text{avec } \theta_{x_j} = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} > 0; \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} < 0; \\ \infty, & \text{si } l_{x_j} = 0. \end{cases}$$

De (3.20), on a

$$\theta_{x_{j_s}} = \min\{\theta_{x_j}, j \in J_{x_S}\}, \quad \text{avec } \theta_{x_j} = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} > 0; \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} < 0; \\ \infty, & \text{si } l_{x_j} = 0. \end{cases}$$

De (3.21), on a

$$\theta_{y_{j_1}} = \min\{\theta_{y_j}, j \in J_{y_B}\}, \quad \text{avec } \theta_{y_j} = \begin{cases} \frac{-y_j}{l_{y_j}}, & \text{si } l_{y_j} < 0; \\ \infty, & \text{si } l_{y_j} \geq 0. \end{cases}$$

De (3.22), on a

$$\theta_{y_{j_s}} = \min\{\theta_{y_j}, j \in J_{y_s}\}, \text{ avec } \theta_{y_j} = \begin{cases} \frac{-y_j}{l_{y_j}}, & \text{si } l_{y_j} < 0; \\ \infty, & \text{si } l_{y_j} \geq 0. \end{cases}$$

Nous devons prendre le pas θ^0 comme suit :

$$\theta^0 = \min\{\theta_x, \theta_y, \theta_F\}.$$

- Si $|E_{j_0}| = |E_{x_{j_0}}|$, alors de (3.23), on a

$$\theta_{x_{j_0}} = \begin{cases} d_j^- - x_{j_0}, & \text{si } E_{x_{j_0}} < 0; \\ x_{j_0} - d_{j_0}^-, & \text{si } E_{x_{j_0}} > 0. \end{cases}$$

On prendra donc

$$\begin{aligned} \theta_x &= \min\{\theta_{x_{j_0}}, \theta_{x_{j_1}}, \theta_{x_{j_s}}\}, \\ \theta_y &= \min\{\theta_{y_{j_1}}, \theta_{y_{j_s}}\}. \end{aligned}$$

Quand à θ_F , il se calcul de façon que le passage de (x, y) à (\bar{x}, \bar{y}) puisse assurer une diminution maximale de la fonction objectif (3.13) :

$$\varphi(\theta) = F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) = \theta \left(-|E_{x_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta l_N^T M l_N \right) = \theta \left(-|E_{x_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta \alpha \right),$$

où $\alpha = l_N^T M l_N$.

Nous devons alors avoir :

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow -|E_{x_{j_0}}| + \theta \alpha = 0.$$

Nous déduisons :

$$\theta_F = \begin{cases} \frac{|E_{x_{j_0}}|}{\alpha}, & \text{si } \alpha > 0; \\ \infty, & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

- Si $|E_{j_0}| = |E_{y_{j_0}}|$, alors de (3.24), on a

$$\theta_{y_{j_0}} = \begin{cases} y_{j_0}, & \text{si } E_{y_{j_0}} > 0; \\ \infty, & \text{si } E_{y_{j_0}} < 0. \end{cases}$$

On prendra donc

$$\begin{aligned} \theta_x &= \min\{\theta_{x_{j_1}}, \theta_{x_{j_s}}\}, \\ \theta_y &= \min\{\theta_{y_{j_0}}, \theta_{y_{j_1}}, \theta_{y_s}\}. \end{aligned}$$

Pour θ_F , il se calcule de façon que le passage de (x, y) à (\bar{x}, \bar{y}) puisse assurer une diminution maximale de la fonction objectif (3.14).

$$\varphi(\theta) = F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) = \theta \left(-|E_{y_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta l_N^T M l_N \right) = \theta \left(-|E_{y_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta \alpha \right),$$

où $\alpha = l_N^T M l_N$.

Nous devons alors avoir :

$$\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow -|E_{y_{j_0}}| + \theta \alpha = 0.$$

Nous déduisons :

$$\theta_F = \begin{cases} \frac{|E_{y_{j_0}}|}{\alpha}, & \text{si } \alpha > 0, \\ \infty, & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Le nouveau plan est $(\bar{x}, \bar{y}) = (x + \theta^0 l_x, y + \theta^0 l_y)$.

Si $\beta((\bar{x}, \bar{y}), (J_{x_B}, J_{y_B})) \leq \epsilon$, alors le plan (\bar{x}, \bar{y}) est ϵ -optimal et nous pouvons arrêter l'algorithme; sinon, on procédera au changement du support.

3.6.3 Changement de support

Si $\beta((\bar{x}, \bar{y}), (J_{x_B}, J_{y_B})) > \epsilon$, ou si $E_{y_N} \not\equiv 0$, nous allons changer le support J_P par un nouveau support \bar{J}_P de la manière suivante :

- Si $\theta^0 = \theta_{x_{j_0}} \vee \theta_{y_{j_0}}$, alors l'indice j_0 est optimal pour le couple $\{(\bar{x}, \bar{y}); J_P\}$, il est inutile de changer de support :

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $\theta^0 = \theta_{x_{j_1}}$, alors

- Si $j_0 \in J_{x_N}$, donc

$$\bar{J}_{x_B} = (J_{x_B} \setminus j_1) \cup j_0, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $j_0 \in J_{y_N}$, donc

$$\bar{J}_{x_B} = (J_{x_B} \setminus j_1), \bar{J}_{y_B} = J_{y_B} \cup j_0, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $\theta^0 = \theta_{y_{j_1}}$, alors

- Si $j_0 \in J_{x_N}$, donc

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B} \cup j_0, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B} \setminus j_1, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $j_0 \in J_{y_N}$, donc

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = (J_{y_B} \setminus j_1) \cup j_0, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $\theta^0 = \theta_{x_{j_s}}$, alors

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S} \setminus j_s, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $\theta^0 = \theta_{y_{j_s}}$, alors

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S} \setminus j_s,$$

- Si $\theta^0 = \theta_F$, alors

- Si $j_0 \in J_{x_N}$

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S} \cup j_0, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $j_0 \in J_{y_N}$

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S} \cup j_0,$$

Finalement, on pose :

$$\bar{J}_B = \{\bar{J}_{x_B}, \bar{J}_{y_B}\}, \bar{J}_S = \{\bar{J}_{x_S}, \bar{J}_{y_S}\}, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

Si $E_{y_N} \geq 0$ et $\beta((\bar{x}, \bar{y}), (\bar{J}_{x_B}, \bar{J}_{y_B})) \leq \epsilon$, alors le plan (\bar{x}, \bar{y}) est ϵ -optimal et nous pouvons arrêter l'algorithme ; sinon, on recommencera une nouvelle itération avec le nouveau plan de support $\{(\bar{x}, \bar{y}), \bar{J}_P\}$, où le support \bar{J}_P satisfait les conditions algébriques

$$\det \bar{A}_{H_B} = \det(I, \bar{J}_B) \neq 0, \det M(\bar{J}_S, \bar{J}_S) \neq 0 \text{ et } \bar{E}(\bar{J}_S) = 0.$$

3.7 Algorithme de la méthode

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithme 9 Méthode de support pour la programmation quadratique convexe à variables hybrides

Début

- ❶ Soit un nombre réel positif ou nul quelconque ϵ , et un plan de support initial $\{(x, y), J_P\}$ tel que $J_P = \{J_B, J_S\}$, avec $J_S = \emptyset$ pour plus de facilité ;
 - ❷ Calculer le vecteur des potentiels $E_N^T = g_N^T - u^T A_{H_N}$;
-

- ③ Test d'optimalité du plan de support $\{(x, y); J_P\}$;
SI $E_{y_N} \geq 0$, Alors
 Calculer la valeur de suboptimalité $\beta((x, y); J_B)$;
SI $\beta((x, y); J_B) = 0$, Alors
 Le processus de résolution s'arrête avec $\{(x, y); J_P\}$
 plan de support optimal ;
FIN SI
SI $\beta((x, y); J_B) \leq \epsilon$ Alors
 Le processus de résolution s'arrête avec $\{(x, y); J_P\}$
 plan de support ϵ -optimal ;
FIN SI
SI $\beta((x, y); J_B) > \epsilon$, Alors aller en ④ ;
FIN SI
FIN SI
SINON ($E_N \not\geq 0$), Aller directement en ④ ;
FIN SI
- ④ Changement du plan (x, y) par (\bar{x}, \bar{y}) tel que $\bar{x} = x + \theta^0 l_x$ et $\bar{y} = y + \theta^0 l_y$
 - Choisir l'indice j_0 tel que $|E_{j_0}| = \max(|E_j|, j \in J_{NNO})$, où J_{NNO} est
 l'ensemble des indices non optimaux ;
 - Calculer la direction d'amélioration $l = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$ par les formules (3.17) et
 (3.18) ;
 - Calculer le pas $\theta^0 = \min\{\theta_{j_1}, \theta_{j_0}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$;
 - Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 l_x$, et $\bar{y} = y + \theta^0 l_y$;
- ⑤ Test d'optimalité du nouveau plan (\bar{x}, \bar{y}) ;
SI $\bar{E}_N \geq 0$, Alors
SI $\beta((\bar{x}, \bar{x}); J_B) \leq \epsilon$ Alors
 Le processus de résolution s'arrête avec $\{(\bar{x}, \bar{y}); J_P\}$
 plan de support ϵ -optimal ;
SINON Aller en ⑥ ;
FIN SI
SINON ($\bar{E} \not\geq 0$) Aller directement en ⑥ ;
FIN SI
- ⑥ Changement de support J_P en \bar{J}_P ;
SI $\theta^0 = \theta_{j_0}$, Alors
 $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S, \bar{J}_P = J_P$;
FIN SI
SI $\theta^0 = \theta_{j_1}$, Alors
 $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \bar{J}_S = J_S, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_P\}$;
FIN SI
SI $\theta^0 = \theta_{j_s}$, Alors
 $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \setminus j_s, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_P\}$;
FIN SI
SI $\theta^0 = \theta_F$, Alors
 $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \cup j_0, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_P\}$;
FIN SI
 Aller en ① avec le nouveau plan de support $\{(\bar{x}, \bar{x}); \bar{J}_P\}$.
FIN
-

3.8 Conclusion

La méthode que nous avons exposée est une extension de la méthode directe de support pour le cas de variables mixtes. Sa particularité est de manipuler les variables de décision telles qu'elles se présentent initialement sans modification préliminaire. De plus, cet algorithme est doté d'un critère d'arrêt qui peut donner une solution approchée avec une précision choisie à l'avance.

CHAPITRE 4

Méthode adaptée pour la programmation quadratique convexe à variables mixtes

4.1 Introduction

La méthode de support que nous avons présentée dans le chapitre précédent est une méthode d'amélioration basée sur la métrique du simplexe, mais les plans de support admettent encore d'autres métriques pour les directions d'amélioration.

Le principe de cette méthode est pratiquement le même que celui de la méthode directe de support, c'est-à-dire, qu'au lieu d'utiliser la métrique du simplexe en changeant un seul indice non basique j_0 , on utilisera plutôt une autre métrique dite adaptée qui consiste à considérer tous les indices non optimaux en fonction desquels on construit une direction d'amélioration de la fonction objectif, et le pas le long de cette direction.

4.2 Position du problème et définitions

Le problème de la programmation quadratique convexe à variables mixtes se présente sous la forme canonique suivante :

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x^T D_1 x + c^T x + \frac{1}{2}y^T D_2 y + p^T y \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

$$Ax + Hy = b, \quad (4.2)$$

$$d^- \leq x \leq d^+, \quad (4.3)$$

$$y \geq 0, \quad (4.4)$$

où c et x sont des n_x -vecteurs, p et y sont des n_y -vecteurs, A et H des matrices d'ordre respectivement $m \times n_x$ et $m \times n_y$, avec $\text{rang}(A|H) = m < n_x + n_y$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d^- \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $d^+ \in \mathbb{R}^{n_x}$; les matrices D_1 et D_2 sont symétriques et semi-définies positives. Soient les ensembles d'indices suivants :

4.2. POSITION DU PROBLÈME ET DÉFINITIONS

$I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J_x = \{1, 2, \dots, n_x\}$, $J_y = \{n_x+1, n_x+2, \dots, n_x+n_y\}$, J_{x_B} et J_{y_B} sont les indices des variables basiques bornées et simples respectivement, J_{x_N} et J_{y_N} sont les indices des variables non basiques bornées et simples respectivement, $J = J_x \cup J_y$, $J_x = J_{x_B} \cup J_{x_N}$, $J_y = J_{y_B} \cup J_{y_N}$ avec $J_{x_B} \cap J_{x_N} = \emptyset$, $J_{y_B} \cap J_{y_N} = \emptyset$, et $|J_{x_B}| + |J_{y_B}| = m$.

Posons $J_B = J_{x_B} \cup J_{y_B}$, $J_N = J \setminus J_B = J_{x_N} \cup J_{y_N}$, et notons par A_H la matrice $(A|H)$ d'ordre $m \times (n_x + n_y)$. On peut alors écrire et fractionner les vecteurs de la manière suivante :

- $d^- = d^-(J_x) = (d_j^-, j \in J_x)$;

- $d^+ = d^+(J_x) = (d_j^+, j \in J_x)$;

- $c = c(J_x) = (c_j, j \in J_x)$,

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ -- \\ c_N \end{pmatrix}, \quad c_B = c(J_{x_B}) = (c_j, j \in J_{x_B}), \quad c_N = c(J_{x_N}) = (c_j, j \in J_{x_N});$$

- $x = x(J_x) = (x_j, j \in J_x)$,

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ -- \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x_B = x(J_{x_B}) = (x_j, j \in J_{x_B}), \quad x_N = x(J_{x_N}) = (x_j, j \in J_{x_N});$$

- $p = p(J_y) = (p_j, j \in J_y)$,

$$p = \begin{pmatrix} p_B \\ -- \\ p_N \end{pmatrix}, \quad p_B = p(J_{y_B}) = (p_j, j \in J_{y_B}), \quad p_N = p(J_{y_N}) = (p_j, j \in J_{y_N});$$

- $y = y(J_y) = (y_j, j \in J_y)$,

$$y = \begin{pmatrix} y_B \\ -- \\ y_N \end{pmatrix}, \quad y_B = y(J_{y_B}) = (y_j, j \in J_{y_B}), \quad y_N = y(J_{y_N}) = (y_j, j \in J_{y_N});$$

- $A = A(I, J_x) = (a_{ij}, i \in I, j \in J_x) = (a_j, j \in J_x)$,

$$A = (A_B|A_N), \quad A_B = A(I, J_{x_B}), \quad A_N = A(I, J_{x_N});$$

- $H = H(I, J_y) = (h_{ij}, i \in I, j \in J_y) = (h_j, j \in J_y)$,

$$H = (H_B|H_N), \quad H_B = H(I, J_{y_B}), \quad H_N = H(I, J_{y_N});$$

- $A_H = A_H(I, J) = (a_{Hij}, i \in I, j \in J_x \cup J_y) = (a_{Hj}, j \in J_x \cup J_y) = (A|H)$,

$$A_H = (A_{H_B}|A_{H_N}), \quad A_{H_B} = A_H(I, J_{x_B} \cup J_{y_B}) = (A_B|H_B), \\ A_{H_N} = A_H(I, J_{x_N} \cup J_{y_N}) = (A_N|H_N).$$

Définition 4.2.1. "solution réalisable"

Un vecteur (x, y) vérifiant les contraintes (4.2)-(4.4) est appelé plan ou solution réalisable du problème (4.1)-(4.4).

Définition 4.2.2. "solution optimale"

Un plan (x^0, y^0) est dit optimal si :

$$F(x^0, y^0) = \frac{1}{2}x^{0T} D_1 x^0 + c^T x^0 + \frac{1}{2}y^{0T} D_2 y^0 + p^T y^0 = \min\left(\frac{1}{2}x^T D_1 x + c^T x + \frac{1}{2}y^T D_2 y + p^T y\right),$$

où (x, y) est pris parmi tous les plans du problème (4.1)-(4.4).

Définition 4.2.3. "solution suboptimale"

Un plan (x^ϵ, y^ϵ) est appelé ϵ -optimal ou suboptimal si

$$F(x^\epsilon, y^\epsilon) - F(x^0, y^0) \leq \epsilon,$$

où ϵ est un nombre positif ou nul, donné à l'avance et (x^0, y^0) est une solution optimale du problème (4.1)-(4.4).

Définition 4.2.4. "support des contraintes"

L'ensemble $J_B = (J_{x_B}, J_{y_B}) \subset J, |J_B| = m$ est appelé support des contraintes si :

$$\det A_{H_B} = \det(A(I, J_{x_B}), H(I, J_{y_B})) = \det(A_B, H_B) \neq 0.$$

Définition 4.2.5. "plan de support"

Le couple $\{(x, y); (J_{x_B}, J_{y_B})\}$, formé d'une solution réalisable (x, y) et d'un support (J_{x_B}, J_{y_B}) , est appelé plan de support.

Définition 4.2.6. "plan de support non dégénéré"

Le plan de support est dit non dégénéré, si

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \quad \forall j \in J_{x_B} \text{ et } y_j > 0, \quad \forall j \in J_{y_B}.$$

4.3 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{(x, y); (J_{x_B}, J_{y_B})\}$ un plan de support du problème (4.1)-(4.4). On note par :

$$D = \begin{pmatrix} D_1(J_x, J_x) & 0 \\ 0 & D_2(J_y, J_y) \end{pmatrix} : \text{la matrice d'ordre } (n_x + n_y) \times (n_x + n_y),$$

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \text{le vecteur de dimension } (n_x + n_y),$$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix} : \text{le vecteur de dimension } (n_x + n_y),$$

La fonction objectif (4.1) peut alors s'écrire :

$$F(z) = F(x, y) = \frac{1}{2}x^T D_1 x + c^T x + \frac{1}{2}y^T D_2 y + p^T y = \frac{1}{2}z^T D z + \bar{c}^T z.$$

4.3. FORMULE D'ACCROISSEMENT DE LA FONCTION OBJECTIF

Considérons un autre plan quelconque $\bar{z} = z + \Delta z = (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \Delta x, y + \Delta y)$. L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 F(\bar{z}) - F(z) &= \frac{1}{2} \bar{z}^T D \bar{z} + \bar{c}^T \bar{z} - \frac{1}{2} z^T D z - \bar{c}^T z \\
 &= \frac{1}{2} (z + \Delta z)^T D (z + \Delta z) + \bar{c}^T (z + \Delta z) - \frac{1}{2} z^T D z - \bar{c}^T z \\
 &= (\Delta z)^T (Dz + \bar{c}) + \frac{1}{2} (\Delta z)^T D \Delta z, \\
 F(\bar{z}) - F(z) &= (g(z))^T \Delta z + \frac{1}{2} (\Delta z)^T D \Delta z, \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

où $g(z) = Dz + \bar{c}$ est le gradient de la fonction (4.1), avec

$$g(z) = Dz + \bar{c} = \begin{pmatrix} D_1 x + c \\ D_2 y + p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_B \\ - \\ g_N \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{cases} Ax + Hy = b, \\ A\bar{x} + H\bar{y} = b. \end{cases} \Leftrightarrow A_H \bar{z} = A_H z = b.$$

D'où

$$A_H(\Delta z + z) = A_H \Delta z + A_H z = b \Leftrightarrow A_H \Delta z = 0.$$

En posant :
 $\Delta z = \begin{pmatrix} \Delta z_B \\ - \\ \Delta z_N \end{pmatrix}$, $\Delta z_B = \Delta z(J_B)$, $\Delta z_N = \Delta z(J_N)$, l'égalité $A_H \Delta z = 0$ peut être alors écrite $A_{H_B} \Delta z_B + A_{H_N} \Delta z_N = 0$, d'où

$$\Delta z_B = -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \Delta z_N. \tag{4.6}$$

Grâce à cette dernière égalité, l'accroissement de la fonction objectif (4.5) devient :

$$\begin{aligned}
 F(\bar{z}) - F(z) &= g_B^T \Delta z_B + g_N^T \Delta z_N + \frac{1}{2} (\Delta z_B, \Delta z_N)^T D (\Delta z_B, \Delta z_N) \\
 &= g_B^T (-A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \Delta z_N) + g_N^T \Delta z_N + \\
 &\quad \frac{1}{2} (-A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \Delta z_N, \Delta z_N)^T D (-A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \Delta z_N, \Delta z_N) \\
 &= (-g_B^T A_{H_B}^{-1} A_{H_N} + g_N^T) \Delta z_N + \frac{1}{2} (\Delta z_N)^T \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix} \Delta z_N,
 \end{aligned}$$

où $I_N = I(J_N, J_N)$ est une matrice identité d'ordre $(n_x + n_y - m)$.

Posons

$$Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix}, \quad M = M(J_N, J_N) = Z^T D Z, \tag{4.7}$$

et définissons le vecteur des potentiels u ainsi que le vecteur des estimations E comme suit :

$$u^T = g_B^T A_{H_B}^{-1}, \quad E^T = g^T - u^T A_H = (E_B^T, E_N^T),$$

avec

$$E_B^T = 0, \quad E_N^T = g_N^T - u^T A_{H_N}.$$

Finalement, l'accroissement de la fonction objectif (4.5) aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(\bar{z}) - F(z) &= E_N^T \Delta z_N + \frac{1}{2} (\Delta z_N)^T Z^T D Z (\Delta z_N) \\ &= E_N^T \Delta z_N + \frac{1}{2} (\Delta z_N)^T M \Delta z_N. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Comme

$$\Delta z_N = \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}, \quad E_N = \begin{pmatrix} E_{x_N} \\ E_{y_N} \end{pmatrix},$$

l'accroissement de la fonction objectif peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(\bar{z}) - F(z) &= F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) \\ &= E_{x_N}^T \Delta x_N + E_{y_N}^T \Delta y_N + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Remarque 4.3.1. Ayant les matrices $D_1 \geq 0$ et $D_2 \geq 0$, alors la matrice $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$, et $M = Z^T D Z$ sont aussi semi-définies positives.

4.4 Critère d'optimalité

Théorème 4.1. [65] ”*Critère d'optimalité*”

Soit $\{z, J_B\} = \{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$ un plan de support des contraintes du problème (4.1)-(4.4). Alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_{x_j} \geq 0, & \text{si } x_j = d_j^- \\ E_{x_j} \leq 0, & \text{si } x_j = d_j^+ \\ E_{x_j} = 0, & \text{si } d_j^- < x_j < d_j^+, \quad j \in J_{x_N}; \\ E_{y_j} \geq 0, & \text{si } y_j = 0 \\ E_{y_j} = 0, & \text{si } y_j > 0, \quad j \in J_{y_N}, \end{cases} \quad (4.10)$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan $z = (x, y)$.

Ces mêmes relations sont aussi nécessaires, si le plan de support des contraintes est non dégénéré.

Démonstration

Condition suffisante : Soit $\{z, J_B\} = \{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$ un plan de support des contraintes du problème (4.1)-(4.4) vérifiant les relations (3.10). Pour tout plan $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ du problème (4.1)-(4.4), la formule d'accroissement (4.9) nous permet d'écrire :

$$F(\bar{z}) - F(z) = F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) \geq E_{x_N}^T \Delta x_N + E_{y_N}^T \Delta y_N,$$

4.4. CRITÈRE D'OPTIMALITÉ

car la matrice M est semi-définie positive. D'où

$$F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) \geq \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} > 0} E_{x_j}(\bar{x}_j - x_j) + \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} < 0} E_{x_j}(\bar{x}_j - x_j) + \sum_{j \in J_{y_N}, E_{y_j} > 0} E_{y_j}(\bar{y}_j - y_j).$$

Comme $d_j^- \leq \bar{x}_j \leq d_j^+$, alors $\bar{x}_j - d_j^- \geq 0$ et $\bar{x}_j - d_j^+ \leq 0$; de plus $\bar{y}_j \geq 0$, et en vertu des relations (4.10), on aura

$$F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) \geq \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} > 0} E_{x_j}(\bar{x}_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} < 0} E_{x_j}(\bar{x}_j - d_j^+) + \sum_{j \in J_{y_N}, E_{y_j} > 0} E_{y_j}(\bar{y}_j - 0) \geq 0,$$

où $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ est une solution réalisable arbitraire du problème (4.1)-(4.4).

Par conséquent, le vecteur $z = (x, y)$ est une solution optimale du problème (4.1)-(4.4).

Condition Nécessaire : Soit $\{z, J_B\} = \{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$ un plan de support optimal non dégénéré du problème (4.1)-(4.4), et supposons que les relations (4.10) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire, qu'il existe au moins un indice $j_0 \in J_N$, tel que :

$$\begin{aligned} E_{x_{j_0}} > 0, & \quad \text{pour} \quad x_{j_0} > d_{j_0}^-, j_0 \in J_{x_N}, \\ & \quad \text{ou bien} \\ E_{x_{j_0}} < 0, & \quad \text{pour} \quad x_{j_0} < d_{j_0}^+, j_0 \in J_{x_N}, \\ & \quad \text{ou bien} \\ E_{y_{j_0}} < 0, & \quad \text{pour} \quad y_{j_0} = 0, j_0 \in J_{y_N}, \\ & \quad \text{ou bien} \\ E_{y_{j_0}} \neq 0, & \quad \text{pour} \quad y_{j_0} > 0, j_0 \in J_{y_N}. \end{aligned}$$

On construit un autre plan $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \theta l_x, y + \theta l_y)$, où θ est un nombre réel positif, et $l = l(J) = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(J_x) \\ l(J_y) \end{pmatrix}$ est un vecteur de direction que l'on construit comme suit :

- Si $j_0 \in J_{x_N}$, le vecteur l est donné par :

$$\begin{cases} l_{x_{j_0}} = -\text{sign} E_{x_{j_0}}, \\ l_{x_j} = 0, j \neq j_0, j \in J_{x_N}, \\ l_{y_j} = 0, j \in J_{y_N}. \end{cases}$$

D'autre part, on doit avoir

$$A_H \bar{z} = A_H z + \theta A_H l = b \Leftrightarrow A_{H_B} l_B + A_{H_N} l_N = 0.$$

D'où

$$l_B = \begin{pmatrix} l_{x_B} \\ l_{y_B} \end{pmatrix} = -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} l_N = A_{H_B}^{-1} a_{j_0} \text{sign} E_{x_{j_0}}.$$

4.4. CRITÈRE D'OPTIMALITÉ

- Si $j_0 \in J_{y_N}$, le vecteur l est donné par :

$$\begin{cases} l_{y_{j_0}} = -\text{sign}E_{y_{j_0}}, \\ l_{y_j} = 0, j \neq j_0, j \in J_{y_N}, \\ l_{x_j} = 0, j \in J_{x_N}. \end{cases}$$

D'autre part, on doit avoir

$$A_H \bar{z} = A_H z + \theta A_H l = b \Leftrightarrow A_{H_B} l_B + A_{H_N} l_N = 0.$$

D'où

$$l_B = \begin{pmatrix} l_{x_B} \\ l_{y_B} \end{pmatrix} = -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} l_N = A_{H_B}^{-1} h_{j_0} \text{sign}E_{y_{j_0}}.$$

En vertu de la procédure de construction de la direction d'amélioration l , le vecteur $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ satisfait la contrainte principale (4.2), et pour qu'il soit un plan du problème (4.1)-(4.4), il doit en plus vérifier les inégalités (4.3) et (4.4) :

$$d^- \leq \bar{x} \leq d^+ \Leftrightarrow d^- \leq x + \theta l_x \leq d^+ \Leftrightarrow d^- - x \leq \theta l_x \leq d^+ - x,$$

$$\bar{y} \geq 0 \Leftrightarrow y + \theta l_y \geq 0 \Leftrightarrow \theta l_y \geq -y.$$

Soit, en écrivant composante par composante :

$$\begin{aligned} d_j^- - x_j \leq \theta l_{x_j} \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{x_B}, \\ d_j^- - x_j \leq \theta l_{x_j} \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{x_N}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

et

$$\begin{aligned} \theta l_{y_j} \geq -y_j, j \in J_{y_B}, \\ \theta l_{y_j} \geq -y_j, j \in J_{y_N}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Deux cas peuvent se présenter :

- Si $j_0 \in J_{x_N}$, nous posons $\theta_x = \min(\theta_{x_{j_1}}, \theta_{x_{j_0}})$ où

$$\theta_{j_1} = \min(\theta_j, j \in J_{x_B}), \text{ tel que } \theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{x_j} = 0, \end{cases}$$

et

$$\theta_{x_{j_0}} = \begin{cases} d_{j_0}^+ - x_{j_0}, & \text{si } E_{x_{j_0}} < 0, \\ x_{j_0} - d_{j_0}^-, & \text{si } E_{x_{j_0}} > 0. \end{cases}$$

Le nombre θ_y va être calculé comme suit :

$$\theta_y = \min(\theta_{y_j}, j \in J_{y_B}), \text{ tel que } \theta_{y_j} = \begin{cases} \frac{-y_j}{l_{y_j}}, & \text{si } l_{y_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{y_j} \geq 0. \end{cases}$$

Nous posons alors

$$\theta^0 = \min(\theta_x, \theta_y), \text{ où } \theta^0 > 0.$$

En vertu de la non-dégénérescence du plan de support $\{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$, le pas θ^0 ainsi construit est strictement positif, et le vecteur $\bar{z} = z + \theta l$ est une solution réalisable du problème (4.1)-(4.4) pour tout θ tel que $0 < \theta \leq \theta^0$.

La formule d'accroissement de la fonction objectif (4.9) nous donne alors :

$$\begin{aligned} F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) &= E_{x_N}^T \Delta x_N + E_{y_N}^T \Delta y_N + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix} \\ &= \theta E_{x_N}^T l_{x_N} + \underbrace{\theta E_{y_N}^T l_{y_N}}_{\parallel} + \frac{1}{2} \theta^2 \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \\ &= -\theta E_{x_{j_0}} \text{sign} E_{x_{j_0}} + \frac{1}{2} \theta^2 \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \\ &= \theta \left(-|E_{x_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \right) \\ &= \theta \left(-|E_{x_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta l_N^T M l_N \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pour $\theta > 0$ assez petit, on aura $-|E_{x_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta l_N^T M l_N < 0$. D'où $F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) < 0$, ce qui contredit l'optimalité de (x, y) .

- Si $j_0 \in J_{y_N}$, nous posons $\theta_x = \min(\theta_{x_j}, j \in J_{x_B})$, où

$$\theta_{x_j} = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{x_j} = 0. \end{cases}$$

Le nombre θ_y va être calculé comme suit :

$$\theta_y = \min(\theta_{y_{j_1}}, \theta_{y_{j_0}}),$$

avec

$$\theta_{y_{j_1}} = \min(\theta_{y_j}, j \in J_{y_B}), \text{ tel que } \theta_{y_j} = \begin{cases} -\frac{y_j}{l_{y_j}}, & \text{si } l_{y_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{y_j} \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\theta_{y_{j_0}} = \begin{cases} y_{j_0}, & \text{si } E_{y_{j_0}} > 0, \\ \infty, & \text{si } E_{y_{j_0}} < 0. \end{cases}$$

4.5. CRITÈRE DE SUBOPTIMALITÉ

Nous définissons $\theta^0 = \min(\theta_x, \theta_y)$, où $\theta^0 > 0$.

Pour tout θ tel que $0 < \theta \leq \theta^0$, le vecteur $\bar{z} = z + \theta l$ est une solution réalisable du problème (4.1)-(4.4). La formule d'accroissement de la fonction objectif (4.9) nous donne :

$$\begin{aligned}
 F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) &= E_{x_N}^T \Delta x_N + E_{y_N}^T \Delta y_N + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{\theta E_{x_N}^T l_{x_N}}_0 + \theta E_{y_N}^T l_{y_N} + \frac{1}{2} \theta^2 \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \\
 &= -\theta E_{y_{j_0}} \text{sign} E_{y_{j_0}} + \frac{1}{2} \theta^2 \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \\
 &= \theta \left(-|E_{y_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \right) \\
 &= \theta \left(-|E_{y_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta l_N^T M l_N \right). \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

Pour $\theta > 0$ assez petit, nous aurons encore $-|E_{y_{j_0}}| + \frac{1}{2} \theta l_N^T M l_N < 0$, et donc $F(\bar{x}, \bar{y}) - F(x, y) < 0$, ce qui contredit l'optimalité de (x, y) .

Par conséquent, les relations (4.10) sont suffisantes, et aussi nécessaires pour l'optimalité du plan non dégénéré (x, y) . ■

4.5 Critère de suboptimalité

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale $F(x^0, y^0)$ et une autre valeur $F(x, y)$ d'un plan de support des contraintes quelconque $\{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$, remplaçons dans la formule d'accroissement (4.9) le vecteur \bar{z} par z^0 et en minorant cette expression, on aura donc :

$$\begin{aligned}
 F(z^0) - F(z) &= F(x^0, y^0) - F(x, y) \\
 &= E_{x_N}^T \Delta x_N + E_{y_N}^T \Delta y_N + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{j \in J_{x_N}} E_{x_j} (x_j^0 - x_j) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j} (y_j^0 - y_j) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} \Delta x_N \\ \Delta y_N \end{pmatrix} \\
 &\geq \sum_{j \in J_{x_N}} E_{x_j} (x_j^0 - x_j) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j} (y_j^0 - y_j), \quad \text{car } M \geq 0.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} F(z) - F(z^0) &\leq \sum_{j \in J_{x_N}} E_{x_j}(x_j - x_j^0) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j}(y_j - y_j^0), \\ &\leq \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} > 0} E_{x_j}(x_j - x_j^0) + \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} < 0} E_{x_j}(x_j - x_j^0) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j}(y_j - y_j^0). \end{aligned}$$

Nous avons $d_j^- \leq x_j^0 \leq d_j^+, j \in J_{x_N}$, alors on aura :

$$E_{x_j}(x_j - x_j^0) \leq E_{x_j}(x_j - d_j^-), \text{ si } E_{x_j} > 0,$$

$$E_{x_j}(x_j - x_j^0) \leq E_{x_j}(x_j - d_j^+), \text{ si } E_{x_j} < 0.$$

De plus, en supposant que $E_{y_N} \geq 0$, nous aurons :

$$y_j^0 \geq 0, j \in J_y \Rightarrow y_j - y_j^0 \leq y_j - 0 \Rightarrow E_{y_j}(y_j - y_j^0) \leq E_{y_j}y_j, j \in J_y.$$

Par conséquent, on obtient la majoration suivante :

$$F(z) - F(z^0) \leq \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} > 0} E_{x_j}(x_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} < 0} E_{x_j}(x_j - d_j^+) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j}y_j. \quad (4.15)$$

Le nombre

$$\beta((x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})) = \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} > 0} E_{x_j}(x_j - d_j^-) + \sum_{j \in J_{x_N}, E_{x_j} < 0} E_{x_j}(x_j - d_j^+) + \sum_{j \in J_{y_N}} E_{y_j}y_j, \quad (4.16)$$

est appelé estimation de suboptimalité.

Théorème 4.2. "Condition suffisante de suboptimalité"

Soit $\{(x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})\}$ un plan de support des contraintes du problème (4.1)-(4.4), et ϵ un nombre positif ou nul arbitraire.

Si $E_{y_N} \geq 0$ et si $\beta((x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})) \leq \epsilon$, alors le plan (x, y) est ϵ -optimal.

Démonstration. En vertu de (4.15), nous avons

$$F(z) - F(z^0) = F(x, y) - F(x^0, y^0) \leq \beta((x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})).$$

Comme $\beta((x, y), (J_{x_B}, J_{y_B})) \leq \epsilon$, alors on aura

$$F(x, y) - F(x^0, y^0) \leq \epsilon.$$

Le plan (x, y) est donc ϵ -optimal. Dans le cas particulier où $\epsilon = 0$, la relation réalisable (x, y) est par conséquent optimale. ■

4.6 Construction de l'algorithme

Avant de présenter la méthode de résolution, donnons quelques définitions essentielles.

Définition 4.6.1. "Support de la fonction objectif"

On appelle support de la fonction objectif du problème (4.1)-(4.4), l'ensemble des indices $J_S \subset J_N$, où $J_S = (J_{x_S} \cup J_{y_S})$ et $J_N = (J_{x_N} \cup J_{y_N})$ tel que :

$$\det M(J_S, J_S) \neq 0.$$

On posera $J_{x_{NN}} = J_{x_N} \setminus J_{x_S}$, $J_{y_{NN}} = J_{y_N} \setminus J_{y_S}$, $J_{x_{NN}} \cup J_{y_{NN}} = J_{NN}$.

Définition 4.6.2. "Support du problème"

L'ensemble des indices $J_P = \{J_B, J_S\}$ est appelé support du problème (4.1)-(4.4), où $J_B = J_{x_B} \cup J_{y_B}$ est le support des contraintes et $J_S = J_{x_S} \cup J_{y_S}$ est le support de la fonction objectif.

Définition 4.6.3. "Plan de support"

On appelle plan de support du problème (4.1)-(4.4), la paire $\{(x, y), J_P\}$ formée du plan (x, y) et du support J_P ; il est dit accordé si $E(J_S) = 0$.

Définition 4.6.4. "direction admissible - direction d'amélioration"

La direction $l = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$ où $l_x = l(J_x)$ et $l_y = l(J_y)$, est dit admissible si $Al_x + Hl_y = 0$. Elle est dite d'amélioration si en outre $E_x^T l_x + E_y^T l_y < 0$.

Étant donné un nombre réel positif ou nul quelconque ϵ et un plan de support initial $\{(x, y), J_P\}$ accordé, le but de l'algorithme est alors de construire un plan ϵ -optimal (x^ϵ, y^ϵ) ou carrément un plan optimal (x^0, y^0) . L'itération de l'algorithme consiste à faire le passage de $\{(x, y), J_P\}$ vers $\{(\bar{x}, \bar{y}), \bar{J}_P\}$ tel que $F(\bar{x}, \bar{y}) \leq F(x, y)$. Pour cela, construisons le nouveau plan (\bar{x}, \bar{y}) de la manière suivante :

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) + \theta(l_x, l_y),$$

où $\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix} = l$ est la direction d'amélioration, et θ le pas le long de cette direction.

4.6.1 Construction d'une direction d'amélioration adaptée

La méthode de support que nous avons vue dans le chapitre précédent est une méthode d'amélioration basée sur la métrique du simplexe, mais les plans de support admettent encore d'autres métriques pour les directions d'amélioration. Considérons la métrique suivante pour les composantes non basiques de la direction admissible l :

$$d_j^- - x_j \leq l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{x_{NN}} = J_{x_N} \setminus J_{x_S}, \quad (4.17)$$

$$-y_j \leq l_j \leq y_j, \quad j \in J_{y_{NN}} = J_{y_N} \setminus J_{y_S}. \quad (4.18)$$

4.6. CONSTRUCTION DE L'ALGORITHME

Cette métrique dépend du plan courant (x, y) , et de ce fait, elle est dite adaptée. Afin de calculer les composantes de la direction admissible d'amélioration $l = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$, considérons l'accroissement

$$\begin{aligned} \Delta F &= F((x, y) + (l_x, l_y)) - F(x, y) = E_{x_N}^T l_{x_N} + E_{y_N}^T l_{y_N} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} l_{x_N} \\ l_{y_N} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j \in J_{x_N}/E_{x_j} > 0} E_{x_j} l_{x_j} + \sum_{j \in J_{x_N}/E_{x_j} < 0} E_{x_j} l_{x_j} + \sum_{j \in J_{y_N}/E_{y_j} > 0} E_{y_j} l_{y_j} + \sum_{j \in J_{y_N}/E_{y_j} < 0} E_{y_j} l_{y_j} + \frac{1}{2} l_N^T M l_N. \end{aligned}$$

En tenant compte de la métrique (4.17)-(4.18), la partie linéaire de ΔF atteint son minimum pour les valeurs des composantes de $l_x(J_{x_{NN}})$ suivantes :

$$l_{x_j} = \begin{cases} d_j^- - x_j & \text{si } E_{x_j} > 0, \\ d_j^+ - x_j & \text{si } E_{x_j} < 0, \\ 0 & \text{si } E_{x_j} = 0. \end{cases} \quad \text{pour } j \in J_{x_{NN}}, \quad (4.19)$$

et pour les composantes de $l_y(J_{y_{NN}})$ suivantes :

$$l_{y_j} = \begin{cases} -y_j & \text{si } E_{y_j} > 0, \\ y_j & \text{si } E_{y_j} < 0, \\ 0 & \text{si } E_{y_j} = 0. \end{cases} \quad \text{pour } j \in J_{y_{NN}}. \quad (4.20)$$

On notera par $J_{y_{NN1}} = \{j \in J_{y_{NN}} : E_{y_j} < 0\}$ et $J_{y_{NN2}} = \{j \in J_{y_{NN}} : E_{y_j} \geq 0\}$.

Nous calculons la composante l_S d'une manière à assurer que $\bar{E}_j = E_j(x + \theta l) = 0$, $j \in J_S$.

En vertu de (4.7) Nous avons :

$$E_N^T = g_N^T - g_B^T A_{H_B}^{-1} A_{H_N} = (g_B^T, g_N^T) \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix} = (g(z))^T Z.$$

Comme l doit être admissible, alors

$$A_H l = A_{H_B} l_B + A_{H_N} l_N = 0 \Rightarrow l_B = -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} l_N$$

donc

$$l = \begin{pmatrix} l_B \\ l_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} l_N \\ l_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{H_B}^{-1} A_{H_N} \\ I_N \end{pmatrix} l_N = Z l_N.$$

On aura donc

$$\bar{E}_N^T = (g(z + \theta l))^T Z = (g(z))^T Z + \theta l^T D Z = (g(z))^T Z + \theta l_N^T Z^T D Z = E_N^T + \theta l_N^T M.$$

Finalement, nous avons

$$\bar{E}_N = E_N + \theta M l_N.$$

Comme $E(J_S) = 0$, alors l'équation $\bar{E}(J_S) = 0$ est équivalente à :

$$\theta M(J_S, J_N) l_N = 0 \Rightarrow M(J_S, J_S) l(J_S) + M(J_S, J_{NN}) l(J_{NN}) = 0,$$

donc

$$l(J_S) = -M_S^{-1}M(J_S, J_{NN})l(J_{NN}). \quad (4.21)$$

Puis, nous calculons l_B tel que $A_H l = 0$:

$$l_B = -A_{H_B}^{-1}(A_{H_S}l_S + A_{H_{NN}}l_{NN}). \quad (4.22)$$

Ainsi, on a

$$l = \begin{cases} l_j = \begin{cases} d_j^- - x_j & \text{si } E_{x_j} > 0; \\ d_j^+ - x_j & \text{si } E_{x_j} < 0; \\ 0 & \text{si } E_{x_j} = 0. \end{cases} & j \in J_{x_{NN}} \\ l_j = \begin{cases} -y_j & \text{si } E_{y_j} > 0; \\ y_j & \text{si } E_{y_j} < 0; \\ 0, & \text{si } E_{y_j} = 0. \end{cases} & j \in J_{y_{NN}} \\ l_S = -M_S^{-1}M(J_S, J_{NN})l(J_{NN}); \\ l_B = -A_{H_B}^{-1}(A_{H_S}l_S + A_{H_{NN}}l_{NN}). \end{cases} \quad (4.23)$$

4.6.2 Calcul du pas θ^0

On construit alors un nouveau plan $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ sous la forme :

$$\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = z + \theta^0 l = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \theta^0 \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix},$$

où l est la direction d'amélioration définie par (4.23) et le nombre θ^0 est le pas le long de cette direction, avec $\theta^0 = \min\{\theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\}$. Les nombres θ_{j_1} et θ_{j_s} se calculent de façon à ce que les contraintes directes sur le vecteur $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ soient vérifiées :

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_{x_j} \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{x_B}, \quad (4.24)$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_{x_j} \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{x_{NN}}, \quad (4.25)$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_{x_j} \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{x_S}, \quad (4.26)$$

$$-y_j \leq \theta l_{y_j} \leq y_j, \quad j \in J_{y_B}, \quad (4.27)$$

$$-y_j \leq \theta l_{y_j} \leq y_j, \quad j \in J_{y_{NN}}, \quad (4.28)$$

$$-y_j \leq \theta l_{y_j} \leq y_j, \quad j \in J_{y_S}. \quad (4.29)$$

En calculant les différentes valeurs maximales que peut prendre les pas θ dans ces relations, on aura :

De (4.24), on a

$$\theta_{x_{j_1}} = \min\{\theta_{x_j}, j \in J_{x_B}\}, \quad \text{avec } \theta_{x_j} = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{x_j} = 0. \end{cases}$$

De (4.25), on a

$$\theta_{x_{j_0}} = \begin{cases} 1 & \text{si } J_{x_{NN}} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De (4.26), on a

$$\theta_{x_{j_s}} = \min\{\theta_{x_j}, j \in J_{x_S}\}, \text{ avec } \theta_{x_j} = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_{x_j}}, & \text{si } l_{x_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{x_j} = 0. \end{cases}$$

De (4.27), on a

$$\theta_{y_{j_1}} = \min\{\theta_{y_j}, j \in J_{y_B}\}, \text{ avec } \theta_{y_j} = \begin{cases} \frac{y_j}{l_{y_j}}, & \text{si } l_{y_j} > 0, \\ \frac{-y_j}{l_{y_j}}, & \text{si } l_{y_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{y_j} = 0. \end{cases}$$

De (4.28), on a

$$\theta_{y_{j_0}} = \begin{cases} 1 & \text{si } J_{y_{NN2}} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De (4.29), on a

$$\theta_{y_{j_s}} = \min\{\theta_{y_j}, j \in J_{y_S}\}, \text{ avec } \theta_{y_j} = \begin{cases} \frac{y_j}{l_{y_j}}, & \text{si } l_{y_j} > 0, \\ \frac{-y_j}{l_{y_j}}, & \text{si } l_{y_j} < 0, \\ \infty, & \text{si } l_{y_j} = 0. \end{cases}$$

Nous devons prendre le pas θ^0 comme suit :

$$\theta^0 = \min\{\theta_x, \theta_y, \theta_F\},$$

avec

$$\theta_x = \min\{\theta_{x_{j_1}}, \theta_{x_{j_s}}, \theta_{x_{j_0}}\}, \quad \theta_y = \min\{\theta_{y_{j_1}}, \theta_{y_{j_s}}, \theta_{y_{j_0}}\}.$$

Quand à θ_F , il se calcule de façon que le passage de $z = (x, y)$ à $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ puisse assurer une diminution maximale de la fonction objectif (4.9), tout en gardant le même signe pour les E_j et \bar{E}_j , où

$$\bar{E}_N^T = (g(z + \theta l))^T Z = (g(z))^T Z + \theta l^T DZ = (g(z))^T Z + \theta l_N^T Z^T DZ = E_N^T + \theta l_N^T M.$$

Finalement, nous avons

$$\bar{E}_N = E_N + \theta M l_N = E_N + \theta \delta_N.$$

On posera donc $\theta_F = \sigma_{j^*} = \min \sigma_j, j \in J_{NN}$, avec

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{E_j}{\delta_j}, & \text{si } E_j \delta_j < 0, \\ 0, & \text{si } E_j = 0, \delta_j < 0, \\ \infty, & \text{si } E_j \delta_j \geq 0. \end{cases}$$

$$\delta_j = M(j, J_N)l_N.$$

Le nouveau plan est $(\bar{x}, \bar{y}) = (x + \theta^0 l_x, y + \theta^0 l_y)$.

Si $E_{y_N} \geq 0$ et $\beta((\bar{x}, \bar{y}), (J_{x_B}, J_{y_B})) \leq \epsilon$, alors le plan (\bar{x}, \bar{y}) est ϵ -optimal et nous pouvons arrêter l'algorithme; sinon, on procédera au changement du support.

4.6.3 Changement de support

Si $E_{y_N} \not\geq 0$ ou bien $\beta((\bar{x}, \bar{y}), (J_{x_B}, J_{y_B})) > \epsilon$, nous allons changer le support J_P par un nouveau support \bar{J}_P de la manière suivante :

- Si $\theta^0 = 1$, alors deux cas peuvent se présenter :
 - Si $J_{y_{NN1}} = \emptyset$, alors le vecteur $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) + l$ est une solution optimale du problème (4.1)-(4.4).
 - Si $J_{y_{NN1}} \neq \emptyset$, il est inutile de changer de support,

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $\theta^0 = \theta_{x_{j_1}}$, contrairement à la méthode de support, le choix de l'indice j_0 n'est pas unique, ce qui fait la particularité de cette méthode. Lorsque ce cas se réalise pour un indice $j_1 \in J_{x_B}$, nécessairement on a alors

$$l_{x_{j_1}} = - \sum_{j \in J_N} e_{j_1}^T A_{H_B}^{-1} a_j l_j = - \sum_{j \in J_N} x_{j_1 j} l_j \neq 0,$$

où e est un vecteur unitaire de dimension m dont la composante j_1 vaut 1. Il existe alors $j_0 \in J_N$ tel que $x_{j_1 j_0} \neq 0$. Cette dernière condition nous assure par conséquent, que $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$ est bel et bien un support.

Si on peut avoir $x_{j_1 j_0} \neq 0$, avec $j_0 \in J_S$, on posera donc

- Si $j_0 \in J_{x_S}$, alors

$$\bar{J}_{x_B} = (J_{x_B} \setminus j_1) \cup j_0, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S} \setminus j_0, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$
- Si $j_0 \in J_{y_S}$, alors

$$\bar{J}_{x_B} = (J_{x_B} \setminus j_1), \bar{J}_{y_B} = J_{y_B} \cup j_0, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S} \setminus j_0,$$

Sinon, on choisira un indice $j_0 \in J_{NN}$ tel que $l_{j_0} \neq 0$, alors

- Si $j_0 \in J_{x_N}$, donc

$$\bar{J}_{x_B} = (J_{x_B} \setminus j_1) \cup j_0, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$
- Si $j_0 \in J_{y_N}$, donc

$$\bar{J}_{x_B} = (J_{x_B} \setminus j_1), \bar{J}_{y_B} = J_{y_B} \cup j_0, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $\theta^0 = \theta_{y_{j_1}}$, de même, le choix de l'indice j_0 n'est pas unique. Lorsque ce cas se réalise pour un indice $j_1 \in J_{y_B}$, on a alors

$$l_{y_{j_1}} = - \sum_{j \in J_N} e_{j_1}^T A_{H_B}^{-1} a_j l_j = - \sum_{j \in J_N} x_{j_1 j} l_j \neq 0,$$

où e est un vecteur unitaire de dimension m . Il existe alors $j_0 \in J_N$ tel que $x_{j_1 j_0} \neq 0$. Cette dernière condition nous assure par conséquent, que $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$ est bel et bien un support.

Si on peut avoir $x_{j_1 j_0} \neq 0$, avec $j_0 \in J_S$, on posera donc

- Si $j_0 \in J_{x_S}$, alors

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B} \cup j_0, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B} \setminus j_1, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S} \setminus j_0, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $j_0 \in J_{y_S}$, alors

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = (J_{y_B} \setminus j_1) \cup j_0, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S} \setminus j_0,$$

Sinon, on choisira un indice $j_0 \in J_{NN}$ tel que $l_{j_0} \neq 0$, alors

- Si $j_0 \in J_{x_N}$, donc

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B} \cup j_0, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B} \setminus j_1, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $j_0 \in J_{y_N}$, donc

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = (J_{y_B} \setminus j_1) \cup j_0, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $\theta^0 = \theta_{x_{j_s}}$, alors

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S} \setminus j_s, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $\theta^0 = \theta_{y_{j_s}}$, alors

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S} \setminus j_s,$$

- Si $\theta^0 = \theta_F$, alors

- Si $j_0 \in J_{x_N}$

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S} \cup j_0, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S},$$

- Si $j_0 \in J_{y_N}$

$$\bar{J}_{x_B} = J_{x_B}, \bar{J}_{y_B} = J_{y_B}, \bar{J}_{x_S} = J_{x_S}, \bar{J}_{y_S} = J_{y_S} \cup j_0,$$

Finalement, on pose :

$$\bar{J}_B = \{\bar{J}_{x_B}, \bar{J}_{y_B}\}, \bar{J}_S = \{\bar{J}_{x_S}, \bar{J}_{y_S}\}, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

Nous commencerons alors une nouvelle itération avec le nouveau plan de support $\{(\bar{x}, \bar{y}), \bar{J}_P\}$, où le support \bar{J}_P satisfait les conditions algébriques

$$\det \bar{A}_{H_B} = \det A_H(I, \bar{J}_B) \neq 0 \text{ et } \det M(\bar{J}_S, \bar{J}_S) \neq 0.$$

4.7 Algorithme de la méthode

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithme 10 Méthode adaptée pour la programmation quadratique convexe à variables hybrides

Début

- ❶ Soit un nombre réel positif ou nul quelconque ϵ , et un plan de support initial $\{(x, y), J_P\}$ tel que $J_P = \{J_B, J_S\}$, avec $J_S = \emptyset$ pour plus de facilité ;
 - ❷ Calculer le vecteur des potentiels $E_N^T = g_N^T - u^T A_{H_N}$;
 - ❸ Test d'optimalité du plan de support $\{(x, y), J_P\}$;
SI $E_{y_N} \geq 0$, alors
 Calculer la valeur de suboptimalité $\beta((x, y), J_B)$;
SI $\beta((x, y), J_B) = 0$, alors
 le processus de résolution s'arrête avec $\{(x, y), J_P\}$
 plan de support optimal ;
FIN SI
SI $\beta((x, y), J_B) \leq \epsilon$, alors
 le processus de résolution s'arrête avec $\{(x, y), J_P\}$
 plan de support ϵ -optimal ;
FIN SI
SI $\beta((x, y), J_B) > \epsilon$, alors aller en ❹ ;
FIN SI
FIN SI
SINON ($E_N \not\geq 0$), aller directement en ❹ ;
FIN SI
 - ❹ Changement du plan (x, y) par (\bar{x}, \bar{y}) tel que $\bar{x} = x + \theta^0 l_x$ et $\bar{y} = y + \theta^0 l_y$
 - Calculer la direction d'amélioration $l = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$ par la formule (4.23) ;
 - Calculer le pas $\theta^0 = \min\{\theta_x, \theta_y, \theta_F\}$;
 - Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 l_x$, et $\bar{y} = y + \theta^0 l_y$;
 - ❺ Test d'optimalité du nouveau plan (\bar{x}, \bar{y}) ;
SI $\bar{E}_N \geq 0$, Alors
SI $\beta((\bar{x}, \bar{y}), J_B) \leq \epsilon$, alors
 le processus de résolution s'arrête avec $\{(\bar{x}, \bar{y}), J_P\}$
 plan de support ϵ -optimal ;
SINON, aller en ❸ ;
FIN SI
SINON ($\bar{E} \not\geq 0$), aller directement en ❸ ;
FIN SI
-

⑥ Changement de support J_P en \bar{J}_P ;

SI $\theta^0 = 1$, Alors

SI $J_{y_{NN1}} = \emptyset$, alors le vecteur $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) + l$ est une solution optimale, **FIN**.

SINON ($J_{y_{NN1}} \neq \emptyset$),
 $\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S, \bar{J}_P = J_P$;

FIN SI

FIN SI

SI $\theta^0 = \theta_{x_{j_1}} \vee \theta^0 = \theta_{y_{j_1}}$, Alors

SI $\exists j_0 \in J_S$ tel que $x_{j_1 j_0} \neq 0$, alors

$\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \bar{J}_S = J_S \setminus j_0, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_P\}$;

SINON, on choisira $j_0 \in J_{NN}$ tel que $l_{j_0} \neq 0$, alors

$\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \bar{J}_S = J_S, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_P\}$;

FIN SI

FIN SI

SI $\theta^0 = \theta_{j_s}$, alors

$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \setminus j_s, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$;

FIN SI

SI $\theta^0 = \theta_F$, alors

$\bar{J}_B = J_B, \bar{J}_S = J_S \cup j_0, \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_P\}$;

FIN SI

aller en ① avec le nouveau plan de support $\{(\bar{x}, \bar{y}); \bar{J}_p\}$.

FIN

4.8 Conclusion

La méthode que nous avons développée est inspirée de la méthode directe de support décrite dans le chapitre précédent. Nous avons proposé une autre métrique dite adaptée pour la direction d'amélioration, sa particularité est le fait de changer tous les indices non optimaux à la fois.

CHAPITRE 5

Résultats numériques et étude comparative

5.1 Introduction

L'évolution de l'utilisation du matériel informatique a révolutionné les méthodes de travail des ingénieurs et chercheurs sans oublier l'enseignement. Le traitement numérique des données, leur visualisation, ainsi que les techniques de modélisation et de simulation se sont notamment généralisés. Dans ce domaine, un logiciel commercial est devenu, ces dernières années, presque incontournable : il s'agit de Matlab de la société The Mathworks. Ce dernier met à la disposition de l'utilisateur un environnement performant pour mener à bien les calculs numériques.

Ce mémoire a également pour but de développer une implémentation informatique sous Matlab de ces différentes méthodes permettant de mener une étude comparative.

5.2 Choix du langage

Le choix s'est porté sur l'emploi du langage du logiciel Matlab 2008, car il répond aux critères suivants :

- ✓ La maniabilité du langage : constitué d'un ensemble de possibilités faisant en sorte que le programmeur travaille avec aisance, assuré d'une part par la syntaxe du langage et d'autre part par un aspect visuel clair représentatif à la fois du détail et du global.
- ✓ Le bagage du langage : il contient une interface graphique puissante ainsi qu'une grande variété de méthodes scientifiques implémentées (prédéfinies).
- ✓ La possibilité de travailler avec des fonctions facilite aux utilisateurs leurs travaux en leur évitant les répétitions.
- ✓ Facilité de manipulation des matrices (elles sont considérées comme une seule variable).

5.2.1 Généralités sur le langage

Matlab est un logiciel parfaitement dédié à la résolution de problèmes d'analyse numérique ou de traitement du signal. Permet d'effectuer des calculs matriciels ou de

visualiser les résultats sous forme graphique. La formulation des problèmes s'apparente à la formulation mathématique des problèmes à résoudre. L'utilisation de ce logiciel consiste à lancer des lignes de commandes, qui peuvent le plus souvent ressembler à la programmation en C.

Le nom Matlab vient de MATrix LABoratory, les éléments de données de base manipulés par Matlab étant des matrices (mais pouvant évidemment se réduire à des vecteurs et des scalaires) qui ne nécessitent ni dimensionnement ni déclaration de type. Contrairement aux langages de programmation classiques, les fonctions du Matlab permettent de manipuler directement et interactivement ces données matricielles, rendant ainsi le Matlab particulièrement efficace en calcul numérique, analyse et visualisation de données en particulier. Il existe deux modes de fonctionnement sur Matlab :

le mode interactif : les instructions sont exécutées au fur et à mesure qu'elles sont données par l'utilisateur.

le mode exécutif : dans ce cas, l'utilisateur utilise un fichier "M-file" contenant toutes les instructions à exécuter.

5.2.2 Programmation avec Matlab

Il existe deux façons pour l'écriture des fonctions Matlab : soit directement dans la fenêtre de commandes, soit en utilisant l'éditeur de développement de Matlab, en sauvegardant les programmes dans des fichiers texte avec l'extension ".m".

Fichiers *.m

Les programmes sauvegardés dans les fichiers Matlab (*.m) sont alors directement utilisables comme des fonctions Matlab à partir de la fenêtre de commande. Pour cela, le fichier doit se trouver dans le répertoire Matlab, qui est en pratique le dossier Work.

Création d'une fonction

La création d'une fonction dans Matlab se fait par la syntaxe suivante :

```
function [s1, s2, ...] = nomfonction(e1, e2, ...).
```

Les variables s_i , sont les paramètres de sortie de la fonction, et les variables e_j sont ses paramètres d'entrée.

Remarque 5.2.1. le fichier *.m(M-file) doit avoir le même nom que la fonction qu'il contient.

5.2.3 Plan initial :

Pour avoir une solution de départ, on fait recours au solveur **linprog**, prédéfini sous Matlab (versions ultérieure à 6.5), après avoir fait les modifications suivantes :

```
options = optimset('largescale', 'off', 'Simplex', 'on');  
defaultopt=struct('Display','final','TolFun',[],'Diagnostics','on',...  
'LargeScale','on','MaxIter',[],'Simplex','on');  
[x,fval,exitflag,output] = linprog(C,[],[],a,b,L,U,[],options),
```

5.2.4 Générateur d'exemples

Pour nous permettre de bien tester l'algorithme et s'assurer de l'efficacité de la méthode proposée, nous avons élaboré un générateur d'exemples tests qui permet de comparer ainsi la solution obtenue par la méthode étudiée, avec la solution exacte générée. Ce programme est une fonction appelée "generation_exemples_tests_hybrides" :

5.2.5 Générateur d'exemples tests

Paramètres d'entrées :

n_x : nombre de variables de décision bornées.

n_y : nombre de variables de décision positives.

m : nombre de contraintes.

Paramètres de sorties :

D_1 : matrice ($n_x \times n_x$) de la fonction objectif, elle est semi-définie positive,

D_2 : matrice ($n_y \times n_y$) de la fonction objectif, elle est semi-définie positive,

A : matrice ($m \times n_x$) de contraintes du problème,

H : matrice ($m \times n_y$) de contraintes du problème,

b : vecteur ($m \times 1$),

d^- : borne inférieure de x ,

d^+ : borne supérieure de x ,

(x^0, y^0) : solution optimale du problème généré.

c : vecteur ($n_x \times 1$),

p : vecteur ($n_y \times 1$),

Convention :

générer : est une fonction qui génère des nombres aléatoires dans $[-1, 1]$, suivant une loi uniforme.

Algorithme 11 Générateur d'exemples tests

Entrées : n_x, n_y, m ;

Début :

- ❶ Générer aléatoirement (ou bien fixer) la solution optimale (x^0, y^0) ;
- ❷ Générer le vecteur coplan $\delta_{x_j}^0, j \in \{1, \dots, n_x\}$ et prendre $\delta_{y_j}^0 = 0, j \in \{1, \dots, n_y\}$.
- ❸ Générer le m -vecteur des multiplicateurs λ^0 .
- ❹ Construire les n_x -vecteurs d^- et d^+ , tels que $d_j^- < d_j^+$, pour tout $j = 1, \dots, n_x$ tels que :

$$\begin{aligned} d_j^- &= x_j^0, & d_j^+ &> x_j^0, & \delta_{x_j}^0 &> 0, \\ d_j^- &< x_j^0, & d_j^+ &= x_j^0, & \delta_{x_j}^0 &< 0, \\ d_j^- &< x_j^0, & d_j^+ &> x_j^0, & \delta_{x_j}^0 &= 0, j \in \{1, \dots, n_x\}. \end{aligned}$$

5.3. LA MÉTHODE D'ACTIVATION DES CONTRAINTES POUR LA RÉOLUTION DE PQC

- ⑤ Générer la matrice associée à la forme quadratique $D_1 = G_1^T G_1, D_2 = G_2^T G_2$, où G_1 et G_2 sont de dimension $(r \times n_x)$, avec $\text{rang}(G_1) \leq r < n_x$ et $\text{rang}(G_2) \leq r < n_y$.
- ⑥ Générer les matrices A et H de dimension $m \times n_x$ et $m \times n_y$ respectivement.
- ⑦ Calculer le m -vecteur b de la manière suivante :

$$b = Ax^0 + Hy^0.$$

- ⑧ Déduire le n_x -vecteur c , tel que : $c = -D_1 x^0 + A^T \lambda + \delta_x^0$, et le n_y -vecteur p , tel que : $p = -D_2 y^0 + A^T \lambda + \delta_y^0$.
- ⑨ Calculer $F = \frac{1}{2}(x^0)^T D_1 x^0 + c^T x^0 + \frac{1}{2}(y^0)^T D_2 y^0 + p^T y^0$;

Fin.

5.3 La méthode d'activation des contraintes pour la résolution de PQC

Dans l'application, on a utilisé le solver "quadprog" (disponible sous Matlab pour les versions ultérieures à 6.5), en l'appelant ainsi :

```
D = [D1 zeros(n_x, n_y) ; zeros(n_y, n_x) D2] ;  
[x, fval, exitflag, output]=quadprog(D, [c ; p], [ ], [ ], [A, H], b, dinf, dsup) ;
```

tout en veillant à ce que les vecteurs bornes *dinf* et *dsup* soient complétés par 0_{n_y} et inf_{n_y} respectivement. Le $(n_x + n_y)$ -vecteur x est la solution optimale du problème. Pour avoir en sortie le nombre d'itérations on aura à composer le code suivant :

```
output.iterations
```

5.4 Comparaison entre les différentes méthodes

Avant de présenter les résultats contenus dans les tableaux, il faut apporter les précisions suivantes :

- Tous ces tests ont été menés sur le même ordinateur. Il est clair qu'il est possible d'améliorer les résultats en adaptant les paramètres des algorithmes à chaque problème particulier.
- Chaque problème a été résolu avec une même précision de 10^{-4} .
- Pour chaque problème test, la solution optimale (x^0, y^0) , ainsi que la valeur de la fonction objectif F^0 à l'optimum sont connues à l'avance.
- Les valeurs présentées dans ces tableaux ont été obtenues après plusieurs tests pour chaque valeur de (m, n_x, n_y) .

Notation :

- CPUtime : Temps moyen d'exécution (CPU) des problèmes tests (en secondes).
- nbr Iter : Nombre d'itérations moyen requis pour la résolution des problèmes tests.
- ΔF : Écart moyen entre F et F^0 .

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Activation des contraintes			Mise en échelle			Départ non admissible		
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF
0	2	1	0.96	0.0536	9.1507e-018	1.12	0.0841	3.4170e-010	9.10	0.0534	1.2967e-009
		1	1.31	0.0520	2.1025e-015	92.27	0.1403	1.1750e-006	9.83	0.0273	3.4026e-008
		2	1.09	0.0609	6.2172e-017	54.67	0.1253	9.1438e-007	9.58	0.0455	1.9891e-008
	5	3	1.00	0.0625	9.6589e-017	15.04	0.0503	6.4711e-007	9.35	0.0419	1.1928e-008
		1	1.00	0.0272	1.9984e-016	486.66	0.2086	1.5990e-006	9.95	0.0638	1.0307e-007
		5	1.00	0.0658	1.0036e-015	153.89	0.0941	1.3684e-006	9.42	0.0564	2.8132e-008
	10	7	1.00	0.0441	5.1514e-016	46.36	0.1052	7.7028e-007	9.21	0.0745	2.2918e-008
		2	1.00	0.0608	3.9080e-016	290.13	0.2216	1.50270e-006	9.91	0.0983	1.0281e-007
		10	1.00	0.0669	2.2737e-015	270.86	0.1167	1.0753e-006	9.25	0.1323	3.0209e-008
	15	15	1.00	0.0728	1.3678e-015	86.00	0.1955	9.6922e-007	9.15	0.0372	3.5047e-008
		5	1.00	0.1220	7.1054e-016	3042.00	1.1094	3.8850e-010	9.71	0.0148	8.6030e-008
		15	1.00	0.0778	9.2371e-016	599.50	0.4019	1.4177e-006	9.24	0.0144	8.5512e-008
	30	20	1.00	0.0906	1.0658e-015	285.23	0.2431	1.0236e-006	9.15	0.0142	5.6328e-008
		5	1.00	0.1816	1.0658e-014	3735.00	3.2344	2.7921e-010	9.89	0.0369	1.5241e-007
		25	1.00	0.1461	2.0179e-014	435.00	0.7813	6.8781e-011	9.11	0.0352	1.2287e-007
	30	30	1.00	0.1469	1.5632e-014	680.79	0.9419	7.9668e-007	9.04	0.0381	8.7929e-008
		5	1.00	0.2231	9.0949e-015	3691.50	16.9215	6.2817e-008	10.31	0.1972	2.8050e-007
		25	1.00	0.2181	2.2737e-014	3587.60	16.3266	1.8394e-009	9.16	0.1900	2.1822e-007
	100	50	1.00	0.2216	7.5033e-014	4250.80	26.0141	4.1691e-009	9.00	0.2142	9.9506e-008
		10	1.00	0.9983	1.0687e-012	8282.00	199.8594	4.6689e-009	10.56	1.3438	3.2889e-007
		50	1.00	0.6906	6.0027e-013	1306.00	39.0469	2.5029e-009	9.03	1.2597	2.3740e-007
	100	100	1.00	0.4633	2.8194e-013	2298.00	85.9688	3.5698e-010	9.00	1.4216	1.5730e-007
		10	1.00	3.2364	4.5475e-014	10131.20	300.1561	2.1651e-009	10.96	4.6372	3.3288e-007
		50	1.00	2.4681	3.0923e-013	8717.30	270.1617	1.5422e-008	9.20	4.2828	1.9191e-005
300	100	1.00	1.8791	1.8190e-014	8518.50	290.1829	2.6312e-008	9.00	4.5703	9.8723e-006	
	10	1.00	14.0691	1.6007e-012	13517.20	500.1942	3.6132e-009	10.50	19.7359	1.6530e-005	
	50	1.00	12.3216	3.3469e-012	14228.10	490.2032	1.5613e-009	9.30	18.2531	4.3315e-005	
500	100	1.00	10.9694	1.0914e-012	14627.30	539.2000	2.5673e-008	9.00	18.5047	1.5357e-005	
	0	1	1.19	0.0373	3.4348e-018	1.00	0.0733	1.7536e-006	9.64	0.1097	4.7442e-006
	1	3.07	0.0663	4.9960e-018	14.18	0.0994	6.1695e-006	9.72	0.0653	9.2801e-006	
2	2	2.07	0.0592	5.4123e-018	8.03	0.3289	3.3346e-007	30.32	0.3975	1.1251e-005	
	3	1.31	0.0616	7.2164e-018	1.80	0.3625	9.1535e-008	31.12	0.4011	1.1779e-005	
	1	4.94	0.0514	1.5044e-016	48.12	0.5231	1.2146e-007	10.10	0.0044	4.2558e-006	
5	3	3.43	0.0491	6.7724e-017	24.16	0.4136	2.1347e-007	13.40	0.1556	4.5212e-006	
	5	2.11	0.0534	4.4964e-017	4.70	0.3297	3.5523e-007	13.60	0.1612	3.1415e-006	
	2	6.80	0.0967	4.5075e-016	230983.00	34.5938	1.7472e-006	9.72	0.0056	1.0530e-005	
10	5	3.68	0.0892	3.0642e-016	236756.00	39.7656	1.6457e-006	9.58	0.0078	1.3104e-005	
	7	3.16	0.0644	2.4869e-016	177416.00	30.3438	1.2739e-006	9.66	0.0098	1.3044e-005	
	5	5.08	0.0927	3.5527e-016	171117.00	43.8750	2.6590e-006	9.75	0.0113	9.8055e-006	
20	10	3.28	0.0811	1.0658e-016	255499.00	72.1094	1.7210e-006	9.74	0.0113	1.2107e-005	
	15	3.18	0.0697	2.9843e-015	223252.00	71.6719	1.2146e-006	9.70	0.0123	1.4060e-005	
	5	5.78	0.0908	1.7764e-015	673676.00	291.3750	8.8803e-007	9.82	0.0170	1.0289e-005	
30	10	3.82	0.1177	1.9185e-015	607030.00	283.2500	8.2721e-007	9.58	0.0191	1.1799e-005	
	15	3.18	0.1228	6.3238e-015	415353.00	221.5781	1.2102e-006	9.52	0.0200	1.6437e-005	
	5	11.52	0.1744	4.4054e-015	448850.00	404.5625	1.1501e-006	10.03	0.0395	8.4693e-006	
50	10	4.98	0.1883	1.6058e-014	170419.00	164.2500	2.8533e-006	9.72	0.0389	1.2589e-005	
	25	3.12	0.1588	3.5527e-015	85624.00	111.3594	5.6881e-006	9.42	0.0447	2.3618e-005	
	5	23.08	0.4067	3.2969e-014	450160.00	507.2101	1.3543e-006	10.16	0.2250	8.3923e-006	
100	10	6.68	0.2484	1.7508e-013	200175.00	213.7423	2.5442e-006	9.81	0.2283	1.3969e-005	
	50	3.08	0.1927	7.2760e-014	100231.00	150.4221	3.2153e-006	9.09	0.2412	4.2926e-005	
	5	64.82	3.2986	1.8190e-014	455360.00	626.2131	2.6783e-006	10.65	1.4575	1.0115e-005	
200	25	4.46	0.9753	3.1832e-014	431210.00	600.1301	1.5490e-006	9.30	1.3381	2.4743e-005	
	100	3.08	0.5369	1.7735e-013	400160.00	575.6201	2.5733e-006	9.00	1.5316	5.1977e-005	
	5	115.96	15.9511	4.7294e-013	460260.00	791.7102	6.3213e-006	11.06	4.9047	9.8145e-006	
300	25	5.70	3.6984	1.4916e-012	451340.00	712.5643	2.8742e-006	9.60	3.3031	3.1195e-005	
	100	3.16	2.1364	6.0027e-013	420113.00	688.7643	2.8863e-006	9.00	3.4188	8.0621e-005	
	10	120.32	26.3210	5.1382e-012	710212.00	972.5432	6.8763e-006	12.00	16.7250	1.2256e-006	
500	50	8.14	18.4481	6.8394e-012	700126.00	893.8421	9.8632e-007	9.00	13.1750	7.0606e-005	
	100	3.34	12.2405	5.0568e-012	680313.00	788.9852	3.3513e-006	9.00	14.0313	4.0028e-005	

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Activation des contraintes			Mise en échelle			Départ non admissible			
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	
10	0	1	9.44	0.0842	1.0436e-016	11.70	0.2328	4.8783e-007	10.16	0.0352	3.5385e-005	
		5	5.53	0.0644	1.4211e-016	6.00	0.0313	4.7120e-007	9.50	0.0078	3.5754e-007	
		7	1.91	0.0684	2.6201e-016	1.00	0.0156	1.4211e-013	8.00	0.0078	2.7258e-007	
	2	2	10.83	0.0602	2.6645e-017	13.00	0.0156	6.1570e-007	9.90	0.0819	3.8018e-005	
		5	8.41	0.0728	5.0793e-016	11.00	0.0313	9.2463e-007	10.30	0.0719	2.5244e-005	
		7	5.40	0.0458	8.1601e-017	10.00	0.0156	3.3003e-007	9.00	0.0391	4.4624e-005	
	5	2	12.89	0.0628	5.3402e-016	176660.00	51.7188	1.1148e-006	10.00	0.0259	4.0546e-005	
		5	10.83	0.0639	1.9540e-016	32.00	0.0313	4.2292e-007	10.20	0.0134	3.8623e-005	
		10	5.42	0.0844	9.4591e-016	10.00	0.0313	7.3041e-007	10.00	0.0156	6.4055e-006	
	10	5	11.80	0.0712	7.3164e-016	799272.00	307.3906	2.7476e-006	9.90	0.0145	4.2564e-005	
		10	10.60	0.0977	3.0420e-016	14.00	0.0313	3.7147e-007	10.70	0.0173	2.5979e-005	
		15	5.50	0.0670	2.5802e-015	10.00	0.6406	2.4397e-007	9.60	0.1350	1.5473e-005	
	20	5	13.60	0.0997	2.0606e-015	885396.00	523.6563	2.4866e-006	10.00	0.0267	3.7744e-005	
		10	11.50	0.1623	1.3500e-015	958829.00	616.3281	2.8205e-006	10.00	0.0241	4.0676e-005	
		20	10.30	0.0688	9.2371e-016	56.00	0.1719	7.4788e-007	11.10	0.0320	2.3430e-005	
	30	5	16.10	0.1533	9.9476e-016	1639589.00	919.0000	1.8018e-006	10.00	0.0347	3.8252e-005	
		20	11.50	0.1075	5.2225e-015	574588.00	634.0781	4.2571e-006	10.10	0.0431	4.4061e-005	
		25	11.40	0.1078	1.4921e-015	474324.00	584.7813	3.7787e-006	10.40	0.0481	4.0599e-005	
	50	5	21.70	0.2000	3.4106e-015	1733423.10	1132.6543	2.7636e-006	10.15	0.0788	3.1088e-005	
		20	11.90	0.2017	1.1369e-014	613321.20	723.8765	3.8274e-006	10.02	0.0873	4.1199e-005	
		30	11.40	0.1186	1.9895e-014	497221.40	601.7654	3.8626e-006	10.02	0.0934	4.2164e-005	
	100	5	31.60	0.5881	1.3415e-013	1923231.50	1428.5643	4.9188e-007	10.18	0.3053	3.3810e-005	
		25	12.20	0.2894	6.1391e-014	725231.30	1127.3463	3.8717e-006	9.98	0.3241	3.8085e-005	
		50	11.30	0.2516	5.2296e-014	532321.50	856.4856	1.8737e-007	10.05	0.3739	4.7411e-005	
	200	10	19.10	1.9525	1.9099e-013	2123423.10	1967.5475	1.0198e-006	10.34	1.8223	3.1980e-005	
		50	11.70	1.2469	7.7307e-013	737141.20	1534.6754	2.9173e-006	9.50	1.3359	2.2756e-004	
		100	11.10	0.8534	2.1828e-013	539324.10	1030.5643	3.2717e-006	9.50	1.4922	1.2338e-004	
	300	10	29.10	7.1680	3.3651e-012	2140231.20	2585.4320	2.8166e-006	11.00	4.2266	1.0072e-005	
		50	12.90	4.0805	1.5461e-012	760214.20	1967.4642	3.8266e-006	9.00	3.7422	9.1603e-005	
		100	11.30	2.7914	1.6371e-012	542314.60	1436.5646	4.8173e-006	9.00	4.0234	2.0172e-004	
	500	10	54.20	40.8156	9.0949e-013	2170342.70	3175.5643	2.8163e-006	12.00	18.1953	1.1358e-005	
		50	14.30	19.6727	1.0550e-011	767277.20	2543.8567	9.8177e-007	9.00	14.4375	2.2543e-004	
		100	11.70	17.0969	6.0027e-012	550316.70	1867.4568	2.1887e-006	9.00	15.2578	2.9304e-004	
	30	0	5	31.98	0.1916	4.8317e-015	13.20	5.2832	3.7165e-006	10.29	0.0658	6.0550e-005
			15	19.84	0.0956	3.9790e-015	7.40	3.1728	3.7626e-006	9.79	0.1288	3.0114e-005
			20	2.48	0.1694	3.2685e-015	1.80	1.3126	3.6255e-006	8.83	0.1847	1.0783e-006
		2	5	30.34	0.1997	4.6896e-015	14.20	7.2631	2.4275e-006	10.54	0.0936	5.6977e-005
			15	25.78	0.1978	1.2221e-014	10.30	5.1436	1.7385e-006	10.00	0.2031	8.6513e-005
			20	7.84	0.1659	2.4869e-015	8.20	3.2639	9.9776e-007	9.30	0.4250	4.3962e-006
		5	5	33.92	0.2213	5.1159e-015	176321.20	79.2631	2.8661e-006	10.57	0.0791	1.3387e-004
			15	31.60	0.2072	3.5527e-015	48.30	8.3226	2.9183e-006	10.03	0.0798	9.5469e-005
			20	20.94	0.1972	1.0090e-014	20.10	3.9732	8.9277e-006	10.00	0.2297	6.7002e-005
		10	5	34.42	0.2419	2.1316e-015	800315.20	412.3213	1.9273e-006	10.13	0.1020	1.6464e-004
			20	32.82	0.1244	1.4211e-016	29.40	8.4826	3.8273e-006	10.30	0.1281	1.3174e-004
			25	18.46	0.1244	2.2737e-015	21.20	2.4231	3.7266e-006	9.80	0.1750	5.4524e-005
		20	5	34.36	0.2734	5.4001e-015	886420.10	623.4281	2.8173e-006	10.00	0.1453	1.5589e-004
			25	32.36	0.1806	1.5632e-015	959310.20	649.5213	2.8173e-006	11.30	0.1797	4.8237e-005
			30	32.96	0.1600	1.5774e-014	70.20	10.3817	3.8273e-006	10.40	0.1812	1.1621e-004
		30	5	36.36	0.2072	1.6485e-014	1641320.40	1529.30	9.8727e-007	10.20	0.1797	1.5424e-004
			30	31.12	0.2550	4.2633e-015	579321.70	728.1010	8.7266e-007	13.20	0.2391	9.5386e-006
40			33.36	0.1341	1.5348e-014	479427.90	210.0010	2.1774e-006	11.20	0.2281	8.0745e-005	
50		5	40.80	0.3787	2.3306e-014	1740579.10	1226.3049	2.8664e-006	10.00	0.2750	2.0185e-004	
		40	31.64	0.1981	2.2737e-015	615212.70	841.4020	4.8717e-006	11.10	0.3688	6.4274e-005	
		50	30.76	0.1619	3.1264e-014	499140.20	720.2001	2.8173e-006	13.80	0.4828	1.5472e-006	
100		5	54.52	0.9819	4.5475e-014	1932420.20	1536.8900	4.8727e-006	10.40	0.7922	1.3154e-004	
		30	32.20	0.6344	1.8645e-013	735134.10	1220.2030	3.8736e-006	10.40	0.8453	1.0850e-004	
		50	31.56	0.4772	8.4128e-014	536731.20	920.4080	2.8266e-006	10.00	0.8531	1.9725e-004	
200		10	37.96	3.4444	8.9130e-013	2126730.10	2001.8286	4.8737e-006	10.40	3.3062	1.3129e-004	
		50	32.24	2.3438	1.9099e-013	741520.30	1632.4031	8.8274e-006	10.10	3.4969	1.1401e-004	
		100	31.88	1.7366	2.0918e-013	543740.40	1120.6210	9.8737e-007	10.40	3.7813	1.1672e-004	
300		10	38.20	9.4859	7.0031e-012	2149315.60	2716.2020	9.3747e-007	10.70	8.6094	1.1355e-004	
		50	33.80	7.5125	2.7285e-013	765320.40	2020.1033	4.7366e-006	10.00	8.3453	1.4980e-004	
		100	31.40	5.5250	1.8190e-012	547312.50	1500.2000	2.2776e-006	10.20	9.0922	1.2397e-004	
500		10	58.00	47.0859	6.1846e-012	2190620.70	3220.4323	3.7643e-006	11.00	21.3984	3.2468e-005	
		50	35.40	32.8250	7.2760e-013	771324.50	2820.5463	1.7364e-006	10.00	20.2500	4.0142e-004	
		100	31.80	27.2094	1.0186e-011	556320.10	1926.3810	3.8274e-006	10.00	21.1406	1.0768e-004	

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Activation des contraintes			Mise en échelle			Départ non admissible			
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	
50	0	5	53.10	0.2016	9.6634e-015	130.20	10.4123	6.3544e-006	10.68	0.2406	1.7613e-004	
		25	47.22	0.1317	1.7010e-013	50.10	5.2136	3.6465e-006	10.01	0.3137	7.2560e-005	
		30	11.12	0.1075	1.4211e-014	31.20	2.0314	2.7465e-006	9.44	0.2900	5.9116e-006	
	2	5	51.59	0.1631	5.9686e-015	138.10	11.8321	1.6183e-006	10.86	0.2719	1.6930e-004	
		25	48.93	0.2109	6.1902e-013	55.20	6.0321	3.8274e-006	10.20	0.3922	1.4962e-004	
		30	24.62	0.1948	2.7143e-014	33.10	2.1327	6.6284e-006	10.00	0.2500	1.5009e-004	
	5	5	54.72	0.2145	2.0037e-014	187483.40	87.2632	2.9828e-006	10.62	0.3294	2.1984e-004	
		25	66.15	0.1719	9.8433e-012	238.20	9.9321	9.8193e-007	10.00	0.3563	2.0625e-004	
		30	42.50	0.2800	2.3363e-013	70.30	4.3942	3.8266e-006	10.50	0.3125	1.2644e-004	
	10	5	54.17	0.2425	6.6791e-015	810813.40	502.3826	2.3362e-006	10.24	0.3063	2.9902e-004	
		30	65.01	0.1966	1.1421e-012	348.30	9.3624	1.8372e-006	10.50	0.3281	1.3779e-004	
		40	10.31	0.2689	6.8212e-015	210.20	3.2633	8.8173e-007	9.50	0.3359	5.5712e-007	
	20	5	56.16	0.3063	4.0075e-014	895717.40	702.3834	2.7663e-006	10.10	0.3578	3.0711e-004	
		30	70.36	0.3392	9.6634e-015	964420.60	627.3934	2.8177e-006	11.20	0.4500	1.0071e-004	
		40	66.08	0.2819	4.7265e-013	520.30	20.3876	3.8194e-006	10.20	0.4766	2.5949e-004	
	30	5	59.56	0.4169	9.1518e-014	1667710.40	1614.3877	4.8772e-006	10.10	0.5047	3.3949e-004	
		40	68.10	0.3419	2.3306e-014	593430.70	842.4297	5.8748e-006	11.50	0.6547	7.2734e-005	
		50	62.37	0.3420	6.0822e-013	487834.30	320.7900	4.8274e-006	10.30	0.6359	3.1287e-004	
	50	5	60.96	0.6770	8.1741e-013	1781740.60	1714.3801	2.8177e-006	10.00	0.7141	3.4757e-004	
		40	51.90	0.4277	1.3642e-014	631340.70	902.4301	3.8727e-006	11.80	0.9547	1.1571e-004	
		50	52.26	0.3908	2.4158e-014	503480.80	803.3206	4.8727e-006	14.10	1.1344	2.3739e-006	
	100	5	83.06	1.7664	1.0539e-012	1952740.10	1760.3244	3.8277e-006	10.80	1.6234	2.5759e-004	
		50	51.82	1.0294	4.2064e-014	751320.40	1302.6308	3.1873e-006	10.50	1.7281	2.1554e-004	
		60	51.50	0.9748	6.2528e-014	536320.50	988.7320	3.8727e-006	10.90	1.9266	1.7780e-004	
	200	10	62.40	5.5881	1.1823e-013	2152340.70	2070.2830	9.8664e-007	10.80	5.3469	2.1587e-004	
		50	52.36	3.9588	6.2755e-013	753477.10	1690.3080	3.7266e-006	10.20	5.1953	2.1097e-004	
		100	51.72	3.0300	3.0923e-013	569830.20	1280.4070	4.7748e-006	10.80	5.9891	1.6195e-004	
	300	10	56.20	14.6031	2.1828e-012	2163720.40	2820.5000	2.7163e-006	10.30	11.5125	2.5736e-004	
		50	53.20	11.3813	5.4570e-013	791240.70	2130.8301	2.7166e-006	10.80	12.4109	1.1028e-004	
		100	51.60	8.5266	3.2742e-012	556710.00	1599.4201	1.4718e-006	10.70	12.9750	1.4895e-004	
	500	10	70.20	60.1891	7.6398e-012	2198413.10	3319.3630	3.7818e-006	11.00	26.8047	1.2574e-004	
		50	55.40	45.3094	1.4552e-012	779871.40	2917.1437	4.9284e-006	10.00	25.8281	3.8431e-004	
		100	51.80	38.2687	4.3656e-012	563740.20	2016.2098	5.9828e-006	11.00	28.9844	2.9061e-005	
	100	0	10	135.92	0.9809	2.2737e-014	370.40	19.2073	4.7717e-006	12.10	2.0491	5.2442e-005
			25	242.02	1.3078	7.2760e-014	180.50	8.4321	4.8145e-006	10.56	1.8509	3.1965e-004
			50	120.12	1.2047	1.3247e-010	90.20	3.2832	3.7179e-006	10.50	2.3234	1.7968e-004
		2	10	123.58	0.8834	9.5497e-014	490.40	20.4632	7.8373e-006	12.44	2.0331	4.7260e-005
			25	232.70	1.1953	6.1391e-014	260.10	10.2034	2.7193e-006	10.80	1.8656	2.6782e-004
			50	130.62	0.9503	1.2768e-010	110.80	3.4361	2.7391e-006	10.00	1.4609	8.9446e-004
		5	10	111.44	0.8191	3.1832e-014	203940.20	99.1031	1.8194e-006	12.90	2.2406	2.2434e-005
			25	210.70	1.1397	2.7285e-014	739.40	13.2030	1.9183e-006	11.10	2.0703	1.9347e-004
			50	179.12	1.0388	1.0564e-010	310.20	6.1303	1.7163e-006	10.20	2.1313	5.0971e-004
		10	10	105.06	0.8044	2.9559e-014	831440.50	648.1031	1.0194e-006	12.50	2.2656	3.4473e-005
			25	170.96	0.9681	2.2737e-014	920.70	15.3420	1.0956e-006	12.00	2.3000	3.0396e-005
			50	230.90	1.0684	4.3417e-011	513.40	6.3776	2.8174e-006	10.20	2.1219	5.1799e-004
		20	10	103.52	0.9916	1.8508e-012	913710.60	800.1431	2.0282e-006	11.30	2.4719	2.0231e-004
			50	259.98	1.3819	1.6826e-013	992430.20	699.4200	1.8636e-006	10.80	2.4828	2.7367e-004
			60	244.30	1.3538	5.0431e-012	1032.30	21.2801	4.8137e-006	10.30	2.4500	5.6416e-004
		30	10	103.68	1.2528	4.9340e-013	1693720.10	1720.4031	2.9187e-006	11.40	2.6688	2.6712e-004
			50	197.08	1.3016	8.6402e-014	612792.40	919.6322	3.8173e-006	12.10	3.0859	3.0656e-005
60			248.16	1.5403	1.9099e-013	507231.20	370.7424	9.9183e-007	11.00	3.0844	1.9125e-004	
50		10	103.56	1.8138	4.3201e-014	1803531.10	1874.3831	3.8714e-006	11.20	3.3000	2.5545e-004	
		50	103.28	1.3019	2.1373e-013	682731.20	1028.4210	4.0194e-006	16.00	5.1734	3.9145e-007	
		60	132.96	1.4009	1.4325e-013	530920.30	916.3030	2.9183e-006	14.00	4.6078	3.8565e-006	
100		10	105.92	3.9712	1.0459e-011	1980790.40	1890.4120	1.8136e-006	10.90	5.5812	3.8048e-004	
		50	101.80	2.9078	8.6402e-014	782420.30	1480.0300	4.9183e-006	11.60	6.4219	1.5897e-004	
		100	102.62	1.9703	4.0927e-014	559480.10	1016.4370	3.8173e-006	17.20	10.1719	3.7508e-008	
200		10	109.72	13.3956	6.7394e-012	2193740.20	2187.8303	2.8173e-006	11.90	13.7094	1.6325e-004	
		50	102.40	10.3406	9.8225e-013	779222.40	1826.3404	2.913e-006	11.00	13.4406	3.5112e-004	
		100	101.92	7.5544	4.6384e-013	592422.50	1417.3800	4.9183e-006	11.60	15.0688	7.2450e-005	
300		10	114.80	31.3289	1.3642e-013	2189314.60	2994.4430	3.8188e-006	12.00	25.4000	6.2382e-005	
		50	102.40	25.3289	9.5497e-013	807732.40	2310.0310	4.1884e-006	11.30	25.1203	1.7847e-004	
		100	102.50	20.4617	2.1828e-012	578638.60	1731.4370	3.7163e-006	11.20	26.3203	2.8489e-004	
500		10	134.60	114.6000	7.3487e-011	2217398.40	3527.0875	2.8173e-006	13.00	51.0234	5.2778e-006	
		50	101.80	85.4406	1.1642e-011	797447.10	3014.9310	2.9166e-006	11.50	46.8047	6.7913e-005	
		100	103.80	75.3281	8.0036e-012	587320.20	2172.7300	3.6163e-006	11.50	48.2188	5.8052e-005	

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Activation des contraintes			Mise en échelle			Départ non admissible			
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	
200	0	10	236.50	5.4555	6.8212e-014	730.40	70.3210	2.1881e-006	14.00	18.5641	1.7831e-006	
		50	933.05	12.9664	9.0949e-014	320.60	35.2302	2.7173e-006	11.70	16.6703	2.3998e-004	
		100	952.04	13.5342	5.0199e-014	180.40	21.2673	3.0194e-006	11.00	14.3402	2.9183e-006	
	2	10	239.60	5.7687	1.8190e-013	860.10	74.4370	3.8717e-006	12.50	18.7348	2.8173e-006	
		50	1019.40	13.7312	1.0004e-012	380.40	40.2830	2.8173e-006	11.60	16.6391	2.1598e-004	
		100	883.50	17.3841	1.8163e-012	210.20	23.4304	3.9183e-006	11.10	15.7361	2.0183e-006	
	5	10	208.40	5.4781	4.5475e-013	224726.30	235.4203	2.1988e-006	14.00	19.0188	2.0886e-004	
		50	858.40	12.1438	2.7285e-013	1727.40	51.3808	1.9183e-006	12.30	17.9422	2.4744e-005	
		100	945.50	28.1473	1.8367e-013	1030.20	42.3403	2.9183e-006	10.70	17.4078	1.1918e-006	
	10	10	205.60	6.0469	4.5475e-013	859740.30	934.3803	1.8173e-006	13.50	19.2469	1.7024e-004	
		50	692.60	11.3719	1.8190e-013	3420.40	103.8203	2.9183e-006	12.40	18.6359	2.0834e-005	
		100	1018.20	14.6719	1.6371e-012	2530.20	98.3877	3.9019e-006	12.30	18.7603	1.9183e-006	
	20	10	204.20	7.2469	5.4570e-013	937814.10	1428.3883	2.1983e-006	12.20	18.6313	1.0310e-004	
		50	543.00	10.1781	1.8190e-013	998327.40	1027.8792	3.9183e-006	12.60	20.2781	2.0031e-005	
		100	1238.20	17.6406	1.0004e-012	70321.40	813.4030	4.9828e-006	10.80	18.8656	6.3002e-004	
	30	10	205.80	8.0188	1.8190e-013	1705723.50	2528.3030	4.8374e-006	12.60	20.4031	4.0977e-005	
		50	382.00	9.3000	1.0004e-012	637834.20	2014.1020	3.8717e-006	13.60	22.6500	6.1137e-006	
		100	1268.80	22.2125	5.4570e-013	530340.60	1104.7033	2.9183e-006	11.00	20.2312	5.6154e-004	
	50	10	206.60	10.3094	8.1855e-013	1840374.30	2941.8031	3.9183e-006	11.80	21.8438	8.2917e-004	
		50	200.00	8.0813	1.0004e-012	699340.20	2170.3803	7.8173e-006	17.60	31.9219	1.6876e-008	
		100	857.00	18.1687	1.0004e-012	556343.10	1516.7303	2.8141e-006	12.00	24.5313	4.4110e-005	
	100	10	204.60	18.1313	5.4570e-013	1995933.20	3010.8221	1.9183e-006	12.80	31.2250	9.8389e-005	
		50	202.60	14.4281	1.2733e-012	797320.40	2613.7200	9.8173e-006	12.80	32.0063	3.0148e-005	
		100	201.20	11.0938	1.5461e-012	570843.20	2020.3701	2.1019e-006	17.80	44.8406	3.2575e-008	
	200	10	210.20	44.0562	6.3665e-012	2220890.10	3140.2813	2.1983e-006	12.40	48.2406	5.6407e-005	
		50	201.00	36.5438	8.7311e-012	788320.40	2920.4078	3.1885e-006	13.20	53.1781	2.2536e-005	
		100	201.40	28.7344	7.4579e-012	607347.30	2430.6078	4.9183e-006	12.00	51.0531	6.2148e-005	
	300	10	229.80	92.1156	1.6647e-009	2229530.40	3928.4038	2.9188e-006	12.80	75.8594	5.4917e-005	
		50	202.20	74.6563	2.5466e-012	830730.20	3214.2779	4.9183e-006	12.20	74.6750	1.0679e-004	
		100	202.60	62.8375	5.0932e-012	593720.40	2826.4710	3.9188e-006	12.60	79.8812	2.8506e-005	
	500	10	209.00	245.3385	1.0359e-008	2320413.20	4070.2830	9.1983e-007	14.00	118.5156	2.3880e-006	
		50	203.60	217.5052	1.0914e-011	813520.20	3817.1730	1.9188e-006	14.00	120.6563	6.6555e-007	
		100	203.00	189.6458	2.1828e-011	596340.10	3314.2845	2.0193e-006	12.00	108.5000	5.8839e-005	
	500	0	10	514.60	127.1823	2.4253e-012	2060.40	110.8200	2.8188e-006	18.00	237.7031	4.3437e-009
			50	1389.3	193.3229	4.8506e-012	1060.20	51.2830	2.1009e-006	15.00	207.2656	7.0196e-007
			100	3690.00	370.1875	2.1828e-011	940.10	38.1760	3.1877e-006	13.00	192.5156	1.4068e-005
		2	10	515.00	129.9844	1.7276e-011	1220.30	114.7820	1.8737e-006	13.50	196.7342	1.9377e-006
			50	1249.50	186.6484	1.0914e-011	1320.40	62.3010	1.9374e-006	14.00	194.8750	8.2440e-006
			100	3735.00	383.8906	9.0949e-012	1020.60	43.2026	3.8173e-006	14.00	200.5781	4.6367e-007
		5	10	503.00	130.0313	3.6380e-012	263920.40	517.3034	1.8838e-005	17.00	228.1719	1.4941e-008
			50	1183.00	176.8047	1.8190e-011	3480.00	90.7320	2.8177e-006	14.00	196.2813	9.5915e-006
			100	4150.50	461.5547	9.0949e-012	2340.40	73.8200	3.8173e-006	14.00	201.9219	5.7964e-006
		10	10	660.00	169.8047	1.8190e-012	883310.60	1248.1400	2.1873e-006	16.00	218.7344	2.8005e-008
			50	1380.00	205.4141	5.4570e-012	8420.40	250.3020	3.9183e-006	15.00	211.2656	1.0558e-006
			100	3214.00	347.5000	1.2733e-011	4310.20	160.2010	3.1887e-006	13.00	192.1875	2.8279e-005
		20	10	557.00	159.0781	3.6380e-012	973730.40	1970.4070	2.1883e-006	14.00	199.5313	8.2728e-006
			50	780.00	158.0234	1.0914e-011	1079340.20	1530.2830	2.9188e-006	15.00	217.6719	1.5660e-006
			100	2986.50	346.9219	1.0914e-011	106303.40	1020.1420	2.1888e-006	14.00	211.0000	2.5319e-006
30		10	509.00	156.5938	7.2760e-012	1820394.20	2920.4310	4.8273e-006	15.00	219.6719	7.9517e-007	
		50	643.00	152.7656	1.4552e-011	679436.20	2442.8620	2.7716e-006	16.00	236.7188	4.7183e-007	
		100	2277.00	290.3594	7.2760e-012	570427.10	2028.0304	2.8871e-006	14.00	216.7969	5.0967e-006	
50		10	501.00	177.8281	1.0310e-012	1881367.20	3741.3017	3.8101e-006	13.00	203.5156	5.8749e-005	
		50	540.00	166.1719	1.8190e-011	725410.10	3126.4028	4.3913e-006	19.00	289.3438	2.9322e-009	
		100	1426.00	229.6406	3.6380e-012	591471.30	2314.5017	1.8183e-006	15.00	241.4063	8.5873e-007	
100		10	507.00	234.0000	1.4552e-011	2070731.40	3991.7328	4.9183e-006	14.00	245.0781	1.3074e-005	
		50	501.00	207.3438	1.0914e-011	815340.60	3583.8217	3.8173e-006	15.00	265.2969	1.0055e-006	
		100	500.00	174.1250	3.6380e-011	598392.70	3017.1420	1.9183e-006	20.00	351.3594	2.1810e-006	
200		10	515.00	395.6875	1.4552e-011	2260378.90	4117.2062	1.2483e-006	15.00	327.5000	1.5588e-006	
		50	501.00	350.1250	1.0130e-012	807439.80	3918.4178	4.0174e-006	15.00	333.8125	8.2698e-007	
		100	501.00	305.1406	5.0932e-011	613520.10	3520.1734	2.1991e-006	14.00	321.5313	7.5020e-006	
300		10	503.00	601.3438	1.0420e-012	2293498.80	4317.2810	1.1019e-006	14.00	382.7500	1.2740e-005	
		50	501.00	552.3750	4.3656e-011	871920.80	4020.7301	2.1910e-006	14.00	389.1875	1.2571e-005	
		100	503.00	490.0625	4.3656e-011	616630.20	3717.8205	1.9138e-006	14.10	397.6532	1.0193e-006	
500		10	803.00	1774.7000	2.1828e-011	2377477.40	4627.3928	2.0198e-006	15.30	597.7031	3.7606e-006	
		50	501.00	1153.9000	1.4552e-011	856720.60	4214.1010	1.9188e-006	15.10	606.9273	1.3183e-006	
		100	501.00	1058.1000	3.6380e-011	617320.40	3917.2049	3.0118e-006	15.00	619.3281	2.0774e-006	

TAB. 5.1: Résultats numériques pour la méthode d'activation des contraintes, mise en échelle et à départ non admissible

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Suivi du chemin pas court			Suivi du chemin pas long			Predicteur correcteur			
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	
0	2	1	46.40	0.0406	9.4857e-006	19.40	0.1625	2.3173e-007	12.00	0.0063	1.6597e-006	
		1	82.20	0.1812	1.6880e-005	27.20	0.0172	9.9798e-006	19.40	0.0531	3.1468e-004	
		2	80.00	0.1719	1.1384e-004	24.10	0.1531	5.0798e-004	17.20	0.1281	8.2701e-007	
	5	3	78.80	0.1781	2.6786e-005	22.80	0.1797	1.8128e-005	16.80	0.1688	3.2949e-006	
		1	120.40	0.2219	1.3116e-004	28.50	0.0313	4.6128e-005	19.40	0.1125	6.6342e-007	
		5	104.20	0.2969	4.9827e-005	23.40	0.1281	2.4609e-005	20.80	0.1656	9.8368e-007	
	10	7	90.00	0.2109	7.0613e-005	21.60	0.1250	2.3485e-005	11.40	0.1063	2.6326e-005	
		2	169.40	0.2734	3.4846e-004	27.00	0.1641	8.0022e-005	19.80	0.1406	1.5293e-004	
		10	160.50	0.3297	1.5718e-004	24.30	0.1609	2.5285e-005	16.20	0.1422	6.7913e-005	
	20	15	119.70	0.2969	2.1305e-005	18.30	0.2109	1.1226e-005	13.40	0.1125	7.8913e-006	
		5	210.70	0.3797	2.1535e-004	31.60	0.2172	8.9375e-005	19.60	0.1125	1.3858e-004	
		15	169.30	0.4750	7.0124e-005	23.00	0.2078	3.6985e-005	18.80	0.2594	6.8859e-005	
	30	20	149.00	0.4547	1.1094e-004	20.50	0.2016	1.9257e-005	13.80	0.2078	1.8519e-005	
		5	268.30	0.7562	4.6540e-004	29.50	0.2453	2.1267e-004	19.40	0.2266	9.6616e-005	
		25	224.00	1.0313	6.5724e-005	23.40	0.2938	8.4521e-005	18.80	0.4063	4.9999e-005	
	50	30	206.60	1.0031	8.3920e-005	21.80	0.3156	6.5806e-006	16.40	0.2531	1.5564e-004	
		5	374.50	4.2109	7.3443e-004	29.40	0.6188	3.2925e-004	20.20	0.7125	3.0168e-004	
		25	380.50	5.0563	4.7405e-004	30.70	0.7156	1.0725e-004	21.20	0.9969	1.7765e-004	
	100	50	328.00	5.6641	3.5235e-004	25.60	0.9406	3.6457e-005	20.00	1.0781	1.2684e-005	
		10	515.00	31.1250	8.7139e-004	26.80	3.2016	3.8043e-004	20.00	2.7797	3.3612e-004	
		50	537.00	42.1563	3.9768e-004	29.80	4.4516	2.4574e-004	25.20	4.1250	4.7624e-005	
	200	100	422.00	40.0313	9.8960e-005	25.00	5.3344	1.2782e-004	16.00	4.0625	1.0493e-005	
		10	627.00	109.6094	1.4543e-004	28.60	10.0547	4.8002e-004	21.20	8.6031	1.0716e-005	
		50	604.00	122.8906	6.8484e-004	28.40	12.0016	4.0511e-004	22.00	10.4938	7.1994e-004	
	300	100	553.00	125.1306	2.1332e-005	27.80	14.4516	1.8874e-004	32.00	15.8438	3.9215e-004	
		10	713.20	419.1213	1.0943e-004	26.90	17.3419	2.0134e-004	23.10	16.1321	9.5362e-005	
		50	626.10	430.2026	2.8461e-004	29.64	18.3432	2.9184e-004	24.20	17.8674	1.8453e-005	
	500	100	601.40	450.8632	3.9513e-004	22.60	19.9843	1.0453e-004	25.30	18.3213	2.9943e-004	
		0	1	50.00	0.3047	8.2434e-004	16.80	0.0750	7.3304e-004	8.40	0.1938	1.2412e-005
		2	1	80.40	0.1812	1.4631e-005	20.20	0.1172	7.6081e-004	8.00	0.0625	6.4328e-005
2	2	67.00	0.1812	1.9127e-005	18.50	0.1031	5.8817e-004	8.40	0.1000	4.2763e-005		
	3	63.00	0.0156	1.5392e-005	17.00	0.0656	9.4716e-005	9.00	0.0969	8.5716e-006		
	1	104.70	0.1875	1.7926e-005	25.90	0.1516	1.2615e-004	20.00	0.0625	5.8265e-005		
5	3	96.30	0.1516	1.6104e-004	21.00	0.1172	2.0427e-004	9.20	0.0156	8.3474e-004		
	5	77.10	0.1078	1.6516e-004	18.40	0.1094	4.9847e-004	9.20	0.2813	3.1216e-004		
	2	136.60	0.1891	1.8183e-004	27.30	0.1906	1.7123e-004	22.00	0.2031	2.4366e-004		
10	5	126.10	0.1828	1.7173e-005	25.40	0.1797	1.4712e-005	12.60	0.2750	5.6355e-004		
	7	107.00	0.2094	1.7716e-005	19.00	0.1703	7.5125e-006	12.60	0.2078	5.8293e-004		
	5	182.80	0.2672	2.0615e-005	28.40	0.1891	7.5339e-004	86.00	0.2969	9.8008e-005		
20	10	160.20	0.2766	1.9821e-004	23.00	0.1922	1.6812e6004	18.00	0.0469	1.2137e-004		
	15	132.30	0.3219	1.7713e-004	20.00	0.1938	9.4045e-004	12.00	0.0313	1.1713e-004		
	5	221.30	0.3578	2.1615e-004	28.00	0.2109	9.4065e-004	42.00	0.1406	9.3831e-004		
30	10	214.90	0.3266	2.0653e-004	29.20	0.2109	8.5850e-004	26.00	0.1719	1.3187e-004		
	15	194.30	0.4188	1.8912e-004	23.40	0.2422	8.1925e-004	18.00	0.1563	1.6209e-004		
	5	278.40	0.7734	2.1912e-004	28.90	0.2719	8.0208e-004	56.00	0.2813	2.6171e-004		
50	10	276.50	0.8750	2.1813e-004	28.30	0.2875	5.2813e-004	48.00	0.3750	3.4874e-004		
	25	280.40	0.9643	3.9153e-004	25.20	0.2047	8.5453e-004	20.00	0.2344	1.7852e-004		
	5	380.20	4.6484	3.0615e-004	28.60	0.6391	1.1713e-004	20.10	0.5131	3.9182e-004		
100	10	377.00	4.8031	2.5713e-004	27.30	0.5719	1.0613e-004	30.00	0.7344	1.9719e-004		
	50	327.50	7.3125	2.2817e-004	26.60	1.0094	6.2575e-004	26.00	1.0313	1.1734e-004		
	5	519.10	45.0891	3.5716e-004	27.90	3.4469	1.5615e-004	21.20	2.7813	2.9163e-004		
200	25	514.70	49.8516	3.1615e-004	27.70	3.8813	1.0765e-004	22.60	4.7121	4.9163e-004		
	100	466.60	70.8906	2.1514e-004	25.30	5.8969	8.7495e-004	17.00	4.2131	7.6153e-004		
	5	720.20	70.8121	4.9841e-004	29.00	10.1188	1.2716e-004	21.40	8.7101	5.0951e-004		
300	25	701.00	73.2131	6.9612e-004	29.00	10.9063	8.8221e-004	22.10	10.3023	2.0453e-004		
	100	622.10	77.4391	3.8492e-004	26.80	14.1125	7.8585e-004	24.20	15.9131	1.9453e-004		
	10	1013.20	98.1353	5.3934e-004	25.30	17.5164	4.8453e-004	23.10	16.2131	4.7213e-004		
500	50	917.74	99.2317	2.9458e-004	27.20	18.6762	8.9534e-005	24.40	17.3213	3.0453e-004		
	100	829.50	99.7923	5.4321e-004	28.10	20.0145	4.8321e-004	25.50	18.2615	1.7842e-004		

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Suivi du chemin pas court			Suivi du chemin pas long			Predicteur correcteur			
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	
10	0	1	116.70	0.1078	8.4321e-004	18.10	0.1609	8.9764e-005	10.20	0.1328	4.8871e-004	
		5	116.50	0.2109	8.6612e-005	19.00	0.1484	1.3736e-004	12.60	0.1844	3.7174e-004	
		7	118.50	0.2500	4.3712e-004	18.80	0.1172	1.2563e-004	11.40	0.1641	1.7464e-004	
	2	2	132.80	0.2531	8.4123e-005	19.90	0.1594	3.8873e-004	13.40	0.1313	2.6709e-004	
		5	130.20	0.2562	7.5123e-005	18.60	0.1203	2.1273e-004	13.40	0.2156	1.6874e-004	
		7	123.90	0.2125	8.7514e-005	19.30	0.1672	1.5264e-004	11.20	0.2703	1.2573e-004	
	5	2	159.20	0.2656	7.0012e-004	23.10	0.1563	4.7734e-004	16.00	0.2344	4.8546e-004	
		5	142.70	0.2813	8.5651e-005	20.10	0.1828	4.1634e-004	12.40	0.1516	1.7635e-004	
		10	133.60	0.2797	7.2712e-005	19.50	0.2375	4.7646e-004	11.80	0.1656	8.2291e-004	
	10	5	167.60	0.3172	8.5163e-005	23.70	0.1422	4.0536e-004	15.40	0.2656	3.1734e-004	
		10	147.20	0.3297	2.8382e-004	19.20	0.1969	4.1723e-004	13.40	0.1531	9.0108e-004	
		15	150.10	0.3484	2.6912e-004	19.10	0.2062	2.3124e-004	11.80	0.1437	1.9261e-004	
	20	5	233.40	0.4891	4.5742e-004	26.80	0.2484	3.3812e-004	14.00	0.1875	2.7817e-004	
		10	175.40	0.5531	3.8712e-004	23.40	0.2078	4.0912e-004	19.60	0.2125	1.4812e-004	
		20	176.00	0.6813	2.8412e-004	19.60	0.2359	1.8487e-004	14.20	0.2359	4.6817e-004	
	30	5	262.00	0.9250	4.5461e-004	27.20	0.2844	1.4762e-004	43.20	0.3112	3.9263e-004	
		20	199.60	0.9172	2.5483e-004	22.60	0.1844	2.8763e-004	19.60	0.3422	4.4834e-004	
		25	196.70	0.9141	2.5484e-004	19.60	0.2078	9.3534e-005	16.60	0.3016	1.8716e-004	
	50	5	309.60	2.5187	2.9284e-004	27.80	0.3531	1.4635e-004	51.00	0.2315	2.0153e-004	
		20	295.30	2.3102	1.9346e-004	27.20	0.3422	8.0742e-004	16.00	0.2500	7.1736e-004	
		30	237.00	2.1953	4.7161e-004	22.30	0.4156	3.2612e-004	17.80	0.4859	4.0635e-004	
	100	5	407.10	8.6734	9.8275e-005	28.30	0.7953	3.7735e-004	22.10	0.9171	2.9153e-004	
		25	400.20	10.1297	8.9716e-005	26.60	1.0141	4.3634e-004	25.20	0.0710	2.0475e-004	
		50	361.90	11.6844	8.9652e-005	26.20	1.3594	4.0736e-004	24.00	1.1719	1.6716e-004	
	200	10	528.50	51.3101	3.7516e-005	27.00	4.2406	4.1504e-004	21.00	2.9171	4.6156e-004	
		50	514.20	53.1011	2.3748e-005	28.60	5.4016	2.7736e-004	26.20	4.9217	3.9773e-004	
		100	482.10	66.2131	1.7346e-005	24.30	6.5094	4.9736e-004	24.50	4.9217	8.9172e-005	
	300	10	750.20	135.1257	9.3813e-005	29.00	11.7594	3.7274e-004	22.20	8.8601	1.9374e-004	
		50	721.70	161.2590	1.8347e-005	30.00	14.2656	5.8536e-004	19.50	10.5130	3.8274e-004	
		100	717.20	166.3121	1.7364e-005	26.00	15.6031	3.9764e-004	20.00	16.0213	5.8163e-004	
	500	10	951.10	496.3210	3.8636e-005	27.00	37.4531	2.3561e-004	27.20	17.3153	3.0173e-004	
		50	942.20	526.8218	1.2826e-005	28.00	28.1875	3.1045e-004	32.00	17.5262	2.9747e-004	
		100	935.90	599.4312	2.7266e-005	28.50	27.2317	2.9274e-004	35.20	18.7171	6.9724e-004	
	30	0	5	205.00	1.0594	2.5366e-005	19.50	0.2906	1.0373e-004	13.60	0.2906	1.5163e-004
			15	210.10	1.2213	3.9274e-004	18.40	0.2781	1.0363e-004	15.20	0.4766	7.4736e-005
			20	214.20	1.1321	2.9474e-004	18.20	0.2613	2.0475e-004	10.00	0.2656	9.1145e-005
		2	5	215.00	1.1078	2.5664e-004	19.10	0.3047	1.1859e-004	14.60	0.2984	5.7726e-004
			15	215.60	1.3062	2.5054e-004	21.90	0.3453	3.7645e-004	17.00	0.2891	2.3654e-004
			20	218.30	1.2121	4.8465e-004	17.00	0.3438	2.6874e-004	14.40	0.2094	6.6763e-004
		5	5	217.60	1.1156	2.6530e-004	20.40	0.2844	1.2676e-004	14.80	0.2781	1.0383e-004
			15	224.70	1.4641	1.8863e-004	20.10	0.3516	6.3763e-004	16.00	0.3469	2.0364e-004
			20	226.20	1.3618	3.8262e-004	17.60	0.3469	1.2673e-004	15.40	0.3219	9.3736e-005
		10	5	247.60	1.6969	2.6164e-004	24.00	0.3844	8.3736e-004	24.00	0.2969	3.9736e-005
			20	252.30	1.8218	3.8645e-004	20.30	0.3063	1.8674e-004	17.20	0.4016	9.7736e-005
			25	261.20	1.9321	2.7635e-004	23.60	0.4500	2.1576e-004	12.00	0.3594	8.3173e-005
		20	5	313.10	3.0984	2.1463e-004	26.60	0.4828	9.9847e-004	16.00	0.3594	1.6173e-004
			25	247.50	2.9375	2.3664e-004	21.60	0.4109	1.8674e-004	16.40	0.4063	1.3874e-004
			30	246.20	2.8813	2.6454e-004	21.80	0.4891	7.9645e-005	18.40	0.4750	1.2645e-004
		30	5	320.10	4.2819	3.6451e-004	28.20	0.5547	8.6746e-005	17.10	0.5131	4.8373e-004
			30	265.00	4.1828	2.5548e-004	20.20	0.5875	9.3645e-005	17.20	0.5687	2.9564e-005
40			253.40	4.2617	4.7643e-004	22.70	0.6297	2.2564e-004	16.00	0.5625	2.9754e-004	
50		5	352.10	8.2614	5.6534e-004	30.30	0.7953	4.3645e-004	18.20	0.6813	3.8464e-004	
		40	294.80	8.1969	2.5353e-004	22.40	0.9734	1.1564e-004	16.00	0.7031	1.0674e-004	
		50	296.00	8.9625	1.1553e-004	22.30	1.0672	2.1364e-004	20.10	1.0781	7.9563e-005	
100		5	457.60	22.7109	2.4254e-004	28.30	1.7344	5.6637e-004	21.00	1.1571	2.8474e-004	
		30	423.20	25.2319	3.8645e-004	27.50	2.0859	1.0283e-004	25.20	1.3823	2.6354e-004	
		50	412.10	27.2121	2.7464e-004	26.80	2.5281	6.6541e-004	23.50	1.4112	1.7363e-004	
200		10	591.20	71.8217	2.6454e-004	25.00	6.0187	1.1271e-004	21.00	3.2313	2.8464e-004	
		50	576.10	72.5257	1.8364e-004	29.60	8.3219	1.3965e-004	23.20	6.1213	1.7354e-004	
		100	522.00	75.2136	6.7643e-004	24.00	9.1375	1.2565e-004	27.10	6.0121	2.7464e-004	
300		10	830.10	185.3212	4.7645e-004	29.00	15.6781	6.7546e-004	25.00	10.1012	1.8364e-004	
		50	807.20	187.4216	2.6542e-004	30.20	18.6687	1.7264e-004	19.50	12.2131	5.8364e-004	
		100	792.10	190.5106	1.6335e-004	28.40	21.2625	1.0364e-004	20.10	12.1312	2.7645e-004	
500		10	1013.20	638.2712	3.7464e-004	27.80	46.4406	1.4174e-004	20.20	20.3561	2.8465e-004	
		50	1002.10	653.1824	2.7464e-004	28.10	44.1240	3.7465e-004	23.20	20.4123	4.6245e-004	
		100	995.20	661.8127	2.7446e-004	27.00	39.7013	1.6543e-004	26.00	21.1246	1.7354e-004	

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Suivi du chemin pas court			Suivi du chemin pas long			Predicteur correcteur			
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	
50	0	5	265.40	5.0281	4.3234e-004	19.60	0.5359	1.6453e-004	14.80	0.4875	2.3764e-004	
		25	261.20	5.1132	2.7466e-004	18.50	0.7109	3.2245e-004	22.00	0.7656	3.8954e-004	
		30	252.10	5.1332	1.7464e-004	18.20	0.7341	2.7454e-004	21.10	0.7913	2.7465e-004	
	2	5	270.00	5.2188	4.3453e-004	19.90	0.6188	2.0164e-004	15.20	0.5687	2.0863e-004	
		25	268.10	5.2031	2.6454e-004	21.30	0.6672	9.6726e-005	22.00	0.7969	6.1420e-005	
		30	251.00	5.2210	2.8648e-004	20.30	0.6937	2.7464e-004	21.20	0.8312	1.7354e-004	
	5	5	286.40	5.9750	4.3363e-004	21.20	0.5750	1.5973e-004	14.80	0.4594	2.0463e-004	
		25	276.20	5.7720	2.6454e-004	22.30	0.9047	5.9736e-004	16.80	0.7312	9.2736e-005	
		30	262.10	5.4910	1.6354e-004	22.80	0.9938	2.7546e-004	28.00	1.0469	9.9563e-005	
	10	5	304.10	7.0203	4.2764e-004	22.50	0.6969	1.7764e-004	19.00	0.6250	2.0170e-004	
		30	302.20	7.1401	2.7642e-004	21.60	0.9719	7.9654e-005	18.00	0.8281	1.9337e-005	
		40	291.10	7.2201	1.6543e-004	22.90	1.0718	3.7546e-004	17.20	0.9913	2.6455e-004	
	20	5	365.10	10.3500	4.1353e-004	23.80	0.9172	2.1865e-004	26.00	1.1406	4.1907e-005	
		30	309.70	11.1531	4.2653e-004	20.80	1.0766	1.8263e-004	24.00	1.1719	1.9184e-004	
		40	301.50	11.3621	2.7643e-004	20.40	1.0906	1.2464e-004	20.00	1.1719	2.6384e-004	
	30	5	409.00	10.2031	4.3321e-004	28.90	1.2625	1.9272e-004	18.10	1.3210	2.9724e-004	
		40	340.00	13.0469	3.2041e-004	21.40	1.4094	2.1672e-004	20.00	1.4531	2.1121e-005	
		50	317.00	11.4375	4.3135e-004	22.50	1.5859	2.5561e-004	21.20	1.4501	1.7364e-004	
	50	5	442.20	22.4217	2.6513e-004	26.80	1.6563	2.0561e-004	27.10	2.4131	3.7365e-004	
		40	439.10	23.0134	1.7364e-004	22.70	1.9672	2.0463e-004	22.00	2.4844	1.0665e-004	
		50	403.20	23.5210	2.6545e-004	21.60	2.0547	2.0263e-004	26.00	2.5938	1.5537e-004	
	100	5	503.00	37.5938	4.4631e-004	27.10	3.4266	1.8161e-004	25.10	4.2613	2.7464e-004	
		50	457.00	41.1250	4.3659e-004	25.60	4.3406	1.5764e-004	21.50	4.3213	2.7465e-004	
		60	425.00	38.5313	4.2848e-005	21.60	4.2750	1.9876e-004	22.00	4.3750	3.1794e-004	
	200	10	623.20	95.3912	2.7454e-004	29.10	10.2516	1.6863e-004	23.50	7.9571	2.8464e-004	
		50	612.10	97.2822	2.5475e-004	27.70	11.3453	1.5153e-004	25.20	7.9923	2.7646e-004	
		100	607.00	99.1313	1.7364e-004	23.90	12.5234	1.9272e-004	20.10	8.1423	1.9375e-004	
	300	10	917.10	235.2132	2.6454e-004	29.00	20.6313	1.8663e-004	21.10	11.8812	2.7465e-004	
		50	907.50	238.2314	1.7364e-004	28.00	22.7937	2.6162e-004	26.00	11.9121	1.7364e-004	
		100	901.20	242.5101	2.7646e-004	28.40	23.0138	2.8464e-004	27.20	12.3226	2.9744e-004	
	500	10	1152.10	712.6173	1.7354e-004	27.00	213.1421	1.7365e-004	24.10	25.3121	1.7354e-004	
		50	1110.50	715.2131	1.7364e-004	26.10	97.2732	2.7455e-004	23.50	25.5213	2.8647e-004	
		100	1087.10	714.2268	1.7812e-004	27.40	93.2421	2.8646e-004	27.00	28.2413	4.7364e-004	
	100	0	10	390.10	8.1314	1.7364e-004	21.40	3.8703	3.8373e-004	20.00	3.4531	7.8234e-005
			25	381.20	8.2121	2.5473e-004	21.50	3.9766	4.6228e-004	20.00	3.6406	1.0757e-004
			50	383.20	8.2232	1.6353e-004	21.10	3.9914	2.7634e-004	20.10	3.8131	2.7646e-004
		2	10	393.10	8.1521	3.7546e-004	21.20	3.9344	2.6463e-004	22.00	3.9844	2.5710e-005
			25	388.10	8.2215	5.7365e-004	20.80	4.1094	3.7062e-004	22.00	4.0781	6.4466e-005
			50	386.20	8.2601	1.6363e-004	22.10	4.5038	2.6534e-004	23.50	4.1213	3.6253e-004
		5	10	414.10	8.1632	2.7346e-004	21.20	3.6859	4.1763e-004	20.00	3.6719	8.0852e-004
			25	419.20	8.2313	1.7354e-004	22.50	4.4719	4.6263e-004	22.00	4.1875	9.4617e-005
			50	412.10	8.2619	2.6354e-004	22.00	4.6139	2.7645e-004	24.60	4.2131	3.6354e-005
		10	10	468.20	9.2402	2.6536e-004	21.90	4.0453	3.8574e-004	22.00	4.2031	6.9807e-005
			25	461.20	9.3103	2.6356e-004	23.30	4.7094	3.9863e-004	22.00	4.4063	1.4091e-004
			50	469.10	9.3814	1.6344e-004	21.80	4.8301	2.7364e-004	23.10	4.5123	2.6354e-004
		20	10	542.20	12.3936	2.5344e-004	24.10	4.7359	2.5763e-004	22.00	4.5156	6.3967e-005
			50	541.10	12.1416	2.6354e-004	21.50	5.2969	4.1103e-004	26.50	4.5917	3.0934e-004
			60	547.10	12.2928	1.6354e-004	22.00	5.3938	1.8193e-004	21.20	4.6713	1.9173e-004
		30	10	622.40	13.1471	2.7645e-004	25.90	5.8359	3.6161e-004	24.00	5.4063	2.0435e-004
			50	617.20	13.2688	3.6635e-004	22.20	6.1281	3.8161e-004	22.00	5.7813	6.3759e-005
60			627.10	14.0121	2.7454e-004	22.60	6.4250	1.2001e-004	20.50	5.9001	2.8635e-004	
50		10	730.10	26.1321	2.6354e-004	26.40	7.0062	2.9061e-004	21.10	6.6121	1.7153e-004	
		50	721.30	27.2413	2.6475e-004	22.60	7.5875	3.4071e-004	22.00	6.7344	3.4563e-004	
		60	733.20	28.1393	1.5347e-004	24.20	8.0594	4.0161e-004	26.50	6.7813	2.9170e-004	
100		10	848.10	45.2940	1.6358e-004	27.60	10.6844	4.5013e-004	23.20	11.5131	3.7183e-004	
		50	856.20	47.4020	3.7204e-004	25.60	11.6438	3.3581e-004	26.00	11.7500	3.9652e-004	
		100	853.70	48.2010	2.8710e-004	21.20	11.9875	4.1191e-004	24.10	11.9101	2.8164e-004	
200		10	977.30	113.2910	8.8173e-005	27.60	21.6719	4.8181e-004	22.00	17.8121	2.8103e-004	
		50	991.40	118.2701	3.7193e-004	24.80	21.4813	2.7190e-004	21.50	17.9311	2.7183e-004	
		100	987.20	118.3201	1.8634e-004	26.10	22.0136	2.7168e-004	23.20	18.1316	2.7163e-004	
300		10	1101.20	320.4001	8.1736e-005	28.40	151.7469	3.8691e-004	24.10	22.1346	1.7361e-004	
		50	1107.10	323.2501	1.7636e-004	24.40	39.3188	3.6781e-004	22.20	22.2622	2.8713e-004	
		100	1099.20	331.1472	3.1763e-004	23.80	36.4200	1.7364e-004	21.00	22.3131	1.7364e-004	
500		10	1426.50	982.3410	1.7353e-004	25.80	332.1531	2.4501e-004	20.00	35.7513	2.8173e-004	
		50	1419.20	993.2520	2.6153e-004	28.60	102.1406	2.1381e-004	24.10	36.2731	1.8173e-004	
		100	1438.10	979.7800	2.7104e-004	27.10	96.2401	1.8163e-004	19.50	26.8135	2.8137e-004	

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Suivi du chemin pas court			Suivi du chemin pas long			Predicteur correcteur		
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF
200	0	10	510.20	14.2313	4.6161e-004	22.40	6.5832	4.1663e-004	20.30	6.3628	9.5153e-004
		50	506.10	14.3126	3.1873e-004	26.30	6.5832	2.8163e-004	20.10	6.4021	3.9019e-004
		100	508.20	14.3577	2.9184e-004	27.30	6.7045	2.9183e-004	21.50	6.4310	2.0193e-004
	2	10	511.30	14.2733	3.9183e-004	29.40	6.6321	3.0193e-004	25.60	6.3820	3.0198e-004
		50	508.10	14.3513	2.9183e-004	27.20	6.6633	4.0913e-004	22.40	6.4320	1.0194e-004
		100	510.20	14.3922	3.0198e-004	28.10	6.7344	3.0193e-004	26.20	6.4510	1.0197e-004
	5	10	514.30	14.7313	2.9183e-004	28.20	6.8201	2.0193e-004	28.40	6.5220	2.0193e-004
		50	511.20	14.9534	3.1091e-004	29.60	6.9131	2.9183e-004	26.20	6.6010	2.0197e-004
		100	515.60	15.3813	4.9163e-004	30.31	6.9622	3.0984e-004	24.30	6.6340	2.7746e-004
	10	10	525.10	15.6123	2.8173e-004	31.20	7.4233	2.8173e-004	26.40	7.0120	3.9183e-004
		50	523.20	15.9736	3.9183e-004	31.40	7.5321	3.0199e-004	25.20	7.0830	2.9173e-004
		100	524.30	16.3863	4.9188e-004	32.60	7.6736	4.1993e-004	27.40	7.2010	3.1230e-004
	20	10	674.80	22.1376	9.9239e-005	29.10	7.7738	3.9183e-004	28.60	7.4520	3.0193e-004
		50	672.30	22.4363	5.9281e-004	27.20	7.8663	5.9818e-004	29.40	7.6030	3.8177e-004
		100	679.90	22.3177	2.9981e-004	28.10	7.9512	2.8173e-004	26.20	7.7910	2.9189e-004
	30	10	751.30	24.2627	2.3281e-004	28.40	8.1638	1.0197e-004	27.40	7.8020	2.0165e-005
		50	748.20	24.8035	4.2874e-004	29.60	8.2736	3.9193e-004	26.30	7.9130	4.9394e-004
		100	754.40	25.7338	3.9183e-004	30.50	8.5672	2.0091e-004	23.20	7.9940	2.1733e-004
	50	10	848.20	37.4931	8.1739e-005	31.00	9.5221	3.1030e-004	24.40	9.0420	1.9384e-005
		50	841.80	38.8313	1.8374e-005	30.10	9.8131	1.2918e-004	22.20	9.3010	1.9388e-004
		100	845.90	39.5226	2.7361e-004	32.20	9.9233	3.9183e-005	29.40	9.7340	3.9137e-004
	100	10	962.00	60.3831	3.0193e-004	31.49	15.1026	5.9183e-004	30.30	14.3820	2.9818e-004
		50	958.40	63.1326	2.8173e-004	30.20	15.3813	4.9929e-004	26.40	14.6930	1.9991e-004
		100	950.10	65.3159	3.8188e-004	29.10	15.9212	2.9199e-004	24.10	14.8840	8.8173e-005
200	10	1070.10	150.3817	2.9183e-004	28.20	35.5322	1.9493e-004	26.30	20.2860	1.9183e-004	
	50	1062.20	157.2226	2.9183e-004	29.10	35.8213	3.9183e-004	28.40	20.8410	3.9283e-004	
	100	1060.40	159.3772	1.9974e-004	26.90	36.3621	3.9247e-004	28.30	21.3218	6.6153e-004	
300	10	1303.20	451.2631	3.9473e-004	29.80	321.6372	3.8173e-004	26.40	26.4840	1.9173e-004	
	50	1314.30	457.3627	3.0193e-004	30.20	95.3217	1.9183e-004	27.20	26.7930	1.3847e-005	
	100	1310.40	460.2128	1.8374e-004	31.40	91.8228	3.9993e-005	24.30	27.3820	4.9394e-004	
500	10	1730.20	1070.1310	3.9293e-004	29.20	515.8700	1.8173e-004	27.20	35.1720	1.8363e-004	
	50	1739.10	1091.3250	1.8374e-004	28.80	228.1315	2.1873e-004	29.40	35.7010	4.9209e-004	
	100	1741.20	1085.3310	1.9371e-004	27.30	220.3210	2.9183e-004	28.30	36.1030	1.7366e-004	
500	0	10	620.50	35.3810	3.8717e-004	29.40	28.2733	2.8173e-004	26.40	15.2740	3.8838e-004
		50	610.40	35.4920	2.8274e-004	28.60	28.3121	1.8873e-004	29.60	15.5120	2.1983e-004
		100	612.30	35.5810	1.9938e-004	30.40	28.5311	2.9984e-004	27.30	15.9240	2.9188e-004
	2	10	621.10	35.4020	3.8374e-004	31.20	28.2922	3.9384e-004	28.40	15.2820	3.2993e-004
		50	612.40	35.5130	2.9183e-004	32.10	28.3532	2.8193e-004	28.80	15.5810	1.9918e-004
		100	615.20	35.6226	1.8374e-004	30.10	25.6221	1.8376e-004	26.30	15.9830	2.9183e-004
	5	10	629.40	35.7326	3.5673e-004	28.40	29.0231	3.8273e-004	27.40	16.1320	1.0198e-004
		50	627.10	35.9177	5.7636e-005	29.90	29.2123	4.8475e-004	26.20	16.3210	3.9183e-004
		100	624.30	36.0221	4.9183e-004	27.10	29.5226	3.9183e-004	28.40	16.8210	2.8173e-004
	10	10	730.10	36.0113	7.9834e-005	29.20	30.1332	8.9288e-004	24.10	16.9420	3.9984e-004
		50	736.20	36.1021	2.8173e-004	32.20	30.6213	2.9984e-004	27.20	17.1212	1.9937e-004
		100	726.40	36.3131	1.8364e-004	31.40	31.0226	3.8834e-004	28.40	17.3060	3.9984e-004
	20	10	842.20	42.5312	5.7635e-004	31.20	31.3776	7.9485e-004	29.40	17.5020	3.9284e-004
		50	847.10	43.1826	7.9576e-004	30.10	31.9828	8.9586e-004	27.20	17.9320	4.9183e-004
		100	850.30	43.7317	5.8827e-004	30.20	32.5217	8.7634e-004	24.40	18.2610	3.7647e-004
	30	10	980.40	44.2229	4.8373e-004	29.80	32.4622	4.8274e-004	26.10	18.2028	9.9727e-005
		50	988.10	45.6231	5.9384e-004	28.40	32.9126	5.7382e-004	27.20	18.5103	1.9375e-004
		100	979.20	46.2334	6.9384e-004	29.30	33.6317	6.9485e-004	24.10	19.1001	6.9288e-004
	50	10	1060.10	60.1345	5.3737e-004	30.10	33.7262	5.8246e-004	24.50	20.0200	8.7727e-004
		50	1053.20	63.8428	6.8475e-004	31.20	34.1284	6.9848e-004	29.30	20.3010	6.8274e-004
		100	1063.40	65.4136	7.8375e-004	31.50	34.8622	6.9837e-004	29.10	20.9321	9.8727e-004
	100	10	1368.10	93.2031	6.8347e-004	32.40	51.3166	7.2876e-004	28.90	25.3831	1.8636e-004
		50	1353.20	97.3037	5.7364e-004	31.30	52.6233	8.8274e-004	28.50	25.3622	9.8716e-004
		100	1350.40	99.7348	8.8274e-004	32.40	53.3127	7.8375e-004	29.20	26.2310	5.8374e-004
200	10	1530.10	210.3840	5.8277e-004	31.20	95.2136	8.8273e-004	29.40	35.4320	4.8266e-004	
	50	1517.40	227.4313	5.8374e-004	30.10	98.6313	6.8375e-004	29.50	35.9301	9.8163e-004	
	100	1539.00	233.5213	6.8746e-004	32.20	102.8526	5.8374e-004	28.20	36.6281	8.8625e-004	
300	10	1920.10	727.3210	5.7364e-004	31.40	625.7821	8.6354e-004	28.40	42.3123	8.7264e-004	
	50	1900.40	736.4080	5.8364e-004	30.20	213.2320	3.8363e-004	29.40	43.1020	8.8626e-004	
	100	1911.40	744.8310	3.7364e-004	30.30	180.3210	1.8634e-004	28.90	43.3310	2.7163e-004	
500	10	2137.20	1631.3450	1.7364e-004	32.00	340.2130	9.8264e-004	29.70	50.3488	2.8166e-004	
	50	2148.10	1684.4350	4.7636e-004	30.10	520.3131	5.7364e-004	29.60	50.9339	2.3482e-004	
	100	2133.20	1734.8321	3.7264e-004	32.20	412.4213	2.7613e-004	28.80	51.3441	2.7163e-004	

TAB. 5.2: Résultats numériques pour les méthodes du type suivi de chemin

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Réduction du potentiel			Méthode de support			Méthode adaptée		
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF
0	2	1	26.00	0.0187	9.1605e-007	1.10	0.0500	7.5546e-005	1.00	0.0172	8.2310e-012
		1	49.40	0.0844	2.6823e-005	5.30	0.0521	1.5217e-011	4.10	0.1547	6.1107e-005
		2	47.60	0.0422	4.9301e-005	4.60	0.1406	5.9945e-013	2.90	0.0437	3.6798e-005
	5	3	42.60	0.0922	2.6473e-005	3.10	0.1812	2.3949e-010	2.10	0.0281	5.3649e-007
		1	89.60	0.1328	1.3072e-004	18.00	0.2344	0	8.90	0.2141	1.7615e-004
		5	86.70	0.1500	1.1127e-004	16.90	0.3578	1.3998e-004	6.30	0.1922	5.2219e-011
	10	7	71.10	0.1125	7.6172e-004	5.70	0.2328	6.2021e-012	3.40	0.1875	1.0805e-012
		2	167.70	0.1922	1.5898e-004	33.00	0.5469	2.8422e-014	21.30	0.5875	1.4216e-004
		10	142.70	0.2219	8.4592e-005	20.80	0.4188	6.5286e-005	19.00	0.4047	1.1391e-005
	20	15	117.60	0.2000	7.0463e-005	7.40	0.4594	3.9206e-011	6.30	0.2594	1.3150e-012
		5	246.50	0.3609	2.9572e-004	45.20	1.3432	2.6453e-010	30.00	0.9844	1.9339e-005
		15	203.60	0.3625	1.4211e-004	37.00	0.8594	1.4211e-014	31.50	0.9187	9.6961e-011
	30	20	183.70	0.3969	1.0616e-004	18.00	0.8438	2.8422e-014	14.80	0.4328	2.9749e-007
		5	398.40	0.9500	4.2748e-004	68.10	2.6813	5.7453e-005	56.00	2.5438	5.0442e-005
		25	355.50	1.3344	2.9147e-004	42.00	1.3750	1.9895e-013	63.60	2.3687	2.5854e-010
	50	30	299.80	1.2531	1.7616e-004	58.00	1.2188	1.4495e-012	34.20	1.2781	9.0949e-014
		5	780.50	10.2156	9.4225e-004	138.20	9.9832	6.9453e-005	114.80	9.7375	2.0767e-004
		25	766.80	11.2516	4.4830e-004	201.50	13.1313	5.9654e-004	158.20	12.9844	4.9545e-011
	100	50	669.20	12.9547	2.4581e-004	193.20	13.0226	7.8453e-006	152.00	11.6125	1.4362e-004
		10	2185.00	185.5938	6.2614e-009	290.10	58.1038	2.9343e-005	266.10	53.4234	4.1238e-004
		50	2187.00	228.4688	1.9777e-009	288.30	57.9312	1.8346e-005	266.20	53.9359	1.9753e-005
	200	100	2000.00	270.8750	4.0973e-010	293.20	70.2131	5.9345e-005	270.90	61.2437	4.6362e-006
		10	3240.00	797.9219	1.2436e-008	415.60	152.3140	3.3545e-005	397.60	140.4063	3.8077e-004
		50	3408.00	961.5000	4.1834e-008	445.60	173.2150	2.0213e-005	416.00	150.3531	1.3229e-004
300	100	3048.00	986.0469	3.8744e-010	407.50	172.2431	7.9342e-005	380.00	150.8875	2.9158e-010	
	10	4532.00	1290.3212	1.7565e-010	687.10	632.1320	4.8123e-005	660.20	567.4063	5.1910e-004	
	50	3616.00	1366.3210	5.3942e-009	755.20	697.2210	3.9354e-005	710.50	647.4141	3.0896e-004	
500	100	3609.00	1370.9310	1.7325e-008	751.30	733.1420	5.2518e-005	701.00	716.7969	3.3867e-004	
	0	1	28.00	0.0469	1.7753e-006	2.00	0.1719	4.0655e-011	1.00	0.0469	2.5623e-011
	1	53.40	0.0875	1.3532e-006	2.70	0.1516	8.2960e-007	2.00	0.1000	1.4438e-004	
2	2	42.20	0.1000	1.8063e-006	2.60	0.2328	1.9834e-010	1.40	0.0063	8.3116e-012	
	3	41.00	0.0500	1.3536e-006	1.40	0.2172	4.4037e-012	1.00	0.0044	1.5600e-010	
	1	80.40	0.1078	1.5534e-006	20.00	1.3906	8.3686e-009	6.20	0.1484	9.8713e-005	
5	3	72.20	0.0922	9.8435e-007	12.00	0.2578	6.0385e-004	4.60	0.1500	2.8707e-006	
	5	56.00	0.1406	2.7091e-006	2.00	0.1781	5.5187e-011	1.20	0.0063	2.0287e-013	
	2	118.40	0.1219	1.8721e-006	47.10	0.4310	5.0945e-005	11.90	0.3219	1.4285e-005	
10	5	96.10	0.1125	1.6632e-006	46.00	0.5000	1.3809e-004	11.40	0.3844	1.5111e-004	
	7	101.50	0.1828	1.4674e-006	123.00	0.8438	1.5162e-009	6.00	0.1125	1.3144e-004	
	5	194.40	0.2453	1.9645e-007	87.20	0.7132	4.8352e-005	26.20	0.6000	4.1725e-005	
20	10	166.50	0.2531	1.8637e-006	91.10	0.7213	8.9345e-011	24.00	0.6312	1.2383e-010	
	15	145.50	0.2453	1.7632e-006	50.20	0.7315	4.8543e-009	11.60	0.2687	3.1033e-005	
	5	269.30	0.4297	2.0637e-006	60.20	1.8210	5.0354e-005	39.50	1.3438	3.2542e-004	
30	10	272.70	0.4938	1.9563e-006	68.40	1.7320	9.9564e-009	27.00	0.7734	2.1783e-004	
	15	236.30	0.4953	1.9827e-006	67.50	1.8720	5.7345e-004	36.40	0.9313	1.5290e-004	
	5	426.20	1.2828	2.4643e-006	88.20	3.6130	6.8453e-004	61.00	2.8359	3.3131e-004	
50	10	416.90	1.3984	2.3736e-006	89.10	3.7205	2.9371e-005	65.20	2.8719	5.3012e-006	
	25	386.90	1.6875	1.9549e-007	83.20	3.6010	5.9364e-009	56.40	2.2531	1.0023e-006	
	5	791.20	10.9969	2.7648e-006	141.10	11.6613	3.8654e-005	129.00	11.6719	2.5562e-004	
100	25	776.70	12.6859	2.4647e-006	138.20	12.1342	5.9234e-005	121.00	11.5094	1.0232e-012	
	50	728.50	15.6781	2.0647e-006	136.60	12.2361	4.9345e-005	110.00	10.0469	4.5475e-013	
	10	2222.00	197.3750	1.9779e-006	299.20	60.0132	3.8134e-005	263.00	53.4844	4.3331e-004	
200	50	2107.00	227.8594	1.9711e-006	293.80	62.3013	2.9457e-011	256.00	54.9531	2.7285e-012	
	100	2038.00	304.3906	1.9650e-006	348.50	87.1302	4.8456e-009	347.00	82.8594	9.0949e-013	
	10	3196.00	802.4531	1.9875e-006	450.10	169.2012	2.9346e-005	429.00	153.3281	9.8125e-004	
300	50	3426.00	1011.3105	1.5231e-006	560.20	192.0131	1.9345e-005	482.00	178.8438	1.0459e-010	
	100	3096.00	1096.2000	2.7642e-006	409.10	175.2321	5.9235e-005	350.00	143.1406	2.7285e-012	
	10	4600.00	1301.5321	1.7654e-006	689.90	693.2032	2.9456e-009	664.00	672.1560	5.4570e-011	
500	50	3701.00	1390.2134	3.7865e-006	739.40	720.3013	7.9352e-006	679.00	718.3280	8.3688e-004	
	100	3685.00	1426.0654	9.8764e-007	753.50	824.1321	6.0345e-005	700.00	811.3440	3.6380e-012	

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Réduction du potentiel			Méthode de support			Méthode adaptée			
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	
10	0	1	114.40	0.1734	8.5634e-005	11.00	0.1875	2.6645e-015	4.60	0.0469	7.6259e-013	
		5	118.00	0.1391	3.6653e-004	8.00	0.0938	2.6645e-015	2.40	0.3812	5.9240e-012	
		7	126.10	0.2313	1.0863e-004	4.00	0.0313	1.6502e-012	1.00	0.0016	3.6508e-011	
	2	2	130.30	0.2047	8.5634e-005	13.00	0.2031	3.4455e-009	5.00	0.0641	9.8810e-011	
		5	127.40	0.2328	5.5534e-005	11.00	0.2344	2.2098e-012	8.70	0.1219	1.7495e-011	
		7	129.60	0.2859	1.3751e-005	10.00	0.1406	8.1499e-011	2.60	0.1563	6.6027e-010	
	5	2	175.00	0.2672	8.6512e-005	60.00	0.5781	6.6009e-009	13.60	0.4313	6.8172e-013	
		5	162.40	0.3078	8.4512e-005	14.00	0.1563	1.6547e-016	5.50	0.1125	4.8742e-006	
		10	149.60	0.3219	5.0723e-004	8.00	0.1094	5.0879e-010	1.10	0.0156	4.3930e-010	
	10	5	213.80	0.4141	8.7643e-005	153.00	1.3750	3.4577e-009	23.10	0.5391	2.5377e-005	
		10	174.70	0.3906	8.6632e-005	18.00	0.2656	1.4957e-012	10.20	0.1875	1.1508e-006	
		15	179.70	0.4078	2.3153e-004	7.00	0.0625	2.5094e-010	2.20	0.0406	4.0777e-010	
	20	5	310.50	0.6719	9.1632e-005	63.20	1.4801	4.8453e-009	51.80	6.3312	2.0268e-004	
		10	276.80	0.6766	8.8712e-005	61.10	1.5032	4.9456e-005	43.80	1.3375	4.9402e-005	
		20	232.20	0.7547	5.8543e-005	14.00	0.1875	1.1418e-010	10.40	0.2750	1.7558e-005	
	30	5	386.80	1.1953	9.3834e-005	98.30	2.4312	4.0345e-009	57.00	2.2906	2.8930e-004	
		20	299.40	1.1953	8.7632e-005	92.20	2.3602	2.9456e-005	40.40	1.4438	4.5230e-011	
		25	289.80	1.2797	1.1661e-004	83.10	2.1410	3.8345e-006	26.60	0.9406	6.8242e-006	
	50	5	529.30	3.2687	9.5734e-005	113.50	4.9320	1.8397e-009	84.00	4.6094	2.3368e-004	
		20	523.00	3.8312	9.3632e-005	108.60	4.7210	8.9345e-010	79.60	4.3297	2.7184e-004	
		30	428.50	3.5672	8.8823e-005	101.30	4.1320	3.9246e-005	54.70	2.7328	3.9231e-005	
	100	5	913.70	19.740	1.0643e-005	173.20	15.3100	5.0345e-006	141.70	14.9719	5.7862e-004	
		25	889.00	22.6281	9.7643e-005	191.30	15.8510	3.8154e-009	149.00	15.2563	5.3595e-004	
		50	861.00	216.4132	2.7435e-005	187.50	14.2817	5.8845e-005	141.90	13.7281	7.0875e-005	
	200	10	1011.00	220.2314	7.9843e-005	352.10	83.4013	2.5561e-005	323.00	69.7344	1.5666e-004	
		50	1003.00	207.1513	5.8764e-005	341.20	80.2131	6.8365e-009	292.80	62.7391	3.5558e-004	
		100	986.00	196.1233	3.9864e-005	339.50	86.2421	3.8455e-005	310.00	77.6719	7.4524e-007	
	300	10	1313.00	851.6543	1.9876e-005	452.40	179.3901	6.9344e-005	399.00	149.4844	3.5426e-004	
		50	1296.00	1096.9843	3.9826e-006	567.00	199.3120	5.8334e-005	407.00	155.7500	9.7471e-004	
		100	1210.00	1125.6528	4.0982e-005	501.40	270.1371	4.8654e-005	465.00	203.5313	1.6425e-004	
	500	10	1620.00	1395.6754	5.8764e-005	799.50	833.1213	6.9387e-005	737.00	788.1720	8.0131e-005	
		50	1590.00	1428.7591	1.4603e-005	888.60	936.2132	4.9334e-005	843.00	890.3440	5.0558e-005	
		100	1520.00	1451.3210	5.7901e-005	912.10	993.1356	4.9564e-005	851.50	899.3211	5.9755e-011	
	30	0	5	330.00	1.8594	2.6863e-005	36.00	0.5781	1.4211e-013	25.00	0.7656	1.4211e-014
			15	330.00	2.2344	2.7753e-005	31.00	0.4844	1.8474e-013	12.00	0.4063	2.2585e-009
			20	300.00	2.5131	1.5329e-005	17.00	0.3125	7.1054e-014	2.10	0.0625	1.9544e-009
		2	5	343.30	2.0703	2.6482e-005	33.50	0.9312	4.7454e-014	26.30	0.9078	7.4745e-005
			15	356.00	3.0938	7.7643e-005	23.00	0.3438	2.2737e-013	13.30	0.4109	8.3238e-010
			20	302.00	3.8101	5.9832e-005	21.00	0.3281	5.6843e-014	4.70	0.1797	4.5391e-010
		5	5	365.10	2.0109	2.6353e-005	34.20	0.9422	5.3424e-012	23.10	0.8344	5.4404e-006
			15	377.60	2.8406	3.3182e-005	35.00	0.6875	2.8422e-014	30.70	1.0078	1.2821e-009
			20	359.00	3.0938	2.7532e-005	25.00	0.4063	5.7345e-016	26.10	0.9016	9.4242e-005
		10	5	435.80	3.0359	2.6881e-005	60.20	1.3513	2.9456e-010	54.90	2.2899	7.9356e-005
			20	412.00	3.4219	2.6991e-005	42.00	0.9844	1.0161e-012	39.80	1.5344	4.2153e-009
			25	393.00	3.5018	1.4371e-005	36.00	0.8906	1.2155e-010	17.00	0.6163	1.3274e-005
		20	5	577.50	4.6047	2.7291e-005	92.30	4.4213	4.4643e-009	90.90	4.4031	1.5238e-004
			25	462.20	5.3969	1.0391e-005	40.20	1.6014	5.6218e-005	35.70	1.7078	8.6312e-006
			30	459.70	5.5391	2.1153e-005	39.10	1.5820	5.8365e-005	31.00	1.4813	6.2941e-006
		30	5	657.40	7.7438	2.7513e-005	121.00	6.3210	4.8356e-007	109.00	6.2766	1.8131e-004
			30	520.60	8.0469	2.6113e-005	52.10	2.7320	6.9453e-008	43.80	2.5719	3.5203e-004
			40	497.30	8.9132	1.8342e-005	53.20	2.7110	6.0467e-007	44.90	2.4516	7.1759e-005
		50	5	803.20	15.3406	2.7732e-005	142.00	9.6720	6.9982e-005	123.30	9.3656	2.5847e-004
			40	645.40	17.4625	2.6143e-005	92.60	5.9320	2.7877e-005	71.70	5.4344	4.1540e-005
			50	625.00	18.5313	2.5412e-005	77.80	4.1320	2.7762e-005	46.70	3.6609	6.6069e-004
		100	5	1154.00	59.0906	2.8493e-005	198.15	21.4210	1.7432e-005	173.00	20.6406	7.3511e-005
			30	1177.00	72.3281	2.7501e-005	208.10	26.1316	5.6488e-006	198.00	24.3125	9.5410e-004
			50	1021.00	71.9531	2.6661e-005	277.30	32.1228	6.9564e-005	242.00	30.0469	2.6113e-004
		200	10	1095.00	250.7613	2.9845e-005	408.10	88.3919	4.9645e-005	356.00	85.5938	4.7075e-004
			50	1040.00	281.0542	4.9823e-005	399.30	7.0101	3.8453e-005	345.00	86.6875	3.9108e-011
			100	1001.00	207.0941	8.0854e-005	370.10	90.3120	4.7764e-006	308.00	88.3750	6.1275e-004
		300	10	1375.00	931.9654	1.389e-005	523.20	290.1530	3.7765e-006	483.00	279.0620	9.1054e-004
			50	1321.00	1120.0619	4.0916e-005	549.10	331.2091	1.8453e-005	525.00	315.0780	4.1587e-004
			100	1291.00	1180.0642	5.0947e-005	532.20	351.1802	3.7456e-007	504.00	328.6410	6.7949e-004
		500	10	1680.00	1460.7610	4.1982e-005	703.60	893.7103	2.6443e-005	689.10	865.7312	5.7564e-005
			50	1606.00	1499.9341	3.9812e-005	879.10	950.7386	4.9982e-005	691.50	933.2496	2.8453e-004
			100	1580.00	1509.8271	2.0943e-005	992.50	998.7832	2.8873e-006	652.10	977.3721	2.7754e-004

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Réduction du potentiel			Méthode de support			Méthode adaptée			
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	
50	0	5	544.00	10.3750	4.4712e-005	84.00	1.8594	2.5624e-008	56.20	2.6109	4.3797e-010	
		25	550.00	11.9531	4.4113e-005	32.00	0.6719	8.5265e-014	26.70	1.2250	5.2588e-009	
		30	553.00	12.0121	3.9741e-005	31.00	0.9531	8.5265e-014	4.70	0.2328	4.9631e-010	
	2	5	560.00	10.8438	4.4667e-005	56.10	2.4310	2.7163e-009	48.60	2.3828	4.6488e-011	
		25	915.00	21.6094	4.8966e-005	60.00	1.0938	4.5475e-013	24.50	1.1844	3.8114e-009	
		30	936.00	27.4312	5.9831e-005	43.00	0.8281	1.7366e-011	9.20	0.4125	3.0944e-010	
	5	5	941.00	18.8125	4.8772e-005	58.20	1.9721	3.7654e-006	36.10	1.8375	2.3908e-005	
		25	942.00	23.0469	4.8275e-005	59.00	1.0938	2.2737e-013	56.60	2.8984	3.2001e-008	
		30	961.00	31.0126	3.9714e-005	49.00	0.9844	2.8422e-014	17.80	1.4359	1.8163e-009	
	10	5	1063.00	24.3750	4.8492e-005	85.60	4.8146	6.9564e-009	79.00	4.7641	2.4397e-005	
		30	1015.00	30.1094	4.8731e-005	78.00	1.5000	5.1008e-010	55.30	3.0875	1.7897e-009	
		40	1003.00	31.5103	3.7501e-005	25.00	0.8125	3.8767e-010	1.80	0.1437	1.6399e-009	
	20	5	1287.00	36.1406	4.8667e-005	145.20	8.9173	5.7654e-009	131.40	8.6594	1.1290e-010	
		30	1113.00	39.7500	4.8914e-005	69.50	4.2612	6.9885e-009	61.30	4.1844	2.3353e-006	
		40	1012.00	43.1613	5.8534e-005	77.00	1.7500	5.6843e-013	50.50	3.4766	7.0042e-009	
	30	5	1398.00	48.4375	4.8493e-005	170.20	12.0131	4.4577e-009	146.90	11.2703	9.5264e-005	
		40	1198.00	56.5625	4.8947e-005	87.10	5.7312	8.7656e-008	70.30	5.6375	1.7092e-004	
		50	1165.00	71.3210	3.9801e-005	76.60	4.9329	7.8688e-008	56.90	4.4156	9.5505e-006	
	50	5	1594.00	79.6094	4.9036e-005	193.80	17.1318	4.7577e-006	171.60	16.9641	1.5133e-004	
		40	1375.00	91.3438	4.8494e-005	109.10	10.0219	4.9985e-006	95.10	9.5031	3.7451e-004	
		50	1379.00	96.5781	4.8643e-005	88.30	8.1421	5.6869e-006	73.60	7.6750	4.5397e-004	
	100	5	2130.00	231.5938	4.9137e-005	251.70	30.2314	6.8435e-006	212.00	29.1563	1.3642e-012	
		50	2016.00	258.9531	4.9061e-005	287.10	40.1020	2.8945e-006	272.00	38.2656	3.6380e-012	
		60	2004.00	290.9063	4.8978e-005	262.00	32.3210	3.8588e-005	216.00	31.9531	9.0949e-013	
	200	10	3147.00	888.5313	4.9028e-005	450.20	103.1401	4.7645e-005	395.00	100.9375	6.4119e-011	
		50	3112.00	1000.0000	4.9301e-005	520.80	130.2463	4.9985e-005	478.00	127.0781	1.1888e-05	
		100	3059.00	1157.0000	4.9372e-005	430.60	120.1379	6.9696e-005	375.00	118.0156	1.3642e-012	
	300	10	4200.00	2375.1000	4.9219e-005	551.20	230.2013	1.7397e-005	507.00	222.2344	4.5475e-012	
		50	4162.00	2614.7000	4.9279e-005	603.00	333.1022	2.8675e-006	551.00	249.5939	6.0096e-004	
		100	4081.00	2720.4065	3.9641e-005	697.60	375.1088	4.7685e-005	612.00	332.0469	5.7163e-004	
	500	10	6721.00	4320.7610	5.7521e-005	826.80	892.5038	6.0432e-005	775.00	795.3750	1.9103e-004	
		50	6560.00	4510.8204	4.7410e-005	898.10	953.5727	3.8943e-006	796.00	875.6563	5.5466e-004	
		100	6430.00	4621.0934	4.0975e-005	995.20	1122.5313	2.8576e-005	804.00	1033.1000	9.2040e-004	
	100	0	10	1783.00	261.7188	9.8377e-005	120.10	6.7830	5.6786e-014	77.00	6.7500	4.5475e-013
			25	1790.00	267.3594	9.8264e-005	165.00	5.0156	4.5475e-013	103.00	9.3281	1.3585e-013
			50	1788.00	280.5621	4.0934e-005	121.00	3.7500	4.5475e-013	53.80	4.6719	3.2587e-010
		2	10	1806.00	264.0938	9.8398e-005	108.20	8.4820	6.7858e-013	93.00	8.4531	7.9581e-013
			25	1835.00	276.2969	9.8611e-005	142.60	10.7231	6.5757e-013	110.00	10.6406	4.7133e-004
			50	1890.00	295.1312	6.0945e-005	152.00	4.5938	1.3188e-011	94.00	8.5000	1.1823e-011
		5	10	1821.00	293.1324	4.9842e-005	145.80	8.1321	5.5588e-011	89.00	8.0938	4.5475e-013
			25	1845.00	299.1321	5.9614e-005	180.60	12.5324	6.8979e-009	127.00	12.2813	1.9167e-08
			50	1921.00	307.6321	5.8632e-005	171.40	10.2263	4.5887e-008	107.00	10.0156	3.8654e-011
		10	10	1890.00	305.1054	3.6354e-005	182.10	12.3612	2.7626e-005	127.00	12.2500	1.3255e-013
			25	1921.00	313.6523	2.7263e-005	174.30	12.2636	3.8727e-006	121.00	12.1875	6.6245e-008
			50	1950.00	324.9834	3.9726e-005	162.50	11.2389	4.8274e-007	109.00	10.9688	1.3779e-010
		20	10	1907.00	316.7465	1.7636e-005	276.10	22.0321	1.7346e-008	205.00	21.7031	4.5475e-013
			50	1929.00	331.4532	3.7263e-005	190.20	13.8233	3.8274e-005	116.00	13.5625	1.6712e-011
			60	1971.00	360.9564	2.7163e-005	150.00	11.2344	2.8717e-005	94.00	11.0625	2.7285e-012
		30	10	2016.00	336.6453	4.7264e-005	321.70	31.2432	1.8756e-009	254.00	30.1406	2.1532e-010
			50	2106.00	368.4667	6.7626e-005	273.20	17.5237	3.8274e-006	131.00	17.0313	9.3678e-011
60			2130.00	399.7854	2.8173e-005	201.10	14.2103	2.8163e-005	107.00	13.9688	2.0464e-012	
50		10	2596.00	570.4375	9.8405e-005	526.00	62.0381	3.7840e-005	439.00	60.8281	4.5475e-013	
		50	2281.00	584.4375	9.7380e-005	280.70	24.3217	1.8737e-009	159.00	23.1719	7.6139e-004	
		60	2120.00	601.5649	3.9245e-005	261.80	21.2032	2.8177e-005	135.00	19.9688	9.9718e-004	
100		10	3061.00	1012.9000	9.9002e-008	473.70	73.2713	3.6612e-005	371.00	70.7656	8.6629e-011	
		50	2970.00	1115.1000	9.8846e-007	533.80	101.3132	2.8163e-008	424.00	86.8281	2.2737e-013	
		100	2890.00	1201.4500	3.8724e-005	272.40	48.2010	2.1881e-005	156.00	33.0313	8.8755e-004	
200		10	4128.00	2677.9000	9.8864e-005	544.20	177.3180	1.7863e-005	476.00	163.9531	7.1244e-004	
		50	4090.00	2714.5646	2.8177e-005	687.10	279.2632	3.8929e-006	609.00	216.5625	2.6102e-010	
		100	3970.00	2765.5646	1.7366e-005	729.20	354.2013	2.6167e-005	651.00	292.6406	8.4375e-004	
300		10	4914.00	3599.6754	4.8274e-005	713.10	452.1080	4.7176e-008	643.00	356.6094	2.8713e-009	
		50	4805.00	3681.9657	2.7164e-005	767.50	498.3421	2.7177e-005	682.00	401.5625	5.6268e-004	
		100	4785.00	3791.4688	2.2928e-005	730.10	509.3010	2.8193e-009	650.00	427.2188	2.2141e-004	
500		10	6186.00	6210.8890	5.8263e-005	920.20	1108.2000	1.7172e-005	839.00	1023.9000	7.2444e-004	
		50	6010.00	6323.5664	2.1818e-005	1098.60	1382.1090	3.8728e-005	961.00	1291.1000	5.4783e-004	
		100	5310.00	6490.5644	4.8263e-005	1103.40	1520.3631	2.8181e-007	1021.20	1456.2010	4.8727e-005	

5.4. COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

n_x	n_y	m	Réduction du potentiel			Méthode de support			Méthode adaptée			
			nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	nbr iter	CPUtime	ΔF	
200	0	10	2610.00	516.5643	3.7246e-005	301.20	57.2131	2.8171e-012	206.00	56.4844	1.2287e-009	
		50	2681.10	527.8875	2.7163e-005	317.50	82.0317	1.6156e-010	276.00	81.0859	8.1423e-010	
		100	2723.50	542.8765	3.6525e-005	257.00	18.5000	4.5475e-012	115.00	38.9141	2.0464e-012	
	2	10	2621.40	522.9654	1.7873e-005	351.20	63.9321	1.7153e-009	232.50	63.7266	4.7094e-005	
		50	2699.50	533.5353	3.9879e-005	332.60	67.2313	2.1771e-008	226.00	67.0547	4.7308e-005	
		100	2741.50	551.5655	4.2727e-005	266.00	19.8438	2.5011e-011	123.50	41.1172	6.2300e-011	
	5	10	2643.00	527.5356	2.1717e-005	354.10	61.9721	1.9181e-010	222.00	61.9531	3.2330e-004	
		50	2717.50	544.3432	1.9183e-007	372.20	81.5231	2.8178e-009	257.00	81.5469	1.1898e-009	
		100	2790.10	561.1679	3.2827e-005	322.00	24.2031	3.1832e-012	201.00	70.6641	6.3665e-011	
	10	10	2688.60	531.3456	4.8282e-005	273.20	47.2310	1.9172e-008	157.00	46.1016	3.2071e-004	
		50	2739.60	546.4533	3.7272e-005	352.10	88.3210	2.9847e-007	272.00	87.6406	1.7201e-007	
		100	2800.20	563.9365	1.8185e-005	343.00	27.4063	1.8190e-012	248.50	89.9531	4.3265e-009	
	20	10	2703.50	545.3366	2.8234e-007	499.20	145.2137	1.2277e-008	392.00	118.1797	1.3642e-012	
		50	2761.10	562.9768	1.7177e-005	382.20	99.2732	2.8188e-009	244.5000	83.6406	4.9401e-004	
		100	2831.40	581.3536	3.8992e-005	386.00	32.7188	1.8163e-012	244.5000	95.1094	3.8835e-010	
	30	10	2738.20	565.9465	2.9199e-005	516.70	196.2310	3.2238e-007	467.00	147.2656	9.2200e-010	
		50	2793.20	589.3666	8.9383e-008	399.10	101.7301	2.8172e-006	224.00	77.7813	1.4750e-008	
		100	2862.50	610.6421	3.8837e-005	415.00	36.3438	1.5625e-009	240.50	97.6484	2.5763e-007	
	50	10	2798.50	613.6467	2.9283e-007	632.20	212.5131	3.8364e-007	501.00	176.9375	1.6371e-011	
		50	2837.30	637.4667	4.8383e-006	375.90	129.5321	5.8347e-006	261.00	95.9688	8.8988e-004	
		100	2941.40	659.4643	3.8273e-005	416.20	192.5433	2.8162e-006	305.00	137.7969	1.3733e-010	
	100	10	3649.50	1212.6543	2.7262e-005	715.30	327.5927	4.7363e-007	621.00	277.9531	9.7413e-004	
		50	3701.30	1309.3453	5.7262e-006	578.80	302.7929	1.8163e-008	469.00	215.3750	9.2950e-010	
		100	3781.40	1368.3553	1.8117e-005	353.70	178.8317	2.7163e-005	239.00	119.4844	7.9457e-004	
	200	10	5018.00	3515.6435	2.9187e-005	801.20	502.1302	1.7346e-005	684.00	451.6094	3.7969e-004	
		50	5165.20	3627.8757	1.4413e-005	1023.10	691.2313	2.8163e-006	940.00	641.8438	3.1525e-005	
		100	5302.30	3719.6757	2.1717e-005	1002.20	830.1527	4.8374e-007	935.00	780.3281	2.0009e-011	
	300	10	6201.60	4204.3550	6.8272e-006	938.10	847.2138	2.1282e-005	840.00	786.3281	6.0641e-004	
		50	6297.50	4321.7567	3.8226e-006	1057.20	978.8179	9.5625e-007	953.00	919.7813	2.4011e-010	
		100	6380.60	4736.4678	1.7265e-005	1042.20	1096.1625	2.8173e-005	937.000	1017.3000	5.4570e-012	
	500	10	8930.50	8118.5634	2.7166e-005	1187.10	1585.3740	1.6152e-005	1023.40	1523.2142	3.7257e-006	
		50	8910.20	8236.5463	3.2626e-006	1266.60	1749.3852	2.7662e-007	1120.20	1726.2788	2.9183e-007	
		100	8986.10	8311.6575	1.7617e-007	1407.10	2031.4917	2.8186e-005	1240.00	1927.3897	1.9187e-006	
	500	0	10	4620.40	891.6432	5.1654e-005	709.20	570.3688	1.8763e-005	649.00	525.8438	9.4296e-005
			50	4691.50	907.4323	3.6563e-005	702.10	621.7123	3.7257e-010	627.00	575.3125	8.9264e-006
			100	4738.30	915.4344	2.6276e-005	697.20	643.8327	2.8163e-007	612.10	599.6000	2.5635e-005
		2	10	4631.10	901.2535	3.9284e-005	671.10	489.7929	9.5364e-009	565.00	459.9375	6.2983e-004
			50	4699.30	912.3432	2.8747e-005	703.20	591.6323	3.1374e-005	600.00	556.9219	9.8107e-004
			100	4742.20	917.4543	1.7384e-005	708.60	613.7219	1.9839e-005	607.00	681.0938	3.3796e-005
		5	10	4643.00	910.5665	3.9284e-005	533.50	381.8107	3.9278e-006	426.00	341.2031	2.5189e-005
			50	4721.10	921.6745	2.7645e-005	702.70	581.9218	2.2736e-005	582.00	540.3594	9.6009e-004
			100	4782.30	926.3423	3.9858e-005	930.50	984.2309	9.5364e-005	820.00	933.5000	4.9494e-005
		10	10	4651.20	917.3424	2.9835e-005	443.20	345.3808	2.1572e-005	355.00	287.1250	1.5212e-012
			50	4724.50	928.6745	3.7864e-005	745.60	662.8527	1.7535e-006	634.00	601.1094	9.6226e-004
			100	4789.40	937.3424	2.6618e-005	712.80	752.7293	3.7637e-005	603.00	699.4688	2.4108e-005
		20	10	4662.30	925.5646	1.3766e-005	820.70	651.3321	2.7761e-007	682.00	598.2031	6.7439e-004
			50	4729.10	936.5774	1.7364e-005	792.60	683.4532	1.7153e-005	635.00	629.8750	8.7375e-004
			100	4799.00	946.2312	3.7847e-005	823.10	871.5321	3.7263e-008	685.00	829.9688	8.6288e-005
30		10	4691.20	937.4763	2.8647e-005	970.20	852.2020	2.1737e-007	880.00	798.5469	7.7916e-004	
		50	4762.20	953.4565	1.6354e-005	667.10	599.1027	1.7152e-006	556.00	560.0938	8.2853e-004	
		100	4833.10	967.5698	2.6645e-005	744.20	870.0138	3.7263e-005	635.00	820.3125	6.3282e-005	
50		10	4731.00	960.4534	3.6527e-005	1228.00	1160.0112	2.5435e-006	1117.00	1105.6000	3.6380e-012	
		50	4788.50	977.3456	1.3673e-005	648.20	577.3213	8.5364e-009	510.00	534.2344	9.7775e-004	
		100	4855.40	989.4564	2.8648e-005	908.10	1180.3101	6.7363e-007	812.00	1119.8000	3.5266e-004	
100		10	4815.60	1414.5688	1.7288e-005	1296.40	1486.2010	2.7163e-011	1175.00	1394.8000	6.1846e-011	
		50	4827.10	1489.6857	3.7828e-005	1520.50	1942.3020	4.7384e-006	1395.00	1854.3000	1.6735e-010	
		100	4878.80	1533.6845	1.7384e-005	730.20	990.3810	2.1617e-005	616.00	924.4844	7.3887e-004	
200		10	6991.80	5122.5678	3.8163e-005	1599.10	2570.2320	1.7163e-007	1478.00	2499.4000	4.9832e-004	
		50	6010.40	5210.5685	2.1315e-005	1673.20	3079.2803	2.1177e-005	1553.00	2935.2000	3.2742e-011	
		100	6079.50	5270.7656	2.1881e-005	886.60	1243.3407	1.6318e-005	728.10	1142.2891	5.6536e-008	
300		10	7130.40	6371.6545	2.7115e-005	1827.60	3526.2709	3.8626e-007	1713.20	3421.1321	3.7726e-005	
		50	7193.20	6395.6756	1.8647e-005	1949.20	3801.2490	1.6615e-005	1822.40	3726.1020	2.8162e-007	
		100	7228.20	9426.8767	3.8626e-005	1130.10	2070.5070	7.6354e-008	942.50	1942.2460	5.6353e-008	
500		10	9780.00	10231.5748	2.1293e-005	2363.70	5207.2001	2.1816e-005	2142.10	5109.2460	3.3737e-005	
		50	9797.10	10271.6546	4.7516e-005	2527.80	5610.2301	2.1717e-006	2325.20	5420.6320	1.1652e-005	
		100	9845.50	10293.5643	3.8626e-005	1590.70	2330.2632	1.6135e-005	1340.10	2130.1320	1.7152e-005	

TAB. 5.3: Résultats numériques pour la méthode de réduction du potentiel, la méthode de support et la méthode adaptée

5.4.1 Discussions des résultats

Bien que cet ensemble de résultats soit trop réduit pour en tirer des conclusions définitives, on peut faire les remarques suivantes :

- Les méthode à départ non admissible et de suivi de chemin à prédiction-correction sont les meilleures parmi toutes les autres méthodes de points intérieurs, ce qui prouve le cheminement logique de conception de ces dernières en allant de celle de la mise en échelle affine jusqu'à celle à départ non admissible.
- La méthode adaptée de support proposée est nettement meilleure que celle de support, et cela prouve l'intérêt de modifier la direction de descente en faisant changer toutes les composantes non optimales à la fois.
- Le nombre d'itérations moyen ainsi que le temps d'exécution moyen pour la méthode adaptée est largement supérieur à celui des méthodes de points intérieurs à départ non admissible, ceci est dû à sa nature totalement différente qui se base sur la notion du support. Alors que les méthodes de points intérieurs présentent un nombre d'itérations assez homogène, or que celui de la méthode adaptée dépend grandement du choix du support initial.
- Pour des problèmes de taille moyenne, la méthode adaptée semble compétitive avec les autres méthodes, que ce soit en termes de temps d'exécution, ou bien en termes de nombre d'itérations.
- Pour des problèmes de très grande taille, les méthodes de points intérieurs semblent les plus appropriées.
- La méthode d'activation des contraintes se voit comme une généralisation de la méthode du simplexe. Sa force est dans sa qualité précision.

5.5 Conclusion

Au vu de ces résultats, la meilleure méthode est celle de points intérieurs à départ non admissible, ce qui confirme l'intérêt croissant à cette dernière par plusieurs chercheurs que ce soit pour la programmation linéaire, ou non linéaire.

Conclusion générale et perspectives

Notre travail a consisté en la résolution des problèmes de programmation quadratique convexe par des méthodes primales et duales. Pour cela, dans le premier chapitre nous avons d'abord rappelé les notions fondamentales sur l'algèbre linéaire, ainsi que les résultats classiques sur l'optimisation non linéaire avec contraintes linéaires, notamment les conditions d'optimalité de Lagrange et de Karush-Kuhn-Tucker, ainsi que les théorèmes de dualité en programmation quadratique convexe.

Dans le deuxième chapitre nous avons présenté les méthodes de points intérieurs pour la résolution des problèmes de programmation quadratique convexe. Parmi les différentes approches étudiées, les méthodes de points intérieurs primales duales semblent être les plus performantes comparées aux autres algorithmes de points intérieurs.

En s'inspirant des méthodes adaptées de support pour la résolution des problèmes linéaires et quadratiques, développées par R. Gabassov et al. , ainsi que des travaux de M.O. Bibi, S. Radjef [65] pour la méthode de support pour le cas des variables mixtes, nous avons mis au point une nouvelle méthode adaptée qui est basée sur une métrique différente de celle du simplexe.

Afin de tester l'efficacité de cette méthode, nous l'avons implémentée sous Matlab avec celle de support, ainsi que les différentes méthodes de points intérieurs présentées dans le deuxième chapitre.

Les résultats obtenus montrent que la méthode adaptée proposée donne une amélioration certaine à celle du support. Elle se montre très compétitive avec les autres méthodes de type points intérieurs et activations des contraintes pour les problèmes de taille moyenne, tandis que pour les problèmes de grande taille, les méthodes de points intérieurs à départ non admissible et de suivi de chemin à prédiction-corrrection semblent les plus appropriées la plus part du temps.

Perspectives :

- Étendre cette étude pour le cas du problème dual.
- Envisager aussi une hybridation de la méthode de support avec celle de points intérieurs.
- Développer des approches pour un meilleur choix du support initial, afin d'améliorer les performances de la méthode adaptée de support.

Annexe : La direction de descente pour la méthode de mise en échelle affine

Dans la présente annexe, on présente les modalités de calcul de la direction descente pour la méthode de mise en échelle affine. Des manipulations mathématiques sont nécessaires pour réduire la formule telle qu'elle est donnée dans (2.6).

Transformation du problème (2.1)-(2.3)

Avant de procéder l'algorithme de mise en échelle affine, il est avantageux d'introduire la suite de transformations destinées à remplacer la matrice D par une matrice identité dans la fonction objectif.

En utilisant la décomposition de Choleski, toute matrice symétrique semi-définie positive peut être décomposée en un produit d'une matrice triangulaire inférieure (L) et d'une matrice triangulaire supérieure (L^T). Ainsi, la matrice D peut être écrite :

$$D = LL^T.$$

Soit la transformation suivante :

$$\tilde{x} = L^T x \text{ ou } x = (L^T)^{-1} \tilde{x} = (L^{-1})^T \tilde{x}.$$

La fonction objectif (2.1) est écrite comme suit :

$$f = c^T (L^{-1})^T \tilde{x} + \frac{1}{2} [(L^{-1})^T \tilde{x}]^T D [(L^{-1})^T \tilde{x}].$$

Notons $\tilde{c}^T = c^T (L^{-1})^T \Leftrightarrow \tilde{c} = L^{-1} c$, la fonction objectif devient alors :

$$f = \tilde{c}^T \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T L^{-1} LL^T (L^{-1})^T \tilde{x} = \tilde{c}^T \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T \tilde{x}.$$

Ainsi, avec cette transformation, nous avons atteint l'objectif de transformer la matrice D en une matrice identité. On peut réécrire cette fonction objectif transformée sous une forme plus simple, en ajoutant la constante $\frac{1}{2}\tilde{c}^T\tilde{c}$, qui n'influe pas sur la solution optimale. Par conséquent,

$$f = \tilde{c}^T\tilde{x} + \frac{1}{2}\tilde{x}^T\tilde{x} + \frac{1}{2}\tilde{c}^T\tilde{c} = \frac{1}{2}(\tilde{c} + \tilde{x})^T(\tilde{c} + \tilde{x})$$

Ainsi, le problème transformé peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(\tilde{c} + \tilde{x})^T(\tilde{c} + \tilde{x}), \\ \text{sc} \quad & Ax = b, \\ & x = (L^{-1})^T\tilde{x}, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Notons que \tilde{x} n'est pas forcément positif. Le problème peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(\tilde{c} + \tilde{x})^T(\tilde{c} + \tilde{x}), \\ \text{sc} \quad & \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & -(L^T)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

où I est la matrice identité d'ordre $(n \times n)$. La matrice des contraintes du problème transformé est :

$$M \equiv \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & -(L^T)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Transformation d'échelle affine

On fait une mise à l'échelle afin que le nouveau point $z^{(k)}$ soit loin de la frontière définie par $x^{(k)} \geq 0$. Un point idéal serait le vecteur e dont toutes ces composantes sont égales à 1. La matrice de transformation est simplement l'inverse de la matrice diagonale dont les composantes sont les mêmes que celles de $x^{(k)}$. Cette matrice est inversible puisque $x^{(k)} > 0$. Notons cette matrice par $T^{(k)}$. On a alors

$$z^{(k)} = (T^{(k)})^{-1}x^{(k)} \Leftrightarrow x^{(k)} = T^{(k)}z^{(k)},$$

où

$$T^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2^{(k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (T^{(k)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/x_1^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/x_2^{(k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/x_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Étant donné que la fonction objectif contient uniquement les variables transformées (\tilde{x}), alors seules les contraintes qui vont subiront à une transformation d'échelle comme suit :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & -(L^T)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(k)}z^{(k)} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} AT^{(k)} & 0 \\ T^{(k)} & -(L^T)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{(k)} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice des contraintes du problème transformé (mis en échelle) est donnée par :

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} AT^{(k)} & 0 \\ T^{(k)} & -(L^T)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Projection

La direction de descente est la projection de l'anti-gradient de la fonction objectif sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de la matrice des contraintes $M^{(k)}$.

$$d^{(k)} = P^{(k)}(-\nabla f^{(k)}),$$

$\nabla f^{(k)}$ est le gradient de la fonction objectif à l'itéré k ,

$$\nabla f^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{c} + \tilde{x}^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

La matrice de projection $P^{(k)}$ est donnée par

$$P^{(k)} = I - (M^{(k)})^T (M^{(k)}(M^{(k)})^T)^{-1} M^{(k)},$$

où I est la matrice identité d'ordre $n \times n$. Donc,

$$d^{(k)} = -\nabla f^{(k)} + (M^{(k)})^T [M^{(k)}(M^{(k)})^T]^{-1} M^{(k)} \nabla f^{(k)}.$$

Posons $w^{(k)} = [M^{(k)}(M^{(k)})^T]^{-1} M^{(k)} \nabla f^{(k)}$, on peut exprimer la direction comme suit :

$$d^{(k)} = -[\nabla f^{(k)} - (M^{(k)})^T w^{(k)}]. \quad (5.3)$$

Manipulation des termes w : Premièrement, on commence par le développement de l'expression de $w^{(k)}$, on a :

$$w^{(k)} = [M^{(k)}(M^{(k)})^T]^{-1} M^{(k)} \nabla f^{(k)} \Leftrightarrow [M^{(k)}(M^{(k)})^T] w^{(k)} = M^{(k)} \nabla f^{(k)}.$$

ANNEXE : LA DIRECTION DE DESCENTE POUR LA MÉTHODE DE MISE EN ÉCHELLE AFFINE

En substitution $M^{(k)}$ et $\nabla f^{(k)}$ par leurs valeurs donnés par (5.1) et (5.2) respectivement, on aura donc

$$\begin{pmatrix} AT^{(k)} & 0 \\ T^{(k)} & -(L^T)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(k)}A^T & T^{(k)} \\ 0 & -L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AT^{(k)} & 0 \\ T^{(k)} & -(L^T)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{c} + \tilde{x}^{(k)} \end{pmatrix},$$

ou bien encore

$$\begin{pmatrix} A(T^{(k)})^2A^T & A(T^{(k)})^2 \\ (T^{(k)})^2A^T & (T^{(k)})^2 + D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(L^T)^{-1}(\tilde{c} + \tilde{x}^{(k)}) \end{pmatrix}.$$

Notre prochaine tâche est de résoudre ce système de deux équations pour w_1^k et w_2^k .

$$A(T^{(k)})^2A^T w_1^{(k)} + A(T^{(k)})^2 w_2^{(k)} = 0, \quad (5.4)$$

$$(T^{(k)})^2A^T w_1^{(k)} + ((T^{(k)})^2 + D^{-1}) w_2^{(k)} = -(L^T)^{-1}(\tilde{c} + \tilde{x}^{(k)}). \quad (5.5)$$

De (5.5), on a

$$w_2^{(k)} = ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} \left[-(T^{(k)})^2A^T w_1^{(k)} - (L^T)^{-1}(\tilde{c} + \tilde{x}^{(k)}) \right].$$

Or, on a

$$\begin{aligned} (L^T)^{-1}(\tilde{c} + \tilde{x}^{(k)}) &= \underbrace{(L^T)^{-1}L^{-1}}_{D^{-1}}c + \underbrace{(L^T)^{-1}L^T}_I x^{(k)} \\ &= D^{-1}c + x^{(k)} \quad \text{du fait que } D = L.L^T \end{aligned}$$

En substituant dans l'expression de w_2^k , on aura

$$w_2^{(k)} = ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} \left[-(T^{(k)})^2A^T w_1^{(k)} - (D^{-1}c + x^{(k)}) \right]. \quad (5.6)$$

Remplaçons l'expression de $w_2^{(k)}$ dans l'équation (5.4), on aura :

$$\begin{aligned} (5.4) &\Leftrightarrow A(T^{(k)})^2A^T w_1^{(k)} = A(T^{(k)})^2 ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} \left[(T^{(k)})^2A^T w_1^{(k)} + (D^{-1}c + x^{(k)}) \right] \\ &\Leftrightarrow AT^{(k)}T^{(k)}A^T w_1^{(k)} - AT^{(k)}T^{(k)} ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} T^{(k)}T^{(k)}A^T w_1^{(k)} \\ &= A(T^{(k)})^2((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1}(D^{-1}c + x^{(k)}) \\ &\Leftrightarrow AT^{(k)} \underbrace{\left[I - T^{(k)} ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} T^{(k)} \right]}_{S_1} T^{(k)}A^T w_1^{(k)} \\ &= A \underbrace{(T^{(k)})^2 ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1}}_{S_2} (x^{(k)} + D^{-1}c). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Notons que la règle d'inversion d'une matrice $[AB]^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ est utilisée plusieurs fois dans les manipulations suivantes. Le terme $S_1 = I - T^{(k)} \left((T^{(k)})^2 + D^{-1} \right)^{-1} T^{(k)}$ est manipulé comme suit :

Tout d'abord, puisque $T^{(k)} = [(T^{(k)})^{-1}]^{-1}$, nous avons

$$\begin{aligned}
 S_1 = I - T^{(k)} \left((T^{(k)})^2 + D^{-1} \right)^{-1} T^{(k)} &= I - [(T^{(k)})^{-1}]^{-1} \left((T^{(k)})^2 + D^{-1} \right)^{-1} [(T^{(k)})^{-1}]^{-1} \\
 &= I - \left[((T^{(k)})^2 + D^{-1}) (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1} [(T^{(k)})^{-1}]^{-1} \\
 &= I - \left[(T^{(k)})^2 (T^{(k)})^{-1} + D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1} [(T^{(k)})^{-1}]^{-1} \\
 &= I - \left[T^{(k)} + D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1} [(T^{(k)})^{-1}]^{-1} \\
 &= I - \left[(T^{(k)})^{-1} T^{(k)} + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1} \\
 &= I - \left[I + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

De plus, $\left[I + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right] \left[I + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1} = I$, alors

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left[I + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right] \left[I + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1} - \left[I + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1} \\
 &= \left[I + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} - I \right] \left[I + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1} \\
 &= (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \left[I + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1},
 \end{aligned}$$

du fait que $I = T^{(k)}(T^{(k)})^{-1} = (T^{(k)})^{-1}T^{(k)}$, on aura

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \left[T^{(k)}(T^{(k)})^{-1} + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1} \\
 &= (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \left[T^{(k)} + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} \right]^{-1} \\
 &= (T^{(k)})^{-1} D^{-1} (T^{(k)})^{-1} T^{(k)} \left[T^{(k)} + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} \right]^{-1} \\
 &= (T^{(k)})^{-1} D^{-1} \left[T^{(k)} + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} \right]^{-1} \\
 &= (T^{(k)})^{-1} D^{-1} \left[(T^{(k)})^{-1} T^{(k)} T^{(k)} + (T^{(k)})^{-1} D^{-1} \right]^{-1} \\
 &= (T^{(k)})^{-1} D^{-1} \left[(T^{(k)})^{-1} \left((T^{(k)})^2 + D^{-1} \right) \right]^{-1} \\
 &= (T^{(k)})^{-1} D^{-1} \left[(T^{(k)})^2 + D^{-1} \right]^{-1} T^{(k)} \\
 &= (T^{(k)})^{-1} \left[(T^{(k)})^2 D + I \right]^{-1} T^{(k)},
 \end{aligned}$$

du fait que $I = (T^{(k)})^2 ((T^{(k)})^2)^{-1}$, alors

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (T^{(k)})^{-1} \left[(T^{(k)})^2 D + (T^{(k)})^2 ((T^{(k)})^2)^{-1} \right]^{-1} T^{(k)} \\
 &= (T^{(k)})^{-1} \left[(T^{(k)})^2 (D + (T^{(k)})^{-2}) \right]^{-1} T^{(k)} \\
 &= (T^{(k)})^{-1} \left[D + (T^{(k)})^{-2} \right]^{-1} (T^{(k)})^{-1}.
 \end{aligned}$$

Notons

$$H^{(k)} = [D + (T^{(k)})^{-2}]^{-1}.$$

Alors, finalement

$$S_1 = (T^k)^{-1} H^k (T^k)^{-1}. \quad (5.8)$$

De plus, le terme $S_2 = (T^{(k)})^2 ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1}$ peut être écrit comme suit :

$$S_2 = [(T^{(k)})^{-2}]^{-1} ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} = [I + D^{-1}(T^{(k)})^{-2}]^{-1}.$$

Puisque $I = D^{-1}D$, alors

$$\begin{aligned} S_2 &= [D^{-1}D + D^{-1}(T^{(k)})^{-2}]^{-1} = [D^{-1}[D + (T^{(k)})^{-2}]]^{-1} \\ &= [D + (T^{(k)})^{-2}]^{-1} D, \end{aligned}$$

alors,

$$S_2 = H^{(k)} D. \quad (5.9)$$

En substituant (5.8) et (5.9), dans l'équation (5.7), on aura alors :

$$\begin{aligned} AT^{(k)} [(T^{(k)})^{-1} H^{(k)} (T^{(k)})^{-1}] T^{(k)} A^T w_1^{(k)} &= AH^{(k)} D(x^{(k)} + D^{-1}c), \\ AH^{(k)} A^T w_1^{(k)} &= AH^{(k)} (Dx^{(k)} + c). \end{aligned}$$

Alors

$$w_1^{(k)} = (AH^{(k)} A^T)^{-1} AH^{(k)} (Dx^{(k)} + c). \quad (5.10)$$

Expression de la direction Retournant au vecteur de direction (5.3), on a

$$d^{(k)} = - [\nabla f^{(k)} - (M^{(k)})^T w^{(k)}] = - \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{c} + \tilde{x}^{(k)} \end{pmatrix} + (M^{(k)})^T \begin{pmatrix} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \end{pmatrix},$$

ou bien encore

$$\begin{pmatrix} d_z^{(k)} \\ d_{\tilde{x}}^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{c} + \tilde{x}^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^{(k)} A^T & T^{(k)} \\ 0 & -L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \end{pmatrix},$$

où z et \tilde{x} sont utilisées pour désigner les composantes des variables mises en échelle et transformées respectivement de d , alors

$$d_z^{(k)} = T^{(k)} A^T w_1^{(k)} + T^{(k)} w_2^{(k)} = T^{(k)} (A^T w_1^{(k)} + w_2^{(k)}). \quad (5.11)$$

En utilisant l'expression de (5.6), le terme $A^T w_1^{(k)} + w_2^{(k)}$ est écrit comme suit :

$$\begin{aligned} A^T w_1^{(k)} + w_2^{(k)} &= A^T w_1^{(k)} + ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} \left[-(T^{(k)})^2 A^T w_1^{(k)} - (x^{(k)} + D^{-1}c) \right], \\ &= \underbrace{\left[I - ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} (T^{(k)})^2 \right]}_{S_3} A^T w_1^{(k)} - ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} (x^{(k)} + D^{-1}c) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Le terme S_3 peut être écrit :

$$\begin{aligned} S_3 &= I - ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} [(T^{(k)})^{-2}]^{-1} \\ &= I - [(T^{(k)})^{-2} (T^{(k)})^2 + (T^{(k)})^{-2} D^{-1}]^{-1} \\ &= I - [I + (T^{(k)})^{-2} D^{-1}]^{-1} \\ &= [I + (T^{(k)})^{-2} D^{-1}] [I + (T^{(k)})^{-2} D^{-1}]^{-1} - [I + (T^{(k)})^{-2} D^{-1}]^{-1} \\ &= [I + (T^{(k)})^{-2} D^{-1} - I] [I + (T^{(k)})^{-2} D^{-1}]^{-1} \\ &= (T^{(k)})^{-2} D^{-1} [I + (T^{(k)})^{-2} D^{-1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} (T^{(k)})^{-2} ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} &= [(T^{(k)})^{-2}]^{-1} ((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} \\ &= [((T^{(k)})^2 + D^{-1}) (T^{(k)})^{-2}]^{-1} \\ &= [(T^{(k)})^2 (T^{(k)})^{-2} + D^{-1} (T^{(k)})^{-2}]^{-1} \\ &= [I + D^{-1} (T^{(k)})^{-2}]^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$((T^{(k)})^2 + D^{-1})^{-1} = (T^{(k)})^{-2} [I + D^{-1} (T^{(k)})^{-2}]^{-1}. \quad (5.14)$$

En substituant (5.14) et (5.13) dans (5.12), on aura :

$$\begin{aligned} A^T w_1^{(k)} + w_2^{(k)} &= (T^{(k)})^{-2} D^{-1} [I + (T^{(k)})^{-2} D^{-1}]^{-1} A^T w_1^{(k)} \\ &\quad - (T^{(k)})^{-2} [I + D^{-1} (T^{(k)})^{-2}]^{-1} (x^{(k)} + D^{-1}c) \\ &= (T^{(k)})^{-2} [D + (T^{(k)})^{-2}]^{-1} A^T w_1^{(k)} - (T^{(k)})^{-2} [D + (T^{(k)})^{-2}]^{-1} D(x^{(k)} + D^{-1}c) \\ &= (T^{(k)})^{-2} \left[H^{(k)} A^T w_1^{(k)} - H^{(k)} D(x^{(k)} + D^{-1}c) \right]. \end{aligned}$$

ANNEXE : LA DIRECTION DE DESCENTE POUR LA MÉTHODE DE MISE EN ÉCHELLE AFFINE

De (5.10), le terme $A^T w_1^{(k)} + w_2^{(k)}$ est écrit comme suit :

$$\begin{aligned} A^T w_1^{(k)} + w_2^{(k)} &= (T^{(k)})^{-2} [H^{(k)} A^T (A H^{(k)} A^T)^{-1} A H^{(k)} (Dx^{(k)} + c) - H^{(k)} (Dx^{(k)} + c)] \\ &= (T^{(k)})^{-2} [H^{(k)} A^T (A H^{(k)} A^T)^{-1} A - I] H^{(k)} (Dx^{(k)} + c) \\ &= -(T^{(k)})^{-2} [I - H^{(k)} A^T (A H^{(k)} A^T)^{-1} A] H^{(k)} (Dx^{(k)} + c). \end{aligned}$$

Alors, la direction en terme de variables mises en échelle (5.11) devient alors :

$$d_z^{(k)} = - (T^{(k)})^{-1} [I - H^{(k)} A^T (A H^{(k)} A^T)^{-1} A] H^{(k)} (Dx^{(k)} + c)$$

Finalement, en terme de variables originales, le vecteur direction est donné par :

$$d_x^{(k)} = T^{(k)} d_y^{(k)} = - [I - H^{(k)} A^T (A H^{(k)} A^T)^{-1} A] H^{(k)} (Dx^{(k)} + c),$$

avec $H^{(k)} = [D + (T^{(k)})^{-2}]^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABASSI N. *Méthode de support pour la minimisation d'une fonctionnelle quadratique convexe*. Mémoire de Magister, Université A/MIRA de Béjaia, 2004.
- [2] AKROTIRIANAKIS I; BERÇ RUSTEM. *A primal-dual interior-point algorithm with an exact differentiable merit function for general nonlinear programming problems*. Tech. rep., 1999.
- [3] ASGHAR BHATTI M. *Practical Optimization Methods with Mathematica Applications*. Springer-Verlag New York, Inc, 2000.
- [4] BAZARAA M.S; SHETTY C.M. *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, inc ed. John wily and sons, 1979.
- [5] BERTSEKAS D.P. *Projected newton methods for optimization problems with simple constraints*. *SIAM J. Control and optimization* 20(2) (1982), pp.221 – 246.
- [6] BERTSEKAS D.P. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Athena Scientific, Belmont , Massachusetts, Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [7] BIBI M.O. *Methods for solving linear-quadratic problems of optimal control*. PhD thesis, University of Minsk, 1985.
- [8] BIBI M.O. *Optimization of linear dynamic system with double constraint on the trajectories*. In *collected abstracts of the 16th IFIP conference on system modeling and optimization, compiègne (France)* (july 5-9 1993).
- [9] BIBI M.O. Support method for solving a linear-quadratic problem with polyhedral constraints on control. *Optimisation* 37 (1996), pp. 139 – 149.
- [10] BIBI M.O. *Méthodes Adaptées de Programmation Linéaire. Cours de post-graduation* (2007/2008).
- [11] BOLAND N.L. *A dual-active-set algorithm for positive semi-definite quadratic programming*. *Mathematical Programming* 78 (1) (1997), pp. 1 – 27.
- [12] BONNANS J.F; GILBERT J.C; LEMARÉCHAL C; SAGASTIZÁBAL C.A. *Numerical Optimization : Theoretical and Pratical Aspects*, first ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

- [13] BONNANS J.F ; GILBERT J.C ; LEMARÉCHAL C ; SAGASTIZÁBAL C.A. *Numerical Optimization : Theoretical and Pratical Aspects*, second ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [14] BOYD S. *Convex Optimization*. Cambridge university Press, 2004.
- [15] BRAHMI B. *Méthodes primale et duale pour la résolution des problèmes de programmation quadratique convexe*. Mémoire de Magister, Université A/MIRA de Béjaia, 2006.
- [16] CHONG E.K.P ; ZAK S.H. *An Introduction to Optimization*, second ed. A Wiley-Interscience Publication, 2001.
- [17] COLEMAN T.F ; HULBERT L.A. *A direct active set algorithm for large sparse quadratic programs with simple bounds*. *Math. Programming* 45 (1989), pp. 373 – 406.
- [18] CORNUEJOLS G ; TÛTÛNCÛ R. *Optimization Methods in Finance*. Carnegie Mellon University, Pittsburg, PA 15213 USA, 2006.
- [19] CURTIS F ; NOCEDAL J. *Steplength Selection in Interior-Point Methods for Quadratic Programming*, 2005.
- [20] DANTZIG G.B. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, 1963.
- [21] DARVAY Z. *New interior point algorithms in linear programming . Advanced Modeling and Optimization* 5(1) (2003), pp. 51 – 92.
- [22] DORN W.S. *Duality in quadratic programming*. *Quarterly of Applied Mathematics* 18 (1960), pp. 155 – 162.
- [23] DURAZZI C ; RUGGIERO V ; ZANNI L. *A Random Generator for Large-Scale Linearly Constrained Quadratic Programming Test Problems . Analisi Numerica : Methodi e Software Matematico* (2000).
- [24] DUSSAULT J.P ; FERLAND J.A ; LEMAIRE B. *Convex quadratic programming with one constraint and bounded variables*. *Mathematical Programming* 36 (1986), pp. 90 – 104.
- [25] ELBAKRY A.S ; TAPIA R.A ; TSUCHIYA T ; ZANG Y. *On the formulation and theory of the newton interior point method for nonlinear programming*. *JOTA* 89 (3) (1996), pp. 507 – 541.
- [26] FERRIS M.C ; MANGASARIAN O.L ; WRIGHT S.J. *Linear Programming With Matlab*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia (SIAM), 2007.
- [27] FIACCO A.V ; MCCORMICK G.P. *Nonlinear programming : sequential unconstrained minimisation techniques*. John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968.
- [28] FLETCHER R. *A general quadratic programming algorithm*. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications* 7 (1971), pp. 76 – 91.
- [29] GABASSOV R. *Adaptive method of linear programming*. *Preprints of the University of Karlsruhe. Institute of Statistics and Mathematics, Germany* (1993).
- [30] GABASSOV R ET AL. *Constructive methods of optimization*. *P.I. University Press, Minsk* (1984).
- [31] GABASSOV R ; KIRILLOVA F.M. *Méthodes de Programmation Linéaire*, 1, 2 et 3 ed. Edition de l'Université, Minsk, 1977, 1978 et 1980.

- [32] GABASSOV R ; KIRILLOVA F.M. *Méthodes d'Optimisation*. Edition de l'Université, Minsk, 1981.
- [33] GABASSOV R ; KIRILLOVA F.M, AND KOSTYKOVA O.I. A method of solving general linear programming problems. *Doklady AN BSSR 23(03)* (1979), pp. 197 – 200.
- [34] GABASSOV R ; KIRILLOVA F.M ; KOSTYUHOVA O.I ; RAKESTSKY V.M. Constructive methods of optimization. *P.IV : convex problems. University Press, Minsk* (1987).
- [35] GABASSOV R ; KIRILLOVA F.M ; PRISCHEPOVA S.V. *Optimal Feedback Control*. Springer-Verlag, London, 1995.
- [36] GILBERT J.C ; BYRD R.H ; NOCEDAL J. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical Programming 89* (2000), pp. 149 – 185.
- [37] GILL P.E ; MURRAY W. Numerically stable methods for quadratic programming. *Mathematical Programming 14* (1978), pp. 349 – 372.
- [38] GOLDFARB D. *Extensions of Newton's Method and Simplex Method for Solving Quadratic Programs : in Numerical Methods for Nonlinear Optimization*. Academic Press, New York (1972).
- [39] GOLDFARB D ; IDNANI A.U. A Numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic problems. *Mathematical Programming 27* (1983), pp. 1 – 33.
- [40] GOLDFARB D ; SCHEINBERG K. interior methods trajectories in semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization 8* (1998), pp. 871 – 886.
- [41] GOULD N.I.M. On practical conditions for the existence and uniqueness of solution to the general equality quadratic programming problems . *Mathematical Programming 32 (1)* (1985), pp. 90 – 99.
- [42] GOULD N.I.M. An algorithm for large-scale quadratic programming. *IMA Journal of Numerical Analysis 11* (1991), pp. 299 – 324.
- [43] GRIVA I ; NASH S.G ; SOFER A. *Linear and Nonlinear Programming*, second ed. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) • Philadelphia, George Mason University Fairfax, Virginia, 2009.
- [44] KARMARKAR N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica 4* (1984), pp. 373 – 395.
- [45] KHACHIYAN L.G. A polynomial algorithm in linear programming . *Soviet Mathematics Doklady 20* (1979), pp. 191 – 194.
- [46] KLEE V ; MINTY G.J. *How good is the simplex algorithm ? . Inequalities, O. Shisha, ed, Academic Press, New York* (1972).
- [47] KOJIMA M ; MIZUNO S ; YOSHISE A. An $O(n^{1/2}L)$ iteration potentiel reduction algorithm for linear complementarity problems . *Mathematical Programming, 50* (1991), pp. 331 – 342.
- [48] KOSTINA E.A ; KOSTYUKOVA O.I. Algorithm for quadratic programs with equality and inequality constraints. *Journal of Applied Mathematics and Physics (Russia) 42 (7)* (2001), pp. 1012 – 1026.
- [49] KOVACEVIC-VUJCIC V.V ; ASIC M.D. Stabilization of interior-point methods for linear programming . *Computational Optimization and Application 14* (1999), pp. 331 – 346.

- [50] KRANICH E. *Interior Point Methods for Mathematical Programming : A Bibliography* . 1991.
- [51] LEE G.M ; TAM N.N ; YEN N.D. *Quadratic Programming and Affine Variational Inequalities : A Qualitative study*. Springer Science+ Business Media, Inc, 2005.
- [52] LUENBERGER D.G ; YE. Y. *Linear and Nonlinear Programming*, third ed. Springer Science+Business Media, LLC, Stanford University, 2008.
- [53] MEHROTRA S. *On the implementation of a primal-dual interior point method* . *SIAM journal on Optimization* 2 (1992), pp. 575 – 601.
- [54] MINOUX M. *Programmation Mathématique*. Bordas et C.N.E.T-E.N.S.T, Paris, 1983.
- [55] MONTEIRO R ; ADLER I. *Interior path following algorithm primal-dual algorithms-part2 : convex quadratic programming*. *Mathematical Programming* 44 (1989), pp. 43 – 66.
- [56] MÉSZÁROS C. *Steplengths in interior-point algorithms of quadratic and nonlinear programming*. *Mathematical Programming* 25 (1999), pp. 39 – 45.
- [57] NESTEROV Y ; NEMIROVSKII A. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)• Philadelphia, 1994.
- [58] NOCEDAL J ; WRIGHT S.J. *Numerical Optimization*, second ed. Springer Science + Business Media, LLC, 2006.
- [59] OURIEMCHI M. *Résolution de problèmes non linéaires par les méthodes de points intérieurs, théorie et algorithmes*. PhD thesis, Université du Havre, Décembre 2005.
- [60] PEDREGAL P. *Intoduction to Optimization*. Springer-Verlag New York, Inc, 2004.
- [61] PENG J ; ROOS C ; TERLAKY T. *Self-Regularity : A New Paradigm for Primal-Dual Interior-Point Algorithms*. Princeton University Press, 2002.
- [62] POTRA F.A ; WRIGHT S.J. *Interior-Point methods*. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 124 (2002), pp. 281 – 302.
- [63] QIAN Y ; CHONGCHAO H ; YAN J. *A Polynomial Predictor-Corrector Interior-Point Algorithm for convex Quadratic Programming* . *Acta Mathematica Scientia* 26B(2) (2006), pp.265 – 270.
- [64] RADJEF M.S. *Cours de Programmation Mathématique. 4^{ème} Recherche Opérationnelle*. Université de Béjaia (2006/2007).
- [65] RADJEF S ; BIBI M.O. *Nouvel algorithme de résolution d'un programme quadratique convexe à variables mixtes*. Actes du Quatrième Colloque sur l'Optimisation et les systèmes d'Information COSI'2007, pp. 33 – 43.
- [66] ROOS C ;TERLAKY T ; VIAL J.F. *Interior Points Methods For Linear Optimization*. Springer Science + Business Media, Inc, 2005.
- [67] SIMA V. *Algorithms for Linear-Quadratic Optimization*. Marcel Dekker, Inc, 1996.
- [68] TANABE K. *Centred Newton method for mathematical programming* . Springer-Verlag, New York (1988).
- [69] TERLAKY T. *A new algorithm for quadratic programming*. *European Journal of Operational Research* 32 (2) (1987), pp. 294 – 301.

- [70] TERLAKY T. Interior Point Methods of Mathematical Programming . Applied Optimization series, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [71] TODD M.J ; YE Y. *A Centred projectif algorithm for linear programming . Mathematics of Operations Research 15* (1990), pp. 508 – 529.
- [72] TOH K.C. *Some new search directions for primal-dual interior point methods in semidefinite programming . SIAM Journal on Optimization 11* (2000), pp. 223 – 242.
- [73] VAN DE PANNE C ; WHINSTON A. The simplex and dual method for quadratic programming. *Operational Research Quarterly Journal 14(4)* (1964), pp. 273 – 302.
- [74] VANDERBEI R.J. *An interior-point algorithm for quadratic programming. Statistics and Operations Research, Princeton SOR-94-15.*
- [75] VIAL J.P. *Computational experience with a primal-dual interior point method for smooth convex programming. Optimization methods and software 3* (1994), pp. 285 – 310.
- [76] WEBSTER R. *Convexity.* Oxford University Press, Inc, New York, 1994.
- [77] WOLF P. *The simplex Method for Quadratic Programming . Econometrica 27* (1959), pp. 382 – 398.
- [78] WRIGHT S.J. *An Interior Method for Linearly constrained optimization. SIAM Journal of Optimization 1(4)* (1992), pp 450 – 473.
- [79] WRIGHT S.J. Primal-Dual Interior-Point methods. SIAM, Philadelphia, 1996.
- [80] YE Y. *On affine scaling algorithms for nonconvex quadratic programming . Mathematical Programming 56* (1992), pp. 285 – 300.
- [81] YE Y ; TSE E. *An Extension of Karmarkar’s Projective Algorithm for Convex Quadratic Programming . Mathematical Programming 44* (1989), pp. 157 – 179.

Résumé : Ce mémoire a pour premier objectif de faire une synthèse des travaux sur les méthodes de points intérieurs, utilisées en programmation quadratique convexe, et de proposer ensuite une méthode adaptée de résolution pour le cas des variables hybrides.

Cette méthode est une extension de la méthode directe de support développée par R.Gabassov et F.M Kirillova. Sa particularité réside dans le fait qu'elle évite toute transformation préliminaire des variables de décision. De ce fait, elle traite les bornes telles qu'elles sont données lors de la modélisation première des problèmes, et possède un critère de suboptimalité qui permet d'arrêter l'algorithme à une précision désirée.

Les résultats obtenus montrent que la méthode adaptée proposée donne une amélioration certaine par rapport à celle du support, utilisant la métrique du simplexe. Elle s'avère aussi très compétitive avec les autres méthodes de type points intérieurs et activation des contraintes pour les problèmes de taille moyenne, tandis que pour les problèmes de grande taille, la méthode de points intérieurs à départ non admissible semble la plus appropriée la plus part du temps.

Mots Clés : Convexité, formes quadratiques, conditions d'optimalité de KKT, programmation quadratique convexe, méthodes de points intérieurs, méthode de support, critère de suboptimalité, méthode adaptée de support, variables hybrides.

Abstract : This report has the first goal to do a synthesis for interior point methods used in convex quadratic programming, and also to propose an adaptive method of resolution to the case of hybrid variables.

This method is an extension of the direct support method developed by R. Gabassov and F.M Kirillova. The particularity of this method is the fact that it avoids the preliminary transformation of the decision variables. It handles the bounds such as they are initially presented, and possesses a suboptimal criterion which stops the algorithm with the desired accuracy.

The results show that the method proposed provides an appropriate degree of amelioration that the support method with the simplex metric. It is very competitive with other methods like interior points methods and active set method for middle size problems. However, for problems of large size, most of time the nonfeasible interior points method is the most appropriate.

Keywords : convexity, quadratic forms, KKT optimality conditions, convex quadratic programming, interior points method, direct support method, criterion of suboptimality, adaptive method, hybrid variables.
